HUGO MEDINA GUZMÁN

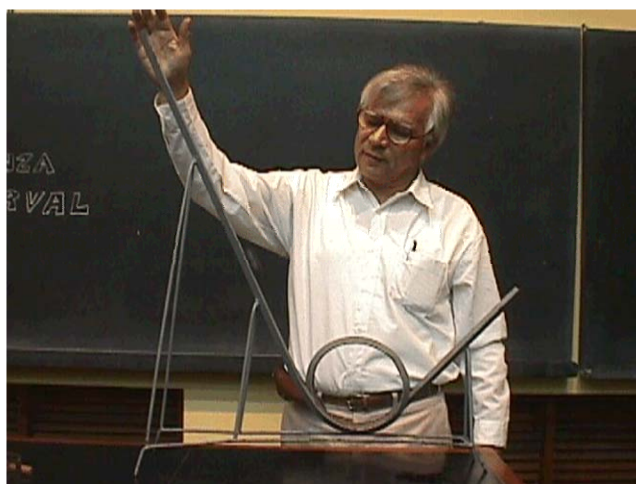


COLECCIÓN :

FISICA 1
FISICA 2
FISICA 3
FISICA 4



FISICA 1



Autor: Hugo Medina Guzmán
Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú
Agosto 2009

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. Unidades, magnitudes físicas y vectores
Introducción al curso. Magnitudes físicas: escalares y vectores. Unidades. Sistema internacional de unidades.
Precisión y cifras significativas.

CAPÍTULO 2. Movimiento rectilíneo
Definición de partícula. Concepto de movimiento de traslación y rotación. Sistemas de referencia. Posición y desplazamiento. Movimiento en una dimensión. Velocidad. Aceleración. Movimiento con aceleración constante. Movimiento vertical con aceleración de la gravedad. Gráficos en cinemática: obtención de la velocidad y de la aceleración por derivación de la función posición versus tiempo, obtención de la velocidad y de la posición por integración de la función aceleración versus tiempo.

CAPÍTULO 3. Movimiento en un plano y en el espacio
Sistemas de referencia y el sistema de coordenadas cartesianas en dos dimensiones. Componentes de los vectores y vectores unitarios en coordenadas cartesianas. Adición vectorial. Movimiento en un plano. Vector posición, desplazamiento y trayectoria. Velocidad. Rapidez. Aceleración. Movimiento parabólico. Movimiento circular: descripción horaria (posición, velocidad y aceleración angular) y descripción vectorial cartesiana.
Componentes normal y tangencial de la aceleración. Velocidad y aceleración relativas.
Generalización del movimiento a tres dimensiones en coordenadas cartesianas.

CAPÍTULO 4. Dinámica de una partícula
Leyes de Newton del movimiento. Sistemas de referencia inerciales. Masa y fuerza. Masa y peso. Fuerzas de contacto y a distancia (Ley de gravitación universal). Diagrama de cuerpo libre. Aplicaciones de las leyes de Newton: partículas en equilibrio (Estática) y en movimiento acelerado (Dinámica), fuerzas de fricción.
Dinámica del movimiento circular. Dinámica en sistemas de referencia no inerciales.

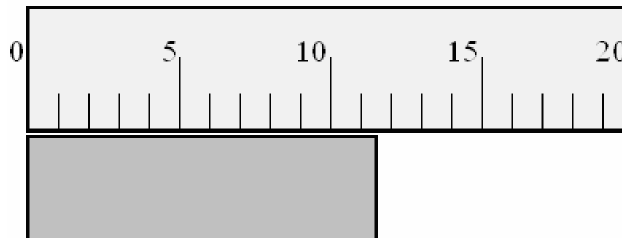
CAPÍTULO 5. Trabajo y energía
Producto escalar de vectores. Trabajo de una fuerza. Energía cinética. Trabajo y energía cinética. Fuerzas conservativas y no conservativas. Energía potencial gravitacional y elástica. Energía mecánica.
Generalización de la ley de conservación de la energía mecánica. Potencia.

CAPÍTULO 6. Sistema de partículas
Centro de masa. Posición, velocidad y aceleración del centro de masa. Cantidad de movimiento lineal de una partícula y de un sistema de partículas. Impulso de una fuerza. Segunda ley de Newton y la conservación de la cantidad de movimiento lineal para un sistema de partículas. Energía cinética de un sistema de partículas.
Colisión elástica e inelástica.

CAPÍTULO 7. Cuerpo rígido
Producto vectorial. Torque. Segunda condición de equilibrio (Estática del cuerpo rígido). Cantidad de movimiento angular. Momento de inercia. Rotación alrededor de un eje fijo. Conservación de la cantidad de movimiento angular. Energía en el movimiento de rotación. Energía cinética de rotación. Rodadura.

CAPITULO 1

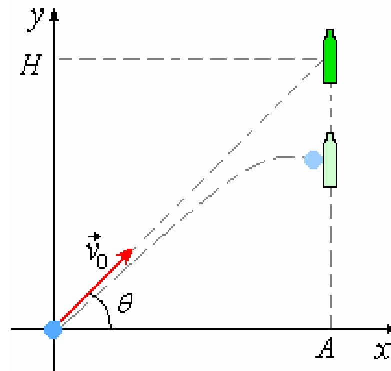
INTRODUCCIÓN AL CURSO



CAPITULO 2

Movimiento rectilíneo



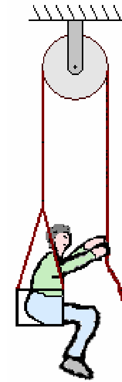


CAPITULO 3

Movimiento en un plano y en el espacio

CAPÍTULO 4

Dinámica de una partícula



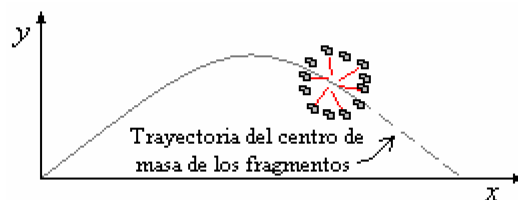
CAPITULO 5

TRABAJO Y ENERGÍA



CAPÍTULO 6

SISTEMA DE PARTÍCULAS



CAPÍTULO 7

CUERPO RÍGIDO



.

BIBLIOGRAFÍA

THEORETICAL PHYSICS, Mechanics of particles, rigid and elastic bodies, fluids and heat flow. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)
THEORETICAL PHYSICS,Thermodinamics, electromagnetism,waves, and particles. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)
The Feynman LECTURES ON PHYSICS. Volumenes I, II y III. Richard P.Feynman, Robert B. Leighton. California Institute of Technology, Matthew Sands, Stanford University. Addison – Wesley Publishing Company (1964)
CORRIENTES, CAMPOS Y PARTÍCULAS. Francis Bitter. Massachussets Institute of Technology. Editorial Reverté S. A. (1964).
INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA MECÁNICA, MATERIA Y ONDAS. Uno Ingard, William L. Kraushaar. Editorial Reverté. (1966).
FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Arthur F. Kip. University of California. Mc Graw – Hill Book Company (1967)
CIENCIA FÍSICA Orígenes y principios Robert T. Langeman, Universidad Vanderbilt. UTEHA, (1968)
PROBLEMS IN ELEMENTARY PHYSICS. B. Bukhotsev, V: Krivchenkov, G. Myakishev, V.Shalnov. Mir Publishers. Moscow (1971)
PROBLEMES DE PHYSIQUE COMMENTES. Tomos I y II Hubert Lumbroso. Mason et Cie, París. (1971)
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. Luis L. Cantú. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Editorial Limusa Mexico (1973)
FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y LA SALUD. Simon G. G. MacDonald / Desmond M. Burns University of Dundee. Fondo educativo interamericano. (1975)
MECÁNICA NEWTONIANA, MIT Physics course. A. P. French. Editorial Reverté. (1974).
FÍSICA I y II. Solomon Gartenhaus. Purdue University. INTERAMERICANA. (1977)
TEACHING TIPS. A guidebook for the beginning College Teacher. Wilbert J. McKeachie (University of Michigan). Seventh edition D. C. Heath and Company (1978)
FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA. Alan H. Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (1978)
GENERAL PHYSICS WITH BIOSCIENCE ESSAYS. Jerry B. Marion. University of Maryland. John Wiley & Sons Inc. (1979)
Física general II: Teoría Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. QC 21 M19 (Biblioteca PUCP) (1979)
Física general II: Problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 111 M364 (Biblioteca PUCP) (1979)
Física general I: problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 104 M364 (Biblioteca PUCP) (1981)
FÍSICA PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. 1 y 2. John P. McKelvey, Clemson University – Howard Grotch, Pennsilvania State University. HARLA. Mexico. (1981)
Física 3: electricidad y magnetismo para estudiantes de ciencias e ingeniería Hugo Medina Guzmán, FIS 141 M36 (Biblioteca PUCP) (1982)
EXPLORING PHYSICS Concepts and applications. Roger W. Redding North Texas State University, Stuart Kenter, Wadsworth Publishing Company (1984)
PROBLEMAS DE FISICA. J. Aguilar Peris, Universidad Complutense de Madrid - J. Casanova Colas, Facultad de Ciencias de Valladolid. Alambra (1985)
PROBLEMAS DE FISICA. dirigido por S. Kósel. Editorial Mir Moscú. (1986)
PROBLEMAS DE FISICA Y COMO RESOLVERLOS. Clarence E. Benett Maine University. CECSA (1986)
PHYSICS for Engineering and Science. Michael E. Browne, Ph. D. (professor of Physics University of Idaho. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1988)
FÍSICA: VOLUMEN 1. Mecánica, ondas y termodinámica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).
FÍSICA: VOLUMEN 2. Electricidad, magnetismo y óptica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).
PROBLEMAS DE FISICA. dirigido por O. Ya. Sávchenko. Editorial Mir Moscú. (1989)
MECÁNICA. Berkeley physics course – volumen 1. Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman. Editorial Reverté SA. (1992).

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Berkeley physics course – volumen 2. Edward M.Purcell. Editorial Reverté SA. (1992).
FÍSICA. Tomos I y II Tercera edición revisada (Segunda edición en español), Raymond S: Serway, James Madison University, Mcgraw-Hill, (1993)
PROBLEMAS DE FISICA Santiago Burbano de Ercilla, enrique Burbano de Ercilla, Carlos Gracia Muñoz, XXVI edición, Zaragoza, MIRA editores (1994)
ONDAS. Berkeley physics course – volumen 3. Frank S. Crawford, Jr. Editorial Reverté SA. (1994).
FÍSICA Para las ciencias de la vida, David Jou Mirabent Universidad autónoma de Barcelona, Joseph Enric Llebot Rabagliati, Universidad de Girona, Carlos Pérez garcía, Universidad de Navarra. Mcgraw-Hill, (1994)
Física uno Hugo Medina Guzmán, FIS 104 M365 (Biblioteca PUCP) (1995)
APPLIED PHYSICS. Arthur Beiser, Ph. D. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1995)
TEACHING INTRODUCTORY PHISICS A Sourcebook. Clifford E: Swartz (State University of New York, Stony Brook) and Thomas Miner (Associate Editor The Physics Teacher 1972 – 1988). ATP Press – Springer. (1996)
TEACHING INTRODUCTORY PHYSICS Arnold Arons University of Washington JOHN WILEY & SONS, INC. (1997)
FÍSICA John Cutnell / Kenneth W. Johnson. Southern Illinois University. LIMUSA (1998)
FÍSICA EN LA CIENCIA Y EN LA INDUSTRIA. A . Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (2000)
FÍSICA CONTEMPORANEA Edwin Jones.– Richard Childers, University of South Carolina. Mcgraw-Hill, (2001)
PROBLEMAS Y CUESTIONES DE FISICA. Atanasio Lleó, Begoña Betete, Javier Galeano, Lourdes Lleó, Ildefonso Ruiz – Tapiador. Universidad Politécnica de Madrid. Ediciones Mundi – prensa (2002)
The PHYSICS of every day phenomena. A conceptual introduction to Physics. W. Thomas Griffith, Pacific University. Mcgraw-Hill, (2004)
FÍSICA UNIVERSITARIA. Francis W.Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young (Carnegie Mellon University) y Roger A. Freedman (University of California. Santa Barbara) Volumen 1, Volumen 2. Undecima edición. Pearson - Addison Wesley (2004)
FIVE EASY LESSONS Strategies for successful Physics teaching. Randall D. Knight California Polytechnic State University, San Luis Obispo. Addison Wesley (2004)
FUNDAMENTALS OF PHYSICS. David Halliday (Univ. of Pittsburgh), Robert Resnick (Rensselaer Polytechnic Institute), Jearl Walker (Cleveland State Univ.). 7th Edition (2005)

Capitulo 1. INTRODUCCIÓN AL CURSO

¿QUE ES LA FÍSICA?
La física es una ciencia dedicada a la comprensión de los fenómenos naturales que ocurren en el universo. El objetivo principal del estudio científico es desarrollar teorías físicas basadas en leyes fundamentales que permitan predecir los resultados de algunos experimentos. Las leyes de la física tratan de describir los resultados de observaciones experimentales y de mediciones cuantitativas de los procesos naturales.
La física es la ciencia más simple porque estudia los sistemas más simples. La física es la base de todas las demás ciencias.
La relación entre la física y la ingeniería es más directa que la que existe entre la física y cualquier otra ciencia. En la ingeniería se trabaja con sistemas a los que se aplica inmediatamente los principios de la física. Cualquiera sea la rama de la ingeniería o de la ciencia a la que uno se dedique, va a encontrar a cada paso la aplicación de las nociones que aprendió en la física. Siempre se encontrarán útiles los conceptos específicos de la física, las técnicas que se emplean para resolver los problemas, la forma de pensar que se adquiere en el estudio de la física.

METODOLOGIA DE LA FISICA
La metodología que se usa tiene tres formas características.
La primera forma es el análisis de un sistema físico que se realiza en base a las propiedades de sistemas más sencillos, estos sistemas están relacionados de algún modo importante con el sistema original, pero poseen un número menor de factores en su comportamiento. Siendo estos más sencillos se pueden investigar hasta entender bien sus propiedades, una vez que se obtenga el conocimiento de cada sistema se puede hacer una reconstrucción hasta lograr entender las propiedades del sistema original.
La segunda forma parte del principio de que la física se fundamenta necesariamente en la experimentación. A veces la teoría sugiere el experimento, pero más frecuentemente un experimentador realiza el trabajo inicial en un área particular de la física y luego el físico teórico sintetiza los resultados de los experimentos y perfecciona el entendimiento de su significado.
La tercera se refiere al uso frecuente de las matemáticas. La física estudia las interacciones entre objetos. Los objetos interaccionan de acuerdo a ciertas leyes, sean estas conocidas o no. Como las leyes físicas son casi siempre cuantitativas, es esencial poder establecer relaciones lógicas cuantitativas al estudiar los sistemas físicos. Las reglas que gobiernan todas estas relaciones son objeto de las matemáticas. Por eso se dice que la matemática es el lenguaje de la física.

PARTES DE LA FISICA
Actualmente la física se divide en dos clases: Física Clásica y Física Moderna.
La física clásica se ocupa de los fenómenos y las leyes que se conocían hasta la final del siglo XIX. La física moderna se ocupa de los descubrimientos hechos desde entonces.
La física clásica se subdivide en cierto número de ramas que originalmente se consideraban autónomas: la mecánica, el electromagnetismo, la óptica, la acústica y la termodinámica.
La mecánica se ocupa del estudio del movimiento efectos físicos que pueden influir sobre este.
El electromagnetismo se ocupa del estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos y las relaciones entre ellos.
La óptica se ocupa de los efectos físicos que se asocian a la luz visible.
La acústica al estudio de los efectos físicos relacionados con los sonidos audibles.
La termodinámica se ocupa de la generación, el transporte y la disipación del calor.
Estas disciplinas que originalmente se desarrollaron independientemente, están enlazadas por medio de la mecánica y el electromagnetismo.
La física moderna se inició a fines del siglo XIX, con el descubrimiento de cierto número de fenómenos físicos que entraban en conflicto con algunos conceptos de la física clásica.
Básicamente, esas alteraciones conceptuales fueron de dos tipos. Una de ellas estableció el límite superior para las velocidades de las partículas a las que se aplicaban las leyes de la física clásica, esto se asocia a la Teoría de la Relatividad de Einstein. El segundo se puede considerar como el establecimiento de un límite inferior para las dimensiones lineales y de masa de los sistemas físicos, para los que son válidas las leyes clásicas, esto se asocia a la Teoría de la Mecánica Cuántica. Para poder comprender estas dos teorías modernas y los fenómenos de que se ocupan, es necesario estudiar primeramente las leyes de la física clásica.

MAGNITUDES FÍSICAS: ESCALARES Y VECTORES.
En la descripción y estudio de los fenómenos físicos se han desarrollado (y se desarrollan) conceptos abstractos muy especiales llamados magnitudes físicas. Estas magnitudes se definen por medio de un conjunto de operaciones experimentales que permiten obtener un número como medida de la magnitud en cualquier situación.
Esta definición comprende dos pasos esenciales:
1) La elección de una unidad de medida con múltiplos y submúltiplos y
2) un proceso para comparar la magnitud a medir con la unidad de medida y establecer un número (entero o fraccionario) como medida de la magnitud. Son ejemplos de magnitudes físicas: la longitud, el área, el volumen, el tiempo, la masa, la energía, la

temperatura, la fuerza, la potencia, la velocidad, la aceleración, etc.
Llamamos **magnitud física** a aquella propiedad de un cuerpo que puede ser medida. La masa, la longitud, la velocidad o la temperatura son todas **magnitudes físicas**. El aroma o la simpatía, puesto que no pueden medirse, **no son magnitudes físicas**. Las medidas de las magnitudes se realizan mediante las **unidades de medida**, establecidas por la Unión Internacional de Pesas y Medidas (UIPM), que forman el Sistema Internacional de unidades (S. I.), aunque existen otras unidades que se siguen usando por tradición (como el kilate, que se emplea para medir la masa de las piedras preciosas).

Magnitud escalar. Para muchas magnitudes físicas basta con indicar su valor para que estén perfectamente definidas. Así, por ejemplo, si decimos que José Antonio tiene una temperatura de 38 ºC, sabemos perfectamente que tiene fiebre y si Rosa mide 165 cm de altura y su masa es de 35 kg, está claro que es sumamente delgada. Cuando una magnitud queda definida por su valor recibe el nombre de magnitud escalar.

Magnitudes vectoriales. Otras magnitudes, con su valor numérico, no nos suministran toda la información. Si nos dicen que Daniel corría a 20 km/h apenas sabemos algo más que al principio. Deberían informarnos también desde dónde corría y hacia qué lugar se dirigía. Estas magnitudes que, además de su valor precisan una dirección se llaman magnitudes vectoriales, ya que se representan mediante **vectores**. En este tema estudiaremos los vectores y sus propiedades.

UNIDADES. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES.

MEDICIÓN. La física es una ciencia experimental. Los experimentos requieren mediciones cuyos resultados suelen describirse con números. Cualquier número empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico se denomina cantidad física. Dos cantidades físicas que describen a una persona son su peso y su altura. Algunas cantidades físicas son tan básicas que sólo podemos definirlas describiendo la forma de medirlas, es decir, con una definición operativa. Ejemplos de esto son medir una distancia con una regla, o un intervalo de tiempo con un cronómetro. En otros casos definimos una cantidad física describiendo la forma de calcularla a partir de otras cantidades *medibles.* Así, podríamos definir la velocidad media de un objeto como la distancia recorrida (medida con una regla) dividida por el tiempo de recorrido (medido con un cronómetro).

UNIDADES. Al medir una cantidad, siempre la comparamos con un estándar de referencia. Si decimos que un automóvil mide 4,29 m, queremos decir que es 4,29 veces más largo que una regla de medir, que por definición tiene 1m de largo. Este estándar define una unidad de la cantidad. El metro es una unidad de distancia, y el segundo, de tiempo. Al describir una cantidad física con un número, siempre debemos especificar la unidad empleada; describir una distancia como "4,29" no significa nada.
Las mediciones exactas y fiables exigen unidades inmutables que los observadores puedan duplicar en distintos lugares. El sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros se denomina comúnmente "sistema métrico", pero desde 1960 su nombre oficial es Sistema Internacional, o SI.
Las definiciones de las unidades básicas del sistema métrico han evolucionado con los años. Cuando la Academia Francesa de Ciencias estableció el sistema métrico en 1791, el metro se definió como una diezmillonésima parte de la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador (ver figura). El segundo se definió como el tiempo que tarda un péndulo de 1m de largo en oscilar de un lado a otro. Estas definiciones eran poco prácticas y difíciles de duplicar con precisión, por lo que se han sustituido por otras más refinadas y por acuerdo internacional.



Unidades fundamentales
Las fuerzas, velocidades, presiones, energías, en realidad todas las propiedades mecánicas, pueden expresarse en términos de tres cantidades básicas: masa, longitud y tiempo. En el sistema SI, las unidades correspondientes son:

Masa	Kilogramo
Longitud	Metro
Tiempo	Segundo

Estas unidades se conocen como unidades fundamentales.

TIEMPO
Desde 1889 a 1967, la unidad de tiempo se definió como una cierta fracción del día solar medio (el tiempo medio entre llegadas sucesivas del Sol al cenit). El estándar actual, adoptado en 1967, es mucho más preciso; se basa en un reloj atómico que usa la diferencia de energía entre los dos estados energéticos más bajos del átomo de cesio. Cuando se bombardea con microondas de una determinada frecuencia, los átomos de cesio sufren una transición entre dichos estados. Se define un segundo como el tiempo requerido por 9 192 631 770 ciclos de esta radiación.

LONGITUD

En 1960 se estableció también un estándar atómico para el metro, usando la longitud de onda de la luz naranja emitida por átomos de kriptón (^{86}Kr) en un tubo de descarga de luz. En noviembre de 1983 el estándar se modificó de nuevo, esta vez de forma más radical. Se definió que la velocidad de la luz en el vacío es exactamente 299 792 458 m/s. Por definición, el metro es consecuente con este número y con la definición anterior del segundo. Así, la nueva definición de metro es la distancia que recorre la luz en el vacío en 1/299 792458 s. Éste es un estándar de longitud mucho más preciso que el basado en una longitud de onda de la luz.

MASA

El estándar de masa, el kilogramo, se define como la masa de un determinado cilindro de aleación platino-iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sevres, cerca de París. Un estándar atómico de masa, sería más fundamental, pero aún no podemos medir masas a escala atómica con tanta exactitud como a escala macroscópica.

Unidades derivadas

Las cantidades que interesan a los científicos no se limitan a masa, longitud y tiempo. A menudo el comportamiento de objetos se describe en términos de sus velocidades; hay que identificar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos; se paga por la energía que consumen los aparatos domésticos y nos interesa la potencia que pueda desarrollar un motor; la presión atmosférica es un indicador útil de las condiciones del tiempo. Todas las anteriores propiedades, aparentemente dispares, que se miden en metros por segundo (velocidad), newton (fuerza), joules (energía), watts (potencia) y pascales (presión), finalmente se pueden expresar como productos de potencias de masa, longitud y tiempo. Esas unidades, por tanto, se conocen como unidades derivadas, para distinguirlas de las tres unidades fundamentales.

Prefijos comúnmente encontrados. Utilizamos con frecuencia prefijos para obtener unidades de un tamaño más conveniente. Ejemplos de prefijos comúnmente encontrados:

1 manómetro = 1 nm = 10^{-9} m (un poco más grande que el diámetro del átomo)

1 micrómetro = 1 μm =10^{-6} m (una célula de sangre humana es aproximadamente de 7 μm)

1 milímetro = 1 mm =10^{-3} m (el carbón del lápiz es aproximadamente de 0,5 milímetros en diámetro)

1 centímetro = 1 cm =10^{-2} m (el diámetro de un bolígrafo)

1 kilómetro = 1 km = (1000 m)

1 microgramo = 1 μg =10^{-6} g = 1^{-9} kg (masa de una partícula pequeña de polvo)

1 miligramo = 1 mg = 10^{-3} g = 10^{-6} kg (una gota de agua es aproximadamente 2 mg)

1 gramo = l g = 10^{-3} kg (la masa de un clip para papel es de aproximadamente 1 g)

1 nanosegundo = 1 ns =10^{-9} s (tiempo en el que la luz viaja 30 m)

1 microsegundo = 1 μs = 10^{-6} s (tiempo en el que una bala del rifle viaja 1 μm)

1 milisegundo = 1 ms = 10^{-3} s (cerca de 14 ms entre los latidos del corazón)

CONVERSION DE UNIDADES

Algunas veces encontramos los datos dados en unidades distintas al sistema SI. En este caso debemos convertir las unidades al sistema SI usando los factores conocidos de conversión.

La tabla siguiente muestra tales factores.

Factores de Conversión

Longitud

1 pulgada (in) = 2,54 centímetros (cm)
1 pie (ft) = 0,3048 metro (m)
1 milla (mi) = 5280 ft = 1,609 kilómetros (km)
1 m = 3,281 ft
1 km= 0,6214mi
1 ángstrom $\left(\overset{\circ}{A}\right)$ = 10^{-10} m
1 año luz = 9,461 x 10^{15} m
1 unidad astronómica (AU) = 1,496 x 10^{11}m
1 pársec (pc) 3,09 x 10^{16} m

Masa

1 slug = 14,59 kilogramos (kg)
1 kg = 1000 gramos = 6,852 x 10^{-2} slug
1 unidad de masa atómica (amu) = 1,6605 x 10^{-27} kg
(1 kg tiene un peso de 2,205 lb donde la aceleración de la gravedad es 32,174 ft/s^2)

Tiempo

1 dia =24 h= 1,44 x 10^3 min = 8,64 x 10^4 s
1 año = 365,24 días = 3,156 x 10^7s
1 hora (h) =60min =3600s

Velocidad

1 mi/h = 1,609 km/h = 1,467 ft/s 0,4470 m/s
1 km/h = 0,6214 mi/h = 0.2778 m/s 0,9113 ft/s

Volumen

1 litro (L) = 10 m^3 = 1000 cm^3 = 0,353 1 ft^3
1 ft^3 = 0,02832 m^3 = 7,481 U.S. galones (gal)
1 U.S. gal = 3,785 x 10 m^3 = 0,1337 ft^3

Fuerza

1 pound (lb) = 4,448 Newton (N)
1 N = 10 Dinas = 0,2248 lb

Trabajo y Energía

1 joule (J) = 0,7376 ft.lb = 10^7 ergios
1 kilogramo-caloría (kcal) = 4186 J
1 Btu (60°F) = 1055 J
1 kilowatt-hora (kWh) = 3,600 x 10^6 J
1 electron volt (eV) = 1,602 x 10^{-19} J

Angulo

1 radian (rad) = 57,30°
1° = 0,0 1745 rad

Presión

1 pascal (Pa) 1 N/m^2 = 1,450 x 10^4 lb/in^2
1 lb/in^2 = 6.895 x 10^{-5} Pa

l atmósfera (atm)= 1,013 x 10 Pa= 1,013 bar = 14,70 lb/in^2 = 760 torr

Potencia

1 horsepower (hp) = 550 ft.lb/s = 745,7 W

1 watt (W) = 0,7376 ft.lb/s

ANALISIS DIMENSIONAL

La especificación numérica de una cantidad física depende de las unidades que se empleen. Por ejemplo, aunque una distancia se mida en unidades de metros o pies o millas siempre será una distancia. Se dice que su dimensión es de longitud, la denominación no depende del sistema de unidades empleado.

Los símbolos usados para especificar la 1ongitud, la masa y el tiempo son L, M y T, respectivamente.

Para denotar las dimensiones de una cantidad se usan corchetes, por ejemplo de distancia $[\ell]$= L, de velocidad $[v]$ = L/T, de área $[A]$ = L^2.

Entre sus aplicaciones tenemos:

a) Verificación de una fórmula específica. El análisis dimensional utiliza el hecho de que las dimensiones se pueden tratar como cantidades algebraicas (se pueden sumar y restar sólo si se tienen las mismas dimensiones).

Si una ecuación se lee

A = B + C

Los términos A, B, y C deben tener las mismas dimensiones.

Ejemplo 1. Verificar la fórmula siguiente

$x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$, donde x y x_0 representan distancias, v es velocidad, a es aceleración y t es un intervalo de tiempo.

Solución.

Como

$$[x] = [x_0] + [vt] + \left[\frac{1}{2}at^2\right] = \text{L}$$

Y las dimensiones de la velocidad son L/T y de la aceleración L/T^2, tenemos:

$$[vt] = \left(\frac{\text{L}}{\text{T}}\right)(\text{T}) = \text{L}$$

$$\left[\frac{1}{2}at^2\right] = \left(\frac{\text{L}}{\text{T}^2}\right)(\text{T}^2) = \text{L}$$

Podemos ver que esta fórmula es correcta porque todos los términos tienen la dimensión de longitud.

b) Desarrollo de ecuaciones. Esto lo podemos ver en el ejemplo de encontrar la distancia recorrida por un cuerpo en caída libre.

Pongamos que esta caída puede depender de la masa, la aceleración de la gravedad y del tiempo.

$$x = f(m, g, t)$$

El procedimiento para el análisis dimensional es poner la expresión en la forma

$$x \propto m^a g^b t^c$$

Donde a, b y c son exponentes que deben ser determinados y el símbolo $\propto$ indica proporcionalidad. Esta ecuación es correcta únicamente si las dimensiones de ambos lados son iguales, como la dimensión de x es de longitud, la dimensión, del lado izquierdo también debe ser de longitud.

$$[m^a g^b t^c] = \text{L}$$

$$\text{M}^a \left(\frac{\text{L}}{\text{T}^2}\right)^b \text{T}^c = \text{L}$$

$$\text{M}^a \text{L}^b \text{T}^{c-2b} = \text{L}$$

Igualando exponentes en ambos miembros obtendremos

a = 0, b =1, c-2b = 0

De aquí a = 0, b = 1 y c = 2

Por lo tanto la expresión debe tener la forma

$x \propto gt^2$ o $x = kgt^2$

El análisis dimensional puede describir la forma de la ecuación pero no indica el valor de la constante k.

Ejemplo 2. Mediante el análisis dimensional determinar la expresión para la aceleración centrípeta de una partícula que describe un movimiento circular uniforme.

Solución.

Supongamos que la aceleración centrípeta depende de la velocidad, del radio de curvatura y el peso

$$a_c = kv^a R^b W^c$$

aceleración centrípeta $[a_c] = \frac{\text{L}}{\text{T}^2}$

velocidad $[v] = \frac{\text{L}}{\text{T}}$

radio $[v] = \text{L}$

peso $[W] = \frac{\text{ML}}{\text{T}^2}$

Reemplazando

$$\frac{\text{L}}{\text{T}^2} = \left(\frac{\text{L}}{\text{T}}\right)^a (\text{L})^b \left(\frac{\text{ML}}{\text{T}^2}\right)^c$$

$$\Rightarrow \text{LT}^{-2} = \text{L}^{a+b+c}\text{T}^{-a-2c}\text{M}^c$$

Igualando exponentes para L: $1 = a + b + c$

para T: $-2 = -a - 2c$

para M: $0 = c$

de donde obtenemos $a = 2$, $b = -1$ y $c = 0$

por lo tanto

$$a_c = kv^2R^{-1} = k\frac{v^2}{R}$$

c) Convertir un sistema de unidades a otro. Si tenemos una fórmula en un sistema de unidades podemos convertirlo a una fórmula en otro sistema de unidades. Sean L_1, M_1, T_1 y L_2, M_2, T_2 sus unidades.

Si la cantidad G de una ecuación tiene dimensiones $G = L^a M^b T^c$. Se mide g_1 con la unidad G_1, y mide g_2 con la unidad G_2, la relación es:

$$g_1 G_1 = g_2 G_2 \Rightarrow g_2 = g_1 \frac{G_1}{G_2}$$

$$g_2 = g_1 \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^a \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^b \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^c$$

Ejemplo 3. Si en el sistema MKS la fórmula para el cálculo de la variable R de unidades kg/ms aparece

como $R = \left(\dfrac{5p}{1{,}782A + p}\right)^{\frac{1}{2}}$

Donde. p tiene unidades de m/s y A de km/m^3.
Hallar la fórmula en el Sistema Inglés.
1 kg = 2,2 1b l m = 3,28 pie

Solución.
Sean en el sistema MKS, L_1, M_1, T_1, y en el sistema Inglés, L_2, M_2, T_2.
Las relaciones entre estos sistemas son;

$$\frac{M_1}{M_2} = 2{,}2 \,,\ \frac{L_1}{L_2} = 3{,}28 \,,\ \frac{T_1}{T_2} = 1$$

En la ecuación $R = \left(\dfrac{5p}{1{,}782A + p}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$[R] = \frac{M}{LT} \,,\ [p] = \frac{L}{T} \,,\ [A] = \frac{M}{L^3}$$

La cantidad l,782 A tiene las mismas unidades que p

$$[1{,}782\ A] = [1{,}782][A] = [1{,}782\ ]\frac{M}{L^3} = \frac{L}{T}$$

Las unidades de 1,782 son

$$[1{,}782\ ] = \frac{L^4}{MT}$$

Observando la ecuación de R, concluimos que las unidades de 5 son las correspondientes a $(R)^2$.

$$[5\ ] = \frac{M^2}{L^2 T^2}$$

Para obtener el valor correspondiente a 1,7132 en el sistema Inglés

$$g_1 \frac{L_1^4}{M_1 T_1} = g_2 \frac{L_2^4}{M_2 T_2} \Rightarrow g_2 = g_1 \frac{\left(\dfrac{L_1}{L_2}\right)^4}{\left(\dfrac{M_1}{M_2}\right)\left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)}$$

$$\Rightarrow g_2 = 1{,}7132 \frac{(3{,}28)^4}{(2{,}2)(1)} = 95{,}75$$

Para obtener el valor correspondiente a 5 en el sistema Inglés

$$g_1 \frac{M_1^2}{L_1^2 T_1^2} = g_2 \frac{M_2^2}{L_2^2 T_2^2}$$

$$\Rightarrow g_2 = g_1 \frac{\left(\dfrac{M_1}{M_2}\right)^2}{\left(\dfrac{L_1}{L_2}\right)^2 \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow g_2 = 5 \frac{(2{,}2)^2}{(3{,}28)^2 (1)^2} = 2{,}25$$

Luego en el Sistema Inglés la ecuación correspondiente es

$$R = \left(\frac{2{,}25p}{95{,}75A + p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para comprobar esta expresión evaluemos

R_1 para $p_1 = 1\dfrac{m}{s}$, $A_1 = 1\dfrac{kg}{m^3}$ y R_2 para

$p_2 = 3{,}28\dfrac{pie}{s}$,

$$A_2 = \frac{2{,}2\ lb}{(3{,}28\ pie)^3} = 6{,}23 \times 10^{-2}\ \frac{lb}{pie^3}$$

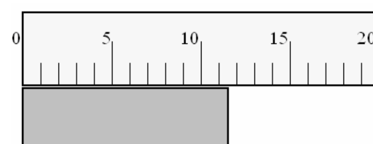
Operando en las ecuaciones respectivas obtenemos

$$R_1 = 1{,}34\frac{kg}{m.s} \text{ y } R_2 = 0{,}899\frac{lb}{pie.s}$$

Realizando la conversión de unidades R_1 encontramos que es equivalente a R_2.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Cuando e realizan mediciones, los valores medidos se conocen únicamente dentro de los límites de la incertidumbre experimental, 1o datos medidos inherentemente no son exactos y si se registran en notación decimal consisten de un conjunto finito de dígitos llamados cifras significativas, la última de las cuales es conocida como cifra dudosa.
Cuando se mide una longitud mediante una regla se observa la lectura de un instrumento en el cual hay una escala, el punto de observación para la lectura llega a una posición como la que se indica en la figura siguiente.



Se puede leer exactamente hasta 11 y apreciar un dígito más, este último depende de cada persona puede ser 11,6 , 11,5 ó 11,7.
Si suponemos que nuestros instrumentos están adecuadamente construidos, entonces las lecturas que tomemos tendrán significado y serán reproducibles, excepto el último digito, el de los décimos de la

división más pequeña, será aunque con significado un poco incierto.
Por lo que no hay objeto en añadir una segunda cifra incierta. Una cifra significativa es cualquier dígito que denota la magnitud de la cantidad según el lugar que ocupa en un número. Por ejemplo si escribimos S/. 10,52, todas las cifras son significativas, el uno representa el número de decenas en soles, el 0 representa que no hay unidad de sol y es significativo y finalmente sabemos que tenemos 52 céntimos. En la expresión 0,01052 gr. el primer cero de la izquierda sirve para llamar la atención hacia la coma, el segundo cero muestra que el 1 ocupa el segundo lugar después de la coma. Estos ceros no son significativos, sin embargo el 0 entre 1 y 5 es significativo.
10,52 tiene cuatro cifras significativas (1, 0, 5 y 2)
0,01052 tiene cuatro cifras significativas (1, 0, 5 y 2)
La incertidumbre más pequeña posible con cualquier aparato de medición es mitad del límite de la lectura. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones generan una incertidumbre mayor que esto. La tabla siguiente enumera la incertidumbre de algunos equipos comunes del laboratorio.

Regla de metro	± 0,05 cm
Calibrador vernier	± 0,005 cm
Micrómetro	± 0,005 mm
Reloj de segundos	± 0,5 s
Cronómetro	± 0,0005 s
Dinamómetro	± 0,1 N

Cuando se anotan y se manipulan números obtenidos por medidas, serán de mucha ayuda las siguientes reglas:

Regla 1: Redondeo de un número -
En el proceso de rechazo de uno o varios de los últimos dígitos. La última cifra retenida se incrementará en 1 si la cifra rechazada es 5 o mayor.
Ejemplo.

Número dado	**Redondeo a**		
	Cuatro cifras	**Tres cifras**	**Dos cifras**
62,578	62,58	62,6	63
10 232	10 230	10 200	10 000
329 350	329 400	329 000	330 000

Regla 2: Suma y Resta
El número de cifras significativas de la suma o diferencia será redondeado desechando todas las cifras a la derecha del lugar ocupado por la cifra incierta en cualquiera de las cantidades que esté más hacia la izquierda, como se muestra en el ejemplo:

201,3 1,05 21,76 0,0013 224,1113 = 224,1	201,3 - 1,05 - 21,76 - 0,0013 178,4887 = 178,5

Regla 3: Multiplicación y División
El número de cifras significativas del producto cociente será redondeado a un número de Significativas igual a aquel componente de aproximación como se muestra en los ejemplos:
3,14159 x 21,13 = 66,38179 = 66,38
3,14159 / 21,13 = 0,14868 = 0,1487
Esto es porque 21,13 tiene sólo cuatro cifras significativas, el resultado se redondea a cuatro cifras significativas

Regla 4. Potencias y raíces
La potencia o raíz de un número de *n* cifras significativas se redondea a *n* cifras significativas. como se muestra en los ejemplos:

$2{,}14^2 = 4{,}5796 = 4{,}58 \quad 2{,}14^3 = 9{,}800344 = 9{,}80$

$\sqrt{2{,}14} = 1{,}46287 = 1{,}46 \quad \sqrt[3]{2{,}14} = 1{,}288658 = 1{,}29$

Ejemplo 4. ¿Cuáles son los resultados en las cifras correctas de las siguientes operaciones indicadas?
a) $2{,}5 \times 10^{-2} \times 20$
b) $3{,}32 \times 10^{3} + 3{,}2 \times 10$
c) $4{,}52 \times 10^{8} + - 4{,}2 \times 10^{3}$
d) $2{,}801 \times 4 \times 10^{-3}$
e) $6{,}2 \times 10^{4} / 3{,}0 \times 10$
Solución.
Aquí todos los números están expresados en notación científica.
Por ejemplo:
$0{,}025 = 2{,}5 \times 10^{-2} = 2{,}5(-02)$, tiene 2 cifras significativas
$20 = 2 \times 10 = 2(+1)$, tiene una cifra significativa.

a) $2{,}5 \times 10^{-2} \times 20 = 5 \times 10^{-1}$
b) $3{,}32 \times 10^{3} + 3{,}2 \times 10 = 3{,}35 \times 10^{3}$
c) $4{,}52 \times 10^{8} - 4{,}2 \times 10^{3} = 4{,}52 \times 10^{8}$
d) $2{,}801 \times 4 \times 10^{-3} = 11 \times 10^{-3}$
e) $6{,}2 \times 10^{4} / 3{,}0 \times 10 = 2{,}1 \times 10^{3}$

Ejemplo 5. Para determinar la densidad de un líquido se toman 10 cm^3 de éste. La masa del líquido medida en una balanza es 15,38g. ¿Cuál es la expresión correcta de la densidad?
Solución.
La densidad del líquido es

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{15{,}38}{10} = 1{,}538 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Siendo 10 el número con menos cifras significativas (2), el resultado se redondea a 2 cifras significativas.
La expresión correcta de la densidad es

$$\rho = 1{,}5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

ERRORES
Como hemos indicado las mediciones físicas involucran incertidumbre. El valor exacto de una magnitud medida es algo a lo cual intentamos aproximarnos pero que nunca conocemos. Un número de lecturas cuando se promedia se considera como el

mejor acercamiento al verdadero valor de una lectura, y la diferencia entre una lectura y la verdadera lectura o lectura exacta se llama error. Aquí la palabra error no significa equivocación sino una incertidumbre.

Error absoluto es la diferencia entre el valor aceptado N (asumimos conocido) y el valor aproximado $\overline{\mathrm{N}}$, obtenido por mediciones o cálculos.

$$e = \mathrm{N} - \overline{\mathrm{N}}$$

Error relativo es la relación entre el error absoluto e y el valor aceptado N

$$\bar{e} = \frac{e}{\mathrm{N}} = 1 - \frac{\overline{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

Porcentaje de error es el número de partes por cada 100 en que un número está errado

$$e\% = (100e)\% = \left(1 - \frac{\overline{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}\right)\%$$

Cuando calcule el porcentaje de error en física elemental no use más de dos cifras significativas.
Por ejemplo si una pista para carreras de 3500 metros tiene 17 metros más.
El error absoluto o simplemente error es

$$e = 17 \text{ m}$$

El error relativo es

$$\bar{e} = \frac{17}{3500}$$

El porcentaje de error es

$$e\% = \frac{17}{3500} \times 100\% = 0{,}49\%$$

Clasificación de errores.

En los cálculos numéricos pueden ocurrir cinco tipos de errores básicos.

a) Error inherente (e_i). Es el error en los datos iniciales debido a mediciones, observaciones o registros inexactos.

b) Error de truncado e_t. Es el error creado por representar una función con sólo unos cuantos términos de una serie. Por ejemplo:

El valor correcto de $\mathrm{N} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1{,}000$

El valor aproximado de $\overline{\mathrm{N}}$ computado por expansión de series es:

$$\overline{\mathrm{N}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{7!} \ldots$$

Si se usa solo el primer término.

$$e_t = \mathrm{N} - \overline{\mathrm{N}} = 1{,}00000 - \frac{\pi}{2} = -0{,}57080 \quad (-57\%)$$

Si se usan los dos primeros términos.

$$e_t = \mathrm{N} - \overline{\mathrm{N}} = 1{,}00000 - \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} = +0{,}07516$$

(+7,5%)

Si se usan los tres primeros términos.

$$e_t = \mathrm{N} - \overline{\mathrm{N}} = 1{,}00000 - \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}$$

= -0,00453 (-0,5%)

Si se usan los cuatro primeros términos.

$e_t = 0{,}00015$, el error de truncado ya es insignificante.

c) Error de redondeo (e_r), es el error introducido por redondeo de un decimal. Por ejemplo.

Si π = 3,14159

Si redondeamos a π = 3,14, entonces:

$$e_r = 3{,}14159 - 3{,}14 = 0{,}00159 \text{ y}$$

$$e_r = \frac{0{,}00159}{3{,}14159} \times 100 = 0{,}05\%$$

d) Error de interpolación (e_p), es el error introducido por la aproximación de un valor por su equivalente interpolado. Por ejemplo:

Si conocemos la circunferencia de un círculo de l0 metros de diámetro y de otro circulo de 11 metros.

$$C_{10} = 10\pi = 31{,}42 \text{ m y}$$

$$C_{11} = 11\pi = 34{,}56 \text{ m}$$

Por interpolación lineal la circunferencia de un círculo de 10,6 metros es:

$$C_{10,6} = C_{10} + (C_{11} - C_{10}) \times 0{,}6 = 33{,}30 \text{ m}$$

Pero el valor exacto es

$$C_{10,6} = 10{,}6 \times \pi = 33{,}31 \text{ m}$$

De aquí

$$e_p = 33{,}31 - 33{,}30 = 0{,}01 \text{ m}$$

o $e_p\% = \frac{0{,}01}{33{,}31} \times 100 = 0{,}03\%$

e) Error de aproximación (e_a), es el error introducido por la aproximación de una constante o una función por un valor elegido. Por ejemplo:

La aceleración debido a la gravedad *g* = 9,80665 m/s^2 puede aproximarse por:

$$g = \frac{51}{52} \times 10 = 9{,}80769 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow e_a\% = 0{,}01\%$$

mejor por

$$g = \frac{507}{517} \times 10 = 9{,}80658 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$e_a\% = 0{,}00\%$$

(El error aparece en el cuarto decimal)

Error cuadrático medio o **desviación normal** o **estándar**
En general cuando se realiza una medición cualquiera siempre se comete error, cuando repetimos las mediciones varias veces, encontramos casi siempre resultados diferentes para cada una, aunque empleemos el mismo método y el mismo aparato. Las mediciones sucesivas de un objeto determinado presentan discrepancias debido a los errores al azar o aleatorios de las medidas. Si la longitud verdadera de una varilla es ℓ_0 la media aritmética de un gran número de medidas sucesivas será un número que representa la longitud media ℓ_m. Una medida Individual cualquiera tendrá una desviación de la media $e = \ell - \ell_m$, cantidad que puede ser positiva o negativa según ℓ sea mayor o menor que ℓ_m, es decir

$$\ell = \ell_m \pm e$$

Si elevamos al cuadrado cada uno de los valores de e y tomamos la media de todos los e^2, obtenemos e_m^2 que es la **varianza** de las medidas.

$$e_m^2 = \frac{\sum_{1=1}^{n} e_i^2}{n}$$

A la raíz cuadrada de esta medía se la conoce como el **error cuadrático medio** o **desviación normal** o **estándar** σ.

$$\sigma = \sqrt{e_m^2}$$

Cuanto mayor sea el número *n* de medidas, menor será la diferencia entre su media ℓ_m y la longitud verdadera ℓ_0, es decir el error estándar de la media, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, será menor. Por esto el mejor valor estimado de ℓ_0 es:

$$\ell = \ell_m \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \ell_m \pm \Delta\ell$$

En donde $\Delta\ell$ es la incertidumbre o error absoluto determinado a partir de *n* mediciones. En el caso de verdaderos errores aleatorios, la media ℓ_m cae en un 68 por ciento de las veces dentro de una distancia $\Delta\ell$ del valor verdadero pero desconocido ℓ_0.

De esta forma podemos presentar el resultado final de un experimento en el cual se mide varias veces una magnitud. Sin embargo, muchas veces realizamos sólo una medición de la magnitud. En este caso se considera generalmente que la incertidumbre o error absoluto es igual a la mitad de la división menor de la escala del instrumento. Por ejemplo: si para medir longitudes se usa una regla cuya división minina es 1 mm el error absoluto o incertidumbre de la medida es $\Delta\ell$ = 0,05 mm.

Ejemplo 6. Un estudiante realiza varias mediciones de la masa de un cuerpo, obteniendo los siguientes resultados: 35,73 g , 35,76 g , 35,80 g, 35,76 g, 35,70 g
¿Cuál es el mejor valor estimado de la masa del cuerpo?
Solución.
La masa media es:

$$m_m = \frac{35{,}73 + 35{,}76 + 35{,}80 + 35{,}76 + 35{,}70}{5}$$

= 35,75 g
La desviación de la media de cada medición es:

$$m_1 - m_m = 35{,}73 - 35{,}75 = -0{,}02$$
$$m_2 - m_m = 35{,}76 - 35{,}75 = 0{,}01$$
$$m_3 - m_m = 35{,}80 - 35{,}75 = 0{,}05$$
$$m_4 - m_m = 35{,}76 - 35{,}75 = 0{,}01$$
$$m_5 - m_m = 35{,}70 - 35{,}75 = -0{,}05$$

La varianza de las medidas es:

$$e_m^2 = \frac{(-0{,}02)^2 + (0{,}01)^2 + (0{,}05)^2 + (0{,}01)^2 + (-0{,}05)^2}{5}$$

= 0,0112
La desviación normal

$$\sigma = \sqrt{e_m^2} = \sqrt{0{,}0112} = 0{,}0334$$

La incertidumbre o error estándar de la medida es:

$$\Delta m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}0334}{\sqrt{5}} = 0{,}01496 = 0{,}02$$

El mejor valor estimado es:

$$m = m_m \pm \Delta m = 35{,}75 \pm 0{,}02$$
$$m = (35{,}75 \pm 0{,}02)\,\text{g}$$

Si hubiéramos realizado una sola medición con una balanza cuya menor división es de 0,1 g la incertidumbre seria 0,05 y el resultado de la medición podría expresarse así:

$$m = (35{,}75 \pm 0{,}05)\,\text{g}$$

Observemos que en ambos casos la incertidumbre corresponde al segundo orden decimal (0,02 y 0,05 respectivamente) incidiendo por lo tanto en la cifra 5, que es la cifra dudosa.

PROPAGACIÓN ERRORES
La determinación experimental de algunas cantidades físicas tales como densidad o volumen se obtienen por medición directa. Generalmente, la cantidad a determinar se re1aciona de alguna manera conocida a una o más cantidades medibles. El procedimiento es medir estas cantidades y con estas calcular por medio de relaciones conocidas la cantidad original. Por ejemplo el volumen de un cilindro puede conocerse si tenemos su longitud y Su diámetro. Estas pueden medirse directamente, cada una con su intervalo de

error asociada, Estos intervalos de error determinan el Intervalo de error de la cantidad calculada. Es importante saber como hacer esta determinación de la propagación de errores.
A continuación determinemos los errores para diferentes situaciones.
a) Suma de dos o más variables.
Consideremos $z = x + y$.
$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x) + (y \pm \Delta y)$$
Puesto que *x* e *y* tienen las incertidumbres Δx y Δy, ¿cuál es la incertidumbre Δz en *z*?
Los mayores valores posibles para *x* e *y* son $x + \Delta x$ e $y + \Delta y$, respectivamente, dando un valor superior de $\Delta z = \Delta x + \Delta y$.
Los menores valores posibles para *x* e *y* son $x - \Delta x$ e $y - \Delta y$, respectivamente, dando un valor inferior de $\Delta z = -(\Delta x + \Delta y)$.
Es decir, los valores límites para *z* son
$$z = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y)$$
Sin embargo, no utilizamos los $(\Delta x + \Delta y)$ como la incertidumbre.
La razón es que para que *z* realmente valga $z = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y)$ se necesita que la incertidumbre en la medición, tanto de *x* como de *y*, sea tal que los dos resultados experimentales sean subestimaciones.
Más probable es que uno de los resultados sea un poco bajo y el otro un poco alto. Si éste es el caso, la incertidumbre en una de las mediciones puede compensar, en parte, la incertidumbre en la otra.
Para tomar en cuenta esta posibilidad, lo que hacemos no es sumar las incertidumbres, sino que calculamos
$$\Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$
Esta manera de combinar las incertidumbres, sumándolas elevadas al cuadrado, se llama suma en cuadratura.
La incertidumbre Δz calculada de esta manera es siempre mayor que las a Δx y Δy por separado, pero menor que la suma $\Delta x + \Delta y$. La diferencia entre simplemente sumar las incertidumbres y sumarlas en cuadratura es que la suma simple da la incertidumbre máxima en el resultado, mientras que la suma en cuadratura da la incertidumbre más probable.
b) Diferencia de dos variables
Consideremos $z = x - y$.
$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x) - (y \pm \Delta y)$$
La incertidumbre que queremos es la incertidumbre más probable, que viene a ser la raíz cuadrada de la suma en cuadratura de las incertidumbres
$$\Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$
Por lo tanto, tenemos una regla para la propagación de incertidumbres Cuando sumamos o restamos dos magnitudes la incertidumbre en el resultado es la raíz cuadrada de la suma en cuadratura de las incertidumbres en las magnitudes.

Ejemplo 7. Medimos la masa de un tomillo y obtenemos $m_1 \pm \Delta m_1 = (253 \pm 5)\,\text{g}$, luego medimos también la masa de una tuerca, $m_2 \pm \Delta m_2 = (48 \pm 5)\,\text{g}$. ¿Cuánto vale la masa *M* del tornillo y la tuerca juntos?
Solución.
Evidentemente, la masa *M* es
$$M = m_1 + m_2 == 253 + 48 = 301\,\text{g}$$
La Incertidumbre en la suma es
$$\Delta M^2 = \sqrt{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2} = \sqrt{50} = 7 \text{ g}$$
y el resultado final es
$$M = (301 \pm 7)\,\text{g}$$

Ejemplo 8. ¿Cuál es la diferencia *M'* entre las masas m_1 y m_2 del tornillo y la tuerca respectivamente?
Solución.
Evidentemente, la masa *M'* es
$$M' = m_1 - m_2 == 253 - 48 = 205\,\text{g}$$
La Incertidumbre en la diferencia también es
$$\Delta M'^2 = \sqrt{\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2} = \sqrt{50} = 7 \text{ g}$$
y el resultado final es
$$M' = (205 \pm 7)\,\text{g}$$

c) Producto de dos o más variables.
Supongamos $z = xy$
$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y)$$
$$= xy \pm y\Delta x \pm x\Delta y + \Delta x\Delta y$$
el error de z es $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y$
considerando el mayor valor posible y no tomando en cuenta $\Delta x\Delta y$ por se el producto de dos cantidades pequeñas.
El significado de esto se más claramente en el error relativo.
$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{y\Delta x + x\Delta y}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Ejemplo 9. ¿Cuál es el producto de $(2{,}6 \pm 0{,}5)$ cm y $(2{,}8 \pm 0{,}5)$ cm?
Solución.
Primero, determinamos el producto de 2,6cm x 2,8cm = 7,28 cm^2
Error relativo 1 = $\dfrac{0{,}5}{2{,}6}$ = 0,192
Error relativo 2 = $\dfrac{0{,}5}{2{,}8}$ =0,179
Suma de los error relativos = 0,371 o 37,1 %

Error absoluto = 0,37l x 7,28 cm^2 o 3,71 % x 7,28 cm^2 = 2,70cm^2
Los errores son expresados con una cifra significativa = 3 cm^2
El producto es igual a 7,3 ± 3 cm^2

d) Potencias y raíces.
Sea $z = x^n$
Donde n es el número entero o fracción positivo o negativo.

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)^n$$

Esto se puede escribir

$$z \pm \Delta z = x^n \left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right)^n$$

Haciendo la expansión binomial de $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n$

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n =$$

$$1 + n\frac{\Delta x}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 + \ldots$$

ignorando las potencias mayores que 1 de Δx

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n = 1 + n\frac{\Delta x}{x}$$

De aquí

$$z \pm \Delta z = x^n \left(1 \pm n\frac{\Delta x}{x}\right)$$

El error de z es $\Delta z = nx^{n-1}\Delta x$
Y el error relativo es

$$\frac{\Delta z}{z} = n\frac{\Delta x}{x}$$

Ejemplo 10. Encontrar el error en el cálculo de $z = x^2$

Solución.

$$\Delta z = 2x^{2-1}\Delta x = 2x\Delta x$$

E error relativo es

$$\frac{\Delta z}{z} = 2\frac{\Delta x}{x}$$

Ejemplo 11. Encontrar el error en el cálculo de $z = \sqrt{x} = x^{1/2}$

Solución

$$\Delta z = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\Delta x = \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\sqrt{x}}$$

E error relativo es

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{x}$$

Ejemplo 12. Encontrar el error en el cálculo de

$$z = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

Solución.

$$\Delta z = -3x^{-3-1}\Delta x = -3x^{-4}\Delta x = -3\frac{\Delta x}{x^4}$$

Como los errores son indeterminados debemos elegir el signo de tal manera que éste sea el máximo, por esto:

$$\Delta z = 3\frac{\Delta x}{x^4}$$

y el error relativo es

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{3\frac{\Delta x}{x^4}}{\frac{1}{x^3}} = 3\frac{\Delta x}{x}$$

e) Cocientes.

Supongamos $z = \frac{x}{y}$

$$z \pm \Delta z = \frac{(x \pm \Delta x)}{(y \pm \Delta y)}$$

Esto se puede escribir como:

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y)^{-1}$$

$$= x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right)\frac{1}{y}\left(1 \pm \frac{\Delta y}{y}\right)^{-1}$$

$$\approx \frac{x}{y}\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right)\left(1 \mp \frac{\Delta y}{y}\right)$$

$$\approx \frac{x}{y}\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x} \pm \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x}\frac{\Delta y}{y}\right)$$

Ignorando el último término por se muy pequeño y tomando el valor máximo para Δz .
El error de *z* es:

$$\Delta z = \frac{x}{y}\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{y\Delta x + x\Delta y}{y^2}$$

El error relativo es:

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\frac{y\Delta x + x\Delta y}{y^2}}{\frac{x}{y}} = \frac{y\Delta x + x\Delta y}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Ejemplo 13. Supongamos que queremos calcular la densidad ρ de un cilindro de metal habiendo medido su masa *M*, su longitud *L* y su diámetro *D*. Al mismo tiempo queremos calcular el error relativo resultante de los errores en las cantidades medidas. Sabemos que la densidad está dada por la ecuación

$$\rho = \frac{M}{\pi (D/2)^2 L} = \frac{4M}{\pi D^2 L}$$

Solución.

$$\rho = \frac{4M}{\pi D^2 L} = \frac{4}{\pi} M D^{-2} L^{-1}$$

Como 4 y π son cantidades exactas no tienen error.

El error relativo de *M* es $\frac{\Delta M}{M}$

El error relativo de *D* es $\frac{2\Delta D}{D}$

El error relativo de *L* es $\frac{\Delta L}{L}$

De aquí

El error relativo de ρ es

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{2\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L}$$

Ejemplo 14. El volumen de un cilindro de base circular es $V = \pi R^2 L$. ¿Cuánto vale la incertidumbre o error en el volumen en términos de las incertidumbres ΔR y ΔL?

Solución.

Como π es cantidad exacta no tienen error.

El error relativo de *R* es $\frac{2\Delta R}{R}$

El error relativo de *L* es $\frac{\Delta L}{L}$

De aquí

El error relativo de *V* es

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta L}{L}$$

Y el error absoluto:

$$\Delta V = \left(2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta L}{L}\right)V = \pi R\left(2\Delta R + \frac{R}{L}\Delta L\right)$$

Ejemplo 15. Supongamos que queremos medir el periodo *T* de un oscilador, es decir, el tiempo que tarda en efectuar una oscilación completa, y disponemos de un cronómetro que aprecia las décimas de segundo, 0,1 s. Medimos el tiempo que tarda en hacer 10 oscilaciones, por ejemplo 4,6 s, dividiendo este tiempo entre 10 resulta *t* =0,46 s, ¿cómo se expresa la medida?

Solución.

$$T = \frac{t}{10}, \quad \Delta T = \frac{\Delta t}{10}$$

Obtenemos para el error $\Delta T = \frac{0{,}1}{10} = 0{,}01\,\text{s}$. Por tanto, la medida la podemos expresar como

$$T = (0{,}46 \pm 0{,}01)\,\text{s}$$

Ejemplo 16. La medida de los lados de un rectángulo son $(1{,}53 \pm 0{,}06)$ cm, y $(10{,}2 \pm 0{,}1)$ cm, respectivamente. Hallar el área del rectángulo y el error de la medida indirecta.

Solución.

El área es $A = 1{,}53 \times 10{,}2 = 15{,}606$ cm^2

Como debe de tener solamente 3 cifras significativas

$$A = 15{,}6\,\text{cm}^2$$

El error relativo del área

$$\frac{\Delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{0{,}06}{1{,}53}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{10{,}2}\right)^2} = 0{,}0404422504$$

El error absoluto del área

$$\Delta A = 0{,}0404422504(1{,}53 \times 10{,}2) = 0{,}63083$$

El error absoluto con una sola cifra significativa es 0,6.

La medida del área junto con el error y la unidad se escribirá como

$$A = (15{,}6 \pm 0{,}6)\,\text{cm}^2$$

Ejemplo 17. Se mide x con una incertidumbre Δx y se calcula $y = \ln x$. ¿Cuánto vale Δy?

Solución.

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$$

En este caso podemos usar aproximaciones para cantidades pequeñas, cuando $|x| << 1$, tales como:

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx, \; e^x \approx 1 + x, \; \ln(1 + x) \approx x,$$
$$\text{sen}x \approx x, \; \cos x \approx 1, \; \tan x \approx x$$

En nuestro caso

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x) = \ln x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \ln x + \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}$$

Como $\frac{\Delta x}{x} << 1$ podemos aplicar

$\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \approx \frac{\Delta x}{x}$, luego:

$$y + \Delta y = \ln x + \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}$$

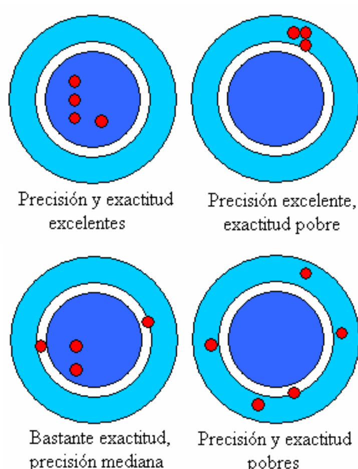
Siendo $y = \ln x$:

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x}$$

PRECISIÓN Y EXACTITUD

Los términos "PRECISION " y "ACCURACY" del idioma inglés no son sinónimos, para efectos de lenguaje estadístico traduciremos "Precision" como precisión y "Accuracy" como exactitud, estableciendo diferencias claras entre las dos palabras.

La precisión es una indicación de la concordancia entre un número de medidas hechas de la manera indicada por el error absoluto. Un experimento de gran precisión tiene un bajo error al azar.
La exactitud es una indicación de cuan cercana está una medida al valor aceptado indicado por el error relativo o del porcentaje de error en la medida. Un experimento de gran exactitud tiene un error sistemático bajo.
Así como la obtención de una serie de medidas con las unidades correctas, se requiere una indicación del error experimental o el grado de incertidumbre en las medidas y la solución. Cuanto mayor es la exactitud y la precisión en nuestras investigaciones, más bajo es el grado de incertidumbre.
Las cuatro figuras a continuación ilustran la diferencia:

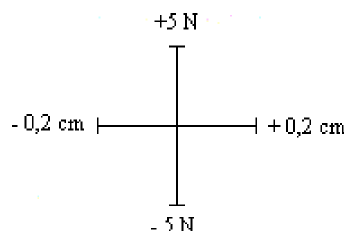


RANGO DE ERROR O INCERTIDUMBRE

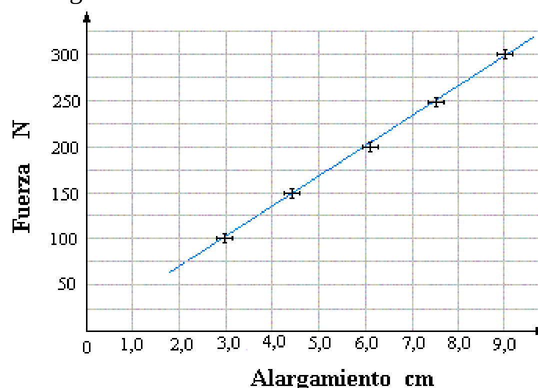
Cuando una respuesta se expresa como valor con incertidumbre tal como 2,3 ± 0,1 cm, entonces la gama de la incertidumbre es evidente. ¿El valor cae entre 2,4 (2,3 + 0,1) y 2,2 (2,3 - 0,1) cm. En la física, determinamos a menudo la relación que existe entre las variables. Para visión la relación, podemos realizar una investigación y trazar un gráfico del eje dependiente) contra la variable independiente (eje *x*). Considere un resorte que tenga varios pesos, unido a él. A mayor peso se une a un resorte, el resorte extiende más lejos de su posición del equilibrio. La tabla siguiente muestra algunos valores para esta investigación de Fuerza/alargamiento.

Fuerza ± 5 N	100	150	200	250	300
Alargamiento ± 0,2 cm	3,0	4,4	6,2	7,5	9,1

Cuando se traza un gráfico de la fuerza contra el alargamiento, la línea del mejor ajuste no pasa por cada punto. Una barra del error se puede utilizar para dar una indicación del rango de la incertidumbre para cada punto según se muestra en la figura a continuación Fuerza/alargamiento.



En la dirección vertical, dibujamos una línea arriba y abajo para que cada punto muestre la gama de incertidumbre del valor de la fuerza. Entonces ponemos una pequeña línea marcadora horizontal en el límite del extremo incierto para el punto.
En la dirección horizontal, dibujamos una línea a la izquierda y a la derecha para que cada punto muestre la gama de incertidumbre del valor de la extensión. Entonces ponemos una pequeña línea marcadora línea vertical en el límite del extremo incierto para el punto.
Cuando todos los puntos de la tabla se trazan en un gráfico, la línea del mejor ajuste con las barras apropiadas de error se muestra en la figura siguiente y se puede ver que la línea del mejor ajuste cae dentro del rango de la incertidumbre de la barra del error.



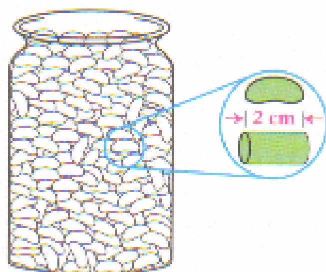
ESTIMADOS Y CÁLCULOS DEL ORDEN DE MAGNITUD

Hasta donde hemos visto, es importante cuidar el seguimiento de las incertidumbres en la medición cuando se calculan las respuestas a los problemas. En algunas ocasiones, tanto en la vida cotidiana como en el quehacer científico, es necesario resolver un problema del que no tenemos información suficiente para obtener una respuesta precisa. A menudo podemos obtener una respuesta útil mediante la estimación de los valores de las magnitudes apropiadas. Estas estimaciones, realizadas generalmente a la potencia de diez más cercana, se denominan estimaciones del orden de magnitud. El cálculo resultante del orden de magnitud no es exacto, pero generalmente es correcto con un factor de diez. El conocimiento justo del orden de magnitud de las cantidades físicas con frecuencia nos proporciona información suficiente para obtener una comprensión útil de la situación física y la capacidad para formarnos un juicio y hacer cálculos para la construcción de modelos.
Realizar estimaciones de magnitud con frecuencia es sencillo. Por ejemplo, imagine que va a la escuela por

primera vez y que quiere estimar cuánto dinero necesitara para comprar libros. Usted conoce que la carga habitual para la mayor parte de los estudiantes es de cinco materias, y que en cada una se necesita un libro de texto.
Con estos datos puede estimar el costo de un solo libro con el razonamiento siguiente. Sabe por experiencia que S/. 1 es demasiado bajo y que S/. 100 es demasiado alto. Incluso S/. 10 es bajo. Una estimación razonable puede ser S/. 50. Así, el costo estimado de los libros para un semestre es de 5 x S/. 50 = S/. 250. Aunque el resultado no es exacto, está dentro del orden de magnitud correcto y proporciona una estimación razonable a un problema real. El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de las estimaciones del orden de magnitud.

Cuando hacemos cálculos de este tipo con frecuencia también efectuamos otras aproximaciones. Al remplazar π por 3 o remplazar $\sqrt{2}$ por 3/2 hacemos pocas diferencias en el orden de magnitud, pero hacerlo simplifica mucho los cálculos. Los ejemplos siguientes ilustran esta técnica.

Ejemplo 18. Una tienda ofrece un premio al cliente que adivine con la mayor aproximación el número de caramelos de goma que llenan un frasco de un litro exhibido en un mostrador de la tienda. (Un litro es igual a 1000 cm^3.) Estime cual será el número.



Solución.
Una revisión cuidadosa del frasco (véase la figura) revela varias cosas. Los caramelos de goma pueden aproximarse vagamente a pequeños cilindros de casi 2 cm de largo por aproximadamente 1,5 cm de diámetro. Además, los caramelos no están apretados en el frasco; posiblemente tan só1o se ha llenado 80% de éste. Podemos hacer uso de estas observaciones para estimar el número de caramelos que hay en el frasco.

$$\text{Número de caramelos} = \frac{\text{Volumen ocupado del frasco}}{\text{Volumen de un caramelo}}$$

EI volumen ocupado del frasco = 0,8 x 1000 = 800 cm^3,
Volumen de un caramelo =

$$h\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \approx 2\text{cm}\times 3\left(\frac{\frac{3}{2}\text{cm}}{2}\right)^2 \approx \frac{27}{8}\text{cm}^3$$

Así, el número aproximado de caramelos que hay en el frasco es:

$$\text{Número de caramelos} \approx \frac{800\text{cm}^3}{\frac{27}{8}\text{cm}^3} \approx 240 .$$

Un conteo realizado de los caramelos que llenan un frasco de un cuarto (0,95 litros) dio 255 caramelos.

MODELOS IDEALIZADOS
Ordinariamente usamos la palabra "modelo" para referimos a una réplica en menor escala (digamos, de un ferrocarril) o a una persona que exhibe ropa (o se exhibe sin ropa). En física, un modelo es una versión simplificada de un sistema físico que sería demasiado complejo si se analizase de forma detallada. Por ejemplo, supongamos que nos interesa analizar el movimiento de una pelota de béisbol lanzada en el aire. ¿Qué tan complicado es el problema? La pelota no es perfectamente esférica ni perfectamente rígida: tiene costuras, está girando y se mueve en el aire. El viento y la resistencia del aire afectan su movimiento, la Tierra gira, el peso de la pelota varía un poco al cambiar su distancia respecto al centro de la Tierra, etc. Si tratamos de incluir todos estos factores, la complejidad del análisis nos abrumará. En vez de ello, inventamos una versión simplificada del problema. Omitimos el tamaño y la forma de la pelota representándola como objeto puntual, o partícula. Despreciamos la resistencia del aire haciendo que la pelota se mueva en el vacío, nos olvidamos de la rotación terrestre y suponemos un peso constante. Ahora tenemos un problema sencillo de tratar.
Para crear un modelo idealizado del sistema debemos pasar por alto muchos efectos menores y concentramos en las características más importantes. Claro que hay que ser cuidadosos para no despreciar demasiadas cosas. Si ignoramos totalmente los efectos de la gravedad, nuestro modelo predecirá que si lanzamos la pelota hacia arriba ésta se moverá en línea recta y desaparecerá en el espacio. Necesitamos algún criterio y creatividad para crear un modelo que simplifique lo suficiente un problema sin omitir sus características esenciales.
Al usar un modelo para predecir el comportamiento de un sistema, la validez de las predicciones está limitada por la validez del modelo. La predicción de Galileo respecto a la caída de los cuerpos corresponde a un modelo idealizado que no incluye la resistencia del aire. El modelo funciona bien para una bala de cañón, pero no para una pluma.
El concepto de modelos idealizados es muy importante en física y en tecnología. Al aplicar principios físicos a sistemas complejos siempre usamos modelos idealizados, y debemos tener presentes las suposiciones que hacemos. De hecho, los principios mismos se expresan en términos de modelos idealizados; hablamos de masas puntuales, cuerpos rígidos, aislantes ideales, etc. Estos modelos desempeñan un papel crucial en este libro. Trate de

distinguirlos al estudiar las teorías físicas y sus aplicaciones a problemas específicos.

¿COMO ESTUDIAR FISICA?

Para estudiar física es necesario dar atención especial a los significados específicos de las palabras para poder entender el material, deben estudiarse detenidamente los gráficos, dibujos, tablas y fotografías incluidos para entender claramente los principios físicos involucrados.
Gran parte de lo que se aprenderá será en las clases. Deberán aprender a tomar apuntes exclusivamente de las partes significativas de cada lección y concentrarse por completo en lo que el profesor está diciendo, estos apuntes son necesariamente breves y carentes de relación. Por lo tanto, es recomendable tener un cuaderno ordenado con las notas de clase completando con apuntes tomados del estudio de los libros. Hagan esto tan pronto como sea posible después de clase, esto permitirá tener un conjunto de notas claras e inteligibles para repaso; ayudará a detectar las áreas débiles de conocimiento.
La parte más importante de los apuntes son los problemas resueltos. Resuélvanse todos los ejemplos vistos en clase y los dejados como tarea.
Richard Feynman premio Nóbel en física dijo: "usted no sabe nada sobre algo hasta que lo ha practicado".
La habilidad para resolver problemas no es sólo una prueba del dominio que cada cual posee de la ciencia, sino también un índice del crecimiento de nuestra propia capacidad como herramienta en las futuras tareas del intelecto.
Se recomienda desarrollar las habilidades necesarias para resolver un amplio rango de problemas. La habilidad para resolver problemas puede ser la principal prueba de los conocimientos. Es esencial que se comprendan los principios y conceptos básicos antes de intentar resolver problemas.
En física general los exámenes se componen principalmente de problemas a resolver, es muy importante que se entiendan y recuerden las hipótesis que sirven de base a una teoría o formalismo en particular.
Para la resolución de problemas se incluyen cinco etapas básicas:
a) Dibuje un diagrama con ejes coordenados si son necesarios y ponga las notaciones identificatorias, con esto podemos eliminar errores de signo.
b) Identifique el principio básico, incógnitas, listando los datos y las incógnitas.
c) Seleccione una relación básica o encuentre una ecuación que se pueda utilizar para determinar la incógnita y resuélvala simbólicamente. En esta forma se evitan errores y ayuda a pensar en términos físicos el problema.
d) Sustituya los valores dados con las unidades apropiadas dentro de la ecuación y obtenga el valor numérico de la incógnita.
e) Verificación y revisión del resultado por medio de las siguientes preguntas:
¿Las unidades coinciden?
¿Es razonable el resultado?
¿Es apropiado el signo? ¿Tiene significado?
Una vez que el estudiante ha desarrollado un sistema organizado para examinar problemas y extraer la información relevante, tendrá confianza y seguridad cuando tenga que resolverlos.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Suponga que está planeando un viaje en automóvil a otra ciudad y estima el tiempo que se requiere para ir allá. Demuestre cómo esta estimación depende de un modelo. ¿Cómo se ha descrito en el texto y qué tan confiable es?

2. Dé un ejemplo personal del uso de un modelo para el análisis de los datos medidos.

3. Explique la idea básica detrás de la conversión de unidades.

4. Explique la diferencia en significado de las tres cantidades 10 m, 10.0 m y 10.00 m.
5. ¿Cuál de los números siguientes se da con tres cifras significativas: 0,003 m, 0,32 cm, 0,320 cm, 3,21 mm o 3,213 mm?

6. Un estudiante mide un rectángulo con una regla cuya medida varía ± 1 mm. Encuentra que la altura es 37 mm y el acho 46 mm. ¿Por qué debe informar que el área del rectángulo
1700 mm^2 en lugar de 1702 mm^2?

7 ¿Qué modelo describe en la forma más sencilla las observaciones siguientes?
a) Una pelota colocada en cualquier lugar sobre el piso permanece en reposo.
b) Una pelota colocada en cualquier lugar sobre el piso empieza a rodar.
c) Dé otros modelos más sencillos para estas observaciones.
Respuesta.
a) Bola esférica uniforme sobre un piso horizontal.
b) Bola esférica uniforme sobre un piso inclinado.
c) Para a) la bola tiene una parte plana o no es uniforme y para b) la bola es asimétrica y empieza a rodar hacia su lado más pesado.

8. Se lanza un dado muchas veces con los resultados siguientes para el número que aparece en su cara superior: 1, 63 veces; 2, 58 veces; 3, 62 veces; 4, 63 veces; 5, 75 veces y 6, 61 veces. ¿Qué modelo puede hacer para el dado?
Respuesta.
El dado es más pesado hacia el punto 2.

9. Un cubo de metal flota en un líquido. ¿Cuál es el modelo más sencillo del cubo y del líquido? ¿Hay otros modelos?
Respuesta.
El cubo tal vez sea hueco si flota en el agua. Alternativamente, el cubo es sólido pero flota en un líquido que es más denso que él.

10. Un litro (L) es un volumen de 10 cm^3. ¿Cuántos centímetros cúbicos hay en 2,5 mililitros?
Respuesta.
2,5 cm^3

11. ¿Qué tan lejos viaja la luz en un vacío en 1,0 nanosegundos (Velocidad de la luz = 3,0 x $l0^8$ m/s.)
Respuesta
30cm

12. Los granos negros en algunos tipos de películas fotográfica son de aproximadamente 0,8 μ m de sección. Asuma que los granos tienen una sección transversal cuadrada y que todos quedan en un solo plano de la película. ¿Cuántos granos se requieren para oscurecer completamente 1 cm^2 de película?
Respuesta.
1,6 x 10^8

13. Una fórmula se lee $y = ½ at^2$, donde y está en metros y t en segundos. ¿Cuáles son las dimensiones de a?
Respuesta.
m/s^2

14. ¿Cuál es la altura en centímetros de una persona cuya estatura es 5'l1''?
Respuesta.
180cm

15. ¿Cómo es 40,2 mi expresado en kilómetros?
Respuesta
64,7 km

16. Exprese 130 km/h en términos de millas por hora.
Respuesta.
80,8 mi/h

17 Una tienda anuncia un tapete que cuesta US $18,95 por yarda cuadrada. ¿Cuánto cuesta el tapete por metro cuadrado?
Respuesta.
22,66 dólares/m^2

18. Cuando la gasolina se vende a US $1,609 por galón, ¿cuál es el precio en dólares por litro? (1 gal = 3,l7853 L)
Respuesta.
0,282 dólares/L

19. ¿Cuál es el área en centímetros cuadrados de un pedazo de papel de 8 pulg x 14 pulg?
Respuesta.
1.25 768 cm^2

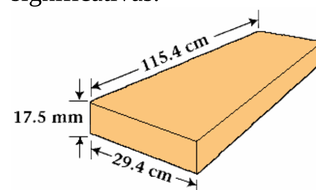
20. Los listones de madera en una cerca están espaciados 6,0 pulgadas, de centro a centro. ¿Cuántos listones están contenidos en un metro de valla?
Respuesta.
6,6

21. La Luna gira sobre su eje cada 271/3 días de modo que la misma cara está siempre hacia la Tierra. ¿A cuántos grados rotará la Luna respecto a su propio eje en una hora?
Respuesta.
0,549°

22. ¿Cuántas revoluciones hace el segundero de un reloj en tres años? Suponga que no hay año bisiesto en el intervalo.
Respuesta.
1,58 x 10^6 revoluciones

23. La Tierra tiene una masa de 5.98 x 10^{24} kg y un radio de 6,38 x 10^6 m. a) ¿Cuál es la masa por unidad de volumen de la Tierra en kg/m^3? b) ¿Cuál es la masa por unidad de volumen de un núcleo de oro que tiene una masa de 3,27 x 10^{25} kg y un radio de 6,98 x 10^{-15} m? c) ¿Cuál sería el radio de la Tierra si su masa no cambiara, pero tuviera la misma masa, por unidad de volumen, que el núcleo de oro?
Respuesta.
a) 5,50 x 10^3 kg/m^3, b) 2,30 x 10^{17} kg/m^3, c) 184 m

24. Calcule el volumen de la tabla rectangular con altura de 17,5 mm, ancho de 29,4cm y longitud 115,4 cm. Recuerde la regla que se refiere a las cifras significativas.



Respuesta.
5,94 x 10^3 cm^3

25. Si usted mide los lados de un cuadrado y son de diez centímetros con una exactitud de ±1 %, ¿cuál es el área del cuadrado y cuál es la incertidumbre?
Respuesta.
(100 ± 2) cm^2

26. Sume los números siguientes: 3,57 x 10^2, 2,43 x 10^3 y 4,865 x 10^2.
Respuesta.
3,27 x 10^3

27. Un legajo de papel copia tiene 5,08 cm de espesor. ¿Cuál es el espesor de una sola hoja del papel? Exprese su respuesta en m y mm.
Respuesta.
1,02 x 10^{-4} m o 0,102 mm

28. El piso rectangular de un gimnasio tiene lados de longitud de $x \pm \Delta x$ por $y \pm \Delta y$ donde Δx y Δy son las incertidumbres estimadas en las mediciones y son pequeñas comparadas con x e y. Demuestre por cálculo directo que el área del piso y la incertidumbre en esa área están dadas por $A = xy \pm xy\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)$ cuando se ignoran términos muy pequeños, del orden de $(\Delta x)^2$. (En la mayor parte de los casos, este resultado sobrestima la incertidumbre en el área, porque no toma en consideración que las incertidumbres en las longitudes, Δx y Δy, provienen de una serie de medidas, que tienen una dispersión natural en sus valores.)

29. Estime el espesor de las páginas de un libro. Dé su resultado en milímetros.
Respuesta.
Aproximadamente 0,06 mm

30. Alrededor de cuántos ladrillos se requieren para construir una pared de altura hasta el hombro de 100 pies de largo? Los ladrillos estándar tienen 8 pulg de largo por 2 1/4 pulg de alto y están separados por 3/8 de pulgada de mortero.
Respuesta.
3,3 x 10^3 ladrillos

31. ¿Cuál es el volumen en milímetros cúbicos de un cubo de 1,00 pulg por lado?
Respuesta.
1,64 x 10^4 mm^3

32. En algunos países el consumo de gasolina de un automóvil se expresa en litros consumidos por 100 km de viaje. Si un automóvil logra 27 millas/galón, cuál es el consumo de combustible en litros por 100 km? (1 gal = 3,7853 L)
Respuesta.
8,7 L/100 km

33. La velocidad del sonido a la temperatura ambiente es 340 m/s. Exprese la velocidad del sonido en unidades de millas por hora.
Respuesta.
761 mi/h

34. a) ¿Cuántos milisegundos hay en un minuto? ¿Cuántos gigasegundos hay en un siglo?
Respuesta.
a) 1 min = 60000 ms, b) 1 siglo = 3,16 Gs

35. a) Calcule la altura de un cilindro de radio R que tiene el mismo volumen de una esfera de radio R. b) Demuestre que el cilindro tiene un área superficial mayor que la esfera.
Respuesta.
$$h = \frac{4}{3}R$$

36. Considere una esfera que se ajusta exactamente dentro de un cubo. ¿Cuál es la relación del volumen de la esfera al volumen del cubo?
Respuesta.
$\pi / 6$

37. Un vaso cilíndrico para malteada tiene un radio interior medido de $r \pm \Delta r$ y una altura de $h \pm \Delta h$. Demuestre que el volumen del vaso es $V = \pi r^2 h \pm 2\pi r h \Delta r \pm \pi r^2 \Delta h$ si se ignoran los términos muy pequeños del orden $(\Delta r)^2$

CAPITULO 2. Movimiento rectilíneo

DEFINICIÓN DE PARTÍCULA.
El Punto Material
Es una idealización de los cuerpos que existen en la naturaleza y que llamamos punto material. Es un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables al compararlas con las otras dimensiones que intervienen en el movimiento.
La Mecánica comienza con el estudio de los puntos materiales y después extiende estos estudios a los sistemas de puntos materiales, incluyendo cuerpos rígidos y deformables.
El punto material, a diferencia de un punto geométrico, está asociado a una masa inercial; esta propiedad está íntimamente ligada al movimiento de los cuerpos, como podemos ver cuando tratamos de entender cómo se mueven los cuerpos.

CONCEPTO DE MOVIMIENTO
El **movimiento** es un fenómeno físico que se define como todo cambio de posición que experimentan los cuerpos en el espacio, con respecto al tiempo y a un punto de referencia, variando la distancia de dicho cuerpo con respecto a ese punto o sistema de referencia, describiendo una trayectoria. Para producir movimiento es necesaria una intensidad de interacción o intercambio de energía que sobrepase un determinado umbral.
La parte de la física que se encarga del estudio del movimiento es la cinemática.

CLASIFICACIÓN DEL MOVIMIENTO
Según se mueva un punto o un sólido pueden distinguirse distintos tipos de movimiento:

Según la trayectoria del punto: Rectilíneo y curvilíneo
Movimiento rectilíneo: La trayectoria que describe el punto es una línea recta.
Movimiento curvilíneo: El punto describe una curva cambiando su dirección a medida que se desplaza.
Casos particulares del movimiento curvilíneo son la rotación describiendo un círculo en torno a un punto fijo, y las trayectorias elípticas y parabólicas.

Según la trayectoria del sólido: Traslación y rotación.
Traslación: Todos los puntos del sólido describen trayectorias iguales, no necesariamente rectas.
Rotación: Todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares concéntricas.

Según la dirección del movimiento:
Alternativo y pendular.
Alternativo: Si la dirección del movimiento cambia, el movimiento descrito se denomina alternativo si es sobre una trayectoria rectilínea o pendular.
Pendular: Si lo es sobre una trayectoria circular (un arco de circunferencia).

Según la velocidad: Uniforme y uniformemente variado.
Movimiento uniforme: La velocidad de movimiento es constante
Movimiento uniformemente variado: La aceleración es constante, como es el caso de los cuerpos en caída libre sometidos a la aceleración de de la gravedad.

SISTEMAS DE REFERENCIA. POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO.

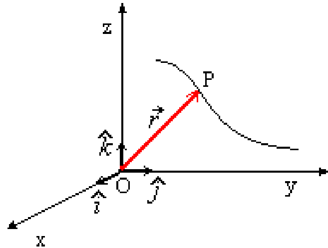
El movimiento es una noción esencialmente relativa. Así resulta que el movimiento como el reposo son hechos relativos, no se puede decir que algo se mueve o que está en reposo sin añadir respecto a qué. En consecuencia necesitamos un sistema de referencia para descubrir el movimiento.

Sistemas de referencia. Desde el punto de vista estrictamente matemático, un sistema de referencia en un espacio vectorial de dimensión ***n*** está formado por ***n*** vectores linealmente independientes, formando una base del espacio, y por un punto, definido por ***n*** coordenadas, que suele llamarse origen del sistema de referencia.
En el dominio de la física, el espacio suele ser la base más habitual la llamada ortonormal ($\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$), y el origen se sitúa a conveniencia del observador. Los vectores de la base son $\hat{i}$ = (1,0,0), $\hat{j}$ = (0,1,0) y $\hat{k}$ = (0,0,1).
Atendiendo a su posible estado de reposo o movimiento, los sistemas de referencia pueden ser clasificados siempre y cuando hablemos de su relación respecto a otro sistema de referencia que arbitrariamente supongamos inmóvil. En efecto, debe tenerse en cuenta que cualquier sistema de referencia está moviéndose respecto a otro (este papel gira y se traslada con la Tierra alrededor del Sol, el cual a su vez se desplaza en la galaxia, que a su vez se expande en el Universo...), por lo que no cabe hablar de un sistema de referencia absoluto.
De acuerdo con lo anterior, un sistema de referencia puede estar:
a) en reposo respecto a otro
b) moviéndose con velocidad constante $\vec{v}$ respecto al supuestamente fijo
c) con una aceleración respecto al fijo.

Un buen ejemplo del primer caso podemos encontrarlo en un sistema de referencia como la pizarra, que se encuentra en reposo relativo respecto a las paredes del aula (en condiciones normales).
Un ejemplo de sistema de referencia inercial podemos encontrarlo en un tren que se mueve en un tramo de vía rectilíneo con una velocidad sensiblemente constante.

Y por último, la propia Tierra constituye un sistema de referencia no inercial, ya que gira con una aceleración normal, que si bien es pequeña, en ciertos fenómenos se observa con claridad.

Vector Posición.- Para fijar la posición de un punto en el espacio respecto a un origen de coordenadas bastan tres números que pueden ser las proyecciones sobre los ejes de un sistema cartesiano ortogonal.



El vector posición del punto P es:

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r}$

El movimiento quedará especificado si conocemos el vector posición para cada instante, es decir:

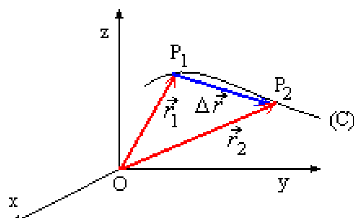
$\vec{r} = \vec{r}(t)$

Esto se conoce como ley de movimiento.
El vector posición puede ser expresado a través de las ecuaciones paramétricas de sus componentes en función del tiempo:

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$

$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

Desplazamiento.
La figura muestra una partícula que se está moviendo a lo largo de la trayectoria curvilínea C.

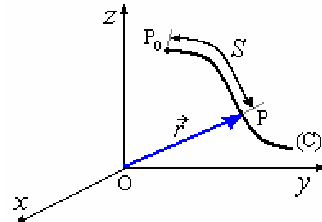


Sean P_1 y P_2 las posiciones de la partícula en los instantes t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$. Los vectores posición correspondientes son

$\overline{\mathrm{OP}}_1$ y $\overline{\mathrm{OP}}_2 = \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$.

Siendo $\Delta\vec{r}$ el vector desplazamiento y describe el desplazamiento de la partícula de la posición P_1 a la posición P_2.

Trayectoria y Ecuación Horaria del Movimiento.-
Se llama trayectoria de una partícula en movimiento al lugar geométrico de las posiciones efectivamente ocupadas por la partícula en el transcurso del tiempo. De acuerdo al tipo de movimiento podrá ser una recta, circunferencia, espiral, parábola o curvas tan complicadas como se nos ocurra.
La trayectoria no define el movimiento, pues no sabemos en que instante de tiempo ocupó cada punto. Sabemos dónde estuvo, pero no cuando y si estuvo varias veces en cada punto o no. Hace falta la ecuación horaria.
Para encontrar la ecuación horaria debemos medir las distancias en función del tiempo.



En la figura P_0 es un origen fijo sobre la curva (C) que porta la trayectoria.
Sea P la posición de la partícula en el instante t sobre la trayectoria definida por el arco

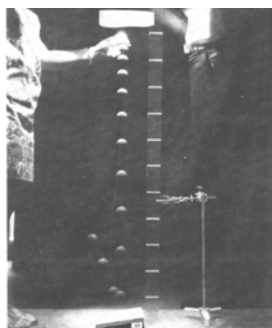
$\overset{\frown}{P_0P} = S$

La ecuación horaria del movimiento de la partícula P es

$S = S(t)$

Ejemplo experimental. Estudio del movimiento de la caída libre de un cuerpo.
Solución.
Si dejamos caer un objeto, obtenemos que la trayectoria sea una recta vertical.
Para encontrar la ley del movimiento podemos intentar medir a partir de dónde la dejamos caer, distancias sucesivas para diferentes tiempos.
Una forma experimental es usando una película fotográfica y una flash electrónico que se encienda por ejemplo cada 1/30 de segundo. En una habitación oscura dispondremos el cuerpo, la película y un disparador que deje caer el cuerpo y simultáneamente accione el flash. Paralelamente a la trayectoria a seguir por el objeto se fija una regla.

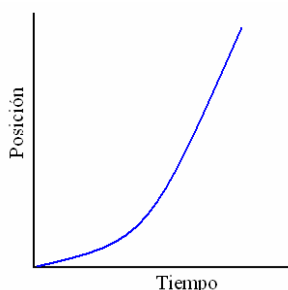




La fotografía mostrada permite conocer las cotas de la foto en los diferentes instantes bien determinados. La tabla muestra los resultados de la fotografía:

Tiempo	Cota(m)
t_0	0,2480
t_1	0,3250
t_2	0,4130
t_3	0,5130
t_4	0,6235
t_5	0,7450
t_6	0,8875
t_7	1,0215
t_8	1,1760
t_1	1,3405
t_{10}	1,5155

Tracemos la curva representativa del la función $z = f(t)$



Esta curva corresponde a una parábola y su expresión matemática es

$z = kt^2$

Donde $\begin{cases} z \text{ está en segundos} \\ k = 4{,}9\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ t \text{ está en segundos} \end{cases}$

Luego la ecuación horaria es

$s = kt^2$

Si fijamos el origen del movimiento en $z = 0$, la ley del movimiento es

$\vec{r} = -kt^2\hat{k}$

Las ecuaciones paramétricas son

$x = 0$, $y = 0$ y $z = kt^2$

En esencia para cualquier movimiento debemos ingeniarnos para obtener la ecuación horaria y conocida su trayectoria, queda determinado el movimiento.

VELOCIDAD Y RAPIDEZ

Rapidez. La rapidez (que en el lenguaje común se denomina simplemente velocidad) se define como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido. La distancia s recorrida a lo largo de una trayectoria es una magnitud escalar, independiente de la dirección. Como el tiempo también es un escalar, la rapidez es también un escalar.

La rapidez se designa mediante el símbolo v y sus dimensiones son:

$[v] = \text{LT}^{-1}$

La unidad en el sistema SI es el metro por segundo (m/s).

La figura muestra una partícula que se está moviendo a lo largo de la trayectoria curva C. En el instante t_1 esta en P_1, a una distancia S_1 de un punto P_0 de referencia. En el instante t_2 está en P_2 a una distancia S_2 del punto de referencia.



En el tiempo que transcurre entre t_1 y t_2, $\Delta t = t_2 - t_1$, la partícula ha recorrido una distancia ΔS es la diferencia entre S_2 y S_1, esto es $\Delta S = S_2 - S_1$.

Se define como **rapidez media** dentro de este intervalo

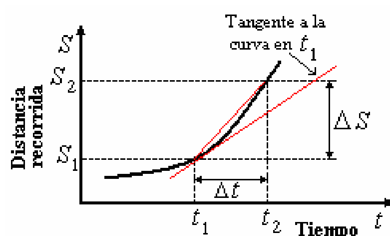
$$v_m = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

El símbolo Δ (delta) significa un incremento de una magnitud física.

Si la rapidez de la partícula varía a lo largo de la trayectoria, para conocer con mejor precisión el movimiento debemos hacer los intervalos ΔS más pequeños y tomar la rapidez media de cada uno de ellos. La figura a continuación nos muestra el gráfico distancia recorrida versus tiempo, observen que cuando t_2 tiende a t_1, Δt tiende a cero.

Mediante este proceso llamamos a la **rapidez instantánea** *v* en el instante *t*. Este proceso se expresa matemáticamente como

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$



La cantidad $\frac{dS}{dt}$ se llama "derivada de S con respecto a t" y el proceso de encontrarla se llama derivación o diferenciación. La notación dS , dt , expresa incrementos infinitesimalmente pequeños que se conocen como diferenciales.

Ejemplo 1.
a) Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve de acuerdo a la ley horaria

$S = At^2$

b) Si A = 1,4 m/s ^{2} , hallar la distancia a la que se encuentra la partícula y su rapidez para 10 segundos después de iniciado su movimiento.

Solución.
a) Si en el tiempo t está en $S_{(t)}$:

$$S_{(t)} = At^2$$

Transcurrido un tiempo Δt , la partícula estará en $S_{(t+\Delta t)}$

$$S_{(t+\Delta t)} = A(t + \Delta t)^2$$
$$= At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t)^2 ,$$

Como

$$\Delta S = S_{(t+\Delta t)} - S_t$$
$$= At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t) - At^2$$
$$= 2At\Delta t + A(\Delta t)^2$$

La rapidez en el instante t es:

$$v_{(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2At\Delta t + A(\Delta t)^2}{\Delta t} = 2At$$

b) Para $t = 10$ es

$$S_{(10)} = \left(1{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{s})^2 = 140\ \text{m}$$

y su rapidez es

$$v_{(10)} = 2\left(1{,}4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{s})^2 = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 2. Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve según la ecuación horaria

$$S(t) = A\text{sen}(\omega t)$$

Solución.
En el intervalo de tiempo de t hasta $t + \Delta t$ la partícula que se mueve:

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$$
$$= A\text{sen}\,\omega(t + \Delta t) - A\text{sen}\,\omega t$$
$$= A\text{sen}\,\omega t \cos(\omega \Delta t) + A\cos\omega t\,\text{sen}(\omega \Delta t)$$
$$- A\text{sen}\,\omega t$$

La rapidez en un instante t cualquiera es

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A\text{sen}\,\omega t \cos(\omega \Delta t) + A\cos\omega t\,\text{sen}(\omega \Delta t) - A\text{sen}\,\omega t}{\Delta t}$$
$$v = A\omega \cos \omega t$$

El proceso desarrollado en los dos ejemplos anteriores se hace simple con la práctica.
Hay muchas reglas o fórmulas para derivar diferentes tipos de funciones. Estas pueden memorizarse o encontrarse en tablas. La tabla siguiente es una pequeña muestra de estas.

Derivadas de algunas funciones

Función	Derivada
$S = t^n$	$\frac{dS}{dt} = nt^{n-1}$
$S = c$	$\frac{dS}{dt} = 0$
$S = cu$	$\frac{dS}{dt} = c\frac{du}{dt}$
$S = u + v$	$\frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$
$S = uv$	$\frac{dS}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$
$S = A\text{sen}\,\omega t$	$\frac{dS}{dt} = A\omega\cos\omega t$
$S = A\cos\omega t$	$\frac{dS}{dt} = -A\omega\text{sen}\,\omega t$

Ejemplo 3. Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve de acuerdo a la ley horaria $S = At^2$, usando fórmulas de la tabla anterior.

Solución.
Tenemos que:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(At^2)}{dt} = A\frac{dt^2}{dt} = 2At$$

Ejemplo 4. Hallar una expresión para la rapidez de una partícula que se mueve de acuerdo a la ley

horaria $S(t) = A\text{sen}(\omega t)$, usando fórmulas de la tabla anterior.

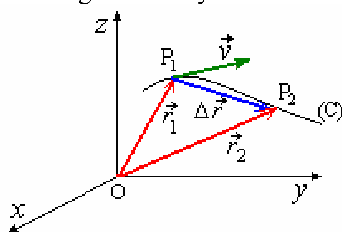
Solución.

Tenemos que

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(A\text{sen}\,\omega t)}{dt} = A\frac{d\text{sen}\,\omega t}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

Velocidad. La velocidad (que más apropiadamente sería vector velocidad), a diferencia de la rapidez debemos incluir el concepto de dirección en nuestro estudio; para esto debemos emplear vectores.

La figura muestra una partícula que se está moviendo a lo largo de la trayectoria curvilínea C.



Sean P_1 y P_2 las posiciones de la partícula en los instantes t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$. Los vectores posición correspondientes son $\overline{OP_1} = \vec{r}_1$ y $\overline{OP_2} = \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$. Siendo $\Delta\vec{r}$ el vector desplazamiento y describe el desplazamiento de la partícula de la posición P_1 a la posición P_2.

Velocidad media. El cociente entre el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el intervalo de tiempo Δt es el vector velocidad media.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Como el desplazamiento es un vector y el tiempo es un escalar positivo, la velocidad es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección y sentido que el desplazamiento. Esto significa que si una partícula sufre un desplazamiento negativo, su velocidad será también negativa.

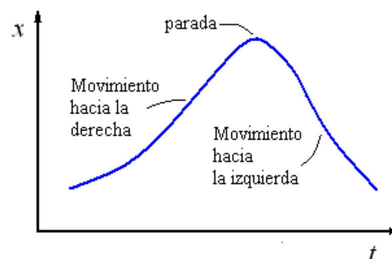
Velocidad instantánea. Como en el caso de la rapidez obtendremos la velocidad instantánea $\vec{v}$ tomando la velocidad media en un intervalo de tiempo cada vez menor Δt medido desde un cierto tiempo t_1. En el límite, cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La dirección de este vector es la dirección límite del vector cuando $\Delta t \to 0$ de la figura anterior. Es evidente que en este límite la dirección de $\Delta\vec{r}$ es la de la tangente la trayectoria en P_1.

La magnitud del vector velocidad instantánea, $\vec{v}$, es decir $|\vec{v}|$ o simplemente v es igual a la rapidez instantánea en ese punto.

La velocidad es la pendiente del gráfico de *x* versus *t*, como se muestra en la figura.

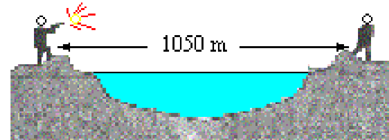


Cuando la pendiente es positiva, el objeto se está moviendo a la derecha.

Cuando la pendiente es negativa, el objeto se está moviendo a la izquierda.

Cuando la pendiente es cero, el objeto se detiene.

Ejemplo 5. Entre dos observadores hay una distancia de 1050 m, uno de ellos dispara un arma de fuego y el otro cuenta el tiempo que transcurre desde que ve el fogonazo hasta que oye el sonido, obteniendo un valor de 3 s. Despreciando el tiempo empleado por la luz en hacer tal recorrido, calcular la velocidad de propagación del sonido.

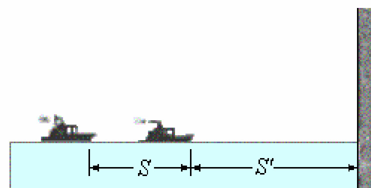


Solución.

La velocidad es:

$c = s/t = 1050/3 = 350$ m/s

Ejemplo 6. Nos encontramos en una batalla naval, en un buque situado entre el enemigo y los acantilados de la costa. A los 3 s de ver un fogonazo oímos el disparo del cañón, y a los 11 s del fogonazo percibimos el eco. Calcular la distancia a que están de nosotros el enemigo y la costa. Velocidad del sonido, 340 m/s.



Solución.

Despreciando el tiempo empleado por la luz en su recorrido, la distancia a que se encuentra el enemigo es:

$S = 340 \text{ x } 3 = 1020$ m

El sonido emplea para ir y volver a la costa, desde nuestra posición, un tiempo que es:

$t = 11 - 3 = 8\text{ s} \Rightarrow 2S' = 340 \text{ x } 8 \Rightarrow S' = 1360$ m

La costa está a 1020 + 1360 = 2380m.

Ejemplo 7. La posición de una partícula en coordenadas cartesianas está dada por la ecuación

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

donde

$$x(t) = 5 + 6t^2, \quad y(t) = 3t, \quad z(t) = 6$$

t en segundos, x, y, z en metros.
a) Determinar el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 1$ s.
b) Determinar la velocidad media
c) Determinar la velocidad y la rapidez para $t = 1$ s.
Solución.
a) para $t = 0$ s, $x = 5$m, $y = 0$m, $z = 6$m

$$\vec{r}_0 = 5\hat{i} + 6\hat{k}$$

Para $t = 1$s, $x = 11$m, $y = 3$m, $z = 6$m

$$\vec{r}_1 = 11\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

El desplazamiento es

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (11-5)\hat{i} + (3-0)\hat{j} + (6-6)\hat{k}$$
$$= 6\hat{i} + 3\hat{j}$$

b) la velocidad media es

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{6\hat{i} + 3\hat{j}}{1-0} = 6\hat{i} + 3\hat{j}$$

c) la velocidad instantánea es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left[\left(5 + 6t^2\right)\hat{i} + 3t\hat{j} + 6\hat{k}\right]}{dt}$$
$$= 12t\hat{i} + 3\hat{j}$$

La magnitud de v es

$$v = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$$
$$= 12{,}4 \text{ m/s}$$

Valor que corresponde a la rapidez instantánea para $t = 1$s.

Ejemplo 8. Un auto está parado ante un semáforo. Después viaja en línea recta y su distancia respecto al semáforo está dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, donde $b = 2{,}40$ m/s^2 y $c = 0{,}120$ m/s^3.
a) Calcule la velocidad media del auto entre $t = 0$ y $t = 10{,}0$ s.
b) Calcule la velocidad instantánea en
i) $t = 0$; ii) $t = 5{,}0$ s; iii) $t = 10{,}0$ s.
c) ¿Cuánto tiempo después de arrancar vuelve a estar parado el auto?
Solución.
a) En $t_1 = 0$, $x_1 = 0$, tal que la ecuación

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$v_m = \frac{x_2}{t_2} = \frac{(2{,}4)(10)^2 - (0{,}120)(10)^3}{(10)}$$
$$= 12{,}0 \text{ m/s}$$

b) de la ecuación $v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, la velocidad instantánea en función del tiempo es

$$v_x = 2bt - 3ct^2 = (4{,}80)t - (0{,}360)t^2$$

tal que
i) $v_x(0) = 0$,
ii) $v_x(5) = (4{,}80)(5) - (0{,}360)(5)^2 = 15{,}0$ y
iii) $v_x(10) = (4{,}80)(10) - (0{,}360)(10)^2 = 12{,}0$
c) el auto está en reposo cuando $v_x = 0$.
Por consiguiente $(4{,}80)t - (0{,}360)t^2 = 0$.
El único tiempo después de $t = 0$ en que el auto se encuentra en reposo es $t = \frac{4{,}8}{0{,}360} = 13{,}3$ s

Ejemplo 9. Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas
En las cuestas arriba lleva una rapidez constante de 5 km/h y en las cuestas abajo 20 km/h. Calcular:
a) ¿Cuál es su rapidez media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud?
b) ¿Cuál es su rapidez media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas?
c) ¿Cuál es su rapidez media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?
Solución.

a) $$v_m = \frac{s_{total}}{t_{total}} = \frac{s_{subida} + s_{bajada}}{t_{total}}$$
$$= \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 8 \text{ km/h}$$

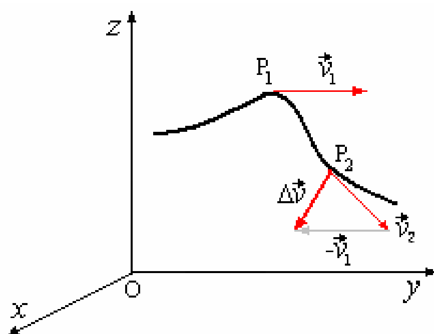
b) $$v_m = \frac{v_1 t + v_2 t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$
$$= 12{,}5 \text{ km/h}$$

c) $$v_m = \frac{v_1 2t + v_2 t}{3t} = \frac{2v_1 + v_2}{3} = \frac{2 \times 5 + 20}{3}$$
$$= 10 \text{ km/h}$$

(Obsérvese que la rapidez media es la media aritmética de las rapideces uniformes únicamente en el caso de que el tiempo que duran los distintos recorridos sea el mismo).

ACELERACIÓN
En el lenguaje ordinario el término aceleración se refiere sólo a incrementos del módulo de la velocidad (rapidez), pero en Física se utiliza con un sentido más amplio para designar un cambio del vector velocidad. En Física se dice que un cuerpo está siendo acelerado no sólo cuando aumenta su velocidad sino también cuando disminuye o cambia de dirección.
Se llama aceleración al cambio de la velocidad (vector velocidad) en el tiempo.

Aceleración Media.



La razón en la cual la velocidad cambia se mide por la aceleración. Así si un objeto tiene la velocidad $\vec{v}_1$ en el t_1 del tiempo y velocidad $\vec{v}_2$ en el t_2, su aceleración media es

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{i}$$

Supongamos que una partícula que se mueve en la trayectoria C de la figura anterior en el instante t_1 está en P_1 con una velocidad v_1 y en el instante $t_2 = t_1 + \Delta t$ está en P_2 con una velocidad v_2. Por definición el vector aceleración media de la partícula entre los instantes es t_1 y t_2 es

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Las dimensiones de la aceleración son $[a] = LT^{-2}$

La unidad de la aceleración en el sistema SI está en metros / segundo por segundo:

$$\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Aceleración Instantánea o simplemente aceleración. Cuando $t_2 \to t_1$ o $\Delta t \to 0$ llegaremos al valor de la aceleración en el instante t_1. Este proceso para el límite se expresa matemáticamente como

$$\vec{a}_{(t_1)} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Como $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, tenemos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Es mejor evitar el uso de la palabra común “desaceleración.”

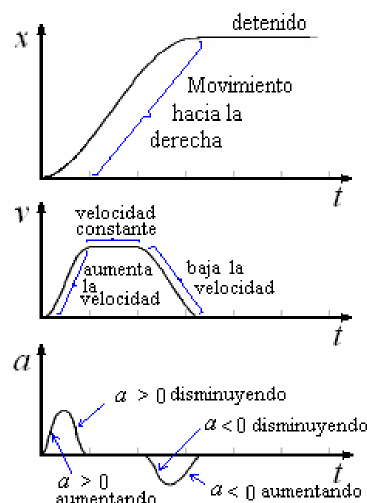
Describa la aceleración simplemente como positiva o negativa.

Observe que la aceleración negativa no significa necesariamente “bajar la velocidad”.

Cuando la velocidad y la aceleración ambas tienen el mismo signo, el objeto aumenta su velocidad.

Cuando la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos, el objeto disminuye su velocidad.

Los gráficos de la figura siguiente ilustran el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración para un objeto en movimiento.



Ejemplo 10. Una partícula se mueve a lo largo de una línea curva

$$\vec{r}_{(t)} = \left(t^2 + t\right)\hat{i} + (2t - 1)\hat{j} + \left(t^3 - 2t^2\right)\hat{k}$$

Encontrar:

a) La velocidad para $t = 1\,\text{s}$ y para $t = 3\,\text{s}$.

b) La aceleración media entre $t = 1\,\text{s}$ y para $t = 3\,\text{s}$.

c) La aceleración y su magnitud para $t = 1\,\text{s}$.

Solución.

a) Las ecuaciones paramétricas son:

$$x(t) = t^2 + 1,\; y(t) = 2t - 1,\; z(t) = t^3 - 2t^2$$

Las componentes de la velocidad son:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t + 1,\; v_y = \frac{dy}{dt} = 2.$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 3t^2 + 4t$$

La velocidad es:

$$\vec{v}_{(t)} = (2t + 1)\hat{i} + 2\hat{j} + \left(3t^2 - 4t\right)\hat{k}$$

Para $t = 1\,\text{s}$: $\vec{v}_{(1)} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

Para $t = 3\,\text{s}$. $\vec{v}_{(3)} = 7\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$

b) La aceleración media entre $t = 1\,\text{s}$ y $t = 3\,\text{s}$.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{(3)} - \vec{v}_{(1)}}{3 - 1} =$$

$$\frac{(7 - 3)\hat{i} + (2 - 2)\hat{j} + (15 + 1)\hat{k}}{2}$$

$$\vec{a}_m = 2\hat{i} + 8\hat{k}$$

c) la aceleración instantánea es

$$\vec{a}_{(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(2t+1)\hat{i} + 2\hat{j} + (3t^2 - 4t)\hat{k}\right]$$

$$= 2\hat{i} + (6t-4)\hat{k}$$

para $t = 1s$

$$\vec{a}_{(1)} = 2\hat{i} + 2\hat{k}$$

la magnitud de la aceleración es

$$a(1) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$$

Ejemplo 11. Una persona que se asoma por la ventana de un edificio alto de oficinas observa lo que sospecha es un ovni. La persona registra la posición del objeto en función del tiempo y determina que está dada por

$$\vec{r}_{(t)} = -5{,}0t\hat{i} + 10{,}0t\hat{j} + (7{,}0t - 3{,}0t^2)\hat{k}$$

a) Obtenga los vectores de: desplazamiento, velocidad y aceleración del objeto en $t = 5{,}0$ s.
b) ¿Hay algún tiempo en que la velocidad del objeto sea cero?
c) ¿La aceleración del objeto es constante o cambia con el tiempo?

Solución.
a) El vector desplazamiento es:

$$\vec{r}_{(t)} = -5{,}0t\hat{i} + 10{,}0t\hat{j} + (7{,}0t - 3{,}0t^2)\hat{k}$$

El vector velocidad es la derivada del vector desplazamiento:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -5{,}0\hat{i} + 10{,}0\hat{j} + [7{,}0 - 2(3{,}0)t]\hat{k}$$

y el vector aceleración es la derivada del vector velocidad:

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -6{,}0\,\hat{k}$$

en $t = 5{,}0$ s:

$$\vec{r}_{(5)} = -5{,}0(5)\hat{i} + 10{,}0(5)\hat{j} + \left[7{,}0(5) - 3{,}0(5)^2\right]\hat{k}$$

$$= -25{,}0\hat{i} + 50{,}0\hat{j} - 40{,}0\hat{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}(5)}{dt^2} = -6{,}0\,\hat{k}$$

b) la velocidad en ambas direcciones x e y es constante y diferente de cero, luego la velocidad nunca puede ser cero
c) La aceleración del objeto es constante, ya que t no aparece en el vector aceleración.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME.

Para que un movimiento sea rectilíneo uniforme su velocidad debe ser constante, es decir, que la aceleración sea siempre igual a cero.

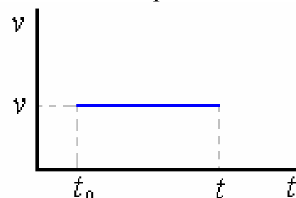
Estudio del Movimiento

Como el movimiento es uniforme $\vec{v}_m = \vec{v}$, y considerando que su trayectoria está en el eje x

$$\vec{v} = v\hat{i} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} = \frac{x - x_0}{t - t_0}\hat{i}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \tan\alpha$$

Diagrama velocidad-tiempo



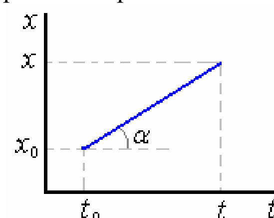
El gráfico velocidad-tiempo del movimiento uniforme es una recta paralela al eje del tiempo.

De $v = \dfrac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow x = x_0 + v(t - t_0)$

Si el instante inicial $t_0 = 0$, tenemos

$$x = x_0 + vt$$

Diagrama espacio-tiempo



El gráfico indica las posiciones instantáneas del móvil en cada instante

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO.

Para que un movimiento sea rectilíneo uniformemente variado su aceleración debe ser constante y diferente de cero.

Estudio del Movimiento

Como la aceleración es constante, $\vec{a}_m = \vec{a}$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{constante}$$

$$\vec{a} = a\hat{i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{i}$$

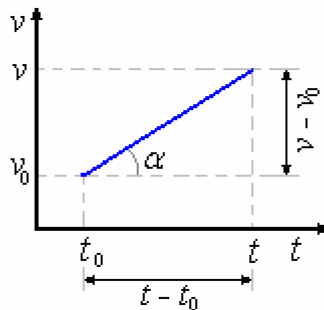
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$v - v_0 = a(t - t_0)$$

Si el tiempo inicial $t_0 = 0$

$$v = v_0 + at$$

Diagrama velocidad-tiempo



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \tan\alpha$$

La velocidad media:

Si la posición en t_0 es $\vec{r}_0 = x_0\hat{i}$ y la posición en t es $\vec{r} = x\hat{i}$, la velocidad media en este intervalo es

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

La posición.

De lo anterior:

$$x - x_0 = v_m(t - t_0)$$

y $x = x_0 + v_m(t - t_0)$

Por otra parte como la velocidad es una función lineal, la velocidad media v_m es

$$v_m = \frac{v + v_0}{2}$$

y como $v = v_0 + a(t - t_0)$

resulta

$$v_m = \frac{v_0 + [v_0 + a(t - t_0)]}{2} = v_0 + \frac{a(t - t_0)}{2}$$

finalmente

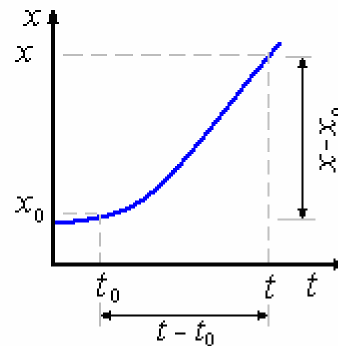
$$x = x_0 + \left[v_0 + \frac{a(t - t_0)}{2}\right](t - t_0)$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

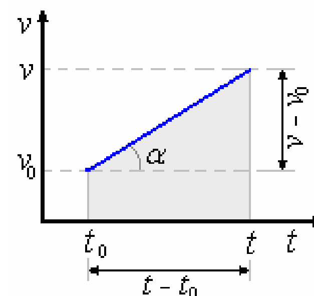
Si el tiempo inicial $t_0 = 0$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Diagrama espacio -tiempo



Ejemplo 12. Demostrar que el área encerrada bajo la curva de la velocidad del diagrama velocidad-tiempo es igual al módulo del desplazamiento $\Delta x = x - x_0$.



Solución.

El área encerrada es igual al área de un trapecio cuyas bases son $b_1 = v$ y $b_2 = v_0$ con altura $h = (t - t_0)$.

$$\text{Area del trapecio} = \frac{(b_1 + b_2)}{2}h$$

$$= \frac{(v + v_0)}{2}(t - t_0)$$

$$= v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)(t - t_0)$$

Pero como $a = \tan\alpha = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)}$

$$\Rightarrow (v - v_0) = a(t - t_0)$$

Luego

$$\text{Area del trapecio} = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Valor que precisamente corresponde al desplazamiento $\Delta x = x - x_0$.

LA ECUACIÓN DE TORRICELLI.

Podemos obtener una relación muy útil eliminando el tiempo como variable en la ecuación

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Como $a = \frac{(v - v_0)}{(t - t_0)} \Rightarrow (t - t_0) = \frac{(v - v_0)}{a}$

Sustituyendo

$$x = x_0 + v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

De donde se puede despejar:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Conocida como la ecuación de Torricheli.

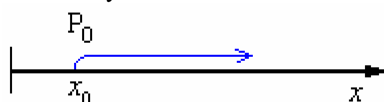
Descripción del movimiento de una partícula con aceleración constante.

Consideramos una aceleración constante $a > 0$ en el sentido positivo de la trayectoria.

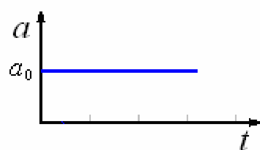
1er Caso:

La partícula tiene una velocidad inicial $v_0 \geq 0$.

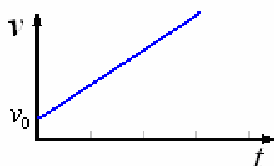
La partícula se desplaza de P_0 al infinito con un sentido constante y aumentando su velocidad.



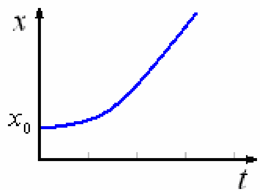
Los diagramas aceleración-tiempo, velocidad-tiempo y espacio-tiempo correspondientes son los siguientes:



$a_0 = \text{constante}$



$v = v_0 + at$

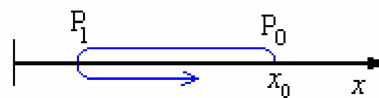


$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

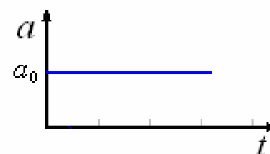
2do. Caso:

La partícula tiene una velocidad inicial $v_0 < 0$.

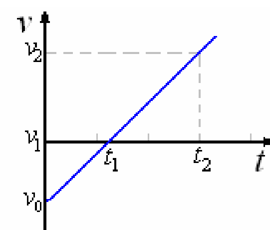
La partícula se desplaza de P_0 en sentido negativo con movimiento retardado (desacelerado) hasta detenerse en P_1 y cambia de sentido. A partir de ese instante la velocidad aumenta constantemente (acelerado) y se desplaza al infinito con un sentido constante.



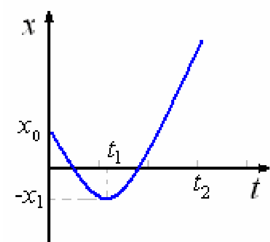
Los diagramas aceleración-tiempo, velocidad-tiempo y espacio-tiempo correspondientes son los siguientes:



$a_0 = \text{constante}$



$v = v_0 + at$



$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

Ejemplo 13. Una tortuga camina en línea recta sobre lo que llamaremos eje *x* con la dirección positiva hacia la derecha. La ecuación de la posición de la tortuga en función del tiempo es

$x_{(t)} = 50{,}0$ cm + (2,00 cm/s)t - (0,0625 cm/s^2)t^2 .

a) Determine la velocidad inicial, posición inicial y aceleración inicial de la tortuga.

b) ¿En qué instante *t* la tortuga tiene velocidad cero?

c) ¿Cuánto tiempo después de ponerse en marcha regresa la tortuga al punto de partida?

d) ¿En qué instantes *t* la tortuga está a una distancia de 10,0 m de su punto de partida? ¿Que velocidad (magnitud y dirección) tiene la tortuga en cada uno de esos instantes?

e) Dibuje las gráficas: x-t, v_x-t y a_x-t para el intervalo de $t = 0$ a $t = 40{,}0$ s.

Solución.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2{,}00 \text{ cm/s} - (0{,}125 \text{ cm/s}^2)t$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0{,}125 \text{ cm/s}^2$$

a) En $t = 0, x = 50{,}0\,\text{cm}, v_x = 2{,}00\,\text{cm/s}$,

$a_x = -0{,}125\,\text{cm/s}^2$.

b) Hagamos $v_x = 0$ y resolvamos para t:

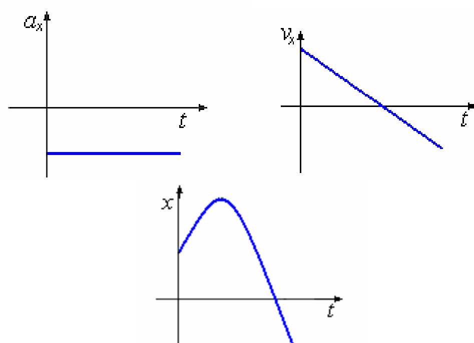
$t = 16{,}0$ s

c) Hagamos $x = 50{,}0$ cm y resolvamos para t.
Esto da: $t = 0$ y $t = 32{,}0\,\text{s}$.
La tortuga regresa al punto de partida después de 32,0 s.
d) La tortuga está a 10,0 cm del punto de partida cuando $x = 60{,}0$ cm o $x = 40{,}0$ cm.
Hagamos $x = 60{,}0$ cm y resolvamos para t:
$t = 6{,}20$ s y $t = 25{,}8$ s
En $t = 6{,}20$ s, $v_x = +\,1{,}23$ cm/s.
En $t = 25{,}8$ s, $v_x = -\,1{,}23$ cm/s.
Hagamos $x = 40{,}0\,\text{cm}$ y resolvamos para t:

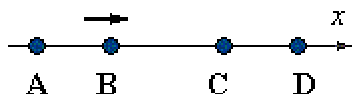
$$t = 36{,}4\,\text{s}$$

(la otra raíz de la ecuación cuadrática es negativa y por lo tanto sin significado físico).
En $t = 36{,}4$ s, $v_x = -\,2{,}55$ cm/s.

e)



Ejemplo 14. Un móvil parte del reposo y de un punto A, con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado (a =10 cm/s^2); tarda en recorrer una distancia BC = 105 cm un tiempo de 3 s, y, finalmente, llega al punto D (CD = 55 cm). Calcular:
a) La velocidad del móvil en los puntos B, C y D.
b) La distancia AB.
c) El tiempo invertido en el recorrido AB y en el CD.
d) El tiempo total en el recorrido AD.



Solución.
a)

$$\left.\begin{aligned} BC &= v_B t + \frac{1}{2}at^2 \\ 105 &= v_B 3 + \frac{1}{2}10\times 3^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_B = 20 \text{ cm/s}$$

$$v_C = v_B + at = 20 + 30 = 50 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{aligned} CD &= v_C t + \frac{1}{2}at^2 \\ 55 &= 50t + \frac{1}{2}10t^2 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow t^2 + 10t - 11 = 0 \Rightarrow t = 1$ s

$$v_D = v_C + at = 50 + 10 = 60 \text{ cm/s}$$

b) $v_B = \sqrt{2aAB}$

$$\Rightarrow AB = \frac{v_B^2}{2a} = \frac{400}{20} = 20\text{cm}$$

c)

$$\left.\begin{aligned} v_B &= at \\ 20 &= 10t \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = \frac{20}{10} = 2 \text{ s}$$

d) Será la suma de los tiempos parciales:
$t = 2 + 3 + 1 = 6$ s

MOVIMIENTO VERTICAL CON ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD.

La variación de la magnitud de la aceleración g_ϕ debido a la gravedad en la superficie de la tierra con la latitud está dada por la fórmula internacional de la gravedad adoptada en 1930 por el Congreso Geofísico Internacional:

$$g_\phi = 978{,}049000\,(1 + 0{,}0052884 \text{ sen}^2 \phi - 0{,}0000059 \text{ sen}^2 2\phi)$$

g en cm/s^2, ϕ en grados
Donde ϕ es la latitud de la tierra medida en el ecuador
Para ϕ = 0º (ecuador), g_0 = 978,0490
Para ϕ = 90º (polos), g_{90} = 983,2213

La variación de la aceleración gravitacional con la altura sobre el nivel del mar es aproximadamente

$$g = g_\phi - 0{,}000002860h$$

h en metros y g_ϕ en m/s^2
Donde $h \leq$ 40 000 m

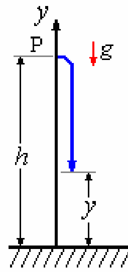
Cerca de la superficie de la tierra la magnitud de la aceleración debido a la gravedad varía muy poco con la altura y en los cálculos técnicos ordinarios se toma g = 9,81 m/s^2 (dirigido verticalmente hacia abajo).

Un cuerpo que se deja caer está sometido a la aceleración de la gravedad y su movimiento corresponde a un movimiento rectilíneo uniformemente variado en el eje vertical perpendicular a la tierra,

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$
$$a = -g$$

a) Caída libre



Si se deja caer un cuerpo desde una altura *h* sobre el nivel del piso y consideramos despreciable la resistencia del aire.

En este caso $y_0 = h$, $v_0 = 0$, luego:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = -gt$$

$$a = -g$$

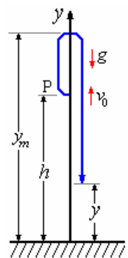
El cuerpo toca tierra cuando $y = 0$

Luego $h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

y la velocidad es $v = \sqrt{2gh}$

b) Lanzamiento hacia arriba

Si el mismo cuerpo desde la misma altura *h* se lanza hacia arriba con velocidad v_0, se mueve con un movimiento rectilíneo uniformemente retardado (desacelerado).



$$y = h + v_0 t + -\frac{1}{2}gt^2$$

$$v = v_0 - gt$$

$$a = -g$$

El cuerpo sube hasta que alcanza la altura máxima y_m. Esta corresponde a cuando la velocidad disminuye a cero.

$$v_0 - gt = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0}{g}$$

De aquí $y_m = h + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) + +\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2$

$$= h + \frac{v_0^2}{2}$$

Cuando el cuerpo pasa por el punto de lanzamiento $y = h$

$h = h + v_0 t + -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_P = \frac{2v_0}{g}$ y por

supuesto $t_P = 0$, que corresponde al tiempo inicial.

Observamos que $t_P = 2t_m$

La velocidad es

$$v_P = v_0 - g\left(\frac{2v_0}{g}\right) = v_0 - 2v_0 = -v_0$$

Finalmente toca piso cuando $y = 0$

$$h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{2v_0}{g}t - \frac{2h}{g} = 0$$

cuya solución es

$$t = \frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

toca el piso al tiempo

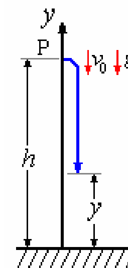
$$t = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

con una velocidad

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

c) Lanzamiento hacia abajo

Si el mismo cuerpo desde la misma altura *h* se lanza hacia abajo con una velocidad v_0, el cuerpo se mueve en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.



$$y = h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = -v_0 - gt$$

$$a = -g$$

El cuerpo alcanza el piso cuando $y = 0$.

$$h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t^2 + \frac{2v_0}{g}t - \frac{2h}{g} = 0$$

cuya solución es

$$t = -\frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

toca el piso al tiempo

$$t = -\frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2h}}{g}$$

con una velocidad

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Ejemplo 15. Desde lo alto de un edificio, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una rapidez de 12,5 m/s. La pelota llega a tierra 4,25 s, después. Determine:
a) La altura que alcanzó la pelota respecto del edificio.
b) La rapidez de la pelota al llegar al suelo.
Solución.
La altura en función del tiempo será

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Con g = 10m/s^2, v_0 = 12,5 m/s
$y = h + 12,5t - 5t^2$
a) Al tiempo t = 4,25 s, y = 0, luego:
$h + 12,5(4,25) - 5(4,25)^2 = 0$,
$\Rightarrow h = 37,19$ m
b) $v_y = 12,5 - 10t = 12,5 - 10(4,25)$
$= -30,0$ m/s

Ejemplo 16. Se deja caer un cuerpo desde una altura de y_0 = 33 m, y simultáneamente se lanza hacia abajo otro cuerpo con una rapidez inicial de 1 m/s. Encontrar el instante en que la distancia entre ellos es de 18 m.
Solución.
$y_1 = 33 - 5t^2$
$y_2 = 33 - t - 5t^2$
$y_1 - y_2 = t$
Entonces la distancia entre ellos es 18m a los 18 s

Ejemplo 17. Un cuerpo que cae, recorre en el último segundo 68,3 m. Encontrar La altura desde donde cae.
Solución. Suponiendo que se soltó del reposo
$y = h - 5t^2$

El tiempo en que llega al suelo es $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$

La distancia recorrida en el último segundo será

$$y\left(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1\right) - y\left(\sqrt{\frac{h}{5}}\right) =$$

$$5\left(\sqrt{\frac{h}{5}}\right)^2 - 5\left(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1\right)^2 = 68,2$$

$\Rightarrow h = 268,6$ m

Ejemplo 18. Desde lo alto de un acantilado, se deja caer una piedra, desde la misma altura se lanza una segunda piedra 2 s más tarde con una rapidez de 30 m/s. Si ambas golpean el piso simultáneamente. Encuentre: La altura del acantilado.
Solución.
$y_1 = h - 5t^2$
$y_2 = h - 30(t - 2) - 5(t - 2)^2$
Siendo al mismo tiempo
$y_1 = h - 5t^2 = 0$
$y_2 = h - 30(t - 2) - 5(t - 2)^2 = 0$
De aquí t = 4 s;
h = 80m

Ejemplo 19. Desde el piso, se lanza hacia arriba una pelota con una rapidez de 40 m/s. Calcule:
a) El tiempo transcurrido entre los dos instantes en que su velocidad tiene una magnitud de 2,5 m/s.
b) La distancia respecto al piso que se encuentra la pelota en ese instante.
Solución.

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

$$v_y = v_0 - gt \qquad (2)$$

a) De la ecuación (2):

$$v_y = v_0 - gt_1 = 2,5$$

$$v_y = v_0 - gt_2 = -2,5$$

Restando obtenemos:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{5}{g} = 0,5s$$

b) De la ecuación (2):

$$v_y = v_0 - gt_1 = 2,5$$

$$40 - gt_1 = 2,5$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{37,5}{9,8} = 3,83 \text{ s.}$$

Con t_1 en (1):

$$h = 40(3,83) - \frac{1}{2}g(3,83)^2 = 81,41 \text{ m.}$$

Con t_2 se obtiene la misma altura, porque es cuando la pelota está de bajada.

Ejemplo 20. Una roca cae libremente recorriendo la segunda mitad de la distancia de caída en 3(s). Encuentre
a) la altura desde la cual se soltó.
b) El tiempo total de caída.
Solución.

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

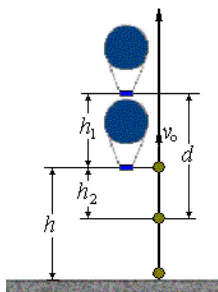
El tiempo en que alcanza h/2 es $t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$ y el tiempo en que h = 0 es $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

a) por lo tanto el tiempo empleado en la segunda parte de recorrido es

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} = 3 \Rightarrow h = 524,6 \text{ m}$$

b) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{524,6}{5}} = 10,2$ s

Ejemplo 21. Se deja caer una piedra desde un globo que asciende con una velocidad de 3 m/s; si llega al suelo a los 3 s, calcular:
a) Altura a que se encontraba el globo cuando se soltó la piedra.
b) Distancia globo-piedra a los 2 s del lanzamiento.



Solución. Tomaremos el origen de coordenadas en el punto en que se suelta la piedra. Magnitudes positivas son las que tienen direcci6n hacia arriba.
a)

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 3\text{m/s} \\ g \approx 10\text{m/s}^2 \\ t = 3\text{s} \end{array}\right\} \quad y = h + 3t - \frac{1}{2}10t^2$$

Cuando la piedra toca suelo, $y = 0$
Luego

$$h = 3(3) - \frac{1}{2}10(3)^2$$

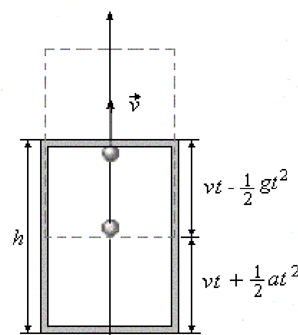
$= 36$ m
b)
$t' = 2$ s.

h_1: distancia al origen del globo en t'.
h_2: distancia al origen de la piedra en t'.

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = v_0 t' = 3 \times 2 = 6m \\ h_2 = v_0 t' + \frac{1}{2} g t'^2 = 3 \times 2 - \frac{1}{2} 10 \times 40 - 14m \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \quad d = 6 + 14$
$= 20$ m

Ejemplo 22. La cabina de un ascensor de altura 3 m asciende con una aceleración de 1 m/s^2. Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.



Solución.
Primer método:
En el instante en que empieza a caer el cuerpo el ascensor lleva una velocidad vertical hacia arriba *v*.

El espacio vertical y hacia abajo que debe recorrer la lámpara es:

$$h - \left(vt + \frac{1}{2}at^2 \right)$$

(h = altura del ascensor) y ($vt + at^2/2$) ascenso del suelo de éste. La lámpara al desprenderse lleva una velocidad inicial hacia arriba *v*. Aplicando la ecuación:

$$s = vt + \frac{1}{2}at^2$$

Siendo positivas las magnitudes hacia arriba y negativas las descendentes, tendremos:

$$-h + vt + \frac{1}{2}at^2 = vt - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g + a}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{9{,}8 + 1}} = 0{,}74 \text{ s}$$

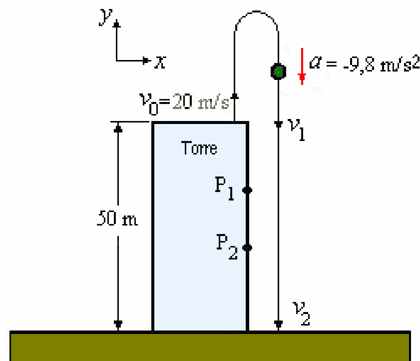
Segundo método:
La aceleración de la lámpara respecto al ascensor, considerando magnitudes positivas hacia abajo, es:
$a_{BA} = a_B - a_A = 9{,}8 - (-1) = 10{,}8$ m/s^2

$$h = \frac{1}{2}a_{BA}t^2 \quad \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_{BA}}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{10{,}8}} = 0{,}74 \text{ s}$$

Ejemplo 23. Una bola es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s de la parte alta de una torre que tiene una altura de 50 m. En su vuelta pasa rozando la torre y finalmente toca la tierra.
a) ¿Qué tiempo t_1 transcurre a partir del instante en que la bola fue lanzada hasta que pasa por el borde de la torre? ¿Qué velocidad v_1 tiene en este tiempo?
b) ¿Qué tiempo total t_2 se requiere para que la bola llegue al piso? ¿Cuál es la velocidad v_2, con la que toca el piso?

c) ¿Cuál es la máxima altura sobre el suelo alcanzada por la bola?
d) Los puntos P_1 y P_2 están a 15 y 30 m, respectivamente, por debajo del techo de la torre. ¿Qué tiempo se requiere para que la bola viaje de P_1 a P_2?
e) ¿Se desea que después de pasar el borde, la bola alcance la tierra en 3s, ¿con qué velocidad se debe lanzar hacia arriba de la azotea?



Solución.
a) Para el sistema de coordenadas mostrado en la figura, $y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.
Pero en el borde del techo $y = 0$, luego

$$0 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2,$$

De la cual $t_1 = 0$, indica el instante en el cual la bola es lanzada, y también $t_1 = 4{,}08$ s, la cual es el tiempo en que la bola retorna al borde.
Luego, de $v = v_0 + at$

$v_1 = 20 + (-9{,}8)(4{,}08) = -20\,\text{m/s}$, que es el negativo de la velocidad inicial.

b) $-50 = 20t_2 + \frac{1}{2}(-9{,}8)t_2^2 \Rightarrow t_2 = 5{,}8\,\text{s}$

$$v_2 = 20 + (-9{,}8)(5{,}8) = -37\,\text{m/s}$$

c) Máxima altura sobre tierra: $h = y_{max} + 50$.

De $v_0^2 + 2ay_{max} = 0$, $\Rightarrow$

$$y_{max} = \frac{-(20)^2}{-2(9{,}8)} = 20{,}4\,\text{m}$$

Luego, $h = 70{,}4$ m.
d) Si t_1 y t_2 son los tiempos para alcanzar P_1 y P_2, respectivamente,

$$-15 = 20t_1 - 4{,}9t_1^2 \text{ y } -30 = 20t_2 - 4{,}9t_2^2$$

Resolviendo, $t_1 = 4{,}723$ s, $t_2 = 5{,}248$ s, y el tiempo de P_1 a P_2 es $(t_2 - t_1) = 0{,}525$ s.
e) Si v_0 es la velocidad inicial deseada, entonces $-v_0$ es la velocidad cuando pasa el borde. Luego aplicando $y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ al viaje hacia abajo de la torre, encontramos:
$-50 = (-v_0)(3) - 4{,}9(3)^2$, $\Rightarrow v_0 = 1{,}96$ m/s.

Ejemplo 24. Una maceta con flores cae del borde de una ventana y pasa frente a la ventana de abajo. Se puede despreciar la resistencia del aire. La maceta tarda 0,420 s en pasar por esta ventana, cuya altura es de 1,90 m. ¿A qué distancia debajo del punto desde el cual cayó la maceta está el borde superior de la ventana de abajo?
Solución.
Si la velocidad de la maceta en la parte superior de la ventana es v_0, podemos encontrarla en función de la altura h de la ventana y el tiempo que tarda en pasarla::

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v_0 = \frac{2h - gt^2}{2t}$$

Luego: $v_0 = \frac{2(1{,}90) - (9{,}8)(0{,}42)^2}{2(0{,}42)} = 2{,}47\frac{\text{m}}{\text{s}}$

La distancia y desde la azotea al borde superior de la ventana es:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{2{,}47^2}{2(9{,}8)} = 0{,}311\,\text{m}$$

Otra forma de encontrar la distancia es: como $t = 0{,}420$ s es la diferencia entre los tiempos tomados en caer la las alturas $(y + h)$ e y, tenemos

$$t = \sqrt{\frac{2(y+h)}{g}} - \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{gt^2}{2}} + \sqrt{y} = \sqrt{y+h}$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{gt^2}{2} + \sqrt{2gyt^2} + y = y + h$$

$$\Rightarrow \frac{gt^2}{2} + \sqrt{2gyt^2} = h$$

Resolviendo para y:

$$y = \frac{1}{2g}\left(\frac{2h - gt^2}{2t}\right)^2$$

Con los datos

$$y = \frac{1}{2(9{,}8)}\left[\frac{2(1{,}9) - (9{,}8)(0{,}42)^2}{2(0{,}42)}\right]^2 = 0{,}311\,\text{m}$$

Ejemplo 25. Malabarismo. Un malabarista actúa en un recinto cuyo cielorraso está 3,0 m arriba del nivel de las manos. Lanza una pelota hacia arriba de modo que apenas llega al techo.
a) ¿Qué velocidad inicial tiene la pelota?
b) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al techo?
En el instante en que la primera pelota está en el cielorraso, el malabarista lanza una segunda pelota hacia arriba con dos terceras parte de la velocidad inicial de la primera.

c) ¿Cuánto tiempo después de lanzada la segunda pelota se cruzan las dos pelotas en el aire? d) ¿A qué altura sobre la mano del malabarista se cruzan las dos pelotas

Solución.

a) Tomemos el sentido positivo hacia arriba.

Tenemos que $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$

En el cielorraso, $v_y = 0$, $y - y_0 = 3{,}0\ \text{m}$.

Luego: $0 = v_{0y}^2 - 2(9{,}8)(3) \Rightarrow v_{0y} = 7{,}7\ \text{m/s}$.

b) También tenemos:

$v_y = v_{0y} - gt = 0 = 7{,}7 - 9{,}8t$

$\Rightarrow t = 0{,}78\ \text{s}$.

c) Tomemos el sentido positivo hacia abajo.

La primera bola viaja hacia abajo una distancia d en el tiempo t. Como comienza desde su máxima altura, $v_{0y} = 0$.

$d = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow d = (4{,}9\ \text{m/s}^2)t^2$

La segunda bola tiene

$v'_{0y} = \frac{1}{3}(7{,}7\ \text{m/s}) = 5{,}1\ \text{m/s}$.

En el tiempo t habrá viajado hacia arriba $(3{,}0\ \text{m} - d)$ y estará en el mismo lugar que la primera bola. $(3 - d) = v'_{0y}\,t - \frac{1}{2}gt^2$

$(3 - d) = 5{,}1t - 4{,}9t^2$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviéndolas obtenemos:

$t = 0{,}59\ \text{s}$ y $d = 1{,}7\ \text{m}$.

d) $3{,}0\ \text{m} - d = 1{,}3\ \text{m}$

Ejemplo 26. Una manzana cae libremente de un árbol, estando originalmente en reposo a una altura *H* sobre un césped crecido cuyas hojas miden *h*. Cuando la manzana llega al césped, se frena con razón constante de modo que su rapidez es 0 al llegar al suelo,

a) Obtenga la rapidez de la manzana justo antes de tocar el césped.

b) Obtenga la aceleración de la manzana ya dentro del césped.

c) Dibuje las gráficas: *v-t* y *a-t* para el movimiento de la manzana.

Solución.

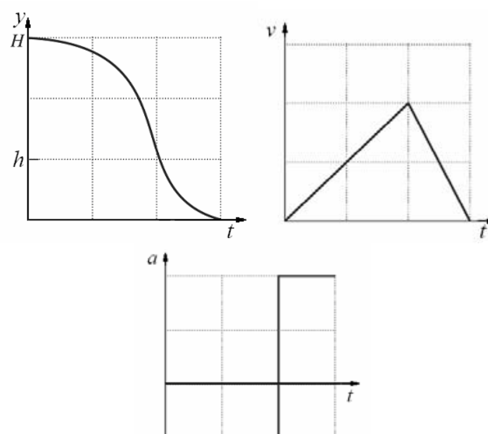
a) La rapidez de un objeto que cae una distancia H en caída libre una distancia $H - h$ es:

$v = \sqrt{2g(H - h)}$.

b) La aceleración para llevar a un objeto desde la rapidez v al reposo sobre una distancia h es:

$$a = \frac{v^2}{2h} = \frac{2g(H - h)}{2h} = g\left(\frac{H}{h} - 1\right).$$

c)



Ejemplo 27. En el salto vertical, un atleta se agazapa y salta hacia arriba tratando de alcanzar la mayor altura posible. Ni los campeones pasan mucho más de 1,00 s en el aire ("tiempo de suspensión"). Trate al atleta como partícula y sea $y_{máx}$ su altura máxima sobre el suelo. Para explicar por qué parece estar suspendido en el aire, calcule la razón del tiempo que está sobre $y_{máx}/2$ al tiempo que tarda en llegar del suelo a esa altura. Desprecie la resistencia del aire.

Solución.

El tiempo al caer para alcanzar $y_{máx}$ es:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2y_{máx}}{g}} = 1\ \text{s}.$$

El tiempo al caer para alcanzar $y_{máx}/2$ es:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2y_{máx}/2}{g}} = \sqrt{\frac{y_{máx}}{g}} = \frac{t_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{s}.$$

El tiempo debajo de $y_{máx}/2$ es $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, de tal manera que la razón entre el tiempo que está sobre la mitad de la altura máxima y el tiempo que está por debajo de la altura máxima es.

$$\frac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2{,}4.$$

Esto explica porque el atleta parece estar suspendido en el aire.

Ejemplo 28. Un excursionista despierto ve caer un peñasco desde un risco lejano y observa que tarda 1,30 s en caer el último tercio de la distancia. Puede despreciarse la resistencia del aire.

a) ¿Qué altura (en m) tiene el risco?

b) Si en (a) obtiene dos soluciones de una ecuación cuadrática y usa una para su respuesta, ¿qué representa la otra?

Solución.

a) Sea h la altura y toma un tiempo t en caer:

$h = \frac{1}{2}gt^2$

Si tarda 1,30 s en caer el último tercio h :

$$\tfrac{2}{3}h = \tfrac{1}{2}g(t-1{,}3)^2$$

Eliminando h de estas dos ecuaciones obtenemos:

$$\tfrac{1}{3}gt^2 = \tfrac{1}{2}g(t-1{,}3)^2$$

$$t^2 - 7{,}8t + 5{,}07 = 0$$

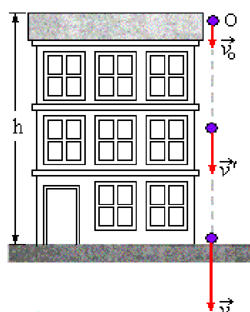
Resolviendo $t = 3{,}9 \pm 3{,}18 \begin{cases} t_1 = 7{,}08s \\ t_2 = 0{,}73s \end{cases}$

La primera es la solución correcta porque es mayor que 1,30 s,

$$h = \tfrac{1}{2}(9{,}8)(7{,}08)^2 = 245{,}6 \text{ m}$$

b) Con la segunda solución para t encontramos h = 2,6 m. Esto correspondería a un objeto que estaba inicialmente cerca del fondo de este "acantilado" que era lanzado hacia arriba y tomando 1,30 s la subida a la cima y la caída al fondo. Aunque físicamente es posible, las condiciones del problema imposibilitan esta respuesta.

Ejemplo 29. Desde la cornisa de un edificio de 60 m de alto se lanza verticalmente hacia abajo un proyectil con una velocidad de 10 m/s. Calcular:
a) Velocidad con que llega al suelo.
b) Tiempo que tarda en llegar al suelo.
c) Velocidad cuando se encuentra en la mitad de su recorrido.
d) Tiempo que tarda en alcanzar la velocidad del apartado c).



Solución.
Tomamos corno origen de coordenadas el punto de lanzamiento y como sentido positivo el del eje vertical descendente. Las ecuaciones de este movimiento serán:

$$v = v_0 + gt \qquad v_0 = 10 \text{ m/s}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad g \approx 10 \text{m/s}^2$$

a) y b) $h = 60$ m

$$v = 10 + 10t$$

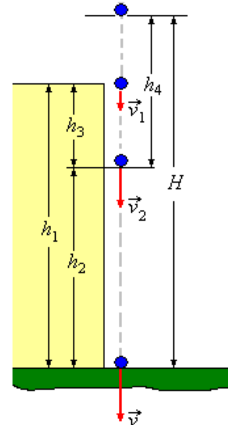
$$60 = 10t + \frac{1}{2}10t^2 \Rightarrow \begin{matrix} t = 2{,}6 \text{ s} \\ v = 36 \text{m/s} \end{matrix}$$

c) y d) $h' = 30$ m

$$v' = 10 + 10t'$$

$$30 = 10t' + \frac{1}{2}10t'^2 \Rightarrow \begin{matrix} t' = 1{,}65 \text{ s} \\ v' = 26{,}5 \text{m/s} \end{matrix}$$

Ejemplo 30. Una piedra que cae libremente pasa a las 10 horas frente a un observador situado a 300 m sobre el suelo, y a las 10 horas 2 segundos frente a un observador situado a 200 m sobre el suelo. Se pide calcular:
a) La altura desde la que cae.
b) En qué momento llegará al suelo.
c) La velocidad con que llegará al suelo.



Solución.

$$h_1 = 300m$$

$$h_2 = 200m \qquad t_1 = 2 \text{ s}$$

$$h_3 = 100m \qquad g \approx 10 \text{m/s}^2$$

a)

$$v_2 = v_1 + gt_1 \Rightarrow v_2 = v_1 + 10 \times 2$$

$$h_3 = v_1 t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow 100 = 2v_1 + \frac{1}{2}10 \times 4$$

$$h_4 = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow h_4 = \frac{v_2^2}{2 \times 10}$$

$$H = h_2 + h_4$$

De aquí se obtiene $\begin{cases} v_1 = 40 \text{m/s} \\ v_2 = 60 \text{m/s}, \\ h_4 = 180 \text{m} \end{cases}$

Finalmente $H = 200 + 180 = 380 \text{m}$

b) Llamando t_2 al tiempo que tarda en recorrer h_1:

$$h_1 = v_1 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$\Rightarrow 300 = 40t_2 + \frac{1}{2}10t_2^2$$

$$\Rightarrow t_2 = 5s$$

Luego llega al suelo a las 10 horas 5 segundos

c) $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 10 \times 380}$
= 87 m/s

PROBLEMA INVERSO - CÁLCULO INTEGRAL

Conociendo la ley del movimiento $x = x(t)$ es posible sin mayores dificultades calcular $v(t)$ y $a(t)$ tal como fue mostrado

$$x(t) \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Como hemos visto, el cálculo diferencial proporciona la herramienta para determinar la velocidad y aceleración en cualquier instante del tiempo.
En esta sección veremos cómo el cálculo integral, que es el inverso del cálculo diferencial, puede utilizarse para deducir las fórmulas que ya hemos visto. Por ejemplo, hallar la posición de una partícula en un instante cualquiera, dado su velocidad inicial y su aceleración conocida.

Ya hemos demostramos que el área encerrada bajo la curva de la velocidad del diagrama velocidad-tiempo es igual al desplazamiento.

$$\text{Area del trapecio} = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

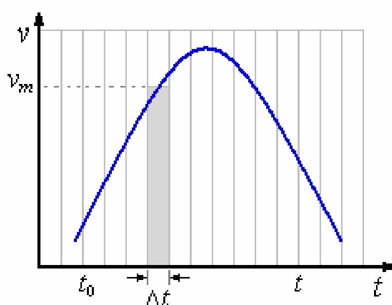
$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

En el caso de un movimiento con velocidad constante el desplazamiento entre los tiempos t y t_0 es

$$x - x_0 = v_0(t - t_0)$$

o $\Delta x = v_0(t - t_0)$

Para un movimiento cualquiera con aceleración variable el diagrama velocidad-tiempo será el mostrado en la figura siguiente



Si descomponemos el tiempo total desde t_0 hasta t en segmentos pequeños Δt, entonces cada tramo vertical que baja desde la curva de velocidades hasta el eje de absisas tiene un área

$$\Delta A = v_m \Delta t$$

Donde v_m es la velocidad media del intervalo. Esta área corresponde al desplazamiento en ese intervalo que como se puede observar el área faltante se complementa con el excedente del otro lado.

El desplazamiento total para el intervalo $(t - t_0)$ es la suma de todas las áreas de todos los rectángulos de tal modo que:

$$\Delta x = \sum_i v_m(t_i)\Delta t$$

La regla para los tiempos es que $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.
La distancia que obtenemos con este método no será la correcta porque la velocidad cambia durante el tiempo del intervalo Δt.
Si tomamos los intervalos muy pequeños la suma tiene mayor precisión. Así es que los hacemos tan pequeños a fin de tener una buena aproximación. Obtendremos la distancia real en el límite:

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v(t_i)\Delta t$$

Obsérvese que hemos reemplazado la velocidad promedio v_m por la velocidad instantánea v, porque en el límite esta aproximación es válida.
Los matemáticos han inventado un símbolo para este límite, análogo al símbolo para la diferencial. El símbolo Δ se convierte en d, $v(t_i)$ se llama $v(t)$ y el símbolo sumatoria $\sum$ se escribe como una "s" grande $\int$ la cual se conoce el signo integral Luego escribimos

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

El proceso de integración es el inverso del proceso de derivación. Con un diferencial obtenemos una fórmula integral si la invertimos.

Ejemplo 31. Encontrar la velocidad de un móvil a partir de la aceleración.
Solución.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt = a\int_{t_0}^{t} dt$$

Integrando obtenemos

$$v - v_0 = a(t - t_0) \Rightarrow v = v_0 + a(t - t_0)$$

Para encontrar la posición

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt$$

Integrando obtenemos

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

También se puede encontrar la ecuación del movimiento expresando la integral de la siguiente manera:

$v = \int a dt + C_1$, $x = \int v dt + C_2$

Los valores de C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales del movimiento.

Pequeña Tabla de Integrales
$\int dx = x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (n \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$
$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$
$\int \text{sen}(ax) = \frac{\cos(ax)}{a}$
$\int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx$

Ejemplo 32. Encontrar las ecuaciones del movimiento para una partícula que se mueve con aceleración constante $\vec{a} = a\hat{i}$ y que para el tiempo inicial t_0 se encontraba en $\vec{r}_0 = x_0\hat{i}$ y tenía una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$.

Solución.

El movimiento es en el eje x.

La aceleración es $a = \frac{dv}{dt}$

La velocidad se puede encontrar en términos de una integral como

$v = \int a dt + C_1 \Rightarrow v = at + C_1$

Como para $t = t_0$ se tiene $v = v_0$, tenemos

$v_0 = at_0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0 - at_0$

Reemplazando el valor de C_1 obtendremos la ecuación de la velocidad:

$v = v_0 + a(t - t_0)$

Ahora consideremos la definición de la velocidad

$v = \frac{dx}{dt}$

También se puede escribir en forma integral

$x = \int v dt + C_2$

Reemplazando el valor de v:

$x = \int [v_0 + a(t - t_0)] dt + C_2$

Integrando:

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - at_0 t + C_2$

Como para $t = t_0$ se tiene $x = x_0$, tenemos

$x_0 = v_0 t_0 + \frac{1}{2}at_0^2 - at_0^2 + C_2$

$\Rightarrow C_2 = x_0 - v_0 t_0 + \frac{1}{2}at_0^2$

Reemplazando el valor de C_2 obtenemos

$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - at_0 t + \left(x_0 - v_0 t_0 + \frac{1}{2}at_0^2\right)$

$\Rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$

Ejemplo 33. La aceleración de una motocicleta está dada por $a(t) = 1{,}5t - 0{,}12t^2$, con t en s m/s^3. La moto está en reposo en el origen en $t = 0$.

a) Obtenga su posición y velocidad en función de t.

b) Calcule la velocidad máxima que alcanza.

Solución.

a) Para encontrar $v(t)$.

$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt = (1{,}5t - 0{,}12t^2) dt$

Integrando con $v_0 = 0$ y $t_0 = 0$:

$v = \int_0^t (1{,}5t - 0{,}12t^2) dt = 0{,}75t^2 - 0{,}40t^3$

Para encontrar $x(t)$.

$v = \frac{dx}{dt} = 0{,}75t^2 - 0{,}40t^3$

$\Rightarrow dx = (0{,}75t^2 - 0{,}40t^3) dt$

Integrando con $x_0 = 0$ y $t_0 = 0$:

$x = \int_0^t (0{,}75t^2 - 0{,}40t^3) dt = 0{,}25t^3 - 0{,}10t^4$

b) Para que la velocidad sea máxima la aceleración debe ser cero,

$$a(t) = 1{,}5t - 0{,}12t^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1{,}5}{0{,}12} = 12{,}5 s \end{cases}$$

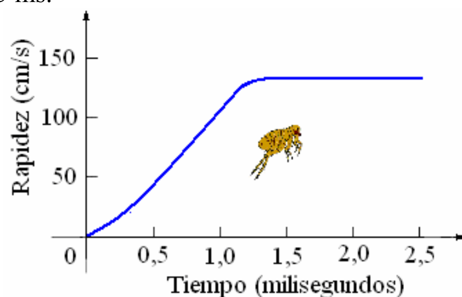
Para $t = 0$ la velocidad es mínima

Para $t = 12{,}5$ la velocidad

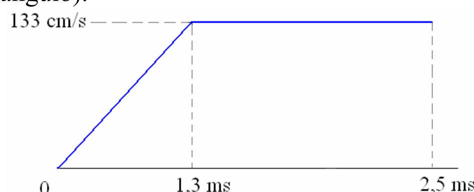
$v = 0{,}75(12{,}5)^2 - 0{,}40(12{,}5)^3 = 39{,}1$ m/s

Ejemplo 34. Salto volador de la pulga. Una película tomada a alta velocidad por M. Rothschild, Y. Schlein. K. Parker, C. Neville y S. Sternberg (3500 cuadros por segundo, “The Flying Leap of the Flea”, en el ScientificAmerican de noviembre de 1973) de una pulga saltarina de 210 μg produjo los

datos que se usaron para dibujar la gráfica de la figura. La pulga tenía una longitud aproximada de 2 mm y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. Use la gráfica para contestar estas preguntas.
a) ¿La aceleración de la pulga es cero en algún momento? Si lo es, ¿cuándo? Justifique su respuesta.
b) Calcule la altura máxima que la pulga alcanzó en los primeros 2,5 ms.
c) Determine la aceleración de la pulga a los: 0,5 ms, 1,0 ms y 1,5 ms.
d) Calcule la altura de la pulga a los: 0,5 ms, 1,0 ms y 1,5 ms.



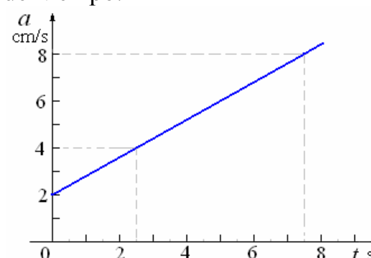
Solución.
a) Pendiente de $a = 0$ para $t \geq 1{,}3$ ms
b) La altura máxima corresponde al recorrido hasta cuando la aceleración se hace cero y llega al tiempo t = 2,5 ms, y es el área bajo la curva v versus t. (Dibujado aproximándolo a Un triángulo y un rectángulo).



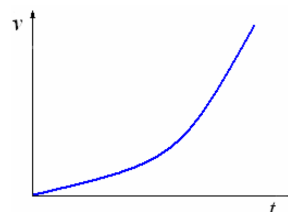
$$h_{max} = \text{área bajo } (v - t)$$
$$\approx A_{\text{Triángulo}} + A_{\text{Rectángulo}}$$
$$\approx \frac{1}{2}[(1{,}3)(133) + (2{,}5 - 1{,}3)(133)]10^{-3}$$
$$\approx 0{,}25 \text{ cm}$$

c) a = pendiente del gráfico v– t.
$$a\,(0{,}5 \text{ ms}) \approx a\,(1{,}0 \text{ ms})$$
$$\approx \frac{133}{1{,}3 \times 10^{-3}} = 1{,}0 \times 10^{5} \text{ cm/s}^2$$
$a\,(1{,}5 \text{ ms}) = 0$ porque la pendiente es cero.
d) h = área bajo el gráfico v– t.
$$h(0{,}5) \approx A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2}(0{,}5 \times 10^{-3})(33)$$
$$= 8{,}3 \times 10^{-3} \text{ cm}$$
$$h(1{,}0) \approx A_{\text{Triángulo}} = \frac{1}{2}(1{,}0 \times 10^{-3})(100)$$
$$= 5{,}0 \times 10^{-2} \text{ cm}$$
$$h\,(1{,}5) \approx A_{\text{Triángulo}} + A_{\text{Rectángulo}}$$
$$= \frac{1}{2}(1{,}3 \times 10^{-3})(133) + (0{,}2 \times 10^{-3})(133)$$
$$= 0{,}11 \text{ cm}$$

Ejemplo 35. La gráfica de la figura describe, en función del tiempo, la aceleración de una piedra que baja rodando por una ladera, habiendo partido del reposo.
a) Determine el cambio de velocidad de la piedra entre t = 2,5 s y t = 7,5 s.
b) Dibuje una gráfica de la velocidad de la piedra en función del tiempo.



Solución.
a) $a = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$
Como $a(t)$ es la ecuación de la recta:
$$\frac{a - 2}{t - 0} = \frac{8 - 4}{7{,}5 - 2{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow a = 0{,}8t + 2$$
$$dv = (0{,}8t + 2)dt$$
Integrando: $\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} (0{,}8t + 2)dt$
$$\Rightarrow v - v_0 = 0{,}4\left(t^2 - t_0^2\right) + 2(t - t_0)$$
Con $t_0 = 2{,}5s$, $t = 7{,}5s$, y $\Delta v = v - v_0$:
$$\Delta v = 0{,}4\left(7{,}5^2 - 2{,}5^2\right) + 2(7{,}5 - 2{,}5)$$
$$= 30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$
Otra manera de encontrar el cambio de velocidad es encontrando el área bajo la curva a versus t, entre las líneas en $t = 2{,}5$s y $t = 7{,}5$s. El área es:
$$\tfrac{1}{2}(4 + 8)(7{,}5 - 2{,}5) = 30 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$
Como la aceleración es positiva, el cambio de velocidad es positivo.
b)



Ejemplo 36. La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada, en el SI por la ecuación: $v = 40 - 8t$. Para t = 2 s, el punto dista del origen 80 m. Determinar:

a) La expresión general de la distancia al origen.
b) El espacio inicial.
c) La aceleración.
d) ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula?
e) ¿Cuánto dista del origen en tal instante?
f) Distancia al origen y espacio recorrido sobre la trayectoria a partir de $t = 0$, cuando $t = 7$ s, $t = 10$ s y $t = 15$ s.

Solución.

a) $s = \int v dt = \int (40 - 8t) dt = 40t - 4t^2 + C$

$\Rightarrow \; s = s_0 + 40t - 4t^2$

b) $80 = s_0 + 80 - 16 \;\Rightarrow\; s_0 = 16$

c) $a = \dfrac{dv}{dt} = -8 \dfrac{m}{s^2}$

d) $0 = 40 - 8t \;\Rightarrow\; t = 5$ s

e) $s_5 = 16 + 40x5 - 4x5^2 = 116$ m

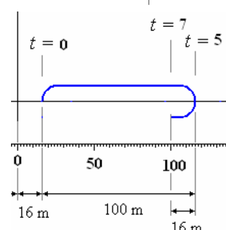
f) $s_7 = 16 + 40x7 - 4x7^2 = 100$ m

$s_{10} = 16 + 40x10 - 4x10^2 = 16$ m

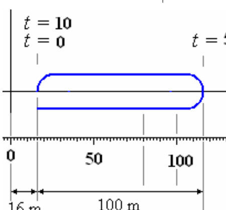
$s_{15} = 16 + 40x15 - 4x15^2 = -284$ m

Cálculo de caminos sobre la trayectoria a partir de $t = 0$:
El móvil cambia el sentido de su velocidad para $t = 5$s
El recorrido en los 5 primeros segundos es:
$C_5 = s - s_0 = 116 - 16 = 100$ m
A ellos hay que sumar el recorrido en los segundos restantes que se obtienen de la integral de la ecuación general de la velocidad, en valor absoluto, entre los limites $t = 5$ s y t = instante final.

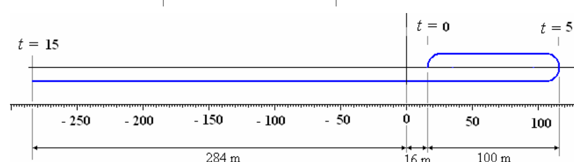
$$C_7 = 100 + \left| \int_5^7 (40 - 8t) dt \right| = 116\text{m}$$



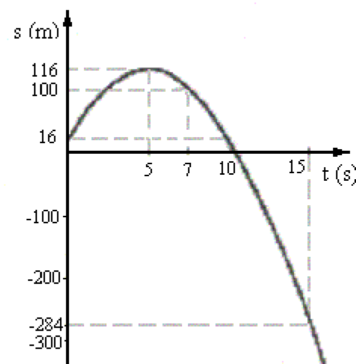
$$C_{10} = 100 + \left| \int_5^{10} (40 - 8t) dt \right| = 200\text{m}$$



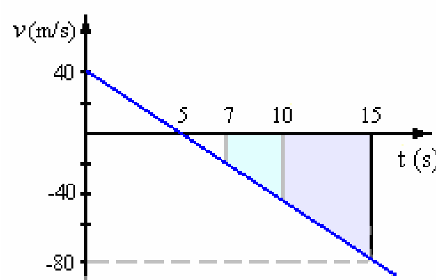
$$C_{15} = 100 + \left| \int_5^{15} (40 - 8t) dt \right| = 500\text{m}$$



Representación gráfica de la distancia al origen en función del tiempo



Representación gráfica de la velocidad origen en función del tiempo



En la gráfica de la velocidad frente al tiempo, el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica entre dos instantes coincide numéricamente con el camino recorrido por el móvil entre esos dos instantes.

Ejemplo 37. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por $\vec{v} = (3t - 2)\hat{i} + (6t^2 - 5)\hat{j}$ m/s. Si la posición del móvil en el instante $t = 1$ s es $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ m. Calcular

a) El vector posición del móvil en cualquier instante.

b) El vector aceleración.

c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = 2$ s. Dibujar el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes tangencial y normal en dicho instante.

Solución.

a) Para el movimiento horizontal

$$v_x = 3t - 2 \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como $v_x = \dfrac{dx}{dt} \;\Rightarrow\; dx = v_x dt$, integrando

$$\int_3^t dx = \int_1^t (3t - 2)dt$$

$$\Rightarrow \; x = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\text{m}$$

Para el movimiento vertical

$$v_y = 6t^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ $\Rightarrow$ $dy = v_y dt$, integrando

$$\int_{-2}^t dy = \int_1^t (6t^2 - 5)dt \quad \Rightarrow$$

$$y = (2t^3 - 5t + 1)\text{m}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\hat{i} - (2t^3 - 5t + 1)\hat{j}$$

b) $\vec{a} = 3\hat{i} + 12t\hat{j}$

c) Para $t = 2$ s

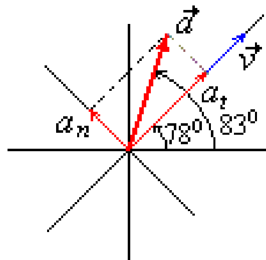
$v_x = 4$ m/s, $v_y = 19$ m/s

$a_x = 3$ m/s^2, $a_y = 24$ m/s^2

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 24{,}2\text{m/s}^2$$

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{19}{4} = 4{,}75 \;\Rightarrow\; \varphi = 78^o$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{24}{3} = 3 \;\Rightarrow\; \theta = 83^o$$

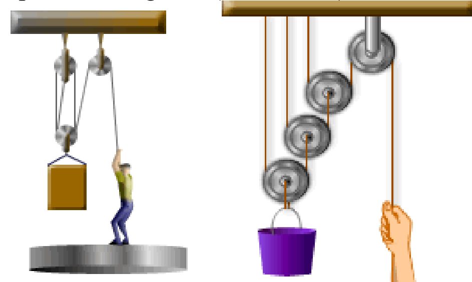


$$a_t = a\cos(\theta - \varphi) = 24{,}1\text{m/s}^2$$

$$a_n = a\,\text{sen}(\theta - \varphi) = 2\text{m/s}^2$$

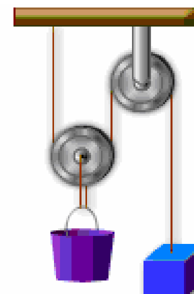
CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS LIGADAS. MOVIMIENTOS DEPENDIENTES.

Observemos los sistemas físicos de la figura.
Podríamos decir que estos sistemas se componen de varias partículas ligadas (conectadas).

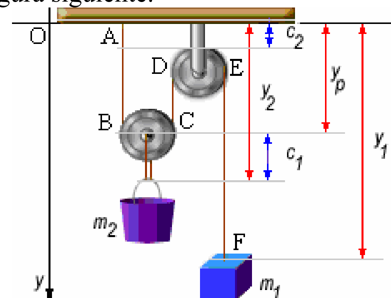


Las partículas podrían ser las poleas y los cuerpos a desplazar (bloques, baldes). La ligadura la tienen a través de las cuerdas. Es decir, cuando el hombre desplaza el extremo de la cuerda con una aceleración *a*, la aceleración de las poleas y los cuerpos a desplazar (bloques, baldes) tendrán una dependencia de *a*. Lo mismo se cumplirá para las otras variables cinemáticas (desplazamiento y velocidad).

Ejemplo 38. Análisis del montaje de la figura siguiente.



Para analizar las relaciones que hay entre las variables cinemáticas del bloque m_1, del balde m_2 y de la polea móvil, debemos primero saber cuáles son sus posiciones. Para ello elegimos un sistema de coordenadas. En nuestro caso elegimos el eje *y* apuntando hacia abajo y con el origen en el techo. Para el sistema de coordenadas escogido las posiciones del bloque, del balde y de la polea son respectivamente: y_1, y_2, y_p. Estas se representan en la figura siguiente.



La longitud de la cuerda debe permanecer constante en todo instante. Por tanto debe ser siempre válida la siguiente relación:
Longitud de la cuerda = constante
AB + arco BC + CD +arco DE +EF = constante
De la figura podemos concluir que las siguientes relaciones son válidas:

$\text{AB} = y_p$

$\text{CD} = y_p - c_2$

$\text{EF} = y_1 - c_2$

Por tanto,

$y_p + \text{arcoBC} + (y_p - c_2) + \text{arcoDE} + y_1 = \text{constante}$

Como los arcos BC y DE permanecen constantes podremos escribir la relación anterior así:

$2y_p + y_1 = k$ (1)

Siendo *k* una constante.
Esta ecuación relaciona las variables cinemáticas de la polea móvil y del bloque.
Si el bloque se desplaza una cantidad Δy_1 y la polea en una cantidad Δy_p.
La nueva posición de la polea:

$$y_p + \Delta y_p,$$

La nueva posición del bloque: $y_1 + \Delta y_1$.
Sin embargo, la relación anterior debe seguir cumpliéndose:

$2(y_p + \Delta y_p) + (y_1 + \Delta y_1) = k$ (2)

Restando (1) de (2), obtenemos:

$2\Delta y_p + \Delta y_1 = 0$

$$\Delta y_p = -\frac{\Delta y_1}{2}$$

Por ejemplo, si el bloque baja 1,0 m, la polea solo sube 0,50 m. La polea solo se desplaza la mitad de lo que se desplaza el bloque.

Análogamente podríamos hacer un análisis para las aceleraciones, y concluiríamos que:

$$a_p = -\frac{1}{2}a_1$$

Es decir, si el bloque por ejemplo, baja con una aceleración igual a 2,0 m/s^2 , la polea subirá con una aceleración igual a 1,0 m/s^2 .

De esta figura también se deduce la siguiente relación entre la posición del balde y la posición de la polea móvil:

$y_2 = y_p + c_1$ (3)

Si el balde se desplaza una cantidad Δy_2, y la polea se desplaza una cantidad Δy_p.
El balde pasa a ocupar la posición: $y_2 + \Delta y_2$,
La polea pasa a ocupar la posición $y_p + \Delta y_p$.
Sin embargo, la relación anterior se debe seguir cumpliéndose.

$(y_2 + \Delta y_2) = (y_p + \Delta y_p) + c_1$ (4)

Restando (3) y (4) obtenemos,

$$\Delta y_2 = \Delta y_p$$

Los desplazamientos de la polea y el balde son iguales.
Si dividimos la ecuación anterior por el intervalo de tiempo Δt obtenemos como se relacionan las velocidades: $v_2 = v_p$.
Las velocidades de la polea y del balde son iguales.
Lo mismo podremos concluir para las aceleraciones:

$$a_2 = a_p$$

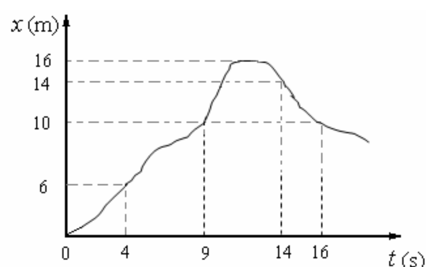
En definitiva si el bloque baja con una aceleración igual a 4 m/s^2, el balde y la polea móvil subirán con una aceleración igual a 2 m/s^2.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un acelerador atómico emite partículas que se desplazan con una rapidez de 2,8x10^8 m/s. ¿cuánto demoran estas partículas en recorrer una distancia de 5,6mm?
Respuesta
2x10^{-11} s.

2. Se desea calcular cuál es la profundidad de un lago, para tal efecto se usa un instrumento conocido como sonar que mide el tiempo que tarda un pulso sonoro en ir y volver desde la superficie del agua. Si se sabe que la rapidez del sonido en el agua es de 1450m/s y el instrumento marcó 0,042s cuando se hizo la medición, calcule la profundidad del lago.
Respuesta. 30,45m

3. Una cucaracha se desplaza en línea recta y su posición con respecto al tiempo se expresa de acuerdo al siguiente gráfico. De acuerdo a la información dada se pide calcular.
a) distancia recorrida entre 4s y 9 s
b) distancia recorrida entre 9 s y 14s
c) distancia recorrida entre 0 y 16s.
d) velocidad media entre 0s y 16s.
e) velocidad media entre 9s y 16s.



Respuesta
a) 4m b) 8m c) 22m d) 5/8 m/s e) 0

4. Un hombre camina con una velocidad $\vec{v}$ constante pasa bajo un farol que cuelga a una altura *H* sobre el suelo. Encontrar la velocidad con la que el borde de la sombra de la cabeza del hombre se mueve sobre la tierra. El alto del hombre es *h*.
Respuesta

$$\frac{H\vec{v}}{H-h}$$

5. Un tren arranca en una estación y acelera uniformemente a razón de 0,6 m/s ^{2} hasta alcanzar una velocidad de 24 m/s. Determinar el tiempo empleado y la distancia recorrida en ese período si la velocidad media fue: a) 16 m/s, b) 22m/s.
Respuesta
a) 60s, 960m, b) 240s, 5280m

6. Un ciclista recorre 100 km en 2 horas. El viaje de vuelta dos días más tarde lo realiza en el tiempo usual de 6 horas.
a) ¿Cuál es su rapidez media a la ida?
b) ¿Cuál es su rapidez media al regreso?
c) ¿Su rapidez media en e¡ viaje completo?
d) ¿Su velocidad media en e} viaje entero?
Respuesta. a) 50 km/h , b) 16,7 km/h
c) 25 km/h d) 0

7. Un automóvil que viaja con una velocidad de 50 km/h hacia el oeste repentinamente empieza a perder velocidad a un ritmo constante y 3 segundos más tarde su velocidad es de 25 km/h hacia el oeste.
a) ¿Cuánto tiempo tardará en detenerse el auto, contando a partir del momento en que empezó a desacelerar?
b) ¿Cuál es la distancia total que recorrerá antes de detenerse?
c) ¿Cuál sería el tiempo necesario para detenerse y la distancia recorrida el) la frenada con la misma aceleración, pero con una velocidad inicial de 100 km/h?
Respuesta. a) t = 6s ; b) 41,7m ; c) 125; 125m

8. La aceleración de una partícula está dada por:
$a = 4t - 4t^3$, $t \geq 0$.
a) Hallar la velocidad de la partícula en función del tiempo.
b) Hallar su posición en función del tiempo.
Respuesta
a) $v = 2t^2 - t^4$; b) $x = 2 + 2t^3/3 - t^5/5$

9. El movimiento de una partícula se define mediante la relación $x = t^3/3 - 3t^2 + 8t + 2$, donde *x* se expresa en metros y *t* en segundos.
Determinar
a) el momento en que la velocidad es nula;
b) la posición y la distancia total recorrida cuando la aceleración es nula.
Respuesta
a) 2s, 4s; b) 8m, 7,33m

10. El movimiento de una partícula está dado por la ecuación horaria $x = t^3 + 4t^2 + 5x$ sobre el eje *x*, *x* en metros *t* en segundos.
a) Calcular la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante *t*.
b) Encontrar la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula para t_0 = 2s y t_1 = 3s.
c) ¿Cuáles son la velocidad media y la aceleración media de la partícula entre t_0 y t_1?
Respuesta.
a) $v = (3t^2 + 8t)$m/s , $a = (6t + 8)$ m/s ^{2}
b) x_0 = 29m, v_0 = 27 m/s, a_0 = 20 m/s ^{2}
x_1 = 68 m v_1 = 51 m/s, a_1 = 26 m/s ^{2}
c) v_m = 39 m/s , a_m = 23 m/s ^{2}

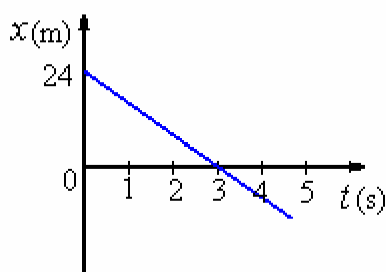
11. La posición de una partícula que se mueve en el eje *x* está dada por 8 *t* + 5, *x* es la distancia a origen en metros y *t* es el tiempo en segundos.
a) Para *t* = 2, encontrar la posición, velocidad y aceleración
b) Grafique *x* versus *t*
c) Encuentre la ley horaria, la ley del movimiento y la trayectoria.
d) Analizar el movimiento.
Respuesta. a) *x* = -3, *v* = 0 , *a* = 4
b) $s = 2t^2 - 8t + 5$, $\vec{r} = \left(2t^2 - 8t + 5\right)\hat{i}$
Trayectoria rectilínea en el eje *x*.

12. Un automóvil se encuentra detenido frente a un semáforo, le dan luz verde y arranca de modo que a los 4s su rapidez es de 72 km/hora. Si se movió en trayectoria rectilínea, con aceleración constante,
I.- Determine:
a) La rapidez inicial en metros por segundo.
b) El módulo de la aceleración en ese tramo.
c) La rapidez que lleva a los 3s.
d) La distancia que recorre en los tres primeros segundos
e) La distancia que recorre entre *t* = 2s y *t* = 4s.
II.- Haga un gráfico representativo de posición versus tiempo y de la rapidez versus tiempo.

Respuesta. a) 20m/s b) 5 m/s ^{2} c) 15m/s
d) 22.45m e) 30m

13. Una partícula **A**, se mueve en el eje X, de acuerdo a la siguiente gráfica.
Determinar a partir del gráfico de la partícula:

a) Velocidad media entre t = 0 y t = 4 s
b) Velocidad instantánea en t = 2 s
c) Aceleración media entre t = 0 y t = 4 s
d) Intervalos de tiempo en que se acerca al origen
e) Intervalos de tiempo en que se aleja del origen
f) Ecuación Itinerario de la partícula A
g) ¿Qué tipo de movimiento tiene esta partícula?



Respuesta. a) (-8;0)m/s b) (-8;0)m/s c) 0
d) (0-3)s e)(3-....) f) $x(t) = 24 - 8t$
g) Movimiento rectilíneo uniforme.

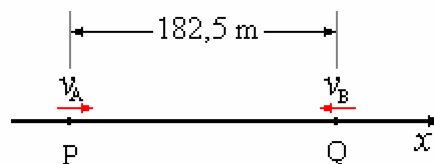
14. Un vehículo se mueve en el eje x de acuerdo con la siguiente ecuación de itinerario:
$x(t) = 20 - 36t + 6t^2$. Con x medido en metros y t en segundos.
a) Identifique a posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración.
b) Determine la ecuación que entregue la velocidad para cualquier instante.
c) Determine el instante en que cambia de sentido
d) La velocidad de la partícula en t = 2 s y en t = 4 s
e) Posición de la partícula en t = 6 segundos
f) Gráfico x versus t. Describa la curva
g) Gráfico v_x versus t. Describa la curva
h) Gráfico a versus t. Describa la curva
Respuesta. a) (20,0)m (-36,0)m/s (12,0)m/s^2 b) $v(t) = -36 + 12t$ c)3s
d) (-12,0)m/s (12,0)m/s e) (20,0)m

15. Se lanza un cuerpo hacia arriba con una rapidez de 16m/s,
a) ¿Qué altura alcanza a subir?
b) ¿Qué tiempo demora en volver al punto de partida?
Respuesta. a) 3,2m b) 6,4s

16. Una partícula se mueve sobre una recta horizontal; parte hacia la derecha desde un punto A con una rapidez de 28 (m/s) y una retardación constante de módulo 12(m/s^2). En el punto B, es donde se anula su rapidez, invierte el sentido de movimiento para retornar hacia A con una aceleración constante de módulo 6(m/s^2). Calcular:
a) La distancia total cubierta hasta que la partícula retorne al punto A.
b) El tiempo total para el recorrido completo hasta volver a dicho punto A.
c) El intervalo de tiempo que transcurre entre los pasos de la partícula por el punto situado a 1/3 de AB, medido desde A.

17. Desde una altura de 45m se deja caer un objeto A. simultáneamente se lanza un objeto B verticalmente desde una altura de 5m. Calcular:
a) la velocidad inicial de B para que los objetos se crucen a una altura de 20m.
b) la distancia que separa a los objetos cuando B alcanza su altura máxima.

18. Sobre un mismo eje x se mueven dos partículas A y B. En t = 0 la partícula A parte desde P con aceleración constate de $15\hat{i}$ (m/s^2). Un segundo después, B pasa por Q con una velocidad de $-20\hat{i}$ (m/s). Encuentre las retardaciones constantes que deben aplicar A y B a partir de este último instante para que ambas partículas se detengan simultáneamente antes de chocar.

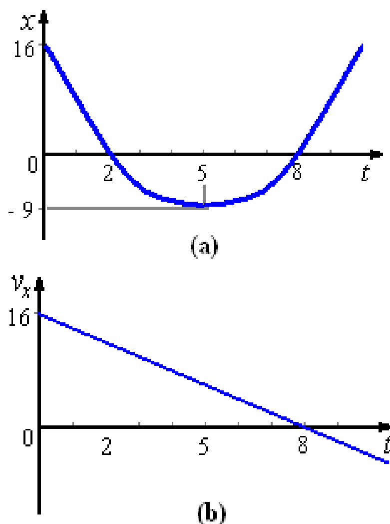


19. Una partícula se mueve a lo largo del eje x con aceleración constante. En t = 0 pasa por la posición $\vec{x}_0 = -10\hat{i}$ m con una velocidad $\vec{v}_0 = -20\hat{i}$ m/s y en t =3s su posición es $\vec{x} = -52\hat{i}$ m. Calcule:
a) La ecuación itineraria de la partícula
b) La distancia recorrida en el intervalo (3-6) s.
c) La velocidad media en el intervalo (4-7) s.
d) Intervalos de tiempo en que la partícula se aleja del origen del sistema.

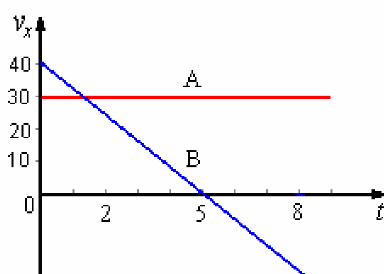


20. Sobre el eje x de un sistema de coordenadas se mueven dos partículas A y B. El gráfico (a) es una parábola cuadrática que muestra la variación de la componente x de la posición en función del tiempo de la partícula A. El gráfico (b) muestra la variación de la componente v_x de la velocidad en función del tiempo de la partícula B. Si en t = 0, ambas partículas tienen la misma posición, determinar:
a) Ecuación horaria de las partículas A y B.

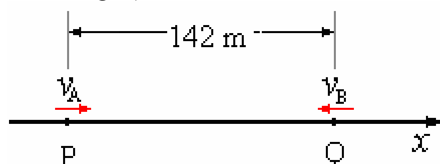
b) Posición de B cuando A cambia de sentido de movimiento.
c) Instante en que se encuentran.
d) Distancia recorrida por A y B entre 3 y 9 s.



21. En el gráfico de la figura están representadas la componente v_x del vector velocidad de dos partículas, A y B, que se mueven a lo largo del eje *x* Calcular:
a) La aceleración de B.
b) Camino recorrido por A y B cuando B alcanza la velocidad $\vec{v}_B = 30\hat{i}$ m/s.
c) Desplazamiento de B en el intervalo (0-10)s.
d) Ecuación horaria de A si en $t_0 = 0$ su posición es $\vec{x}_0 = 8\hat{i}$ m.

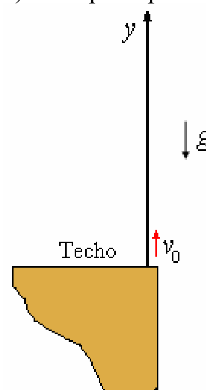


22. Dos partículas A y B se mueven sobre el mismo eje *x*. En *t* = 0, B pasa por Q con m/s $\vec{v}_B(0) = (-5{,}0)$ m/s y 2s después A pasa por P a $6\hat{i}$ m/s. Encuentre las retardaciones constantes que deben aplicar A y B a partir de este último instante para que ambas partículas se detengan simultáneamente justo antes de chocar. Determine la ecuación itinerario de A y B (diga cuál es su origen).



23. Un cuerpo que se ha dejado caer desde cierta altura, recorre 72 m en el último segundo de su movimiento.
Calcule la altura desde la cual cayó el cuerpo y el tiempo que empleó en llegar al suelo.

24. Un hombre parado en el techo de un edificio tira un cuerpo verticalmente hacia arriba con una rapidez de 14m/s. El cuerpo llega al suelo 4,7s más tarde.
a) Cuál es la máxima altura alcanzada por el cuerpo?
b) Qué altura tiene el edificio?
c) Con qué rapidez llegará el cuerpo al suelo?



25. Un malabarista mantiene cinco bolas continuamente en el aire, lanzando cada una de ellas hasta una altura de 3m.
a) ¿Cuál es el tiempo que debe transcurrir entre lanzamientos sucesivos?
b) ¿Cuáles son las alturas de las otras pelotas en el momento en que una de ellas vuelve a su mano?
Respuesta. a) 0,31s ;
b) 1,91; 2,87; 2,87 y 1,91 m.

26. Dos cuerpos son lanzados uno después de otro con las mismas velocidades v_0 desde una torre alta. El primer cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba, y el segundo verticalmente hacia abajo después del tiempo τ . Determinar las velocidades de los cuerpos una con respecto al otro y las distancias entre ellos en el instante $t > \tau$.
Respuesta. La velocidad del primer cuerpo relativa al segundo es: $v_1 - v_2 = 2v_0 - g\tau$.

La distancia es $S = 2v_0 t - v_0\tau - gt\tau + \frac{1}{2}g\tau^2$

CAPITULO 3. Movimiento en un plano y en el espacio

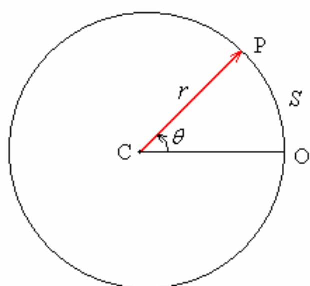
MOVIMIENTO CIRCULAR

Se define movimiento circular como aquél cuya trayectoria es una circunferencia. Una vez situado el origen O de ángulos describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes.

Posición angular, θ

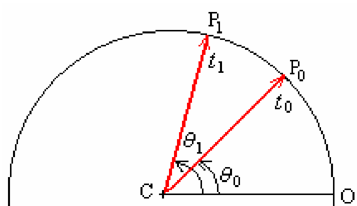
En el instante t el móvil se encuentra en el punto P. Su posición angular viene dada por el ángulo θ, que hace el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen de ángulos O.

El ángulo θ, es el cociente entre la longitud del arco S y el radio de la circunferencia r, $\theta = S/r$. La posición angular es el cociente entre dos longitudes y por tanto, no tiene dimensiones.



Velocidad angular, ω

En el instante t_1 el móvil se encontrará en la posición P_1 dada por el ángulo θ_1. El móvil se habrá desplazado $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_1 - t_0$ comprendido entre t_0 y t_1.



Se denomina velocidad angular media al cociente entre le desplazamiento y el tiempo.

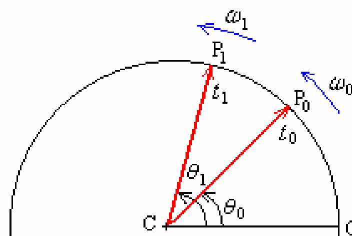
$\omega_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$, con las unidades en el SI de rad/s.

Como ya se explicó en el movimiento rectilíneo, la velocidad angular en un instante se obtiene calculando la velocidad angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aceleración angular, α

Si en el instante t la velocidad angular del móvil es ω y en el instante t_1 la velocidad angular del móvil es ω_1. La velocidad angular del móvil ha cambiado $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_1 - t_0$ comprendido entre t_0 y t_1.



Se denomina aceleración angular media al cociente entre el cambio de velocidad angular y el intervalo de tiempo que tarda en efectuar dicho cambio.

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

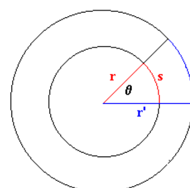
La aceleración angular en un instante, se obtiene calculando la aceleración angular media en un intervalo de tiempo que tiende a cero.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

RELACIÓN ENTRE LAS MAGNITUDES ANGULARES Y LINEALES

De la definición de radián (unidad natural de medida de ángulos) obtenemos la relación entre el arco y el radio. Como vemos en la figura, el ángulo se obtiene dividiendo la longitud del arco entre su radio

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$$



Derivando $s = r\theta$ respecto del tiempo obtenemos la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega$$

La dirección de la velocidad es tangente a la trayectoria circular, es decir, perpendicular a la dirección radial

Aceleración tangencial

Derivando esta última relación con respecto del tiempo obtenemos la relación entre la aceleración tangencial a_t y la aceleración angular.

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha$$

Existe aceleración tangencial, siempre que el módulo de la velocidad cambie con el tiempo, es decir, en un movimiento circular no uniforme

Hallar el desplazamiento angular a partir de la velocidad angular.
Si conocemos un registro de la velocidad angular del móvil podemos calcular su desplazamiento $\theta - \theta_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante la integral definida.

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

Hallar el cambio de velocidad angular a partir de la aceleración angular.
Del mismo modo que hemos calculado el desplazamiento angular del móvil entre los instantes t_0 y t, a partir de un registro de la velocidad angular ω en función del tiempo t.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt \quad \omega - \omega_0 = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME
Un movimiento circular uniforme es aquél cuya velocidad angular ω es constante, por tanto, la aceleración angular es cero.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$$

La posición angular θ del móvil en el instante t podemos calcularla integrando

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega (t - t_0)$$

O gráficamente, en la representación de ω en función de t.
Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las ecuaciones del movimiento circular uniforme son análogas a las del movimiento rectilíneo uniforme

$$\alpha = 0 \quad \omega = \text{constante} \quad \theta = \theta_0 + \omega t$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO
Un movimiento circular uniformemente acelerado es aquél cuya aceleración α es constante.
Dada la aceleración angular podemos obtener el cambio de velocidad angular $\omega - \omega_0$ entre los instantes t_0 y t, mediante integración de la velocidad angular ω en función del tiempo

$$\omega = \omega_0 + \alpha (t - t_0).$$

Siendo $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$, integrando obtenemos el desplazamiento $\theta - \theta_0$ del móvil entre los instantes t_0 y t:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} [\omega_0 + \alpha (t - t_0)] dt \Rightarrow$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha (t - t_0)^2$$

Habitualmente, el instante inicial t_0 se toma como cero. Las fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado son análogas a las del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

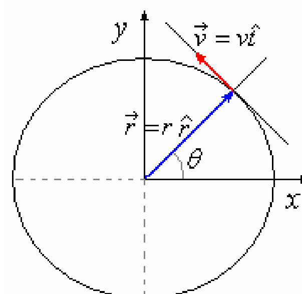
$$\alpha = \text{constante}, \quad \omega = \omega_0 + \alpha t,$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Despejando el tiempo t en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera, relacionamos la velocidad angular ω con el desplazamiento $\theta - \theta_0$.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha (\theta - \theta_0)$$

COMPONENTES NORMAL Y TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN.
Cuando el sistema de referencia se sitúa sobre la partícula tal como se indica en la figura, pero no de cualquier modo. Uno de los ejes siempre está perpendicular a su trayectoria, y el otro siempre es tangente a la misma. Así pues,



El primero siempre pasará por el centro de la circunferencia. Al primer eje se le denomina eje normal, con vector unitario $(\hat{r} = \hat{n})$ y al segundo eje tangencial, con vector unitario $(\hat{t})$. Debemos estudiar ahora que componentes tienen la velocidad y la aceleración en este sistema de referencia.

Velocidad.
Con anterioridad se ha deducido que el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria descrita. Por tanto es fácil afirmar que en este movimiento la velocidad será de la forma $\vec{v} = v\hat{t}$

Aceleración.

No es tan obvio que la aceleración tenga una sola componente, de manera que adoptará la expresión general $\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$

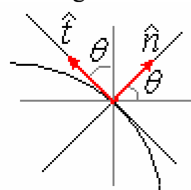
Sabemos por la definición de aceleración que

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, luego.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\hat{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt}$$

Estudiemos el último término de esta expresión $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$

Si se define el ángulo θ, como el ángulo formado por el eje normal con el eje de abscisas (eje *x*), tal como se muestra en la figura.



No es difícil darse cuenta que el vector $\hat{t}$ desde el sistema de referencia situado en el centro de la circunferencia tendrá la forma

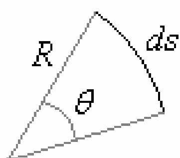
$\hat{t} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$, mientras que $\hat{n}$ al ser perpendicular a este adoptará la expresión

$\hat{n} = \cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$

Derivando $\hat{t} \Rightarrow$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = -\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(-\cos\theta\,\hat{i} - \operatorname{sen}\theta\hat{j}\right)$$



Ahora bien, si tomamos un desplazamiento diminuto sobre la circunferencia, al que denominamos ds, teniendo en cuenta que arco = ángulo x radio, del esquema adjunto se deduce que $ds = Rd\theta$, y además el módulo de la velocidad instantánea lo podemos expresar como $v = \dfrac{ds}{dt}$, utilizando estos dos últimos llegamos a $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega = \dfrac{v}{R}$,

reemplazando en $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$:

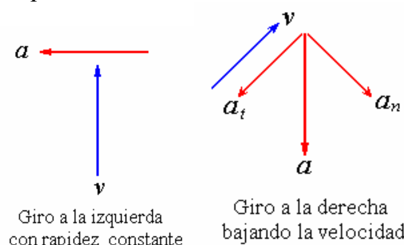
$\dfrac{d\hat{t}}{dt} = -\dfrac{v}{R}\left(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\right)$, si observamos detenidamente esta ecuación, comprobaremos que el paréntesis es efectivamente $\hat{n}$, por lo que $\dfrac{d\hat{t}}{dt}$ quedará como $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = -\omega\hat{n} = -\dfrac{v}{R}\hat{n}$.

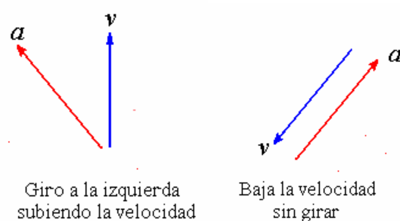
Finalmente: $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{t} - \dfrac{v^2}{R}\hat{n}$

Así, en esta expresión, se denomina aceleración tangencial (a_t) al término $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ y aceleración normal (a_n) a la ecuación $a_n = -\dfrac{v^2}{R}$

De esta expresión para la aceleración pueden concluirse cosas sustancialmente importantes:
Existen dos componentes: Una tangente a la trayectoria y una perpendicular y orientada hacia el centro de la circunferencia.
La aceleración tangencial sólo se dará en aquellos movimientos en los que el módulo de la velocidad varíe con el tiempo. Por tanto, en el caso particular del MCU, su aceleración tangencial será nula.
La aceleración normal siempre existirá, salvo que el radio de curvatura fuera muy grande, con lo cual tendería a cero, que es el caso extremo de los movimientos rectilíneos.
Concluyendo pues, en un MCU, la aceleración tendrá la expresión $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\hat{n}$ es decir sólo presentará aceleración normal.

Un objeto puede experimentar la aceleración normal o centrípeta y la aceleración tangencial. En las figuras siguientes se muestran algunas combinaciones posibles para v y a para un auto en movimiento. Para entender la aceleración, descompóngala en las componentes paralela y perpendicular a v. Para decir si el auto está dando vuelta a la derecha o a la izquierda, imagínese que usted es el conductor que se sienta con el vector de la velocidad dirigido hacia adelante de usted. Un componente de la aceleración hacia adelante significa que la velocidad está aumentando.





Ejemplo 1. Un avión a chorro militar de combate volando a 180 m/s sale de una picada vertical dando la vuelta hacia arriba a lo largo de una trayectoria circular de 860 m de radio ¿cuál es la aceleración del avión? Exprese la aceleración como múltiplo de *g*.

Solución.

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{180^2}{860} = 37{,}7\frac{m}{s^2}$$

$$a = 37{,}7\frac{g}{9{,}8} = 3{,}8g$$

Ejemplo 2. Una rueda de 75 cm de diámetro gira alrededor de un eje fijo con una velocidad angular de 1 rev/s. La aceleración es de 1,5 rev/s^2.

a) Calcúlese la velocidad angular al cabo de 6 segundos.

b) ¿Cuánto habrá girado la rueda en ese tiempo?

c) ¿Cuál es la velocidad tangencial en un punto de la periferia de la rueda en $t = 6$ s?

d) ¿Cuál es la aceleración resultante de un punto de la de la periferia para $t = 6$ s?

Solución.

$R =$ 37,5 cm , $\omega_0 = 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\alpha = 3\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

a) $\omega_{(t)} = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow$

$$\omega_{(6)} = 2\pi + 3\pi(6) = 20\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) $\theta_{(t)} = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow$

$$\theta_{(6)} = 2\pi(6) + \frac{1}{2}(3\pi)(6^2) = 66\pi \text{ rad}$$

Habrá girado $\frac{66\pi}{2\pi}$ = 33 vueltas.

c) $v_{(t)} = R\omega_{(t)} \Rightarrow$

$$v_{(6)} = 37{,}5(20\pi) = 750\pi\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

d) $a_n = \omega_{(6)}^2 R \Rightarrow$

$a_n = (20\pi)^2(37{,}5)$ = 147894 cm/s^2.

$a_t = \alpha R \Rightarrow a_n = (3\pi)(37{,}5)$ = 353,25 cm/s^2.

$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ = 147894,42 cm/s^2.

Ejemplo 3. Una rueda de la fortuna de 14,0 m de radio gira sobre un eje horizontal en el centro. La rapidez lineal de un pasajero en el borde es constante e igual a 7,00 m/s. ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración del pasajero al pasar

a) por el punto más bajo de su movimiento circular?

b) por el punto más alto?

c) ¿Cuánto tarda una revolución de la rueda?



Solución.

a) $a = \frac{v^2}{R} = \frac{7{,}00^2}{14{,}0} = 3{,}50\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. La aceleración el punto más bajo del círculo es hacia el centro, hacia arriba.

b) $a = 3{,}50 \text{ m/s}^2$, dirigida hacia abajo., hacia el centro.

c) Como $v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(14{,}0)}{7{,}00} = 12{,}6 \text{ s}$$

Ejemplo 4. La rueda de la figura del problema anterior, que gira en sentido antihorario, se acaba de poner en movimiento. En un instante dado, un pasajero en el borde de la rueda que está pasando por el punto más bajo de su movimiento circular tiene una rapidez de 3,00 m/s, la cual está aumentando a razón de 0,500 m/s^2.

Calcule la magnitud y la dirección de la aceleración del pasajero en este instante.

Solución.

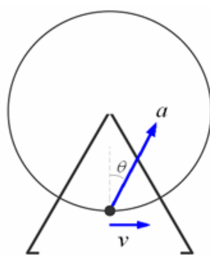
$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{3{,}00^2}{14{,}0} = 0{,}643\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, y $a_t = 0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Luego:

$$\vec{a} = a_c\hat{n} + a_t\hat{t} = -0{,}643\hat{j} + 0{,}5\hat{i}$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{0{,}643^2 + 0{,}5^2} = 0{,}814\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0{,}5}{0{,}643} = 37{,}9^\circ$$



Ejemplo 5. Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio *R* con aceleración angular constante partiendo del reposo. Si la partícula realiza *n* vueltas completas a la circunferencia en el primer segundo, determine la aceleración angular de la partícula. Determine además el número de vueltas que realiza la partícula durante el siguiente segundo del movimiento.

Solución.

Aquí $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$

Entonces $2\pi n = \frac{1}{2\alpha} \Rightarrow \alpha = 4\pi n$

Como $\theta = \frac{1}{2}(4\pi n)t^2 = 2\pi n t^2$,

Número de vueltas para $t = 1$

$$n(1)^2 = \frac{\theta_{(1)}}{2\pi}$$

Número de vueltas para $t = 2$

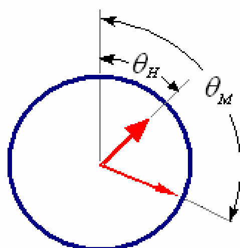
$$n(2)^2 = \frac{\theta_{(2)}}{2\pi}$$

Durante el siguiente segundo (dos) realiza

$$\frac{\theta_{(2)} - \theta_{(1)}}{2\pi} = n\left(2^2 - 1^2\right) = 3n \text{ vueltas.}$$

Ejemplo 6. En un reloj análogo el horario y el minutero coinciden a las 12:00:00 horas.
¿A qué hora minutero y horario formarán un ángulo de 90º?

Solución.



Como los movimientos del horario y minutero son circulares uniformes, encontramos para la posición angular del horario:

$\theta_H = \theta_{0H} + \omega_H t$. (1)

Análogamente para el minutero se tiene:

$\theta_M = \theta_{0M} + \omega_M t$. (2)

Como $\omega_H = \frac{2\pi}{T_H}, \omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ donde $T_H = 12$ h y $T_M = 1$ h y bajo la condición que estos formen un ángulo de 90º, es decir, $\theta_M - \theta_H = \frac{\pi}{2}$

De (2) - (1), con $\theta_{0H} = \theta_{0M} = 0$,

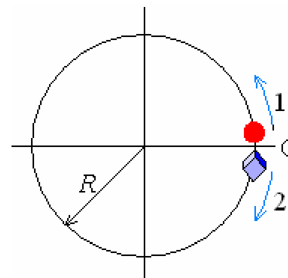
$$\theta_M - \theta_H = (\omega_M - \omega_H)t$$

Se encuentra para *t*:

$$t = \frac{\pi}{2(\omega_M - \omega_H)} = \frac{3}{11} \text{ h},$$

Es decir, en *t* = 16,36 min.
Por lo tanto forman 90º a las 12:16:22 h.

Ejemplo 7. Dos partículas describen movimientos circulares de radio *R* = 1m, como lo muestra la figura. El primero (1) parte de O con rapidez angular $\omega = 10$ rad/s constante en sentido antihorario y el segundo (2) parte del reposo del mismo punto en sentido horario con aceleración tangencial constante de 2 m/s^2. Determine cuando y donde se cruzan ambas partículas.



Solución.

Como el cuerpo (1) se mueve con M.C.U., la posición angular de este será:

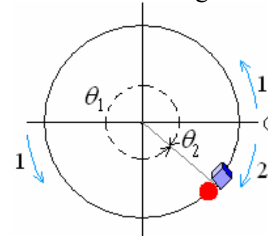
$\theta_1 = 0 + \omega_1 t = 10\,t$. (1)

El cuerpo (2) posee una aceleración tangencial constante y por lo tanto, se trata de un M.C.U.A.

Debido que $a_t = \alpha R = 2 \text{ m/s}^2, \alpha = 2 \text{rad/s}^2$. Por otro lado, como parte del reposo, $\omega_0 = 0$.

$$\theta_2 = -\frac{1}{2}2\,t^2 = -t^2$$

El recorrido se muestra en la figura siguiente:



El encuentro se produce cuando:

$$|\theta_1| + |\theta_2| = 2\pi \Rightarrow$$

$$10t + t^2 = 2\pi$$

$$t^2 + 10t - 2\pi = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 0{,}59\text{ s} \\ t_2 = -10{,}59\text{ s} \end{cases}$$

La solución significativa es: $t = 0{,}59\text{ s}$

Reemplazando este valor de t en ecuación (1), se obtiene para el ángulo de encuentro:

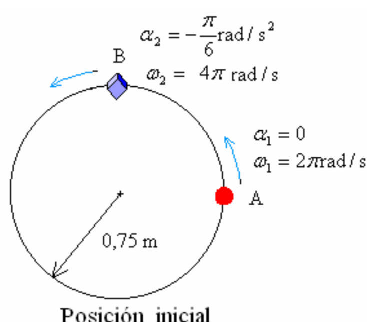
$\theta_{encuentro} = 5{,}9\text{ rad} = 338{,}04^\circ$.

Ejemplo 8. Dos vehículos describen la misma trayectoria circular de radio 0,75 m. El primero está animado de un movimiento uniforme cuya velocidad angular es de 60 rpm. y sale de la posición A cuando se empieza a contar el tiempo. El segundo móvil está animado de un movimiento uniformemente acelerado cuya aceleración angular vale - $\pi/6$ rad/s^2, pasa por B dos segundos más tarde llevando una velocidad angular de 120 rpm.

a) Escribir las ecuaciones del movimiento de cada uno de los móviles. Hallar el instante y la posición de encuentro por primera vez de ambos móviles.

b) La velocidad lineal, la velocidad angular, las componentes tangencial y normal de la aceleración de cada uno de los móviles en el instante de encuentro.

c) Realícese un esquema en el que se especifique los vectores velocidad, aceleración, en dicho instante de encuentro.



Solución.

a) Para t = 2 s el móvil 1 como su velocidad angular es 2π rad/s estará en el punto A, y podemos considerar ese instante como tiempo inicial, con lo que:

Móvil 1:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \omega_1 = 2\pi\text{rad/s} \\ \theta_1 = 2\pi t\text{rad} \end{cases}$$

Móvil 2:

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{\pi}{6}\text{rad/s}^2 \\ \omega_2 = \left(4\pi - \frac{\pi}{6}t\right)\text{rad/s} \\ \theta_2 = \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t - \frac{\pi}{12}t^2\right)\text{rad} \end{cases}$$

Los móviles se encontrarán cuando $\theta_1 = \theta_2$

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} + 4\pi t - \frac{\pi}{12}t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{12}t^2 - 2\pi t - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 24t - 6 = 0$$

Resolviendo $\begin{cases} t = -0{,}25\text{ s} \\ t = 24{,}25\text{ s} \end{cases}$

La solución es 24,25 s.

El punto de encuentro es

$$\theta_1 = 2\pi(24{,}25) = 48{,}5\pi\text{ rad}$$

$$\theta_2 = 0{,}5\pi + 4\pi(24{,}25) - \frac{\pi}{12}(24{,}25)^2 = 48{,}5\pi\text{ rad}$$

Los valores son iguales, tal como esperábamos.

Como $\theta_1 = \theta_2 = 48{,}5\pi\text{ rad}$, equivalente a 24 vueltas mas 1/4 de vuelta, el encuentro es en punto B.

b) La velocidad lineal, la velocidad angular, las componentes tangencial y normal de la aceleración de cada uno de los móviles en el instante de encuentro.

Móvil 1

$$\begin{cases} \omega_1 = 2\pi\text{rad/s} \\ v_1 = \omega_1 r = 1{,}5\pi\text{ m/s} \\ \alpha_1 = 0 \rightarrow a_{t1} = \alpha_1 r = 0 \\ a_{n1} = \omega_1^2 r = 3\pi^2\text{ m/s} \end{cases}$$

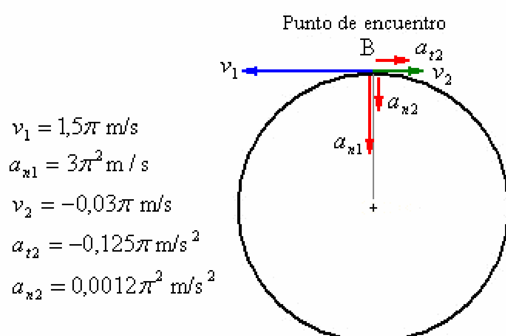
Móvil 2

$$\begin{cases} \omega_2 = 4\pi - \pi \dfrac{24{,}25}{6} = -0{,}04\pi \text{rad/s} \\ v_2 = \omega_2 r = -0{,}03\pi \text{ m/s} \\ a_{t2} = \alpha_2 r = -0{,}125\pi \text{ m/s}^2 \\ a_{n2} = \omega_2^2 r = 0{,}0012\pi^2 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

El móvil 2 tiene velocidad negativa, porque a l tiempo $t = 24$ s su velocidad se hizo cero e inicia el retorno, al tiempo $t = 24{,}25$ s se produce el encuentro.

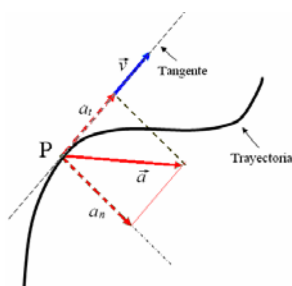
c) Esquema especificando los vectores velocidad, aceleración, en el instante de encuentro.

En el instante del encuentro el esquema sería el siguiente:

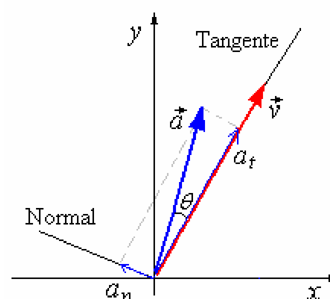


MOVIMIENTO CURVILÍNEO

El movimiento curvilíneo es aquel en el que pueden combinarse tramos rectos y/o curvos. La extensión de las ecuaciones en el sistema intrínseco es inmediata sufriendo sólo una ligera modificación respecto a la aceleración. Esta adopta la expresión $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\hat{t} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n}$ donde ρ es el denominado radio de curvatura y corresponde al radio de una hipotética circunferencia en cada uno de los puntos de la trayectoria. Es evidente que en el caso del movimiento circular éste no varía ya que coincide con el radio de la circunferencia en cada uno de esos puntos. $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ y $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$



La figura siguiente muestra la velocidad y la aceleración con las coordenadas *x* e *y* para un determinado instante.



Como $a_t = a\cos\theta$ m/s^2 y $a_n = a\text{sen}\theta$ m/s^2,

La aceleración tangencial en cualquier instante, se obtiene a partir del producto escalar del vector aceleración $\vec{a}$ y el vector velocidad $\vec{v}$.

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = va\cos\theta = va_t$$

$$a_t = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

La aceleración normal, se obtiene a partir del módulo de la aceleración a y de la aceleración tangencial a_t.

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$\Rightarrow a_n^2 = a_x^2 + a_y^2 - a_t^2$$

$$a_n^2 = a_x^2 + a_y^2 - \left(\frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right)^2$$

Finalmente $a_n = \dfrac{v_y a_x - v_x a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$

El radio de curvatura

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

Ejemplo 9. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por $\vec{v} = (3t - 2)\hat{i} + (6t^2 - 5)\hat{j}$ m/s. Calcular las

componentes tangencial y normal de la aceleración y el radio de curvatura en el instante t =2 s.

Solución.

$$v_x = (3t-2)\ \text{m/s} \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3\ \text{m/s}^2$$

$$v_y = (6t^2-5)\ \text{m/s} \Rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t\ \text{m/s}^2$$

En el instante t = 2 s

$$\begin{cases} v_x = 4\ \text{m/s} & a_x = 3\ \text{m/s}^2 \\ v_y = 19\ \text{m/s} & a_y = 24\ \text{m/s}^2 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{4^2+19^2} = 19{,}49\ \text{m/s}$$

$$a = \sqrt{3^2+24^2} = 24{,}19\ \text{m/s}^2$$

La aceleración tangencial es:

$$a_t = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \frac{4(3)+19(24)}{19{,}49} = 24\ \text{m/s}^2$$

La aceleración normal es:

$$a_n = \frac{v_y a_x - v_x a_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \frac{19(3)-4(24)}{19{,}49} = -2\ \text{m/s}^2$$

El radio de curvatura

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

$$a = \sqrt{3^2+24^2} = 24{,}19\ \text{m/s}^2$$

$$v = \sqrt{4^2+19^2} = 19{,}49\ \text{m/s}$$

$$v^2 = 377\ ,\ a_n = -2\ \text{m/s}^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{377}{2} = 188{,}5\ \text{m}$$

Ejemplo 10. Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas cartesianas están dadas como funciones del tiempo

$$x = 3t\ ,\ y = 2t - 5t^2$$

Determine

a) las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración.

b) las componentes normal y tangencial de la velocidad y aceleración.

c) la ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas.

Solución.

$$x = 3t\ ,\ y = 2t - 5t^2$$

a) $v_x = 3$; $v_y = 2 - 10t$; $a_x = 0$; $a_y = -10$;

b) $$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{3\hat{i} + (2-10t)\hat{j}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}},$$

$$\hat{n} = \hat{t}\times\hat{k} = \frac{-3\hat{j} + (2-10t)\hat{i}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$$ entonces

$$v_t = \vec{v}\cdot\hat{t} = v = \sqrt{9+(2-10t)^2}$$

$$v_n = 0$$

$$a_T = \vec{a}.\hat{t} = \frac{-10t(2-10t)}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$$

$$a_T = \vec{a}.\hat{t} = \frac{-10t(2-10t)}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$$

$$a_n = \vec{a}\cdot\hat{n} = \frac{30}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$$

c) $$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}x^2$$

Ejemplo 11. Una partícula se mueve en el plano xy de acuerdo con la ley $a_x = 0$, $ay = 4\cos(2t)$ m/s^2. En el instante $t = 0$, el móvil se encontraba en $x = 0$, $y = -1$ m, y tenía la velocidad $vx = 2$, $v_y = 0$ m/s.

a) Hallar las expresiones de r(t) y v(t).

b) Dibujar y calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = \pi/6$ s.

Solución.

a) En $t = 0$

$$a_x = 0\ ,\ v_x = 2\frac{m}{s}\ ,\ x = 0$$

$$a_y = 4\cos(2t)\frac{m}{s^2}\ ,\ v_y = 0\ ,\ y = -1\quad \text{m}$$

En el eje x el movimiento es uniforme $v_x = 2\frac{\text{m}}{s}$,

$$x = 2t\ \text{m}$$

Para encontrar el movimiento en y hay que integrar

$$\int_0^{v_y} v_y = \int_0^t 4\cos(2t)dt \Rightarrow v_y = 2\text{sen}(2t)\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

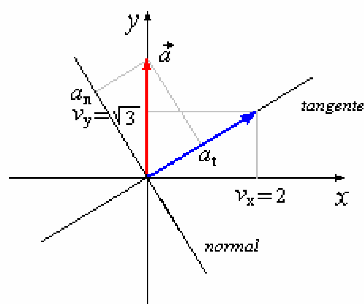
$$\int_{-1}^{y} dy = \int_0^t 2\text{sen}(2t)dt \Rightarrow y-(-1) = 1-\cos(2t)$$

$$\Rightarrow y = -\cos(2t)\,\text{m}$$

b) Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = \pi/6$ s.

$$v_x = 2,\ a_x = 0$$

$$v_y = \sqrt{3},\ a_y = 2$$



$$a_t = 2\cos\theta = 1{,}31\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_n = 2\text{sen}\theta = 1{,}51\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ \tan\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\theta = 49{,}1^\circ$$

Ejemplo 12. Un móvil se mueve en el plano xy con las siguientes aceleraciones: a_x=2 m/s^2, a_y=10 m/s^2. Si en el instante inicial parte del origen con velocidad inicial v_x = 0 y v_y =20 m/s.

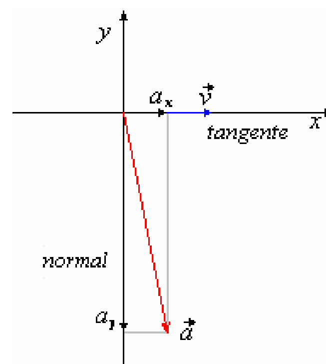
Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración, y el radio de curvatura en el instante t = 2 s.

Solución.

$$a_y = -10\frac{m}{s^2} \quad v_y = 20 + (-10)t$$

$$a_x = 2\frac{m}{s^2} \quad v_x = 2t$$

Para t = 2 s $\begin{cases} v_y = 0 \\ v_x = 4 \end{cases}$



$$a_t = a_x = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad a_n = a_y = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4^2}{10} = 1{,}6\text{m}$$

Ejemplo 13. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por

$\vec{v} = (3t-2)\hat{i} + (6t^2-5)\hat{j}$ m/s.

Si la posición del móvil en el instante t = 1 s es $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ m. Calcular

a) El vector posición del móvil en cualquier instante.

b) El vector aceleración.

c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante t = 2 s.

Dibujar el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes tangencial y normal en dicho instante.

Solución.

a) Para el movimiento horizontal

$$v_x = 3t - 2 \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3\frac{m}{s^2}$$

Como $v_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$, integrando

$$\int_{3}^{t} dx = \int_{1}^{t} (3t - 2)dt \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\text{m}$$

Para el movimiento vertical

$$v_y = 6t^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 12t\frac{m}{s^2}$$

Como $v_y = \dfrac{dy}{dt} \Rightarrow dy = v_y dt$, integrando

$$\int_{-2}^{t} dy = \int_{1}^{t} (6t^2 - 5)dt \Rightarrow y = (2t^3 - 5t + 1)\text{m}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + \frac{7}{2}\right)\hat{i} - (2t^3 - 5t + 1)\hat{j}$$

b) $\vec{a} = 3\hat{i} + 12t\hat{j}$

c) Para $t = 2$ s

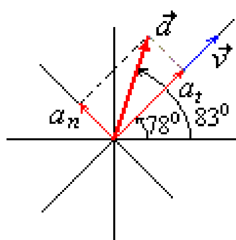
$v_x = 4$ m/s, $v_y = 19$ m/s

$a_x = 3$ m/s^2, $a_y = 24$ m/s^2

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 24{,}2\text{m}/\text{s}^2$$

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{19}{4} = 4{,}75 \Rightarrow \varphi = 78^o$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{24}{3} = 3 \Rightarrow \theta = 83^o$$



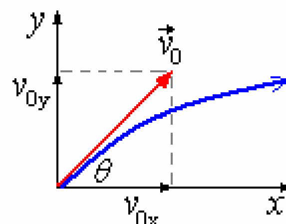
$$a_t = a\cos(\theta - \varphi) = 24{,}1\text{m}/\text{s}^2$$

$$a_n = a(\text{sen}\theta - \varphi) = 2\text{m}$$

MOVIMIENTO PARABÓLICO.

Considere un objeto que se desplaza en el aire sin ninguna fuerza con excepción de la gravedad y de la resistencia del aire. La fuerza de la gravedad produce una aceleración constante hacia abajo de magnitud 9,80 m/s^2. Como primera aproximación, no tomemos los efectos del aire y de variaciones en g. Asumiremos que la tierra es plana para el rango horizontal de los proyectiles. A pesar de estas simplificaciones, podemos aún obtener una descripción bastante buena del movimiento del proyectil. El recorrido de un proyectil se llama su trayectoria.

Si se desprecia la resistencia del aire, no hay entonces aceleración en la dirección horizontal, y $a_x = 0$. La aceleración en la dirección de y es debido a la gravedad. Es constante y dirigida hacia abajo, así que $a_y = -g$. Es conveniente elegir $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$ (es decir, poner el origen en el punto donde el proyectil comienza su movimiento). Además, nos referimos típicamente a v_0 como la rapidez inicial del proyectil. Si el proyectil es lanzado con un ángulo θ sobre la horizontal, la velocidad inicial en la dirección x y la velocidad inicial en la dirección y se pueden expresar en términos de g y de y θ usando la trigonometría.



$$v_{0x} = v_0\cos\theta, \quad v_{0y} = v_0\text{sen}\theta$$

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

Con esto:

$$v_x = v_0\cos\theta = \text{constante}, \quad v_y = v_0\text{sen}\theta - gt$$

$$x = (v_0\cos\theta)t, \quad y = (v_0\text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Ecuación de la trayectoria.

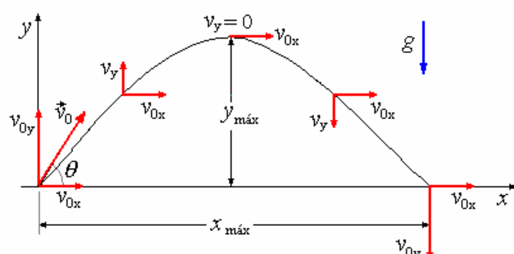
De la ecuación para x obtenemos $t = \dfrac{x}{v_0\cos\theta}$.

Sustituyendo en la ecuación para y

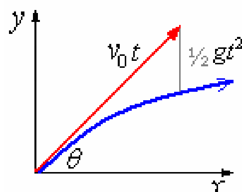
$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

Corresponde a la ecuación de una parábola que pasa por el origen. Una característica dominante del movimiento del proyectil es que el movimiento horizontal es independiente del movimiento vertical. Así un proyectil se mueve a una velocidad constante

en la dirección horizontal, independiente de su movimiento vertical. Esto se ilustra en la figura.



Podemos entender mejor el significado de la ecuación $y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ viendo el movimiento del proyectil de esta manera: Primero, si no hubiera fuerza de la gravedad y aceleración hacia abajo, en el tiempo t el proyectil movería una distancia $v_0 t$ en una línea inclinada recta. Si ahora imaginamos con la gravedad el efecto sería hacer que el proyectil se aleje de la trayectoria recta por una distancia ½ gt^2. De la superposición de estos dos efectos resulta la trayectoria parabólica como se muestra en la figura.



Tiempo de vuelo. Poniendo $y = 0$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$, despejando t,

$$t^2 - \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}t = 0$$

Resolviendo obtenemos dos soluciones $t = 0$, que corresponde al disparo del proyectil y

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

El valor máximo de t se obtiene para $\theta = 90^\circ$. Cuando el proyectil se lanza verticalmente hacia arriba, describiendo una trayectoria rectilínea a lo largo del eje y.

El alcance horizontal de cada uno de los proyectiles se obtiene para $y = 0$.

$$x_{máx} = (v_0 \cos\theta)t = (v_0 \cos\theta)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right)$$

$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

La altura máxima que alcanza un proyectil se obtiene con $v_y = 0$.

$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt = 0$, despejando t.

$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$, como vemos es igual a la mitad del tiempo de vuelo.

$$y_{máx} = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

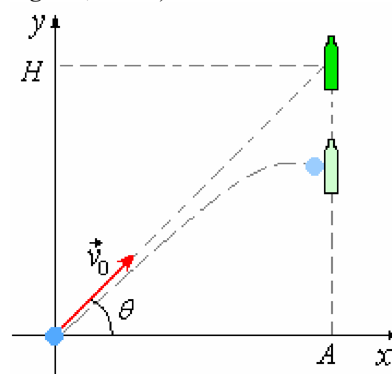
$$= (v_0 \operatorname{sen}\theta)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right)^2$$

Finalmente:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

Su valor máximo se obtiene para el ángulo de disparo $\theta = 90^\circ$.

Ejemplo 14. UN BLANCO EN CAÍDA LIBRE (Tiro al mono)
Se deja caer una botella desde el reposo en el instante en que una piedra es lanzada desde el origen. Determinar los valores del ángulo y de la velocidad de disparo para que la piedra rompa la botella. (Tómese g = 9,8 m/s^2)



Solución.
Movimiento de la piedra: El movimiento curvilíneo de la piedra se realiza bajo la aceleración constante de la gravedad, es decir, es la composición de dos movimientos
- Uniforme a lo largo del eje horizontal

$$\text{Horizontal}\begin{cases} a_{px} = 0 \\ v_{px} = v_0 \cos\theta \\ x_p = v_0 \cos\theta\, t \end{cases}$$

- Uniformemente acelerado a lo largo del eje vertical.

$$\text{Vertical}\begin{cases} a_{px} = -g \\ v_{px} = v_0 \text{sen}\theta - gt \\ y_p = v_0 \text{sen}\theta\, t - gt^2/2 \end{cases}$$

Movimiento de la botella: La botella se mueve verticalmente bajo la aceleración constante de la gravedad.

$$a_{bx} = -g$$

$$v_{bx} = -gt$$

$$y_b = H - gt^2/2$$

Choque de la piedra con la botella: Cuando se produce el choque, la posición de la piedra y de la botella coincide.

$$A = v_0 \cos\theta\, t$$

$$H - gt^2/2 = v_0 \text{sen}\theta\, t - gt^2/2$$

$$\Rightarrow H = v_0 \text{sen}\theta\, t$$

Dividimos la segunda ecuación entre la primera.

$$\tan\theta = \frac{H}{A}$$

Para romper la botella debemos de apuntarla directamente y en el instante en el que se deja caer, se debe lanzar la piedra. La velocidad debe tener un valor mínimo para hacer el recorrido A, mientras la botella esté en el aire.

Esto sucede para el tiempo $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, y el recorrido horizontal de la piedra debe cumplir:

$$v_0 \cos\theta \left(\sqrt{\frac{2H}{g}}\right) \geq A \Rightarrow v_0 \geq \frac{A}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2H}}$$

Ejemplo 15. Una bolsa de arena cae del reposo de un globo de aire caliente desde una altura de 124 m está soplando un viento horizontal, y el viento da a bolsa de arena una aceleración horizontal constante de 1,10 m/s^2.

a) Demuestre que la trayectoria de la bolsa de arena es una línea recta.

b) ¿Cuanto tiempo toma para llegar la tierra?

c) ¿Con qué velocidad llega a la tierra?

Solución.

a) $x = \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2x}{a_x}$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = -\frac{2y}{g}$$

De estas ecuaciones, obtenemos:

$\frac{2x}{a_x} = -\frac{2y}{g} \Rightarrow y = -\frac{g}{a_x}x$ Ecuación de una línea recta.

b) En tierra, $y = -124$, tal que

$$t^2 = -\frac{2(-124)}{9,8} \Rightarrow t = 5,03\,\text{s}$$

c) $v_y = v_{0y} - gt = 0 - (9,8)(5,03)$

$$= -49,3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 0 + (1,10)(5,03)$$

$$= 5,53\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

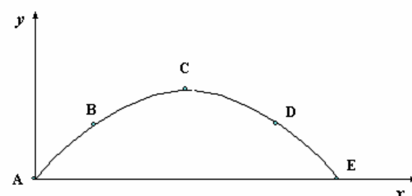
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(5,53)^2 + (-49,3)^2}$$

$$= 49,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 16. Disparamos un proyectil desde el origen y éste describe una trayectoria parabólica como la de la figura. Despreciamos la resistencia del aire.

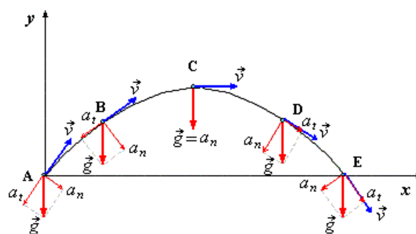
Dibuja en las posiciones A, B, C, D y E el vector velocidad, el vector aceleración y las componentes normal y tangencial de la aceleración. (No se trata de dar el valor numérico de ninguna de las variables, sólo la dirección y el sentido de las mismas)

¿Qué efecto producen a_n y a_t sobre la velocidad?



Solución.

$\vec{v}$ es tangente a la trayectoria



Cuando sube

a_t y $\vec{v}$ tienen sentidos opuestos.

Cuando baja

a_t y $\vec{v}$ tienen el mismo sentido

a_t modifica el módulo de la velocidad con el tiempo.

a_n modifica la dirección de $\vec{v}$

Ejemplo 17. Una bala del rifle se dispara con una velocidad de 280 m/s hacia arriba de una superficie plana inclinada 30° sobre la horizontal. La bala se dispara con un ángulo de elevación inicial de 45° sobre la horizontal (es decir, 15° sobre la superficie plana). ¿Cuál es el alcance de la bala sobre el plano?

Solución.

La ecuación del plano inclinado es

$$\frac{y}{x} = \tan 30° \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

La ecuación de la trayectoria parabólica.

$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

La intersección de la parábola y la línea recta ocurre cuando

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

Para $\theta = 45°$: $x = \frac{v_0^2}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Para un triángulo 30°, 60°, 90° vemos que

$$x = S\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}S.$$

De aquí $S = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} - 1\right)\frac{v_0^2}{g} = 0{,}49\frac{v_0^2}{g}$, arriba del plano.

Con y_0 = 280 m/s, S = 3,90 km.

Ejemplo 18. Se dispara un proyectil desde la cima de una colina de 150 (m) de altura con una rapidez de 180 (m/s) y formando un ángulo de 30º con la horizontal. Calcule:

(a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del proyectil.

(b) La altura máxima del proyectil con respecto al suelo.

(c) Las componentes normal y tangencial de la aceleración al salir en el punto de disparo.

Solución:

$x = 180(\cos \pi/6)t$

$y = 150 + 180(\text{sen } \pi/6)t - 5t^2$

a) Punto de caída

$150 + 180(\text{sen } \pi/6)t - 5t^2 = 0$,

$t = 19{,}5$ s

$x = 180(\cos \pi/6)(19{,}5) = 3039{,}8$m

b) Tiempo para la altura máxima

$180(\text{sen } \pi/6) - 10t = 0$, $t = 9{,}0$ s

entonces

$y_{max} = 150 + 180(\text{sen } \pi/6)(9) - 5(9)^2$

$= 555{,}0$m

El vector unitario tangente es

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \hat{i}\cos\frac{\pi}{6} + \hat{j}\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\vec{a} = -10\hat{j}$$

Entonces

$$a_t = \vec{a}\cdot\hat{t} = -10\text{sen}\frac{\pi}{6} = -5 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_n^2} = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 19. Un cañón de artillería lanza proyectiles con una rapidez de 300 (m/s). El artillero debe darle a un blanco que se encuentra a 8640 (m) detrás de un cerro, cuya altura es de 1000 (m) ubicado a 1200 (m) del cañón. Demuestre que es posible darle al blanco y determine el ángulo de elevación para cumplir el objetivo.

Solución.

Supondremos que damos en el blanco entonces

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0$$

$$8649\tan\alpha - \frac{5(8649)^2}{(300)^2\cos^2\alpha} = 0$$

Tiene dos raíces reales

$\alpha_1 = 53{,}03º$

$\alpha_2 = 36{,}97º$

Debemos verificar que el disparo pasa sobre el cerro, para ello evaluamos en ambos ángulos $y_{(1200)}$

$y_{1\,(1200)} = 1373{,}0$ m

$y_{2\,(1200)} = 777{,}95$ m

La altura del cerro es excedida en el primer caso.

Ejemplo 20. Se dispara un proyectil de modo que su alcance horizontal es igual al triple de la altura máxima. Encuentre el ángulo de lanzamiento.

Solución.

Sabemos que

$$x_{max} = \frac{v_0^2\text{sen}2\alpha}{g}$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2\text{sen}^2\alpha}{2g}$$

Entonces

$$\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = 3\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

$$\Rightarrow\ 2\cos\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow\ \tan\alpha = \frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \alpha = 33{,}69^o$$

Ejemplo 21. Un lanza granadas tiene un alcance máximo de 300 m. Para dar en un blanco que se encuentra a una distancia de 400 m del lanza granadas. Determine:
a) La altura mínima que debe subirse el lanza granadas.
b) La rapidez de lanzamiento.
c) El ángulo de lanzamiento,

Solución.
La ecuación de la parábola de seguridad es

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Sabemos también que para $h = 0$ la distancia máxima alcanzable es

$$x_{(0)} = \frac{v_0^2}{g} = 300$$

y para una altura h la distancia horizontal máxima será

$$x_{(h)} = \sqrt{\left(v_0^2 + 2hg\right)}\frac{v_0}{g} = 400\text{m}$$

de la primera
b)

$$v_0 = \sqrt{3000} = 54{,}77\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

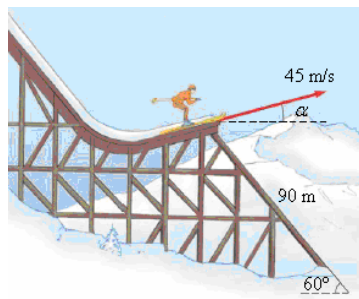
y de $\sqrt{\left(54{,}77\right)^2 + 2h(10)}\dfrac{54{,}77}{10} = 400$

a)
$h = 116{,}701\text{m}$

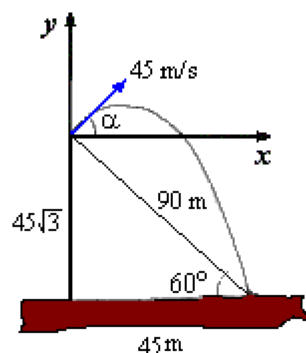
c) El ángulo de lanzamiento cuando el blanco está sobre el límite de la parábola de seguridad es

$\tan\alpha = \dfrac{v_0^2}{gx}$ entonces $\alpha = 36{,}87^o$

Ejemplo 22. Un patinador desciende por una pista helada, alcanzando al finalizar la pista una velocidad de 45 m/s. En una competición de salto, debería alcanzar 90 m a lo largo de una pista inclinada 60º respecto de la horizontal.
a) ¿Cuál será el ángulo (o los ángulos) α que debe formar su vector velocidad inicial con la horizontal?.
b) ¿Cuánto tiempo tarda en aterrizar?
c) Calcular y dibujar las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t/2$. Siendo t el tiempo de vuelo. Tomar $g = 10$ m/s^2



Solución.
a) y b)



$$a_x = 0 \qquad v_x = 45\cos\alpha$$

$$a_y = -10 \qquad v_y = 45\operatorname{sen}\alpha - 10t$$

$$x = 45\cos\alpha.t$$

$$y = 45\operatorname{sen}\alpha.t - \frac{1}{2}10t^2$$

Punto de impacto $x = 45$, $y = -45\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{r} 45 = 45\cos\alpha.t \\ -45\sqrt{3} = 45\operatorname{sen}\alpha.t - 5t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-45\sqrt{3} = 45\operatorname{sen}\alpha.\frac{1}{\cos\alpha} - 5\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\tan^2\alpha - 9\tan\alpha + 1 - 9\sqrt{3} = 0\ \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 84{,}5^o \qquad t_1 = 10{,}45s$$

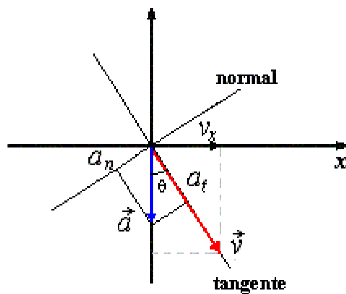
$$\alpha_2 = -54{,}5^o \qquad t_2 = 1{,}72s$$

c) Para $t = \dfrac{t_1}{2}$ $\begin{cases} v_x = 4{,}31 & a_x = 0 \\ v_y = -7{,}46 & a_y = -10 \end{cases}$

$$\tan\theta = \frac{v_x}{|v_y|} \ \Rightarrow\ \theta = 30^o$$

$$a_t = g\cos 30^o = 5\sqrt{3}\ \text{m/s}^2$$

$$a_n = g\operatorname{sen}30^o = 5\ \text{m/s}^2$$



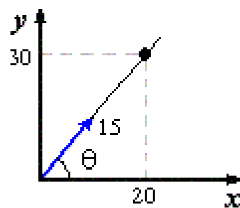
Ejemplo 23. Se deja caer una botella desde el reposo en la posición x =20 m e y =30 m. Al mismo tiempo se lanza desde el origen una piedra con una velocidad de 15 m/s.

a) Determinar el ángulo con el que tenemos que lanzar la piedra para que rompa la botella, calcular la altura a la que ha ocurrido el choque.

b) Dibujar en la misma gráfica la trayectoria de la piedra y de la botella. (Tomar g = 9,8 m/s^2).

Solución:

a)



Movimiento de la botella

$$a_x = 0 \quad v_x = 0 \quad x = 20$$
$$a_y = -9{,}8 \quad v_y = -9{,}8t \quad y = 30 - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

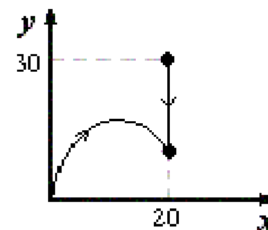
Movimiento de la piedra

$$a_x = 0 \quad v_x = 15\cos\theta$$
$$a_y = -9{,}8 \quad v_y = 15\text{sen}\theta - 9{,}8t$$
$$x = 15\cos\theta t$$
$$y = 15\,\text{sen}\theta t - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

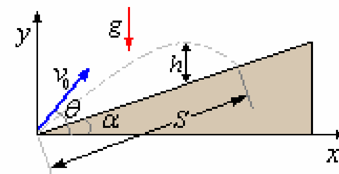
Punto de encuentro

$$20015\cos\theta.t$$
$$30 - \frac{1}{2}9{,}8t^2 = 15\text{sen}\theta t - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$
$$\left\{\tan\theta = \frac{30}{20} \quad \begin{array}{l}\theta = 56{,}3^o \\ y = 1{,}69\text{m}\end{array}\right.$$

b)



Ejemplo 24. Desde un cañón que está sobre un plano inclinado un ángulo α con la horizontal se dispara un proyectil. Este sale con una velocidad v_0 formando un ángulo θ con el plano horizontal.
Encontrar.
a) El punto más alto al que llega el proyectil.
b) El alcance del proyectil.
Solución.



a) $v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad v_{0y} = v_0\text{sen}\theta$

$v_y = v_0 sen\theta - gt$

La altura máxima se produce cuando $v_y = 0$

$$y_{máx} = \frac{v_0^2\text{sen}^2\theta}{2g}$$

Con ese valor,

$$x = v_0\cos\theta\left(\frac{v_0\text{sen}\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g}\text{sen}2\theta$$
$$y = x\tan\alpha = \frac{v_0^2}{2g}\text{sen}2\theta\tan\alpha$$
$$h = y_{máx} - y = \frac{v_0^2}{2g}\left(\text{sen}^2\theta - \text{sen}2\theta\tan\alpha\right)$$

b) El alcance máximo S.

$x = v_0\cos\theta\, t \quad y = v_0\text{sen}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$

Ecuación del plano en función de t $y = x\tan\alpha$

Dividiendo y/x:

$$\frac{y}{x} = \frac{v_0 \text{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2}{v_0 \cos\theta\, t} = \tan\alpha \Rightarrow$$

$$v_0 \text{sen}\theta\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 = \tan\alpha\, v_0 \cos\theta\, t$$

Resolviendo encontramos el tiempo para el que el proyectil toca tierra:

$$t = \frac{2v_0}{g}\left(\text{sen}\theta - \cos\theta \tan\alpha\right)$$

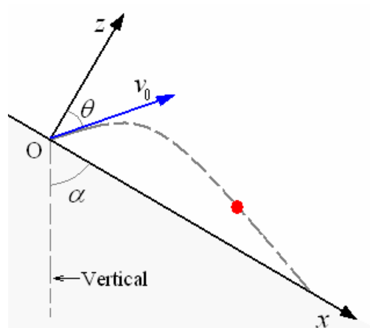
El valor de x cuando el proyectil toca tierra es:

$$x = v_0 \cos\theta\, t = \frac{2v_0^2}{g}\cos\theta\left(\text{sen}\theta - \cos\theta\tan\alpha\right)$$

Y el alcance S es:

$$S = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}\left(\text{sen}\theta - \cos\theta\tan\alpha\right)$$

Ejemplo 25. La figura muestra una colina inclinada un ángulo α respecto a la vertical y la trayectoria de un proyectil. El proyectil se lanza desde el origen O con una velocidad inicial de módulo v_0 y que forma un ángulo θ con el eje z (perpendicular al plano). El eje x se toma tangente al plano apuntando hacia abajo.
a) Tome el sistema de referencia indicado en la figura y halle las componentes de los vectores aceleración, velocidad y posición del proyectil en función del tiempo.
b) Halle la máxima separación entre el proyectil y la colina.
c) Halle la distancia entre el origen y el punto de caída del proyectil sobre la colina. Demuestre que esa distancia es máxima si $\theta = \alpha / 2$.



Solución.

a) $a_x = g\cos\alpha$, $v_x = g\cos\alpha\, t + v_0 \text{sen}\theta$,

$$x = \frac{1}{2} g\cos\alpha\, t^2 + v_0 \text{sen}\theta\, t$$

$a_z = -g\text{sen}\alpha$, $v_z = -g\text{sen}\alpha\, t + v_0\cos\theta$,

$$z = -\frac{1}{2} g\text{sen}\alpha\, t^2 + v_0\cos\theta\, t$$

b) La máxima separación ocurre para $v_z = 0$ y vale

$$z = \frac{v_0^2}{2g}\frac{\cos^2\theta}{2\text{sen}\alpha}$$

c) El punto de caída ocurre para $z = 0$ y la distancia vale $x_{(\theta)} = \dfrac{v_0^2}{g\text{sen}\alpha}\left[\dfrac{1+\cos 2\theta}{\tan\alpha} + \text{sen}2\theta\right]$

La distancia máxima ocurre para $\dfrac{dx_{(\theta)}}{d\theta} = 0$.

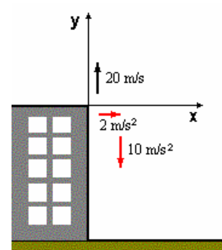
Ejemplo 26. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s desde la azotea de un edificio de 50 m de altura. La pelota además es empujada por el viento, produciendo un movimiento horizontal con aceleración de 2 m/s^2. Calcular:

a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y de impacto.

b) La altura máxima

c) El valor de las componentes tangencial y normal de la aceleración cuando la pelota se encuentra a 60 m de altura sobre el suelo.

Tómese g =10 m/s^2.



Solución.

$$a_x = 2,\quad v_x = 2t,\quad x = \frac{1}{2}2t^2$$

$$a_y = -10,\quad v_y = 20 + (-10)t,$$

$$y = 20t + \frac{1}{2}(-10)t^2$$

a) Punto de impacto

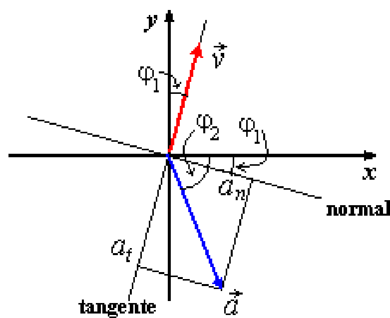
y = -50 $\Rightarrow$ t = 5,74 s $\Rightarrow$ x = 32,97 m

b) altura máxima

$v_y = 0 \Rightarrow t$ = 2 s $\Rightarrow y$ = 20 m

$h_{máxima}$ = 70 m sobre el suelo.

c) $h = 60 \Rightarrow y = 10$ m $\Rightarrow t_1 = 0{,}59$ s $t_2 = 3{,}41$ s



$$t_1 = 0{,}59s \begin{cases} v_x = 1{,}17 \\ v_y = 14{,}14 \end{cases} \begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = -10 \end{cases}$$

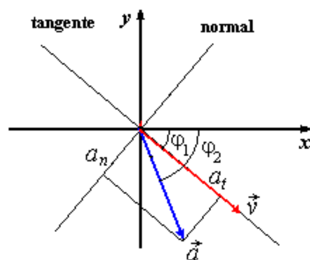
$$a = \sqrt{2^2 + 10^2}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{v_x}{v_y} = \frac{1{,}17}{14{,}14} = 0{,}08 \Rightarrow \varphi_1 = 4{,}7^o$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{|a_y|}{a_x} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \varphi_2 = 78{,}7^o$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 73^o$$

$$\begin{cases} a_n = a.\cos\varphi = 2{,}81\,\text{m}/s^2 \\ a_t = a.\text{sen}\varphi = 9{,}80\ \text{m}/s^2 \end{cases}$$



$$t_2 = 3{,}41s \begin{cases} v_x = 6{,}83\,\text{m/s} \\ v_y = -14{,}14\,\text{m/s} \end{cases} \begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = -10 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{2^2 + 10^2}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{14{,}14}{6{,}83} = 2{,}07 \Rightarrow \varphi_1 = 64{,}2^o$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{|a_y|}{a_x} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \varphi_2 = 78{,}7^o$$

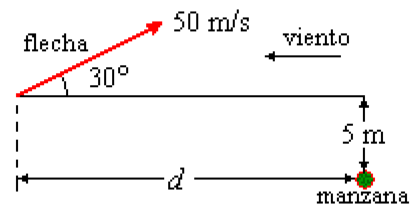
$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 14{,}5^o$$

$$\begin{cases} a_n = a.\cos\varphi = 9{,}87\,\text{m},/s^2 \\ a_t = a.\text{sen}\varphi = 2{,}55\,\text{m}/s^2 \end{cases}$$

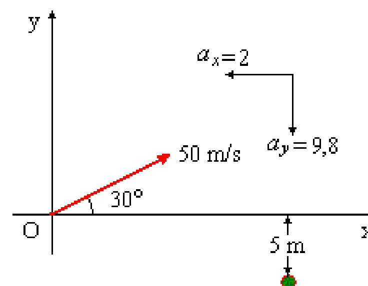
Ejemplo 27. Nos encontramos en la antigua Suiza, donde Guillermo Tell va a intentar ensartar con una flecha una manzana dispuesta en la cabeza de su hijo a cierta distancia *d* del punto de disparo (la manzana está 5 m por debajo del punto de lanzamiento de la flecha). La flecha sale con una velocidad inicial de 50 m/s haciendo una inclinación de 30º con la horizontal y el viento produce una aceleración horizontal opuesta a su velocidad de 2 m/s^2.

a) Calcular la distancia horizontal *d* a la que deberá estar el hijo para que pueda ensartar la manzana.

b) Hállese la altura máxima que alcanza la flecha medida desde el punto de lanzamiento. (g = 9,8 m/s^2)



Solución.



$$a_x = -2,\ v_x = 50\cos 30^o - 2t,$$

$$x = 50\cos 30^o - \frac{1}{2}2t^2$$

$$a_y = -9{,}8,\ v_y = 50\text{sen}30^o - 9{,}8t,$$

$$y = 50\text{sen}30^o - \frac{1}{2}9{,}8t^2$$

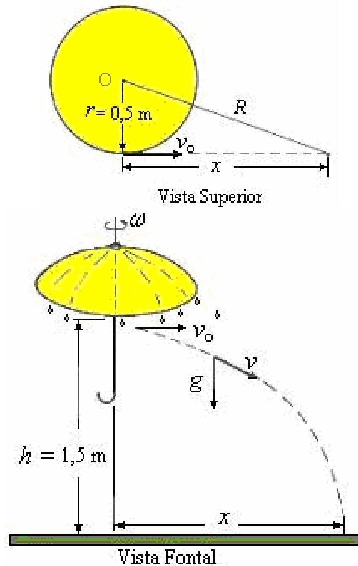
Punto de impacto $x = d$, $y = -5$

$-5 = 25t - 4{,}9t^2 \Rightarrow t = 5{,}29$ s $\Rightarrow x = 201{,}23$ m

Máxima altura $v_y = 0$

50sen30º - 9,8t = 0 $\Rightarrow$ $t = 2{,}55$ s $\Rightarrow$ $y = 31{,}89$ m

Ejemplo 28. Un paraguas abierto mojado se sostiene hacia arriba como se muestra en la figura y se gira sobre la manija a razón uniforme de 21 revoluciones en 44 s. Si el borde del paraguas es un círculo 1 m de diámetro, y la altura del borde sobre el piso es 1,5 m, hallar donde las gotas del agua al hacer girar del borde tocan el piso.



Solución.
La velocidad angular del paraguas es

$$\omega = \frac{21 \times 2\pi \text{rad}}{44s} = 3\text{rad}/\text{s}$$

La velocidad tangencial de las gotas de agua que salen del borde del paraguas es

$$v_0 = r\omega = (0{,}5)(3) = 1{,}5\text{m}/\text{s}$$

Para calcular el tiempo en que la gota llega al piso usamos $h = \frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(1{,}5)}{9{,}8}} = 0{,}553\text{m}$$

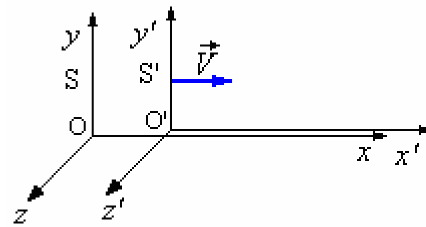
El alcance horizontal de la gota es
$x = v_0 t = (1{,}5)(0{,}55) = 0{,}83$ m;
y el locus de las gotas es un círculo de radio

$$R = \sqrt{(0{,}5)^2 + (0{,}83)^2} = 0{,}97 \text{ m.}$$

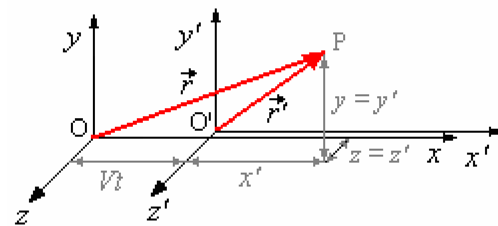
VELOCIDAD Y ACELERACIÓN RELATIVAS.

Movimiento Relativo de Traslación Uniforme. La Relatividad de Galileo

Consideramos dos sistemas de referencia S y S', S' tiene un movimiento de traslación rectilíneo uniforme con respecto a S; S' se aleja de S con una velocidad $\vec{V} = v\hat{i}$



Sea un objeto P determinado por un observador en el sistema S por $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y por un observador en el sistema S' por $\vec{r}\,' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$ como se muestra en la figura.



Las ecuaciones de transformación de Galileo que relacionan las observaciones desde los sistemas S y S' son

$x = x' + Vt$, $y = y'$, $z = z'$ $t = t'$

Aquí se supone que puede establecerse una escala de tiempo absoluta aplicable a ambos marcos de referencia de manera que $t = t'$. Esto sucedería si la velocidad de la luz fuera infinita (Debemos reconocer que las escalas de tiempo asociadas a dos marcos de referencia no son los mismos si existe movimiento relativo entre ellos es uno de los principios fundamentales de la teoría especial de la relatividad propuesta por Einstein en 1905).
Vectorialmente podemos representar la transformación de Galileo como

$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t$.

Derivando las relaciones anteriores podemos obtener la relación de la velocidad.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V \Rightarrow v_x = v'_{x'} + V$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} \Rightarrow v_y = v'_{y'}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} \Rightarrow v_z = v'_{z'}$$

Vectorialmente $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$

Derivando nuevamente obtenemos la relación de la aceleración

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv'_{x'}}{dt} + \frac{dV}{dt} \Rightarrow a_x = a'_{x'} + \frac{dV}{dt}$$

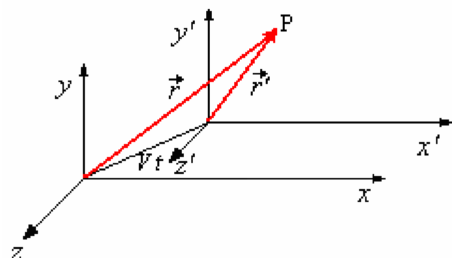
$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv'_{y'}}{dt} \Rightarrow a_y = a'_{y'}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{dv'_{z'}}{dt} \Rightarrow a_z = a'_{z'}$$

Si la velocidad $\vec{V}$ del sistema S' es constante,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \text{ y } \vec{a} = \vec{a}'$$

Estas relaciones encontradas son de aplicación general si S y S' están animadas por un movimiento relativo cualquiera, como se muestra en la figura siguiente



Las ecuaciones son:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \,,\; \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

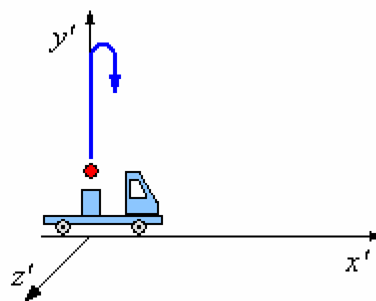
$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Ejemplo 29. Desde la plataforma de un camión en movimiento horizontal $\vec{V}$ constante se lanza un proyectil directamente hacia arriba con una velocidad $\vec{v}_0$. ¿Cómo será visto el movimiento del proyectil por:
a) un observador situado en el camión (sistema S')?
b) un observador situado en el suelo (sistema S)?
Solución.
a) El tiempo se mide desde el momento del lanzamiento $t_0 = 0$, cuando el proyectil se eleva con velocidad v_0. La componente horizontal de la velocidad coincide con la velocidad V del camión. El observador O' en el camión verá únicamente la componente vertical $v'_{y'0}$, la componente horizontal será $v'_{x'0} = 0$.
Para un instante *t* cualquiera

$$x' = 0 \qquad y' = v'_{y'0}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$v'_{x'} = 0 \qquad v'_{y'} = v'_{y'0} - gt$$

$$a'_{x'} = 0 \qquad a'_{y} = -g$$

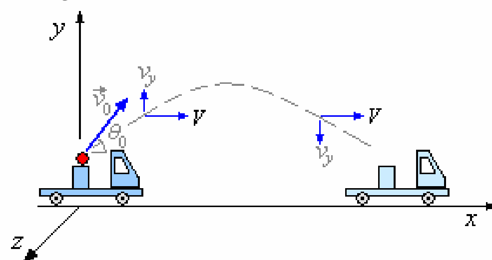


b) Si se observa el mismo proyectil desde un sistema de referencia situado en el suelo S con un origen en el lugar de lanzamiento (para $t_0 = 0$, O = O'), entonces las posiciones, las velocidades y las aceleraciones respecto de O estarán dadas por la transformación de Galileo. En este caso la velocidad inicial v_0 vista desde el suelo será

$$\vec{v}_0 = V\hat{i} + v_{y0}\hat{j} \quad v_0 = \sqrt{V^2 + v_{y0}^2}$$

$$\theta_0 = \tan^{-1}\frac{v_{y0}}{V}$$

La trayectoria será una parábola tal como se ve en la figura siguiente



La componente horizontal del movimiento del proyectil es igual al movimiento del cañón, de modo que cuando cae el proyectil coincidirá con el cañón.

Ejemplo 30. El observador O suelta una piedra del trigésimo piso de un rascacielos. El observador O', descendiendo en un ascensor a velocidad constante de V = 5,0 m/s, pasa el trigésimo piso justo cuando se suelta la piedra. Al tiempo t = 3,0 s después de que se suelta la piedra, hallar:
a) La posición, la velocidad, y la aceleración de la piedra relativa a O.
b) La posición, la velocidad, y la aceleración de la piedra relativa a O'.
Solución.
a) Para O, la posición de la piedra está dada por:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Donde x = 0 en el trigésimo piso con la dirección hacia abajo como la dirección positiva de x. Así, en t = 3,0 s,

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2}(9{,}8)(3{,}0)^2 = +\,44 \text{ m/s}$$

También, $v = v_0 + at$ da
$v = 0 + 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 3{,}0 \text{ s} = +29$ m/s.

La aceleración de un cuerpo en caída libre, según el observador O que está inmóvil con respecto a la tierra, se sabe que la aceleración gravitacional es constante.
(De hecho, esto es la base de la validez de los dos cálculos anteriores.)
Así tenemos:

$a = +g = +9{,}8$ m/s^2.

b) O' mide la posición x', relativa a x por medio de la ecuación $x' = x - Vt$.
Luego, después de 3,0 s,

$x' = 44$ m – 5,0 m/s x 3,0 s = +29 m.

Es decir, la piedra se localiza 29 m debajo del observador O' después de 3,0 s.
La velocidad de la piedra relativa a O' es $v' = v - V$; de aquí, en $t = 3{,}0$s,

$v' = 29$ m/s – 5,0 m/s = +24 m/s

Puesto que V es constante, $a' = a$, y $a' = +g = +9{,}8$ m/s^2.
El observador O' ve la piedra con la misma aceleración vista por O. (en general, las aceleraciones son iguales en todos los sistemas inerciales.)

Ejemplo 31. Un automovilista viaja hacia el oeste sobre la Ruta Interestatal 80 a 80 km/h y es seguido por un auto patrulla que viaja a 95 km/h.
a) ¿Cuál es la velocidad del automovilista respecto al auto patrulla?
b) ¿Cuál es la velocidad del auto patrulla respecto al automovilista?
Solución.
Si el Oeste indica el sentido positivo entonces
a) 80 - 95 = -15 km/h
b) 95 - 80 = 15 km/h

Ejemplo 32. Un río tiene una rapidez uniforme de 0,5 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1 km y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de 1,2 m/s en agua tranquila, ¿cuánto dura el recorrido? Compare este resultado con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera tranquila.
Solución.
La rapidez absoluta (respecto a la ribera) cuando nada corriente arriba es 1,2 – 0,5 = 0,7 y cuando nada corriente abajo es 1,2 + 0,5 = 1,7 entonces el tiempo de ida y vuelta será

$$t = \frac{1000}{0{,}7} + \frac{1000}{1{,}7} = 2016{,}81 \text{ s} = 0{,}56 \text{ h}$$

Ejemplo 33. Dos remeros en idénticas canoas ejercen el mismo esfuerzo remando en un río, uno corriente arriba (y se mueve corriente arriba), mientras que el otro rema directamente corriente abajo. Un observador en reposo sobre la orilla del río determina sus rapideces que resultan ser de V_1 y V_2 respectivamente. Determine en términos de los datos la rapidez de las aguas del río.
Solución.
Sea W la rapidez del río y u la rapidez de los botes respecto al agua, (igual en ambos), entonces
$V_1 = u - W$
$V_2 = u + W$
de modo que

$$W = \frac{V_2 - V_1}{2}$$

Ejemplo 34. Un bote cruza un río que mide de ancho a en el cual la corriente fluye con una rapidez uniforme de u. El botero mantiene una orientación (es decir, la dirección en la cual apunta el bote) perpendicular al río y al motor fijo para dar una rapidez constante de v m/s con respecto al agua. De acuerdo a los datos
(a) ¿Cuál es la velocidad del bote respecto a un observador detenido en la orilla?
(b) ¿Hasta dónde estará el bote, medido corriente abajo paralelamente al río, desde la posición inicial hasta cuando alcance la orilla opuesta?
Solución.
a)

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

b) La componente de la velocidad absoluta perpendicular al río determine el tiempo de cruce de acuerdo a $t = \frac{a}{v}$

Por lo tanto el bote avanza paralelamente al río una distancia

$$d = ut = \frac{u}{v}a$$

Ejemplo 35. Un comprador que está en una tienda puede caminar sobre una escalera mecánica en 30 s cuando está detenida. Cuando la escalera mecánica, funciona normalmente, puede llevar al comprador sin caminar al siguiente piso en 20 s. ¿Cuánto tiempo le tomaría al comprador al subir caminando con la escalera mecánica en movimiento? Suponga que el comprador hace el mismo esfuerzo al caminar sobre la escalera mecánica en movimiento o cuando está parada.
Solución.
Sea L el largo de la escalera. Entonces la velocidad de la persona respecto a la escalera es

$$v' = \frac{L}{30}.$$

Sea v_e la velocidad de la escalera. Ella corresponde a la de la persona cuando no camina, es decir

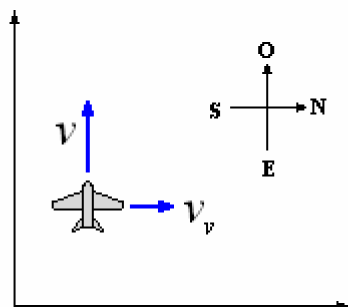
$$v_e = \frac{L}{20}$$

Si la escalera funciona y la persona camina, entonces

$$v = v_e + v' = \frac{L}{20} + \frac{L}{30} = \frac{L}{t}$$

de donde el tiempo será
$t = 12$ s

Ejemplo 36. El piloto de un avión observa que la brújula indica que va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de 150 km/h. Si existiera un viento de 30 km/h hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra.



Solución.
La velocidad del viento es v_v = 30 km/h y la rapidez del avión respecto al aire es v' = 150 km/h.
Pero

$$\vec{v} = v\hat{j} = 30\hat{i} + \vec{v}'$$

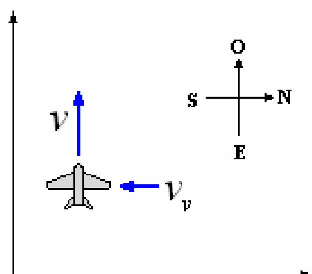
De donde $\vec{v}' = v\hat{j} - 30\hat{i}$

y si tomamos magnitudes

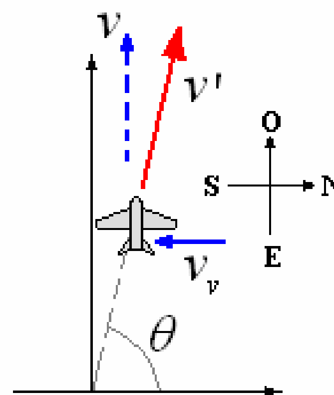
$$150 = \sqrt{v^2 + 30^2} \Rightarrow$$

v = 146,969 km/h

Ejemplo 37. El piloto de un avión desea volar hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a 50 km/h. Si la rapidez del avión cuando no sopla el viento es de 200 km/h,
a) ¿en qué dirección debe dirigirse el avión?
b) ¿cuál debe ser su rapidez respecto a la Tierra?



Solución.
La velocidad del viento es v_v = 50 km/h hacia el sur y la rapidez del avión respecto al aire es v' = 200 km/h.
Para poder volar directamente hacia el oeste con respecto a tierra debe compensar el arrastre producido por el viento, tal como se muestra en la figura siguiente.



a) La dirección en la que debe dirigirse el avión está dada por el ángulo θ.

$$\cos\theta = \frac{v_v}{v} = \frac{50}{200} = 0{,}25 \Rightarrow \theta = 75{,}5^\circ$$

Debe dirigirse 75,5º dirección N-O.
b) Su velocidad respecto a la Tierra es:

$$\vec{v} = \vec{v}' - 50\hat{i}$$

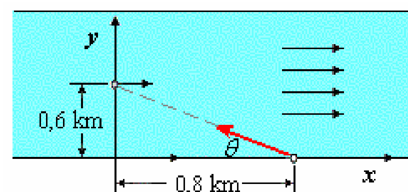
Y su rapidez respecto a tierra es:

$$v = \sqrt{v'^2 - 50^2} = \sqrt{200^2 - 50^2}$$

= 193,6 km/h

Ejemplo 38. Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo llevado corriente abajo por una corriente que fluye uniformemente con una rapidez de 2,5 km/h. El niño está a 0,6 km de la orilla y a 0,8 km corriente arriba de un embarcadero cuando un bote de rescate se pone en camino.
a) si el bote procede a su rapidez máxima de 20 km/h con respecto al agua, ¿cuál es la dirección, relativa a la orilla, que deberá tomar el conductor del bote?
b) ¿Cuál es el ángulo que hace la velocidad, v, del bote con respecto a la orilla?
c) ¿Cuánto tiempo le tomará al bote para alcanzar al niño?
Solución.
a) Considerando al bote y al niño dentro del río se encuentran en un sistema inercial S'.
En este sistema el niño esta en reposo y el bote se mueve con su velocidad, para poder alcanzar en el menor tiempo el bote de enfilar con un ángulo relativo a la orilla dado por:

$$\tan\theta = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 1{,}5 \Rightarrow \theta = 37^\circ$$



b) La velocidad del bote v, con respecto a la orilla

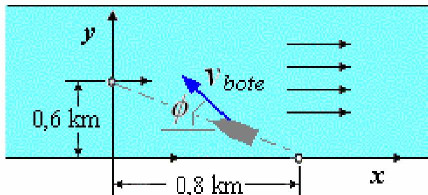
$$v_x = -20\cos 37^\circ + 2{,}5 = -13{,}5 \quad (1)$$

$v_y = 20\text{sen}37^\circ = 12$ (2)

Dividiendo (2) : (1)

$$\frac{v_x}{v_y} = \tan\phi = \frac{12}{-13{,}5} = -0{,}89$$

$\Rightarrow \phi = -41^\circ$



c) El tiempo que le tomará al bote para alcanzar al niño:

$$d = vt \;\Rightarrow\; t = \frac{d}{v}$$

Siendo v = 20 km/h y

$$d = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2} = 1{,}0 \text{ km}$$

$$t = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ h} = 3 \text{ min}$$

Ejemplo 39. Desde el techo del carro de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de 2,5 m/s^2 se suelta y cae un perno. ¿Cuál es la aceleración del perno con respecto a:
a) el carro del tren?
b) la estación?

Solución:

Si y es la vertical hacia arriba y x es la dirección de la aceleración del tren, entonces

a)

$$\vec{a}' = -2{,}5\hat{\imath} - 9{,}8\hat{\jmath}\,.$$

b)

$$\vec{a} = -9{,}8\hat{\jmath}$$

Ejemplo 40. Un estudiante de la Facultad de Ingeniería pasea sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante de V m/s. El estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo de α° con la horizontal y está en línea con la vía. El profesor del estudiante, que está parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura subirá la pelota?

Solución.

Si V' es la rapidez inicial de lanzamiento relativa al tren, entonces en la dirección x tenemos:

$V_x = V' \cos\alpha \;\; V = 0$

Porque el profesor observa que sale verticalmente.

$$V' = \frac{V}{\cos\alpha}$$

Luego

$V_y = V'_y = V'\sin\alpha = V\cot\alpha$

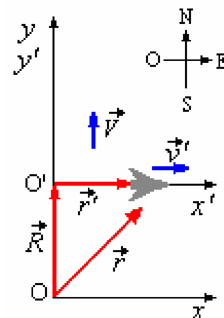
Subirá una altura h dada por

$$h = \frac{V^2\cot^2\alpha}{2g}$$

Ejemplo 41. La brújula de un avión indica que se está dirigiendo hacia el este con una velocidad de 400 km/h. La información de tierra indica que el viento sopla hacia el norte con una velocidad de 300 km/h. ¿cuál es la velocidad del avión con respecto a tierra?

Solución.

En este caso tenemos dos sistemas, el sistema tierra (S) y el sistema aire (S') que se mueve con una velocidad de 300 km/h respecto a tierra.



$$\vec{V} = 300\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}' = -400\hat{\imath}$$

$$\vec{R} = \vec{V}t$$

$$\vec{r}' = \vec{v}'t$$

La posición del avión visto desde O es

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' = \vec{V}t + \vec{r}'$$

La velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} + \vec{v}'$$

Luego $\vec{v} = 300\hat{\jmath} + 400\hat{\imath}$

Su magnitud

$$v = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500\frac{km}{h}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{300}{400} = 37^\circ$$

El avión se dirige hacia el NE formando un ángulo de 37° con la dirección este, el módulo de la velocidad es 500 km/h.

Ejemplo 42. Un nadador recorre una piscina de 100 m en 2 min. Va a nadar en un río observando antes de lanzarse e al agua, que un trozo de madera que flota en ella recorre 20 m en 1 minuto. Calcular el tiempo que tardará el nadador en recorrer 100 m en el río, según vaya a favor o en contra de la corriente.

Solución.

La velocidad del nadador es:

$$v_n = \frac{s}{t} = \frac{100}{2} = 50\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

La velocidad del agua del río es: $v_r = 20\frac{\text{m}}{\text{min}}$

La velocidad nadando a favor de la corriente es:

$v_1 = v_n + v_r = 50 + 20 = 70$ m/min

Y el que tarda en recorrer 100 m es:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{100}{70} = 1 \text{ min } \ 26 \text{ s}$$

La velocidad nadando en contra de la corriente es:

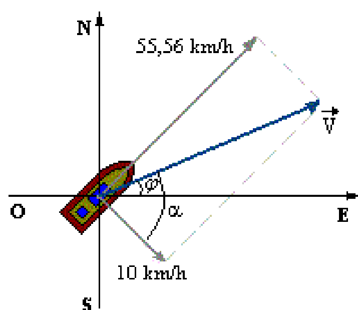
$v_2 = v_n - v_r = 50 - 20 = 30$ m/min

Y el que tarda en recorrer 100 m es:

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{100}{30} = 3 \text{ min } 20 \text{ s}$$

Ejemplo 43. Un acorazado navega con rumbo NE a una velocidad de 50,56 km/h. Suena zafarrancho de combate y uno de los tripulantes marcha corriendo de babor a estribor para ocupar su puesto, a una velocidad de 10 km /h. Calcular el valor de la velocidad resultante y su dirección.

Solución.



$$v_A = 55{,}56\frac{\text{km}}{\text{h}},\ v_T = 10\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$V = \sqrt{55{,}56^2 + 10^2} = 56{,}45 \text{ km/h}$$

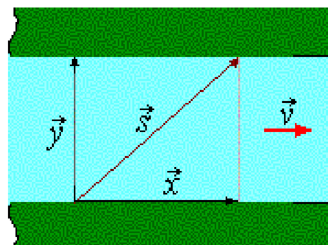
$$\tan\alpha = \frac{55{,}56}{10} \Rightarrow \alpha = 79{,}8$$

$\varphi = 79{,}8 - 45 = 34{,}8 = 34^\circ\, 47'\, 49''$

La dirección será 90º - φ = 55º 12' 11''

Ejemplo 44. Una pequeña lancha atraviesa un río de 50 m de. Anchura, al mismo tiempo la corriente lo arrastra 60 m aguas abajo. ¿Qué camino ha recorrido?

Solución.

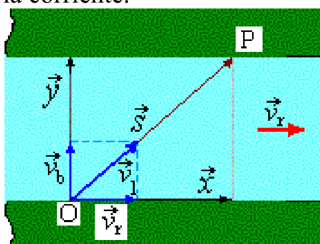


Si en la figura y es el ancho del río y x el avance producido por la corriente, el camino recorrido por la lancha es s.

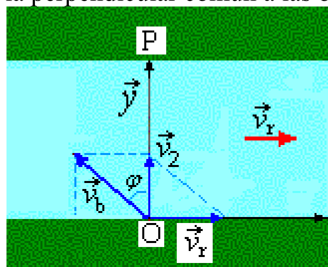
$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{60^2 + 50^2}$$
$= 78{,}1$ m

Ejemplo 45. La velocidad que provocan unos remeros a una barca es de 8 km/h, La velocidad del agua de un río es 6 km/h, y el ancho de tal río 100 m.

a) Suponiendo la posición de la proa perpendicular a las orillas, calcular el tiempo que tarda la barca en cruzar el río y la distancia a que es arrastrada, aguas abajo, por la corriente.



b) ¿En qué dirección debe colocarse la proa de la barca para alcanzar el punto de la orilla opuesta situado enfrente del de partida? (punto de partida y llegada en la perpendicular común a las orillas),



c) ¿Qué velocidad, respecto a la tierra, lleva la barca en los dos casos estudiados?

d) ¿Cuánto tarda en atravesar el río?.

Solución.

a) $v_x = v_r = 6$ km/h, $v_y = v_b = 8$ km/h

$$y = v_y t \Rightarrow t = \frac{y}{v_y} = \frac{0{,}1}{8}\text{h} = 45 \text{ s}$$

La distancia a que es arrastrada por la corriente:

$$x = v_x t = 6 \times \frac{0{,}1}{8}\text{Km} = 75 \text{ m}$$

b) Para que la barca vaya en la dirección de v_2 la componente horizontal de v_b ha de ser igual a 6 km/h.

$$v_b \operatorname{sen}\varphi = v_r \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{6}{8}$$

$\Rightarrow \varphi = 48^\circ\, 35'$

c) En el primer caso

$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}$
= 10 km/h
En el segundo caso:
$v_2 = v_b \cos\varphi$ = 8cos 48º 35'
= 5,3 km/h
d) En el primer caso son 45 s ya calculados.
En el segundo caso:

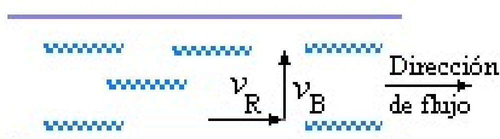
$t = \dfrac{y}{v_2} = \dfrac{0,1}{5,3}$h = 68 s

Ejemplo 46. Una canoa de 2,5 m de larga está junto a la orilla de un río y perpendicularmente a ella. Se pone en marcha con una velocidad de 5 m/s y al llegar a la orilla opuesta ha avanzado en el sentido de la corriente 23,4 m.
a) Calcular la velocidad del agua sabiendo que el río tiene una anchura de 100 m.
b) Si la canoa marcha a lo largo del río, determinar el camino recorrido en 1 minuto según vaya en el sentido de la corriente o en sentido contrario.
Solución .
a) La proa de la canoa debe recorrer un espacio en dirección perpendicular al río:
y = 100 – 2,5 = 97,5 m
siendo $y = v_c t$ = 97,5 m
el río arrastra a la canoa x = 23,4 m = $v_r\, t$
dividiendo las dos anteriores

$$\frac{97,5}{23,4} = \frac{5}{v_r} \Rightarrow v_r = 1,2\text{m/s}$$

b) $v_1 = v_c + v_r$ = 5 + 1,2 = 6,2 m/s
$\Rightarrow x_1$ = 6,2 x 60 =372 m
$v_2 = v_c - v_r$ = 5 - 1,2 = 3,8 m/s
$\Rightarrow x_2$ = 3,8 x 60 =228 m

Ejemplo 47. Un bote de remos se dirige perpendicular a la orilla de un río. Los remos pueden propulsar el bote con una velocidad de 3,0 m/s con respecto al agua. El río tiene una corriente de 4,0 m/s.
(a) Construya un diagrama en el cual las dos velocidades se representen como vectores.
(b) Encuentre el vector que representa la velocidad del bote con respecto a la orilla.
(c) ¿Qué ángulo forma este vector con la dirección en la cual el bote está señalando?
(d) Si el río tiene 100 m de ancho, determínese cuan lejos río abajo del punto del lanzamiento el bote llega al orilla opuesta.
Solución.
Solución:
a) Diagrama.



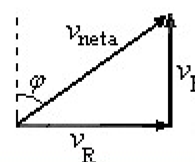
b y c) La velocidad del bote con respecto a la orilla es $\vec{v}_{neta} = \vec{v}_B + \vec{v}_R$.
Como $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_R$ son perpendiculares, tenemos

$v_{neta} = \sqrt{v_B^2 + v_R^2}$
$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{m/s}$.

El ángulo φ mostrado en la figura se determina por

$\tan\varphi = \dfrac{v_R}{v_B}$.

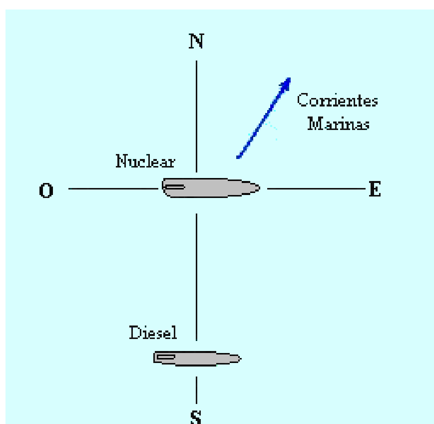
Para las velocidades dadas encontramos $\varphi = 53,1^o$.
El bote se mueve a lo largo de una línea dirigida 53,1º río abajo.



d) Haciendo D = distancia río abajo, tenemos

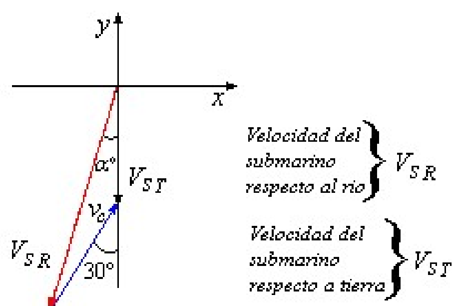
$\dfrac{D}{100} = \dfrac{v_R}{v_B} = \dfrac{4}{3}$, tal que D = 133 m.

Ejemplo 48. Un submarino de propulsión convencional (Diesel) sufrió un incendio en el Atlántico norte después de salir de Inglaterra. Debido a un huracán no era posible enviar barcos ni aviones para ayudar al submarino diesel. La marina decidió enviar un submarino de propulsión nuclear para ayudar al de propulsión Diesel. El submarino diesel se encuentra al Sur a 500 km de distancia del submarino nuclear (ver figura). La rapidez del submarino nuclear respecto al agua es de 54 km/h. Además, hay una corriente marina de 36 km/h que se mueve al NE formando un ángulo de 30° respecto al norte. (Asuma que el eje x es el eje DE, y el eje y es el NS).
a) Si V es el módulo de la velocidad del submarino nuclear visto desde tierra, escriba en forma vectorial, usando el sistema de coordenadas x -y, la velocidad del submarino nuclear respecto a tierra para que llegue al submarino diesel y la velocidad de la corriente marina con respecto a tierra.
b) Halle la velocidad del submarino con respecto a la corriente de agua.
c) Calcule el módulo de la velocidad V.
d) Halle el tiempo en el cual los marineros son rescatados.



Solución.

a) Si V es el módulo de la velocidad del submarino nuclear visto desde tierra, escriba en forma vectorial, usando el sistema de coordenadas *x-y*, la velocidad del submarino nuclear respecto a tierra para que llegue al submarino diesel y la velocidad de la corriente marina con respecto a tierra.



b) Halle la velocidad del submarino con respecto a la corriente de agua.

$$\vec{V}_{sR} = -54 \text{ sen } \alpha \hat{\imath} - 54 \cos \alpha \hat{\jmath} ,$$

$$\vec{v}_c = 36\text{sen}30^\circ \hat{\imath} + 36\cos 30^\circ \hat{\jmath} = 18\hat{\imath} + 31{,}18\hat{\jmath}$$

$$-54\text{sen}\alpha + 18 = 0 \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0{,}94$$

$$\vec{V}_{sT} = (-54\cos\alpha + 31{,}18)\hat{\jmath}$$
$$= (-50{,}76 + 31{,}18)\hat{\jmath}$$
$$= 19{,}18\hat{\jmath}$$

c) Calcule el módulo de la velocidad V.

19,18 km/hora

d) Halle el tiempo en el cual los marineros son rescatados.

$$t = \frac{d}{V} = \frac{500}{19{,}18}$$

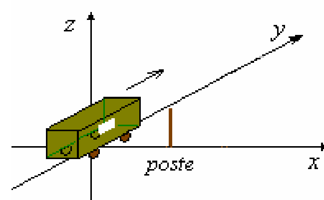
= 26 horas

Ejemplo 49. Desde el interior de un tren que viaja a 108 km/h, un niño lanza un objeto por una ventana con una velocidad de 36 km/h, horizontalmente y perpendicularmente a la marcha del tren, justo en el momento en que pasa en frente de un poste indicador.

a) ¿A qué distancia del poste contada a lo largo de la vía, y a qué distancia de esta chocará el cuerpo con el suelo?

b) Realícese un esquema de la trayectoria seguida por el cuerpo

Dato: la altura inicial del objeto sobre el suelo es de 2,45 m



Solución.

Velocidad del tren $v_y = 108\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 30\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$,

Velocidad de la piedra $v_x = 36\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 10\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$$g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

a) El movimiento de la piedra lanzada está dada por las ecuaciones:

$$x = 10t,\ \ y = 30t,\ \ z = 2{,}45 - \frac{1}{2}10t^2$$

Cuando la piedra llega al suelo z = 0

$$z = 0 = 2{,}45 - \frac{1}{2}10t^2 \Rightarrow t = 0{,}7s$$

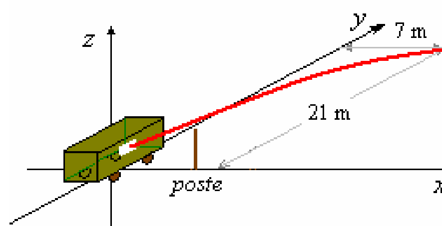
Distancia del poste medida desde la vía:

$$y = 30t = 30(0{,}7) = 21\text{m}$$

Distancia de la vía al punto de caída:

$$x = 10t = 10(0{,}7) = 7\text{m}$$

b)



PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. La velocidad de la corriente de un río aumenta en proporción a la distancia de la orilla y alcanza su valor máximo v_0 en el medio. Cerca de la orilla la velocidad es cero. Un bote que navega en el río tiene una velocidad *u* relativa al agua, constante y perpendicular a la corriente.
a) Encontrar la distancia que fue arrastrando el bote al cruzar el río de ancho C.
b) Determinar la trayectoria del bote

Respuesta. a) $d = C\dfrac{v_0}{2u}$

2. Un automovilista entra en una curva de 150 m de radio, una velocidad de 72 km/h. Accionando los frenos hace disminuir su velocidad de modo uniforme a razón de 1,5 m/s^2.
Determinar el módulo de la aceleración del automóvil cuando su velocidad es de 63 km/h.
Respuesta: 2,53 m/s^2

3. Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula son $x = R\cos\omega t$, $y = R\text{sen}\omega t$, $z = vt$. *R*, *ω*, *v* son constantes.
Probar que se trata de un movimiento uniforme, dibujar la trayectoria.

Respuesta: Movimiento helicoidal con velocidad angular ω y subiendo con velocidad *v*.

4. Dadas las ecuaciones paramétricas de un movimiento $x = A\text{sen}\omega t$, $y = A\cos\omega t$,
a) Escribir la ecuación del movimiento.
b) La ley horaria
c) La trayectoria

Respuesta. a) $\vec{r} = A\text{sen}\omega t\,\hat{i} + A\cos\omega t\,\hat{j}$, b) $s = \omega At$, c) $x^2 + y^2 = A^2$

5. Dos objetos se mueven en el plano *xy* de acuerdo a $\vec{r}_1 = \left(4t^2 + 3t + 228\right)\hat{i} + \left(2t + 12\right)\hat{j}$ y
$\vec{r}_2 = \left(8t^2 + 11t - 444\right)\hat{i} + \left(5t - 24\right)\hat{j}$
respectivamente.
a) ¿Cuales son la velocidad y aceleración de cada objeto?
b) ¿Dónde y cuando chocan?
Respuesta.
a) $\vec{v}_1 = \left(8t + 3\right)\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{a}_1 = 8\hat{i}$
$\vec{v}_2 = \left(16t + 11\right)\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{a}_1 = 16\hat{i}$
b) $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = 840\hat{i} + 36\hat{j}$, $t = 12$

6. Las posiciones de dos partículas P_1 y P_2 están dadas por $\vec{r}_1 = \left(5 + 3t + 2t^2\right)\hat{i}$,
$\vec{r}_2 = \left(t + 5t^2\right)\hat{i}$.
a) ¿En qué instante chocarán las dos partículas?
b) ¿Cuál es la diferencia de velocidades en ese instante?
Respuesta: a) $t = 2$ b) 8

7. El movimiento de una partícula está definido por el vector posición
$\vec{r} = R\text{sen}b\,t\,\hat{i} + Ct\,\hat{j} + R\cos b\,t\,\hat{k}$. Determinar.
a) La velocidad y aceleración de la partícula.
b) La trayectoria de la partícula.
c) El radio de curvatura.

Respuesta. a) $v = \sqrt{C^2 + R^2b^2}$, $a = Rb^2$,
b) Helicoide, c) $\rho = R + \dfrac{C^2}{Rb^2}$

8. El movimiento de una partícula está definido por el vector posición
$\vec{r} = 0{,}1\text{sen}\pi t\,\hat{i} + 0{,}25\cos 2\pi\,t\,\hat{j}$, *r* en metros y *t* en segundos:
a) Determinar la velocidad y aceleración para *t* = l s.
b) Demostrar que la trayectoria de la partícula es una parábola.

Respuesta. a) $\vec{v} = -0{,}1\pi\,\hat{i}$ m/s, $\vec{a} = 0$
b) $y = 0{,}025 - 5x^2$

9. La aceleración de un cuerpo es:
$\vec{a} = \left(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\right)\text{cm/s}^2$
a) Si el cuerpo parte del reposo ¿Cuál es su velocidad después de 3 segundos?
b) ¿Cuál es su posición después de 10 segundos?
c) ¿Cuál es su rapidez media durante los primeros 10 segundos?
Respuesta. a) $\left(9\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}\right)\text{cm/s}$
b) $\left(150\hat{i} + 100\hat{j} + 50\hat{k}\right)\text{cm}$
c) 18,71 cm/s

10. Si una partícula que se mueve sobre una trayectoria curva tiene una aceleración total en un momento dado $\vec{a} = \left(3\hat{t} + 2\hat{n}\right)\text{cm/s}^2$. Hallar:

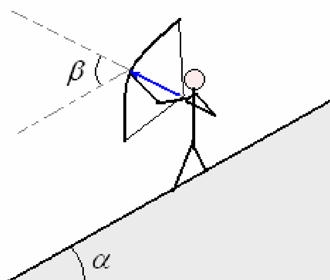
a) La aceleración tangencial.
b) La aceleración centrípeta.
c) El módulo de la aceleración total.
d) El ángulo φ que la aceleración total forma con la tangente a la curva.
Respuesta: a) $a_t = 3\,\text{cm/s}^2$
b) $a_c = -4\,\text{cm/s}^2$
c) $a = 5\text{cm/s}^2$
d) $\varphi = 53{,}1^\circ$

11. Dos cuerpos se lanzan simultáneamente desde un mismo punto con la misma rapidez inicial pero en distintas direcciones, uno verticalmente hacia arriba y el otro formando un ángulo θ = 60° con la horizontal. Conociendo que la rapidez inicial de ambos cuerpos es v_0 = 25 m/s, ¿a qué distancia se encontrarán cuando hayan pasado 1,7 s?

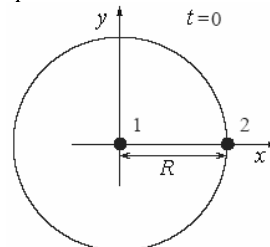
12. Una partícula se mueve en un plano de tal suerte que su radio vector con respecto a un punto fijo barre ángulos iguales en tiempos iguales mientras que la distancia al punto fijo es variable con el tiempo. Escriba las componentes radial y tangencial de la velocidad y la aceleración de la partícula mostrando explícitamente cualquier cantidad que se mantenga constante durante el movimiento.

13. Un tren pasa por una estación con una velocidad de 30 km/h. En el instante en que la locomotora pasa junto al guardagujas este lanza una bolsa a uno de los ingenieros de maquinas. Sabiendo que la rapidez inicial con que el guardagujas lanzó la bolsa fue de 45 km/h
a) ¿Cuál tendrá que ser el ángulo de lanzamiento para lograr el objetivo?.
b) Describa la trayectoria de la bolsa en el sistema de referencia del maquinista.

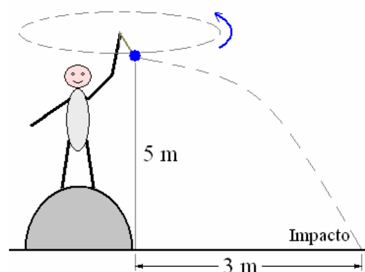
14. Un arquero está en una colina cuya pendiente forma un ángulo α con la horizontal. Si el arquero dispara la flecha según una dirección β respecto a la colina y con velocidad v_0, encontrar la distancia, medida a lo largo de la colina, a la cual caerá la flecha.



15. Dos partículas se encuentran inicialmente en reposo en las posiciones que muestra la figura. Ambas comienzan a moverse al mismo tiempo, la partícula 1 con aceleración constante $\vec{a} = a\hat{j}$, y la partícula 2 con aceleración angular constante α, en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj, describiendo una circunferencia de radio *R*, como se muestra en la figura. Determine en función de *a* y *R*:
a) El tiempo que tardan en encontrarse, suponiendo que lo hacen sobre el eje de las ordenadas, antes que la partícula 2 complete una vuelta completa. Encuentre el valor de α que hace esto posible.
b) Halle los vectores velocidad y aceleración de las dos partículas para el instante del encuentro.



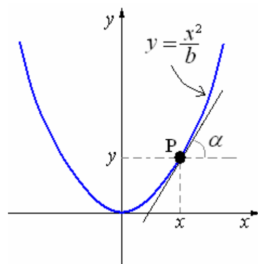
16. Un niño hace girar uniformemente una piedra en un círculo horizontal por medio de una cuerda de 1 *m* de longitud. El niño se encuentra sobre un montículo de tal forma que el plano del movimiento se encuentra a 5 *m* de altura sobre el suelo. La cuerda se rompe y la piedra sale disparada horizontalmente, golpeando el suelo a 3 *m* de distancia. ¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?



17. Desde un sistema de referencia situado en el suelo, con eje horizontal *x* y vertical *y*, se observa el movimiento de un objeto sometido a una aceleración $a = -2\hat{i} - 6\hat{j}$ (*m/s*). Si en el instante inicial el objeto se encontraba en el punto P = (-3, 2) (m), moviéndose con una velocidad $v_{(t=0)} = 3\hat{j}$ (m/s):
a) Obtenga la ecuación explícita de la trayectoria del objeto.
b) Determine el instante en el que la velocidad y la aceleración son perpendiculares.
c) Calcule las coordenadas del punto más alto de la trayectoria.
d) Calcule el tiempo que tardó el móvil desde que salió del punto P hasta que llegó al suelo.

18. La figura muestra una cuenta p que desliza por un alambre plano en forma de parábola. La ecuación de la parábola es $y = x^2/b$, donde b es una constante positiva con dimensiones de longitud. Llamaremos a

al ángulo entre la tangente a la curva y el eje x. en el punto donde se encuentra la cuenta.
a) Halle $\tan\alpha$ en función de la coordenada *x* de P.
b) Suponga que la cuenta tiene rapidez *v* y se mueve hacia la derecha. Halle las componentes *x* e *y* de la velocidad de la cuenta en función de *y* y de la coordenada *x* de P.
Ayuda: recuerde que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.



Respuesta.

a) $\tan\alpha = \dfrac{2x}{b}$

b) $v_x = \dfrac{bv}{\sqrt{b^2 + 4x^2}}$, $v_y = \dfrac{2xv}{\sqrt{b^2 + 4x^2}}$

19. Un ascensor parte del reposo y desciende con aceleración constante de 1 m/s^2 respecto a Tierra. Dos segundos después de iniciarse el descenso se cae la lámpara del techo del ascensor. La distancia del techo al piso del ascensor es de 2 m. Definimos el referencial del ascensor como aquél con origen en su techo y dirección y positiva apuntando hacia abajo.
a) Halle los vectores aceleración, velocidad y posición de la lámpara respecto al ascensor.
b) Determine el tiempo que tarda la lámpara en caer.
c) Encuentre la distancia recorrida por el ascensor mientras cae la lámpara.
Respuesta.
Todas las unidades están expresadas en el sistema MKS. L indica lámpara, A ascensor y T Tierra.
a) Tomaremos como *t* = 0 el instante para el cual se desprende la lámpara.

$\vec{a}_{LA} = \vec{a}_{LT} - \vec{a}_{AT} = 9\hat{j}$, $\vec{v}_{LA} = 9t\hat{j}$,

$\vec{r}_{LA} = \dfrac{9}{2}t^2\hat{j}$

b) $y_{LA} = \dfrac{9}{2}t^2 = 2 \Rightarrow t = \dfrac{2}{3}$

c) $D = \dfrac{14}{9}$

20. Los instrumentos de un aeroplano en vuelo horizontal indican que se dirige hacia el Este con una rapidez de 300 km/h respecto al aire. En Tierra se observa que el aeroplano se encuentra en medio de una corriente de aire que sopla hacia el Norte con rapidez de 60 km/h. Halle la velocidad y rapidez del avión respecto a Tierra.

Respuesta.
Llamaremos $\hat{E}$ y $\hat{N}$ a los vectores unitarios en dirección Este y Norte respectivamente.

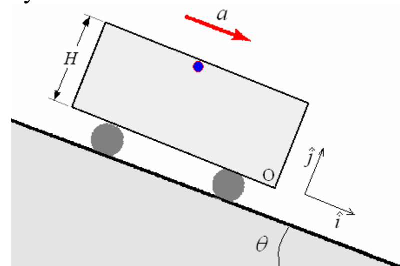
$\vec{v} = \left(300\hat{E} + 60\hat{N}\right)$ km/h, $v = 60\sqrt{26}$ km/h.

21. Un hombre guía su automóvil bajo lluvia a una velocidad constante respecto a Tierra de módulo y dirección. Mientras conduce el hombre observa que la trayectoria de cada gota es una línea recta que se aparta un ángulo α de la vertical y al detenerse observa que la lluvia cae verticalmente y prácticamente con velocidad constante. Halle el vector velocidad de las gotas de lluvia respecto al auto en movimiento y respecto a Tierra (tome vertical hacia arriba).
Respuesta.

$\vec{v}_{gota,Tierra} = -\dfrac{v}{\tan\alpha}\hat{j}$,

$\vec{v}_{gota,Auto} = -\dfrac{v}{\tan\alpha}\hat{j} - v\hat{i}$

22. Un vagón de ferrocarril motorizado va cuesta abajo sobre un plano inclinado un ángulo α. La distancia entre el techo y el piso del vagón es *H* y su aceleración respecto a Tierra es constante y vale $\vec{a} = a\hat{i}$, ver figura. Un pasajero del vagón observa que una lámpara, situada en el centro del techo del vagón, se desprende y choca con el piso en el punto O (en el extremo inferior del vagón).
a) Halle la aceleración de la lámpara respecto a Tierra y respecto al pasajero del vagón. Exprese sus resultados en términos de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.
b) Escriba las componentes cartesianas de la velocidad y posición de la lámpara según el pasajero. Torne el origen en el punto o solidario al vagón y llame *L* a la longitud del vagón.
c) Halle el tiempo que tarda la lámpara en caer y la longitud L del vagón.
d) Determine la ecuación de la trayectoria de la lámpara, $y = y(x)$, según el pasajero. ¿Qué clase de curva es la trayectoria de la lámpara vista por el pasajero y vista desde Tierra?



Respuesta.
Los subíndices *L*, *P* y *T* hacen referencia a la lámpara, al pasajero y al referencial inercial de Tierra respectivamente.

a) $\vec{a}_{LT} = g(\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j})$,

$\vec{a}_{LP} = (g\operatorname{sen}\theta - a)\hat{i} - g\cos\theta\,\hat{j}$

b) $v_x = (g\operatorname{sen}\theta - a)t$, $v_y = -g\cos\theta\, t$

$x = \frac{1}{2}(g\operatorname{sen}\theta - a)t^2 - \frac{L}{2}$,

$y = -\frac{1}{2}g\cos\theta\, t^2 + H$

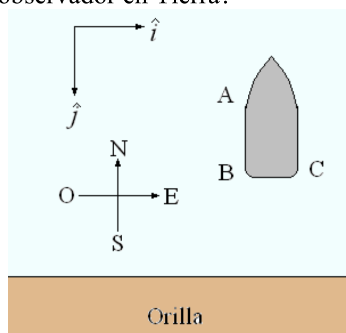
c) $t = \sqrt{\frac{2H}{g\cos\theta}}$, $L = \frac{2H(g\operatorname{sen}\theta - a)}{g\cos\theta}$

d) Vista por el pasajero la trayectoria es una línea recta de ecuación

$y = -\frac{g\cos\theta}{g\operatorname{sen}\theta - a}x$

Vista desde Tierra la trayectoria es una parábola.

23. La corriente de un río fluye de Este a Oeste con rapidez constante v = 2 m/s respecto a Tierra. Un bote atraviesa el río y de acuerdo a sus instrumentos de a bordo se mueve respecto al río dirigiéndose al Norte con rapidez constante = 10 m/s. Respecto al bote un pasajero se desplaza sobre la cubierta en línea recta desde el punto A hasta el punto G con una rapidez constante v_1 = 10 m/s. Suponga que BA = 4 m y apunta hacia el Norte y BC = 3 m y apunta hacia el Este.
a) Halle el vector unitario $\hat{u}$ que apunta de A a C y las velocidades del bote y del pasajero respecto a Tierra.
b) Halle el tiempo que tarda el pasajero en ir de A hasta C. ¿Qué distancia recorre el bote en ese tiempo según un observador en Tierra?



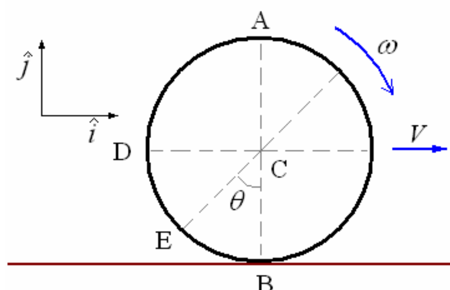
Respuesta.
Las letras *b*, *p* y *T* designarán respectivamente el bote, pasajero y Tierra.

a) $\hat{u} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{}$, $\vec{v}_{b,T} = (-2\hat{i} - 10\hat{j})$ m/s,

$\vec{v}_{p,T} = (4\hat{i} - 2\hat{j})$ m/s.

b) $t = \frac{1}{2}s$, $d = \sqrt{26}$m

24. El aro de la figura tiene radio *R* y rueda sobre una superficie horizontal fija a Tierra.
El aro gira en sentido horario mientras su centro e se mueve hacia la derecha con rapidez
V respecto a la superficie. Considere un observador con origen en C (se traslada con el aro)
y que no rota respecto a Tierra. Suponga que todos los plintos del aro tienen rapidez *V* respecto al observador (se dice entonces que el aro rueda sin deslizar).
En la figura se han marcado cuatro puntos para un cierto instante. El punto A es el punto más alto del aro, el B el más bajo, el D el punto del extremo izquierdo y el E con un radio vector que forma un ángulo θ con la vertical.
a) Halle la velocidad angular w del aro.
b) Halle los vectores velocidad de los puntos A, B y D respecto a la superficie.
c) Halle el vector velocidad del punto E respecto a la superficie y diga para qué ángulo θ su módulo es igual a *V*.



Respuesta.
a) La rapidez de cualquier punto del aro respecto a C es $V = R\omega$, luego $\omega = V/R$.

b) $\vec{V}_A = 2V\hat{i}$, $\vec{V}_B = 0$, $\vec{V}_D = V\hat{i} + V\hat{j}$

c) $\vec{V}_E = V(1-\cos\theta)\hat{i} + V\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$, $|\vec{V}_E| = V$

$\Rightarrow \theta = \pm 60°$

25. Para conocer la rapidez de un avión es necesario determinar cuanto tiempo toma volar en un rizo cerrado de longitud conocida. ¿Cuánto tiempo tomará al avión volar alrededor de un cuadrado de lado *a*, con el viento soplando con una velocidad *u*?, en dos casos:
a) la dirección del viento coincide con uno de los lados del cuadrado;
b) la dirección del viento coincide con la diagonal del cuadrado?
Sin viento la rapidez del avión es *v*, mayor que *u*.
Respuesta,

a) $t_1 = \frac{2a\left(v + \sqrt{v^2 - u^2}\right)}{\left(v^2 - u^2\right)}$, b)

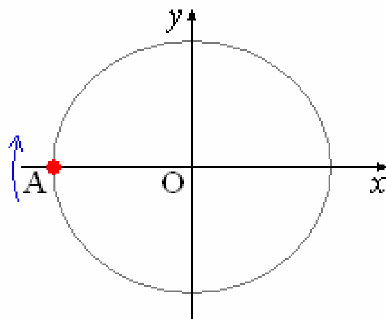
$t_2 = \frac{4a\sqrt{v^2 - u^2/2}}{\left(v^2 - u^2\right)}$

26. Un hombre que viaja en un camión intenta golpear un poste con una piedra, y cuando pasa

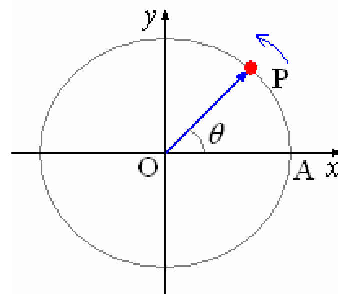
frente a él arroja la piedra con una velocidad horizontal de 20 m/s respecto al camión. Sabiendo que la velocidad del camión es de 40 km/h, Calcular:
a) la dirección en que debe lanzar la piedra.
b) la velocidad horizontal de la piedra respecto al suelo.
Respuesta. a) 56,3º con relación a la dirección trasera del camión
b) 16,63 m/s

27. El piloto A está volando con un avión con una velocidad de 150 km/h, sobrevolando al piloto B, cuyo avión vuela a 135 km/h, 300 m por debajo Con el mismo rumbo. El piloto A para mandar un mensaje a B lo sujeta a una piedra y la arroja a la cabina de B. Sin tomar en cuenta la resistencia del aire.
a) ¿Con qué velocidad deberá lanzarla respecto a su avión cuando B está directamente debajo de él?
b) ¿Cuándo B está todavía a 300 metros delante de l?
Respuesta, a) v = 15 km/h hacia atrás; b) v = 128 km/h hacía adelante.

28. Una partícula describe una circunferencia de radio $R =$ 0,5 m con una frecuencia de 10 r pm. Si en t_0= 0 la partícula está en la posición A moviéndose en el sentido horario, calcular:
a) El período T y la rapidez del movimiento
b) La velocidad media y aceleración media en el intervalo (0; 0,75T).
c) La aceleración en $t = T / 2$



29. Una partícula P se mueve con aceleración angular constante sobre una circunferencia de radio R =3m. Parte desde el reposo del punto A y completa la primera vuelta en un tiempo t = 2s.
Calcular:
a) El módulo de la aceleración angular
b) La ecuación $\vec{r} = \vec{r}_{(t)}$.
c) El tiempo que emplea para llegar a la posición definida por $\theta = 3\pi/2$.
d) La velocidad lineal en $\theta = \pi$



30. Un automóvil viaja hacia el Este con una rapidez de 50 km/h. Está lloviendo verticalmente con respecto a la Tierra. Las marcas de la lluvia sobre las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de 60° con la vertical, calcule la velocidad de la lluvia con respecto a:
a) el automóvil y
b) la Tierra.

31. La distancia de A a B es ℓ . Un aeroplano vuela desde A hasta B y vuelve otra vez con una velocidad constante V relativa al aire. Calcular el tiempo, total que empleará en realizar el recorrido si el viento sopla con una velocidad v en las siguientes direcciones:
a) Sobre la línea que une A y B.
b) Perpendicular a esta línea.
c) Formando un ángulo θ con esta línea.
Demostrar que la duración del trayecto siempre aumenta con la existencia del viento.
Respuesta.

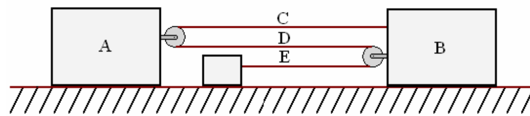
Poniendo $T_0 = \dfrac{2\ell}{V}$, los resultados son:

a) $$\frac{T_0}{\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)}$$

b) $$\frac{T_0}{\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)^{1/2}}$$

c) $$T_0 \frac{\left[1 - \left(\dfrac{v\,\text{sen}\,\theta}{V}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)}$$

32. El bloque deslizante A se mueve hacia la izquierda a una velocidad constante de $0{,}3\hat{i}$ m/s, Determinar:
a) La velocidad del bloque B;
b) las velocidades de los tramos de cable C y D;
e) la velocidad relativa de A respecto a D;
d) La velocidad relativa del tramo de cable C respecto al tramo D.

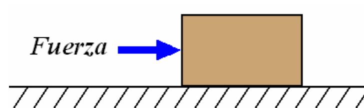


Respuesta.
a) $-0{,}2\hat{i}$ m/s, b) $-0{,}2\hat{i}$ m/s, $-0{,}4\hat{i}$ m/s,
c) $-0{,}1\hat{i}$ m/s, d) $2\hat{i}$ m/s,

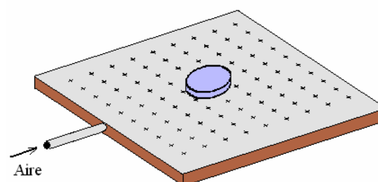
CAPÍTULO 4. Dinámica de una partícula

INTRODUCCIÓN
En el capítulo anterior estudiamos el movimiento de una partícula con respecto a un sistema de referencia sin preguntarnos sobre la causa del movimiento. Lo describimos simplemente en términos de los vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$.
Nuestra discusión fue geométrica, en este capítulo discutiremos la causa del movimiento. Seguiremos tratando a los cuerpos como partículas simples. Posteriormente trataremos sobre sistemas de partículas y cuerpos rígidos.

EL ORIGEN DEL MOVIMIENTO
¿Qué origina el movimiento? ¿Qué detiene el movimiento? ¿Se necesita causa para mover las cosas? ¿Por qué un objeto al que se le da un empujón pronto se detiene? ¿Por qué los planetas mantienen su movimiento alrededor del sol?
Aristóteles joven filósofo griego (siglo IV a.c.) decía que un cuerpo permaneciera en movimiento era necesario ejercer alguna acción sobre él ya que el estado natural es el reposo. Esto parece ser razonable, cuando dejamos de empujar un cuerpo, este pronto alcanza el reposo. Parece ser necesaria una acción exterior o fuerza aplicada al cuerpo para mantener el movimiento. Sin embargo, observemos esta situación con mayor detenimiento. La figura siguiente muestra un bloque de madera sobre un plano.



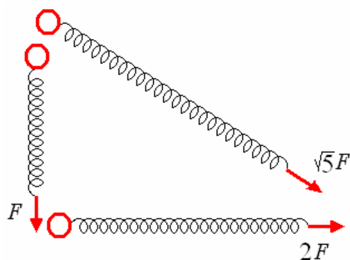
Aplicamos una fuerza pequeña al bloque, no pasa nada. Incrementamos la fuerza y a un valor particular el bloque se mueve. Si seguimos incrementando la fuerza empujando o jalando más, el objeto se mueve con mayor rapidez, Cuando dejamos de empujar el cuerpo rápidamente vuelve al reposo. Sin embargo si ponemos ruedas al bloque el resultado es diferente, una fuerza muy pequeña causa el movimiento. La diferencia son las ruedas debido a la fricción.
Para hacer un estudio libre de la fricción busquemos llegar cercanamente a esta condición, una forma de lograr esto es con una mesa neumática, se sopla aire sopla hacia arriba a través de pequeños agujeros manteniendo un disco suspendido sobre un colchón de aire. ¿Qué pasa cuando empujamos un objeto en ausencia de fricción? Este se mantiene en movimiento a velocidad constante.



En ausencia de una fuerza resultante, el objeto se mantiene en movimiento con velocidad uniforme o permanece en reposo. Esta es la **PRIMERA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO**
Ahora podemos pensar acerca de la situación cuando un objeto era empujado sobre un plano. Cuando la fuerza era pequeña no había movimiento, pero una fuerza debería causar movimiento; la conclusión es que debe haber otra fuerza actuando sobre el cuerpo la cual anula justamente el efecto de la fuerza que aplicamos. Al incrementar nuestra fuerza, la fuerza opuesta también se incrementa, hasta que en algún valor particular la fuerza opuesta termina de incrementarse y comienza el movimiento porque hay una fuerza resultante actuando sobre el objeto. La fuerza opuesta es la fuerza de Fricción

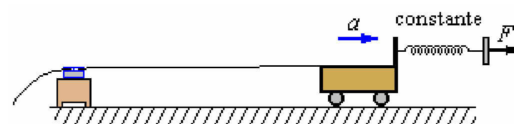
¿QUÉ ES FUERZA? En la vida cotidiana se considera fuerza a una sensación común asociada con la dificultad para mover o levantar un cuerpo. En Física se identifica una fuerza por el efecto que produce. Uno de los efectos de una fuerza es cambiar el estado de reposo o de movimiento del cuerpo, más concretamente, una fuerza cambia la velocidad de un objeto, es decir produce una aceleración. Cuando se aplica una fuerza sobre un cuerpo y no se produce movimiento, entonces puede cambiar su forma, aún si el cuerpo es muy rígido. La deformación puede o no ser permanente. Entonces los efectos de la fuerza neta son dos: cambiar el estado de movimiento de un cuerpo o producir una deformación, o ambas cosas.
Normalmente sobre un cuerpo pueden actuar varias fuerzas, entonces el cuerpo acelerará cuando el efecto de la fuerza neta que actúa sobre él no es cero.
Se llama **fuerza neta** o fuerza resultante a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Si la fuerza neta es cero, la aceleración es cero, el movimiento es con velocidad igual a cero (cuerpo detenido) o con velocidad constante. Cuando un cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad constante, se dice que está en **equilibrio.**
Se pueden distinguir dos grandes clases de fuerzas: fuerzas de contacto, representan el resultado del contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo mover un carro o estirar un resorte; y fuerzas de acción a distancia que actúan a través del espacio sin que haya contacto físico entre el cuerpo y sus alrededores, por ejemplo la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos que caen en caída libre. Todas las diferentes formas de fuerzas se encuentran dentro de esas dos grandes clasificaciones.

Para describir el mundo, la física contemporánea recurre a cuatro interacciones o fuerzas fundamentales, que actúan sobre las partículas de materia (y sobre las antipartículas), son vehiculadas por unas partículas llamadas vectores de interacción, que son: fotón (interacción electromagnética), bosón (interacción débil), gluón (interacción fuerte) y gravitón (interacción gravitacional).
1) Fuerzas electromagnéticas de atracción o repulsión entre partículas cargadas en reposo o en movimiento, explica la cohesión de los átomos, es mucho más intensa que la fuerza gravitacional.
2) Fuerzas nucleares intensas entre partículas subatómicas, responsable de la existencia del núcleo atómico asegura la cohesión interna de los constituyentes del núcleo atómico, protones y neutrones, y es responsable de un gran número de reacciones y de desintegraciones; es la de mayor magnitud (10^2 - 10^3 veces la fuerza electromagnética).
3) Fuerzas nucleares débiles de corto alcance, rige algunos procesos radiactivos, establece la estabilidad de algunos núcleos, es varios órdenes de magnitud (10^{12}) menor que la fuerza electromagnética.
4) Fuerza de atracción gravitacional entre cuerpos debido a sus masas, entre otras cosas hace que caigan las manzanas y que suba la marea, es la fuerza de menor magnitud comparada con las otras.
Para que el concepto de fuerza sea exacto se debe establecer un método para medirla. Una fuerza se puede medir por el efecto que produce. Por ejemplo se puede usar la deformación que una fuerza produce en un resorte, como en la figura. Si se aplica una fuerza verticalmente a un resorte y se estira una unidad, le asignamos a la fuerza una magnitud unitaria F. Se aplica ahora otra fuerza al mismo resorte horizontalmente, produciéndole un estiramiento de dos unidades, la magnitud de la fuerza será de $2F$. Si se aplican simultáneamente las dos fuerzas, el resorte se inclina, y se estira $\sqrt{5}$ veces. La fuerza equivalente que produce ese estiramiento del resorte es la suma vectorial de F y $2F$. Es decir, la fuerza es un vector.

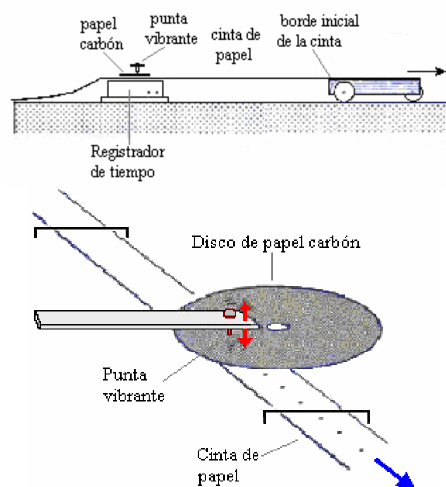


El instrumento para medir fuerzas se llama ***dinamómetro***, es un resorte que se estira sobre una escala. Si se aplica una fuerza de una unidad sobre el dinamómetro, el resorte se estira hasta que ejerce una fuerza igual y contraria a la aplicada. En la escala se mide el alargamiento del resorte y se le asigna una unidad de fuerza. De esa manera se calibra el dinamómetro y se usa para medir fuerzas, por ejemplo se aplica una fuerza sobre el dinamómetro y si se estira 2,5 unidades, entonces la fuerza aplicada es 2,5 veces la unidad de fuerza.
Este procedimiento es válido para pequeños alargamientos del resorte, ya que si la fuerza es muy intensa, se puede deformar y no volver a su forma original.

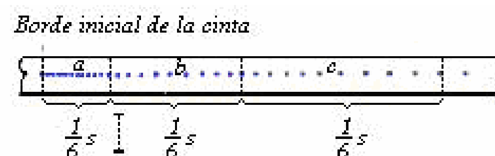
CAMBIO DE VELOCIDAD
Nuestro siguiente problema es encontrar una relación entre la fuerza y el cambio en el movimiento producido por ésta.
Para esto necesitamos lo siguiente:
1. Un carro muy ligero que pueda moverse sin fricción sobre una superficie horizontal.
2. Una fuerza constante. Esta podernos obtenerla mediante un resorte (Si mantenemos un resorte estirado una misma longitud, la fuerza que la estira es constante).



3. Un registrador de tiempo. El movimiento del carro puede estudiarse si una cinta de papel atada a éste pasa a través del registrador que produce marcas en la cinta a intervalos de tiempo regulares.

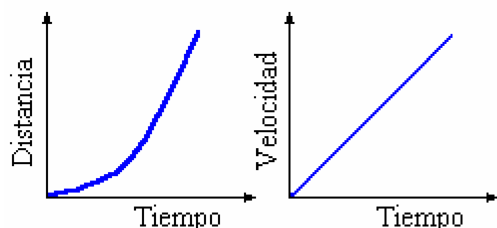


La figura siguiente muestra la cinta de papel producida por una fuerza constante.

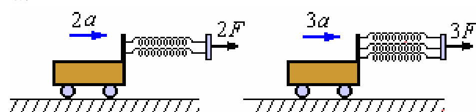


Con los datos obtenidos en esta experiencia se realiza el gráfico distancia - tiempo y se obtiene una curva. Con los datos también se puede obtener la velocidad media en cada intervalo de tiempo. El gráfico velocidad - tiempo es una línea recta que indica que

el movimiento es con aceleración constante. De aquí podemos concluir que una fuerza constante produce una aceleración constante.



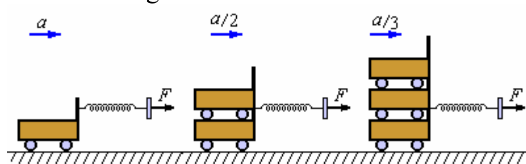
Si duplicamos la fuerza usando dos resortes iguales estirados la misma longitud, como se muestra en la figura.



Duplica la fuerza y produce el doble de aceleración. Si triplicamos la fuerza se obtiene una aceleración de valor triple.
Concluimos que la aceleración a del cuerpo es directamente proporcional a la fuerza.

$a \propto F$

Podemos escribir esto como $F = ma$, donde m es la constante de proporcionalidad. A esta constante la llamaremos **MASA**.
Para una determinada fuerza a mayor constante m la aceleración es menor. A mayor valor de la constante es más difícil acelerar el cuerpo.
Para conocer qué factores cambian esta constante realicemos el siguiente experimento: en lugar de usar un solo carro jalado por el resorte estirado usemos dos carros uno sobre otro y luego tres carros como se muestra en la figura



La aceleración que se obtiene con los carros es igual a la mitad y con tres es igual a un tercio. Como el valor de F es igual en todos los casos, quiere decir que la constante con dos carros es igual a $2m$ y con tres carros es $3m$.
Como la aceleración es una cantidad vectorial la fuerza también lo es y tiene la misma dirección que la aceleración, pero un módulo m veces mayor, de modo que la relación anterior puede escribirse en la forma

$\vec{F} = m\vec{a}$

Fuerza = masa x aceleración.
Esta expresión constituye la **SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO**.
La fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que le imprime.

UNIDADES DE FUERZA Y MASA

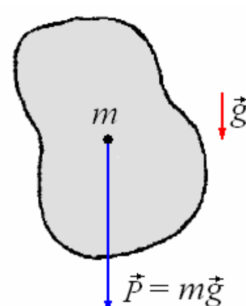
La relación $F = ma$ nos da una relación entre fuerza, masa y aceleración. En el sistema internacional (S.I.) la unidad de aceleración es m/s. ¿Cuales son las unidades de fuerza y de masa? Como son dos cantidades que se relacionan sólo tenernos que especificar un estándar para una de ellas.
El sistema internacional adopta corno unidad una pieza de material llamado KILOGRAMO, cuyo símbolo es kg. El kilogramo es la masa un prototipo de platino iridiado sancionado por la Conferencia General de Pesas y Medidas realizada en París en 1889 y depositado en el pabellón de Breleuil en Sevres.
La unidad de fuerza es el newton, cuyo símbolo es N y se define así:
El newton la fuerza que produce una aceleración de un metro por segundo al cuadrado a una masa de un kilogramo.

$$N = \frac{kgm}{s^2}$$

Otros sistemas:
MKS: igual al S.I.
CGS: Masa $\rightarrow$ gramo (g), $1\ g = 10^{-3}$ kg
Aceleración $\rightarrow$ cm/s^2
Fuerza $\rightarrow$ dina = g.cm/s^2
Inglés técnico: En este sistema la unidad fundamental es la unidad de fuerza.
Fuerza $\rightarrow$ libra (lb), 1 lb = 4,45 N
Aceleración $\rightarrow$ pie/s^2
Masa $\rightarrow$ slug = lb58
s^2/pie

PESO DE UN CUERPO. El peso de un cuerpo es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el cuerpo. Un cuerpo de masa m sometido a cierta fuerza cae con la aceleración de la gravedad g, el peso P de este cuerpo es

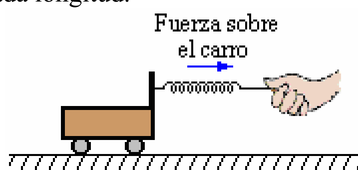
$$\vec{P} = m\vec{g}$$



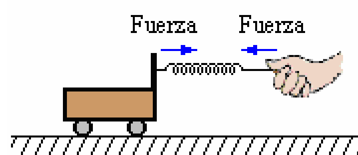
Su dirección es hacia abajo (hacia el centro de la Tierra). Como el peso es una fuerza debe medirse en Newtons.
Debido a que la aceleración de la gravedad varía de un lugar a otro de la Tierra, el peso de un cuerpo es diferente en lugares distintos, sin embargo la masa de un cuerpo es la cantidad fija que no depende del lugar donde está situado el cuerpo,
Aunque el peso de un objeto varía de un sitio a otro, esta variación es demasiado pequeña para ser observada en la mayor parte de las aplicaciones prácticas, por esto, el peso de un cuerpo parece ser una característica constante al igual que su masa. Este

hecho ha conducido al empleo ordinario de otras dos medidas:
KILOGRAMO FUERZA, es el peso de un Kilogramo masa.
1 kgf = 9,8 N
LIBRA MASA, es la masa de un cuerpo que pesa una libra.
1 libra masa = 0,454 kg.
Estas unidades son prácticas pero incorrectas y no deben ser usadas en Física.

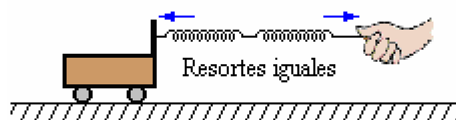
ACCION Y REACCION.
Hagamos una observación más detallada cuando jalamos el carro con un resorte estirado una determinada longitud.



Para que el resorte esté estirado es necesario jalarlo por los dos lados. Se necesitan fuerzas en sentidos opuestas y en cada extremo del resorte.
Cuando jalamos el carro, una fuerza actúa sobre el carro y una fuerza en sentido opuesto actúa sobre nuestra mano. ¿Cuáles son las magnitudes de estas fuerzas?



Con el objeto de dar respuesta a esta pregunta pongamos dos resortes iguales al primero y jalemos de tal manera que el carro adquiera la misma aceleración que antes, esto quiere decir, por la segunda ley de newton que siendo la misma masa *m* estamos aplicando la misma fuerza ($F = ma$) que antes y observamos que los resortes estiran la misma longitud, lo que quiere decir que la fuerza sobre la mano es igual a la fuerza sobre el carro.



Esto constituye la **TERCERA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO.**
Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre un segundo, éste ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el primero. La fuerza ejercida por el primer cuerpo sobre el segundo es la ACCIÓN, la fuerza igual y opuesta actuando sobre el primero es la REACCIÓN,
Expresado en símbolos, es:

$$\vec{F}_{\text{sobre 2 debido a 1}} = \vec{F}_{\text{sobre 1 debido a 2}}$$

Fuerza de contacto de un cuerpo a otro con un cambio de dirección o sin él
A continuación presentarnos algunos casos tipo de la aplicación de las leyes de Newton.

APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON
Cuando estudiamos Cinemática, encontrarnos las relaciones entre desplazamiento, aceleración y tiempo. Por ejemplo, conociendo la aceleración $\vec{a}$ las condiciones tales como posición inicial, velocidad inicial, es decir la posición y la velocidad en el tiempo que llamamos inicial ($t = 0$), podemos conocer la velocidad y posición para cualquier tiempo. Las condiciones iniciales las tenemos pero la aceleración, ¿de dónde? Para esto tenemos $\vec{F} = m\vec{a}$, todo lo que tenemos que hacer es conocer las fuerzas sobre el cuerpo y su masa, y entonces podremos encontrar $\vec{a}$. La mejor forma de estar seguros que comprendemos el significado de $\vec{F} = m\vec{a}$, es hacerlo con algunos problemas que involucran las leyes de Newton. Para resolver un problema sugerimos cuatro pasos a seguir:
1. Dibujar un esquema del sistema
2. Identificar el cuerpo a cuyo movimiento se refiere el problema.
3. Dibujar otra figura con solamente el objeto en particular manteniendo el marco de referencia poner todas las fuerzas que actúan sobre el objeto mediante flechas. Esto se conoce como **DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE (DCL)**. Si se comete una equivocación todo lo demás fallará, por eso es conveniente hacerlo bien. Una mejor forma de comenzar es poner la fuerza de gravedad primero y luego preguntarse:
"¿Qué toca al cuerpo?", la acción de tos resortes, cuerdas, manos y otros objetos, todos deben ser considerados. Así como también las fuerzas que actúan sin tocar el cuerpo, como la fuerza eléctrica, magnética de las cuales no nos preocupamos en este curso.
4. Finalmente, aplicar la segunda ley de Newton a cada componente de fuerza y aceleración.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_x = ma_x,\ \sum F_y = ma_y,\ \sum F_z = ma_z .$$

y ahora resolver para la aceleración.
En algunos de los problemas que se presentan más frecuentemente, las acciones se producen por fuerzas sin contacto; en otros se usan cuerdas y varillas como medios de conexión. Cuando las masas de estos medios de conexión son despreciables su único efecto es el de transmitir

ESTÁTICA DE LAS MASAS PUNTUALES.
Los sistemas en los cuales todas sus partes satisfacen la primera ley son llamados sistemas estáticos, es decir si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan es nula, el cuerpo esta en equilibrio y permanece en reposo, o si está en movimiento, se mantiene con velocidad constante

La condición de este equilibrio es

$$\sum \vec{F} = 0$$

y en componentes cartesianas:

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = 0 .$$

Las fuerzas son ejercidas sobre el objeto o sistemas por. Medios exteriores al sistema.

Ejemplo 1. La Fuerza gravitacional Dado que la aceleración de un cuerpo en caída libre en la tierra es *g*, ¿cuál es la fuerza de la gravedad?

Solución.

Como este movimiento es en una sola dimensión, consideramos que este se realiza en el eje *z*, tal que

$$\vec{a} = -g\hat{k}$$

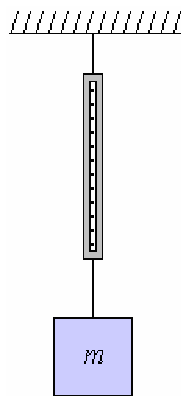
Según la Segunda Ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = -mg\hat{k}$$

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = -mg .$$

Siendo esta la respuesta que ya conocíamos.

Ejemplo 2. El dinamómetro. El dinamómetro es un instrumento que se utiliza para medir las fuerzas. Consta de un resorte con una escala que indica su estiramiento, la cual está graduada en Newtons. Cuando lo utilizamos para pesar se dispone como lo muestra la figura.



Se suspende la masa *m*, el resorte del dinamómetro se estira hasta que alcanza el equilibrio estático.

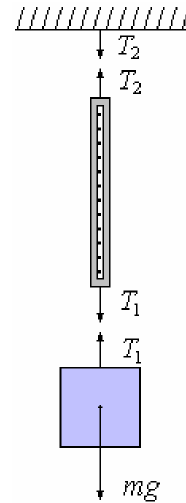


Diagrama del cuerpo libre (DCL)

Aplicando la condición de equilibrio de la masa *m*

$$T_1 - mg = 0$$

Luego $\Rightarrow\ T_1 = mg$

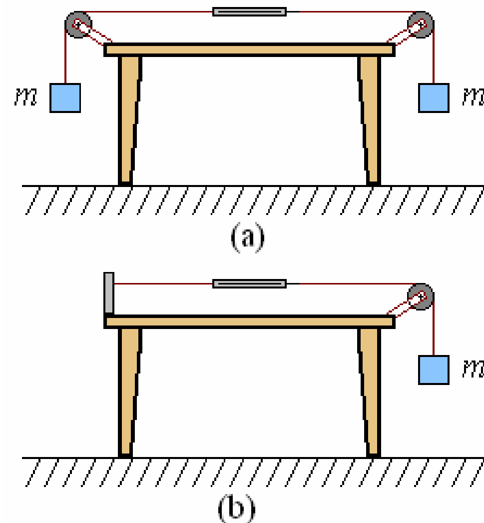
Si despreciamos la masa del dinamómetro, tenemos que:

$$T_1 - T_2 = 0 \text{ y } T_1 = T_2$$

El dinamómetro indica en la escala la fuerza

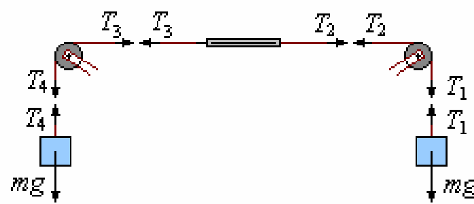
$$T_2 = mg$$

Ejemplo 3. Se tiene los dispositivos mostrados en la figura. ¿Cuánto indica el dinamómetro de la figura (a) y cuánto el dinamómetro de la figura (b)?



Solución.

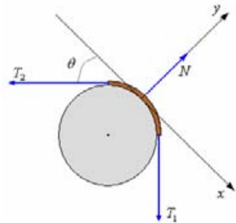
a) El diagrama de cuerpo libre de la figura (a) es



Empezando por la derecha

$T_1 - mg = 0 \Rightarrow T_1 = mg$

La figura siguiente muestra la polea



Para que el trozo de cuerda este en equilibrio

$\sum \vec{F} = 0$

Descomponiendo las fuerzas sobre el trozo de cuerda en los ejes *x* e *y*.

Como la cuerda se considera sin masa la suma de fuerzas a lo largo del eje *x* es

$T_1 \cos\theta - T_2 \cos\theta = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$

En el dinamómetro, considerándolo de masa despreciable.

$\sum \vec{F} = 0$

$T_2 - T_3 = 0 \Rightarrow T_2 = T_3$

En la polea de la izquierda

$T_4 = T_3$

En la masa de La izquierda

$\sum \vec{F} = 0$

$T_4 - mg = 0 \Rightarrow T_4 = mg$

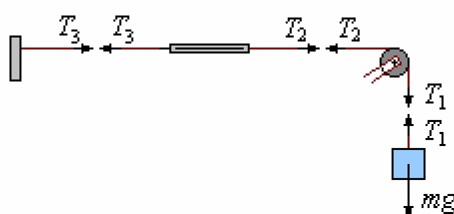
Como conclusión todas las tensiones son iguales a mg

$T_4 = T_3 = T_2 = T_1 = mg$

El dinamómetro es tensionado por la fuerza T_1, y su indicación será:

$T_1 = mg$

b) El diagrama de cuerpo libre de la figura siguiente es



En la masa

$T_1 - mg = 0 \Rightarrow T_1 = mg$

En la polea

$T_1 = T_2$

En el dinamómetro

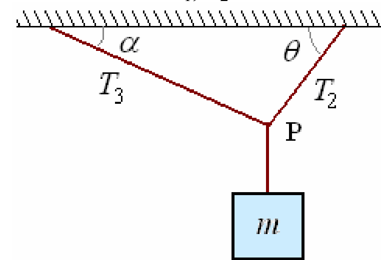
$T_3 = T_2 = T_1 = mg$

El dinamómetro es tensionado por la fuerza T_1 y su indicación será

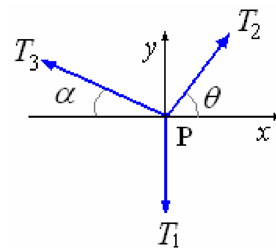
$T_1 = mg$

Como se puede ver esta situación es completamente análoga a la anterior, sólo que hemos sustituido una de las poleas por la pared.

Ejemplo 4. Un cuerpo de masa *m* se sostiene por medio de cuerdas como se muestra en la figura. Encontrar las tensiones T_1, T_2 en las tres cuerdas.



Solución.



Tomando un sistema de ejes horizontal y vertical como el mostrado en la figura tenemos:

$\vec{T}_1 = -mg\hat{j}$

$\vec{T}_2 = T_2 \cos\theta\,\hat{i} + T_2 \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$

$\vec{T}_3 = -T_3 \cos\alpha\,\hat{i} + T_3 \operatorname{sen}\alpha\,\hat{j}$

Con $\sum \vec{F} = 0$

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$

Obtenemos:

$\sum F_x = T_2 \cos\theta - T_3 \cos\alpha = 0$

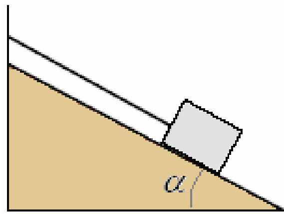
$\sum F_y = T_2 \operatorname{sen}\theta + T_3 \operatorname{sen}\alpha - mg = 0$

Resolviendo estas dos ecuaciones

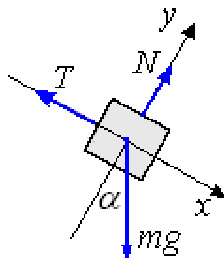
$$T_2 = \frac{mg\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)},\quad T_3 = \frac{mg\cos\theta}{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)}$$

Ejemplo 5. Un bloque de 50N de peso se ubica sobre un plano inclinado en un ángulo α de 30º con la

horizontal. El bloque se sujeta con una cuerda ideal que se encuentra fija en la parte superior del plano inclinado, como en la figura. Estudiar el comportamiento mecánico del bloque.



Solución.
El D. C. L. del cuerpo:



Fuerza de atracción de la Tierra, que es su peso *mg*.
Fuerza de la cuerda que lo sostiene, que es la tensión *T*
Fuerza que el plano ejerce sobre el cuerpo, que es la normal *N*
Como el sistema está en equilibrio, se aplica la primera Ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x : -T + mg\text{sen}\alpha = 0$$

$$\sum F_y : N - mg\cos\alpha = 0$$

Despejando *T* y *N*, y reemplazando los valores numéricos, se obtiene:

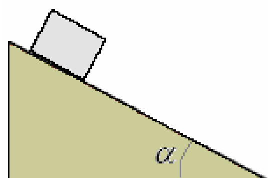
$$T = mg\text{sen}\alpha = 50\text{sen}30° = 25 \text{ N}$$

$$N = mg\cos\alpha = 50\cos30° = 43{,}2 \text{ N}$$

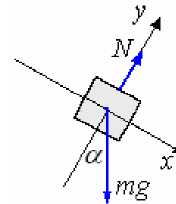
DINÁMICA CON FRICCIÓN DESPRECIABLE.

Los sistemas en los cuales todas sus partes satisfacen la primera ley son llamados sistemas estáticos, es decir si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan no es nula y la fricción se considera despreciable,

Ejemplo 6. Si un bloque de masa m se ubica sobre un plano sin roce, inclinado un ángulo α con la horizontal, resbalará una distancia D a lo largo del plano. Describir su movimiento.



Solución.
El D. C. L. del cuerpo:



Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x : mg\text{sen}\alpha = ma_x$$

$$\sum F_y : N - mg\cos\alpha = ma_y = 0$$

De estas ecuaciones se obtiene:

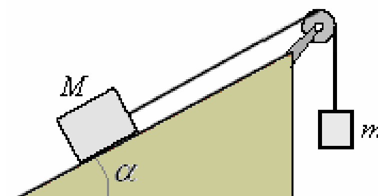
$$a_x = g\text{sen}\alpha \text{ y } N = mg\cos\alpha$$

Se concluye que la aceleración del bloque en dirección del plano inclinado es la componente de *g* en esa dirección. Estudiando ahora el movimiento del bloque, considerando que parte del reposo y se desliza una distancia *D*, se puede calcular la rapidez con que llega a la base del plano. Si se considera que el movimiento del bloque comienza desde el reposo, se puede usar:

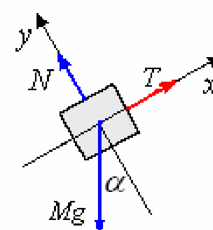
$$v^2 = v_0^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow v^2 = 2(g\text{sen}\alpha)D$$

$$\text{y} \quad v = \sqrt{2gD\text{sen}\alpha}$$

Ejemplo 7. Para el siguiente sistema mecánico, calcular la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.



Solución.
Como no se conoce la dirección del movimiento, supongamos que el cuerpo de masa *M* sube por el plano inclinado, lo que determina el sentido de la aceleración, entonces aplicando la segunda Ley de Newton se aplica cada masa:
El D. C. L. del cuerpo *M*:



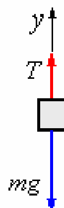
Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\sum F_x : T - Mg\text{sen}\alpha = Ma \Rightarrow$$

$$T = Mg\text{sen}\alpha + Ma$$

$$\sum F_y : N - Mg\cos\alpha = 0$$

De estas ecuaciones se obtiene:
El D. C. L. del cuerpo *m*:



Del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$\sum F_y : T - mg = -ma \Rightarrow T = mg - ma$

De estas ecuaciones se obtiene

$Mg\text{sen}\alpha + Ma = mg - ma$

$$a = \frac{(m - M\text{sen}\alpha)}{(m + M)} g$$

Se observa que el signo de a depende del término (m - M sen α).

Ahora se calcula el valor de la tensión reemplazando el valor de a en T:

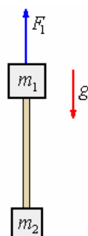
$$T = mg - m\left(\frac{m - M\text{sen}\alpha}{m + M}\right) g$$

$$T = \frac{mM}{(m + M)}(1 + \text{sen}\alpha) g$$

Ejemplo 8. Dos bloques de masas m_1 = 20 kg y m_2 = 8 kg, están unidos mediante una cuerda homogénea inextensible que pesa 2 kg. Se aplica al conjunto una fuerza vertical hacia arriba de 560 N. Calcular:

a) La aceleración del conjunto;

b) Las fuerzas que actúan en los extremos de la cuerda.



Solución.

En el D. C. L. de m_1:

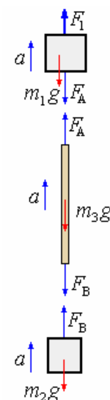
$F_1 - F_A - m_1 g = m_1 a$ (1)

En el D. C. L. de la cuerda de masa m_3:

$F_A - F_B - m_3 g = m_3 a$ (2)

En el D. C. L. de m_2:

$F_B - m_2 g = m_2 a$ (3)



a) Sumando (1), (2) y (3):

$F_1 - (m_1 + m_2 + m_3) g = (m_1 + m_2 + m_3) a$

y $a = \dfrac{F_1}{(m_1 + m_2 + m_3)} - g$

$a = \dfrac{560}{(20 + 8 + 2)} - 9{,}8$ = 8,87 m/s^2

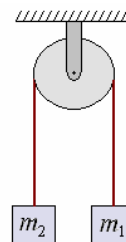
b) De (3) $F_B = m_2 (g + a)$

$F_B = 8(9{,}8 + 8{,}87)$ = 149,4 N

De (1) $F_A = F_1 - m_1 (g + a)$

$F_A = 560 - 20(9{,}8 + 8{,}87)$ = 186,6 N

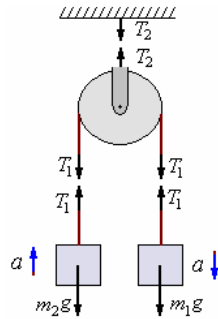
Ejemplo 9. La máquina de ATWOOD. Es un aparato que se utiliza para determinar con exactitud la gravedad y consiste de dos masas m_1 y m_2, ($m_1 > m_2$), que están unidas mediante una cuerda que pasa sobre una polea. Considerar la cuerda inextensible y sin masa. Asimismo, no tornar en cuenta la fricción y la masa de la polea. Describir el movimiento y calcular la tensión en la cuerda.



Solución.

Siendo m_1 mayor que m_2, la masa m_1 se moverá hacia abajo con una aceleración a y la masa m_2 se moverá hacia arriba con la misma aceleración a.

La figura siguiente muestra los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes del sistema.



La polea cumple la función de cambiar la dirección T_1 Considerando el sentido de la aceleración o como positiva.

Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa m_1

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton para la masa m_2:

$$T_1 - m_2 g = m_2 a$$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g \text{ y } T_1 = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g$$

Si las masas m_1 y m_2 fueran casi iguales, el valor de la aceleración sería pequeña y podría determinarse midiendo el tiempo en que una de las masas sube o baja una distancia determinada.

La razón $\frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$ se determina pesando los cuerpos.

Finalmente, la magnitud de g se obtiene a partir de estas cantidades mediante la ecuación

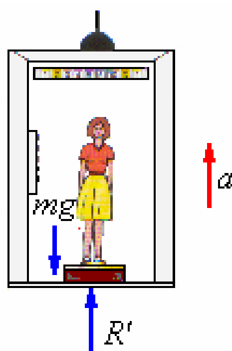
$$g = \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)} a$$

Ejemplo 10. El peso de un pasajero en ascensor. Consideremos un pasajero de peso *mg* en un ascensor este peso es equilibrado por la reacción que el piso ejerce sobre él, si el ascensor estuviera parado $R = mg$.

Si el ascensor sube con aceleración *a*. ¿Cuál es el peso de la persona?

Solución.

La figura muestra el ascensor subiendo con una aceleración a



Ahora la reacción del piso es R'.

Aplicando la Segunda Ley de Newton al movimiento de la persona

$$R' - mg = ma \Rightarrow R' = m(g + a)$$

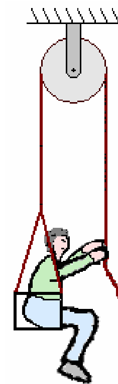
Si el ascensor sube el pasajero se siente más pesado, como si fuera empujado contra el piso. Si el ascensor desciende con esta aceleración,

$R' - mg = -ma \Rightarrow R' = m(g - a)$, el pasajero se siente más liviano.

Ejemplo 11. La figura muestra a un hombre elevándose mediante una fuerza vertical que aplica él mismo a la cuerda que tiene en las manos. Si el hombre y la silla juntos tienen una masa de 100 kg. Se pregunta:

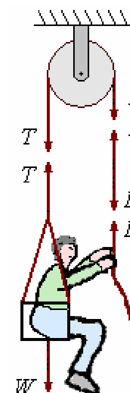
a) ¿Con qué fuerza debe jalar para, subir con una velocidad constante?

b) ¿Con qué fuerza debe jalar para subir con una aceleración de 1 m/s^2 (considerar g = 10 m/s^2?



Solución.

a) La figura siguiente muestra los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes del sistema.



Como se considera la cuerda con masa despreciable en el D.C.L. del trozo de cuerda

$$T = F$$

La polea solo cambia la dirección de la tensión T.

En el D.C.L .del hombre-silla

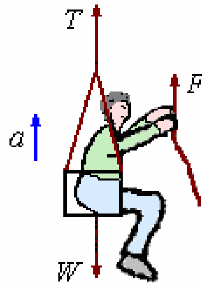
$$T + F - W = 0 \Rightarrow 2F = W$$

y $F = \frac{W}{2}$

Como $W = 100 \times 10 = 1000$ N

$$F = \frac{1000}{2} = 500 \text{ N}$$

b) Ahora como el hombre debe subir con una aceleración de 1 m/s² tenemos:



$$T + F - W = \frac{W}{g}a \Rightarrow 2F = W + \frac{W}{g}a$$

y $F = \frac{W}{2}\left(1 + \frac{a}{g}\right)$

Como $W = 1000$ N, $a = 1$ m/s² y $= 1$ m/s²

$$F = \frac{1000}{2}\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 550 \text{ N}$$

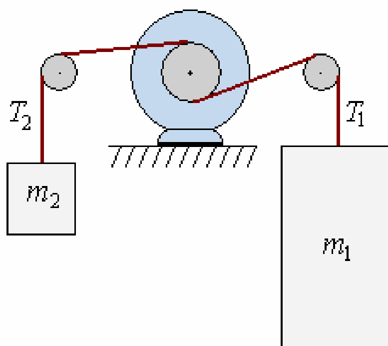
Ejemplo 12. La figura muestra un ascensor. Este consiste de la caja con masa $m_1 = 1100$ kg, el contrapeso con masa $m_2 = 1000$ kg. El cable y poleas con masa y fricción despreciables.

Cuando el ascensor tiene una aceleración hacia arriba de 2 m/s², el contrapeso tiene igual aceleración pero hacia abajo.

a) ¿Cuál es el valor de la tensión T_1?

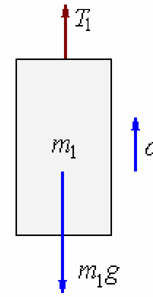
b) ¿Cuál es el valor de la tensión T_2?

c) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el motor sobre el cable?



Solución.

a) Consideremos el D.C.L de la masa m_1:



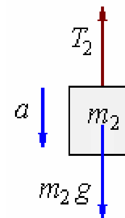
Aplicando la Segunda Ley de Newton

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1(a + g)$$

$$T_1 = 1100(2 + 9{,}8)$$

$= 12980$ N

b) Consideremos el D.C.L. de la masa m_2:



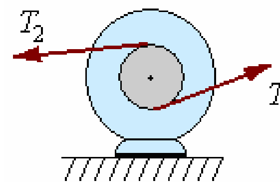
Aplicando La Segunda Ley de Newton

$$m_1 g - T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2(g - a)$$

$$T_2 = 1000(9{,}8 - 2)$$

$= 7800$ N

c) En el motor Fuerza ejercida por el motor (T_1 y T_2 pueden considerarse colineales)

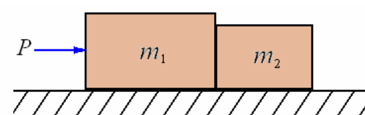


$$F_M = T_1 - T_2 = 12980 - 7800$$

$= 5180$ N

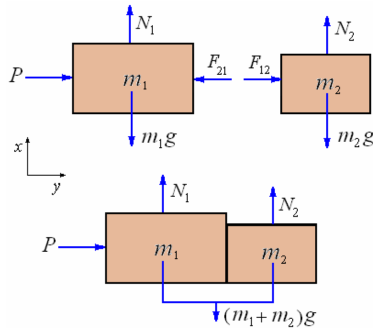
Ejemplo 13. Demostración de la tercera ley de Newton mediante el uso de la segunda ley.

Se tienen dos cuerpos de masas m_1 y m_2 los cuales son empujados sobre un plano sin fricción por una fuerza de magnitud P. Demostrar que aquí se cumple la tercera ley de Newton.



Solución.

Asumiremos que no hay fricción entre las superficies de contacto de m_1 y m_2.
La figura muestra los D.C.L. para los bloques 1, 2 y para el sistema.



N_1 y N_2 son las fuerzas ejercidas por el plano.
F_{21} es la fuerza que el bloque 2 ejerce sobre el bloque 1.
F_{12} es la fuerza que el bloque 1 ejerce sobre el bloque 2.
La fuerza P solo actúa sobre el bloque 1, ya que solo está en contacto con él.
Como asumimos que no hay fricción entre los bloques, las fuerzas son normales a la superficie de contacto.
Para el bloque 1 tenemos:

$P - F_{21} = m_1 a_{1x}$ y $N_1 - m_1 g = 0$

Similarmente para el bloque 2

$F_{12} = m_2 a_{2x}$ y $N_2 - m_2 g = 0$

Para el sistema

$P = (m_1 + m_2) a_x$ y

$N_1 + N_2 - (m_1 + m_2) g = 0$

En este caso no nos interesan las ecuaciones en *y* pero si las ecuaciones en *x*.
Como los bloques se mueven juntos:

$a_{1x} = a_{2x} = a_x$

Sumamos la ecuación para el bloque 1 con la ecuación para el bloque 2.

$P - F_{21} + F_{12} = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} = (m_1 + m_2) a_x$

Comparando con la ecuación para el sistema tenemos:

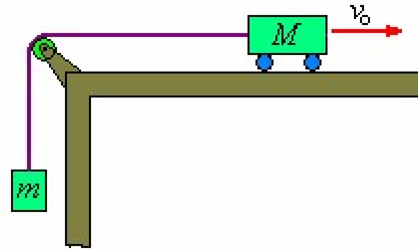
$P - F_{21} + F_{12} = P$

Esto dice que la magnitud de la fuerza de 1 sobre 2 es igual a la fuerza de2 sobre 1. Como ellas son opuestas resulta ser precisamente la tercera ley de Newton.

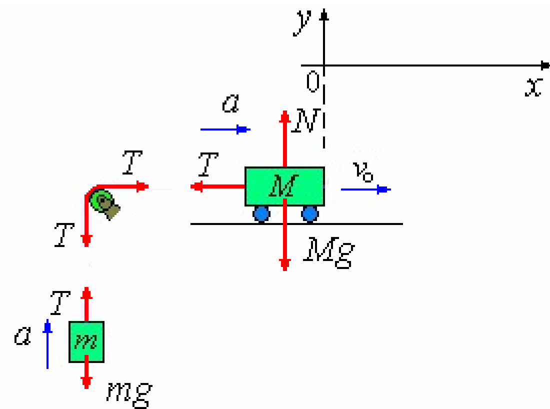
$F_{21} = F_{12}$, Acción y reacción.

Ejemplo 14.. Un carrito de masa M = 500 gramos está unido a una carga de masa m = 200 gramos mediante una cuerda. En el momento inicial el carrito tenia la velocidad inicial v_0 = 7 m/s y se movía a la derecha por un plano horizontal. Determinar para t = 5 s:

a) el valor y sentido de la velocidad del carrito,
b) el lugar, donde encontrará
c) el desplazamiento del carrito
d) el recorrido total del carrito.
(Usar g = 9,8 m/s^2)



Solución.



Para la masa M:

$-T = Ma$ (1)

Para la masa m:

$T - mg = ma$ (2)

Sumando (1) y (2)

$-mg = (M + m)a \Rightarrow$

$$a = -\frac{m}{(M+m)} g = -\frac{0,2}{0,7}(9,8) = -2,8 \text{ m/s}^2$$

La aceleración es en sentido contrario al indicado en la figura.
a) La velocidad inicial del carrito es v_0 = 7 m/s y su aceleración es a = - 2,8m/s^2.
De las ecuaciones de cinemática

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v = v_0 + at,$$

Hallamos:

$x = 7t - 1,4t^2$, $v = 7 - 2,8t$

Dentro de 5 s el carrito tendrá una velocidad v = - 7 m/s (dirigida a la izquierda).

b) $x = 7(5) - 1,4(5)^2 = 35 - 35 = 0$

El carrito se encontrará en la posición inicial.
c) El desplazamiento es cero.

d) El carrito se detiene cuando v = 0 e inicia el camino de vuelta.

$$0 = 7 - 2{,}8t \;\Rightarrow\; t = \frac{7}{2{,}8} = 2{,}5 \text{ s}$$

Recorrido total $s = 2\left[7(2{,}5) - 1{,}4(2{,}5)^2\right]$
$= 17{,}5$ m

Recorrerá un trayecto igual a 17,5 m.

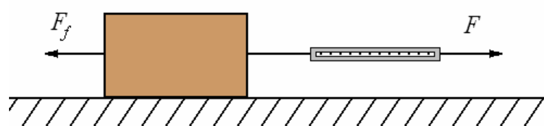
FRICCIÓN

Cuando un cuerpo sobre una superficie se empuja o se jala éste puede permanecer inmóvil, esto sucede porque la fuerza aplicada no ha sido suficiente para vencer la fuerza de fricción. Cuando lograrnos que el cuerpo deslice sobre la superficie es necesario aplicar una fuerza para que éste continúe en movimiento.

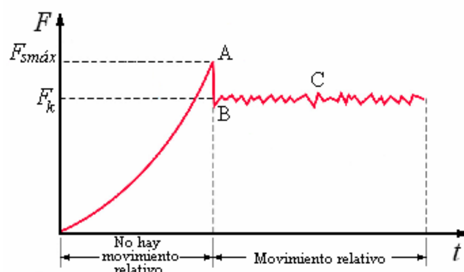
Comportamiento de un cuerpo que descansa sobre un plano horizontal

Supongamos que jalamos un bloque con un dinamómetro, como se muestra en la figura.

Comportamiento de un cuerpo que descansa sobre un plano horizontal



Dibujemos una gráfica de la fuerza F aplicada sobre el bloque versus el tiempo t.



1. Desde el origen hasta el punto A la fuerza F aplicada sobre el bloque no es suficientemente grande como para moverlo. Estamos en una situación de equilibrio estático

$$F = F_{fs} = \mu_s N$$

En el punto A, la fuerza de rozamiento F_{fs} alcanza su máximo valor $\mu_{smáx} N$

$$F = F_{fsmáx} = \mu_{smáx} N$$

2. Si la fuerza F aplicada se incrementa un poquito más, el bloque comienza a moverse. La fuerza de rozamiento disminuye rápidamente a un valor menor e igual a la fuerza de rozamiento dinámico,

$$F = F_{fk} = \mu_k N$$

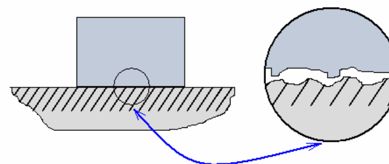
Si la fuerza F no cambia, punto B, y permanece igual a $F_{fsmáx}$, el bloque comienza moviéndose con una aceleración

$$a = \frac{(F - F_{fk})}{m}$$

Si incrementamos la fuerza F, punto C, la fuerza neta sobre el bloque $F - F_{fk}$ se incrementa y también se incrementa la aceleración.

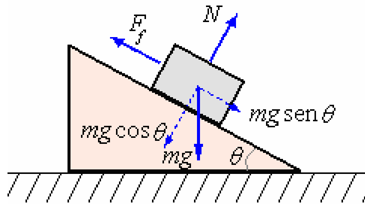
Observación. Encontramos que con fuerzas menores que 10 N no se produce movimiento.
Con 10 N el bloque comienza a moverse.
Para fuerzas mayores a 10 N el bloque se acelera.
Si medimos la aceleración podemos conocer la fuerza resultante sobre el bloque aplicando la segunda ley de Newton, $F = ma$.
Cuando el dinamómetro indica 12 N la fuerza resultante a partir de la aceleración medida es 4 N, esto significa que se necesita 12 N – 4 N = 8 N, para vencer la fuerza de fricción Si aplicamos 10 N al bloque para que inicie el movimiento, después de esto es posible reducir la fuerza a 8 N y aún mantener el bloque en movimiento.
En resumen:
Una fuerza de 10 N inicia el movimiento del bloque.
Una fuerza de 8 N mantiene el movimiento del bloque.

El origen de este fenómeno se debe a la existencia de fuerzas entre las moléculas del cuerpo y la superficie; si la superficie de contacto del cuerpo con la superficie fuera perfectamente plana, la fuerza de atracción podría ser considerable, como es el caso de dos placas de vidrio perfectamente limpias que una vez puestas en contacto, difícilmente pueden ser separadas.
Las superficies nunca son perfectamente lisas y las imperfecciones constituyen verdaderos obstáculos al desplazamiento como se muestra en la figura. Es preciso vencer estos obstáculos para iniciar el movimiento y también para mantenerlo.



A esta fuerza se le conoce como FUERZA DE FRICCION O ROZAMIENTO (F_f).

Con la finalidad de conocer la dependencia de esta fuerza de rozamiento realicemos la siguiente experiencia.
Supongamos un plano inclinado con un bloque de masa ni descansando sobre él.



Encontramos que el bloque empieza a resbalar para un determinado ángulo θ. Si colocamos dos bloques juntos, el ángulo con el cual inician el movimiento sigue siendo θ, lo mismo ocurre con tres bloques. La fuerza que jala al cuerpo es la componente del peso $mg\text{sen}\theta$, paralela al plano. La otra componente es perpendicular al plano $mg\cos\theta$. Esta es la fuerza que sostiene al bloque sobre la superficie (Fuerza Normal). Si duplicarnos el peso *mg* a 2*mg*, duplicamos la fuerza que jale al bloque y la fuerza normal tal que:

$$\frac{\text{Fuerza que inicia el movimiento}}{\text{Fuerza normal}} = \text{Constante}$$

O

$$\frac{mg\ \text{sen}\theta}{mg\cos\theta} = \tan\theta = \mu_s = \text{Constante}$$

$$\frac{F_f}{N} = \mu_s$$

A esta constante μ_s se le llama coeficiente de fricción estática.

Si se toman los datos con el bloque en movimiento, el ángulo para que el movimiento continúe es generalmente menor y obtenemos

$$\frac{\text{Fuerza para continuar el movimiento}}{\text{Fuerza normal}} = \mu_k$$

A esta constante se le llama coeficiente de fricción cinética μ_k.

μ es una constante que depende de la superficie y se puede escribir simplemente.

$F_f = \mu N$.

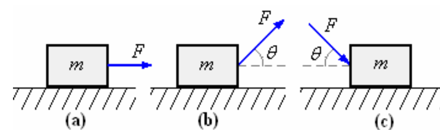
Algunos valores típicos de coeficientes de fricción.

Material	Sobre material	μ_s	μ_k
Acero	Acero	0,78	0,42
Cuero	Cuero	0,64	0,56
Cuero	Roble	0,60	0,50
Bronce	Hierro	0,40	0,30
Aluminio	Aluminio	1,05	1,40
Vidrio	Vidrio	0,92	0,40
Caucho	Asfalto	0,60	0,40
Caucho	Concreto	0,80	0,70
Caucho	Hielo	0,02	0,005
Piedra	Piedra	0,65	0,60

El hecho que la fuerza de fricción es independiente del área de contacto parece absurdo ya que las fuerzas intermoleculares son tanto mayores, cuanto mayor es la superficie de contacto. En realidad se debía esperar que F_f fuera proporcional a la superficie, lo que suceder es que si el cuerpo pesa muy poco, prácticamente no hay puntos de contacto entre las dos superficies (el área de contacto es despreciable).

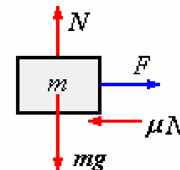
Cuando *N* aumenta, la superficie aumenta y F_f también, por lo tanto $F_f = \mu N$ donde se está incluyendo ya el aumento de superficie. Es decir, la fuerza de fricción F_f es proporcional a la fuerza normal *N* porque la verdadera superficie de contacto es proporcional a la fuerza normal.

Ejemplo 15. ¿Cuál es la fuerza mínima *F* necesaria para mover la masa m, siendo μ el coeficiente de rozamiento estático entre el piso y el bloque en cada uno de los casos siguientes?



Solución.

a) La figura muestra el D.C.L.



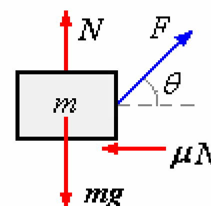
$$\sum F_y : \ N - mg = 0 \ \Rightarrow \ N = mg$$

$$\sum F_x : \ F - \mu N = 0 \ \Rightarrow \ F = \mu N$$

Luego:

$$F = \mu mg$$

b) La figura muestra el D.C.L.



$$\sum F_y : \ N + F\text{sen}\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow \ N = mg - F\text{sen}\theta$$

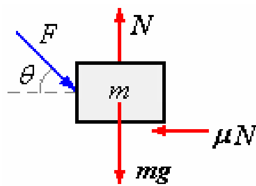
$$\sum F_x : \ F\cos\theta - \mu N = 0$$

$$\Rightarrow \ F\cos\theta = \mu N$$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\theta + \mu \operatorname{sen}\theta}$$

c) La figura muestra el D.C.L.



$$\sum F_y :\ N - F\operatorname{sen}\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow\ N = mg + F\operatorname{sen}\theta$$

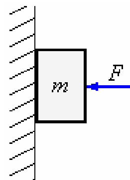
$$\sum F_x :\ F\cos\theta - \mu N = 0$$

$$\Rightarrow\ F\cos\theta = \mu N$$

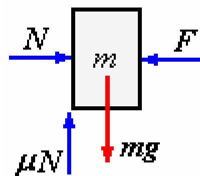
De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\theta - \mu \operatorname{sen}\theta}$$

Ejemplo 16. ¿Cuál es el valor mínimo de F para sostener el bloque de masa m sobre una pared vertical, como se muestra en la figura, μ es el coeficiente de fricción estático entre la pared y el bloque?



Solución.
La figura siguiente muestra el D.C.L.



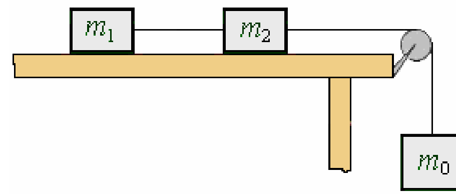
$$\sum F_y :\ N - F = 0 \ \Rightarrow\ N = F$$

$$\sum F_x :\ \mu N - mg = 0 \ \Rightarrow\ N = \frac{mg}{\mu}$$

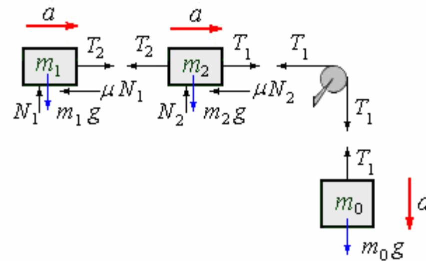
Por consiguiente

$$F = \frac{mg}{\mu}$$

Ejemplo 17. En el esquema de la figura las masas de la polea y del cable son despreciables y no hay rozamiento entre el cable y la polea. Hallar la aceleración del bloque m_0 y la tensión del cable que une los bloques m_1 y m_2. El coeficiente de rozamiento entre los bloques y el plano inclinado es μ .



Solución.



Para m_0: $\left\{ m_0 g - T_1 = m_0 a \right.$

Para m_2: $\begin{cases} T_1 - T_2 - \mu N_2 = m_2 a \\ N_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$

Para m_1: $\begin{cases} T_2 - \mu N_1 = m_1 a \\ N_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$

De estas ecuaciones obtenemos:

$N_2 = m_2 g$, $N_1 = m_1 g$

y $m_0 g - \mu(m_1 + m_2)g = (m_0 + m_1 + m_2)a$

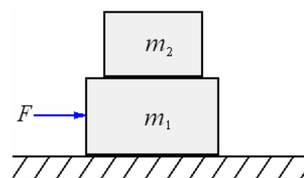
De aquí:

$$a = \frac{[m_0 - \mu(m_1 + m_2)]}{(m_0 + m_1 + m_2)} g$$

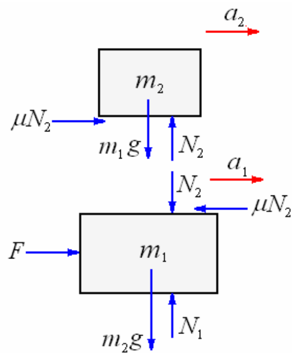
La tensión del cable que une los bloques m_1 y m_2:

$$T_2 = m_1(a + \mu g) = \frac{m_1 m_0}{(m_0 + m_1 + m_2)}(1 + \mu)g$$

Ejemplo 18. Se tiene una masa m_2 sobre una masa m_1 sobre un piso horizontal, tal como muestra la figura. Se aplica una fuerza horizontal F sobre la masa m_1. La masa carece de fricción. ¿Cuál es el valor máximo de F para que la masa m_1 no resbale sobre m_2. ¿Cuál es la aceleración resultante de los bloques?



Solución.
La figura muestra el D.C.L. de las masas m_1 y m_2.



Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa m_2, la que suponemos se mueve con aceleración a_2.

$\sum F_y:\ N_2 - m_2 g = 0$

$\sum F_x:\ \mu N_2 = m_2 a_2$

Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa m_1, la que suponemos se mueve con aceleración a_1.

$\sum F_y:\ N_1 - N_2 - m_1 g = 0$

$\sum F_x:\ F - \mu N_2 = m_1 a_1$

Trabajando con estas ecuaciones encontramos que

$F = m_1 a_1 + m_2 a_2$

La aceleración de la masa m_2 es:

$$a_2 = \frac{\mu N_2}{m_2} = \frac{\mu m_2 g}{m_2} = \mu g$$

Como el valor de μ varía desde 0 hasta el valor máximo $\mu_{máx}$:

$a_2 = \mu_{máx} g$ o simplemente $a_2 = \mu g$.

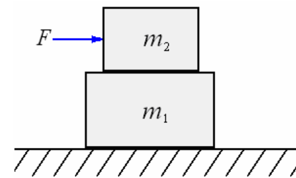
Pero como queremos encontrar el valor máximo posible de *F* para que las masas vayan juntas, es decir, para que m_1 no se quede, se tiene como condición que;

$a_1 = a_2 = \mu g$

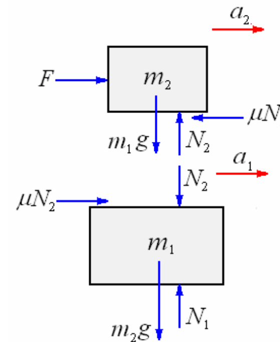
Luego: $F_{máx} = (m_1 + m_2)\mu_{máx} g$

Si aplicamos una fuerza mayor el bloque m_1 avanzará dejando atrás al bloque m_2.

Ejemplo 19. Usando el dispositivo del ejemplo anterior discuta el caso en ci que la fuerza *F* se aplica a la masa m_2.



Solución.
La figura muestra el D.C.L. para este caso



Las ecuaciones para la masa m_2 son

$\sum F_y:\ N_2 - m_2 g = 0$

$\sum F_x:\ F - \mu N_2 = m_2 a_2$

Las ecuaciones para la masa m_1 son.

$\sum F_y:\ N_1 - N_2 - m_1 g = 0$

$\sum F_x:\ \mu N_2 = m_1 a_1$

Trabajando con estas ecuaciones encontramos que

$F = m_1 a_1 + m_2 a_2$

La aceleración de la masa m_1 es:

$$a_1 = \frac{\mu N_2}{m_1} = \frac{\mu m_2 g}{m_1} = \mu g \frac{m_2}{m_1}$$

Como el valor de μ varía desde 0 hasta el valor máximo $\mu_{máx}$:

$$a_1 = \mu_{máx} g \frac{m_2}{m_1}$$

Como la condición de que las masas m_1 y m_2 vayan juntas es,

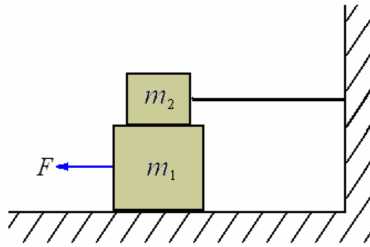
$a_1 = a_2$

Luego el valor máximo de *F* pera que m_1 y m_2 vayan juntas es,

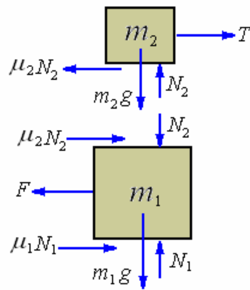
$$F_{máx} = \frac{(m_1 + m_2)m_2}{m_1}\mu_{máx} g$$

Ejemplo 20. En el dispositivo de la figura encontramos el valor mínimo de *F* para sacar la masa m_1.

El coeficiente de fricción entre m_1 y la mesa es μ_1 y el coeficiente de fricción entre m_1 y m_2 es μ_2.



Solución.
La figura muestra los D.C.L. de las masas m_1 y m_2



Considerando que el equilibrio es la condición mínima de inicio de movimiento
Aplicando la Segunda ley de Newton para la masa m_2.

$$\sum F_y : \ N_2 - m_2 g = 0$$

$$\sum F_x : \ \mu_2 N_2 - T = 0$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton para la masa m_1

$$\sum F_y : \ N_2 - N_1 + m_1 g = 0$$

$$\sum F_x : \ F - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones

$$N_2 = m_2 g$$

$$T = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g$$

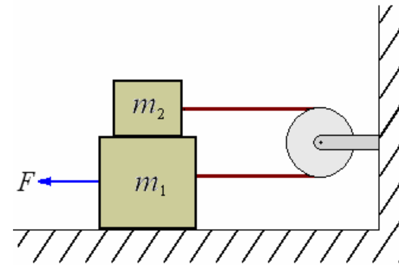
$$N_1 = N_2 + m_1 g = (m_1 + m_2) g$$

$$F = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$$

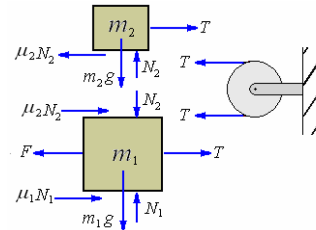
$$= \mu_1 (m_1 + m_2) g + \mu_2 m_2 g$$

Siendo este valor de *F* el mínimo para iniciar el movimiento de la masa m_1.

Ejemplo 21. En el dispositivo de la figura, encontrar el valor mínimo de *F* para sacar la masa m_1. El coeficiente de fricción entre m_1 y la mesa es μ_1, el coeficiente de fricción entre m_1 y m_2 es μ_2.



Solución.
La figura muestra el D.C.L.de las masas m_1 y m_2



Considerando que el equilibrio es la condición mínima de inicio del movimiento.
Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m_2:

$$\sum F_y : \ N_2 - m_2 g = 0$$

$$\sum F_x : \ \mu_2 N_2 - T = 0$$

Aplicando la segunda ley de Newton para la masa m_1:

$$\sum F_y : \ N_2 - N_1 + m_1 g = 0$$

$$\sum F_x : \ F - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 - T = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones

$$N_2 = m_2 g$$

$$T = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g$$

$$N_1 = N_2 + m_1 g = (m_1 + m_2) g$$

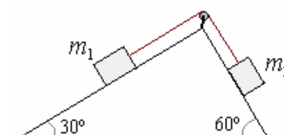
$$F = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + T$$

$$= \mu_1 (m_1 + m_2) g + \mu_2 m_2 g$$

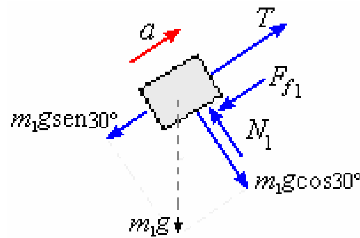
$$= [\mu_1 m_1 + m_2 (\mu_1 + \mu_2)] g$$

Siendo este valor de *F* el mínimo para iniciar el movimiento.

Ejemplo 22. Los bloques m_1 y m_2 de 20 y 60 kg, respectivamente, están unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento. El coeficiente de rozamiento cinético entre las masas y la superficie es 0,3. Determinar la velocidad del sistema 4 segundos después de partir del reposo.



Solución.
La figura muestra el D.C.L. de la masa m_1.
Consideremos que el movimiento es de izquierda a derecha con aceleración a

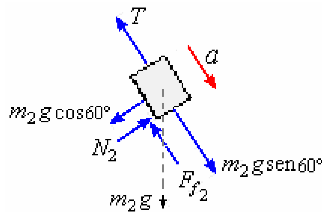


$$\sum F_y : \; N_1 - m_1 g\cos 30° = 0$$
$$\sum F_x : \; T - F_{f1} - m_1 g\text{sen}30° = m_1 a$$

De estas ecuaciones

$$N_1 = m_1 g\cos 30° = 20\times 10\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 173 \text{ N}$$
$$F_{f1} = \mu N_1 = 0{,}3\times 173 = 51{,}9 \text{ N}$$
y $T - 51{,}9 - 20\times 10\times \dfrac{1}{2} = 20a$
$$\Rightarrow T = 151{,}9 + 20a$$

La figura muestra D.C.L. de la masa m_2.



$$\sum F_y : \; N_2 - m_2 g\cos 60° = 0$$
$$\sum F_x : \; m_2 g\text{sen}60° - F_{f2} - T = m_2 a$$

De estas ecuaciones

$$N_2 = m_2 g\cos 60° = 20\times 10\times \frac{1}{2} = 150 \text{ N}$$
$$F_{f2} = \mu N_2 = 0{,}3\times 150 = 45 \text{ N}$$
y $30\times 10\times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 45 - T = 30a$
$$\Rightarrow T = 214{,}5 - 30a$$

Igualando los valores de *T*:

$$151{,}9 + 20a = 214{,}5 - 30a \;\Rightarrow\; a = 1{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

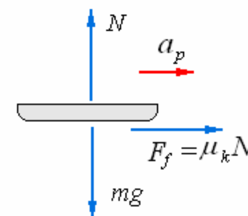
Como $v = v_0 + at$,

Siendo $v_0 = 0 \Rightarrow v = 1{,}25t^2$

Para $t = 4 \text{ s} \Rightarrow \; v = 1{,}25\times 4 = 5\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Ejemplo 23. En una mesa un plato descansa sobre el mantel, cuyo centro está a 0,25m del borde de la mesa. El mantel se jala súbitamente en forma horizontal con una aceleración constante de 10 m/s^2. El coeficiente de fricción cinético entre el mantel y el plato es $\mu_k = 0{,}75$. Asumiendo que el mantel llega justo al borde de la mesa.
Cuando el extremo del mantel pasa bajo el centro del plato, encontrar:
a) La aceleración del plato
b) La velocidad de! plato
c) La distancia del plato al borde de la mesa.

Solución.
a) Aplicando la segunda ley de Newton para el plato, la masa del plato es m y su aceleración a_p.



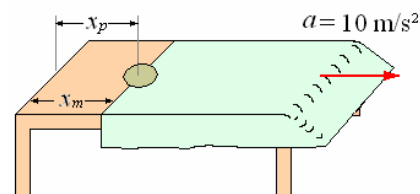
$$\sum F_V = 0 \;\Rightarrow\; mg - N = 0$$
$$\sum F_H = ma_p \;\Rightarrow\; F_f = ma_p$$

De aquí obtenemos:
$$N = mg \text{ y } \mu_k mg = ma_p$$

De donde:
$$a_p = \mu_k g = 0{,}75 \text{ x } 9{,}8 = 7{,}35 \text{ m/s}^2$$

El plato resbala ya que a_p es menor que 10 m/s^2

b) En el instante en que el extremo del mantel coincide con el centro del plato están a la misma distancia del borde de la mesa



$$x_p = x_m$$

$$x_p = 0{,}25 + \frac{1}{2}a_p t^2 = 0{,}25 + \frac{1}{2}7{,}35t^2$$
$$x_m = \frac{1}{2}a_m t^2 = \frac{1}{2}10t^2$$

Igualando
$$0{,}25 + \frac{1}{2}7{,}35t^2 = \frac{1}{2}10t^2$$

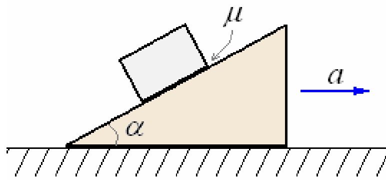
Resolviendo:
$t = 0{,}58 \text{ s}$ y

$v_p = v_0 + a_p t = 0 + 7{,}35 \times 0{,}58$
$= 4{,}26$ m/s.

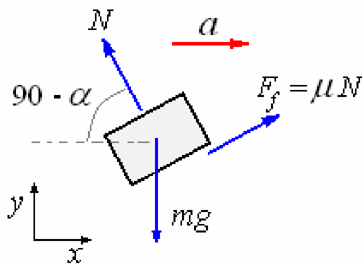
c) $x_p = 0{,}25 + \frac{1}{2} a_p t^2$

$= 0{,}25 + \frac{1}{2} 7{,}35 \times 0{,}58^2 = 1{,}49$ m

Ejemplo 24. El plano inclinado mostrado en la figura tiene una aceleración a hacia la derecha. Si el coeficiente de fricción estático entre el plano y el bloque es μ, encontrar la condición para que el bloque resbale.



Solución.
Consideremos que el bloque tiene masa m, la figura a continuación muestra su DCL.



Para que el bloque no resbale debe tener la misma aceleración a.
Aplicando la segunda ley de Newton

$\sum F_V = 0 \Rightarrow N\cos\alpha + \mu N \text{sen}\alpha - mg = 0$

y $\sum F_H = ma \Rightarrow -N\text{sen}\alpha + \mu N\cos\alpha = ma$

De estas ecuaciones

$N = \dfrac{mg}{\cos\alpha + \mu\,\text{sen}\alpha}$ y

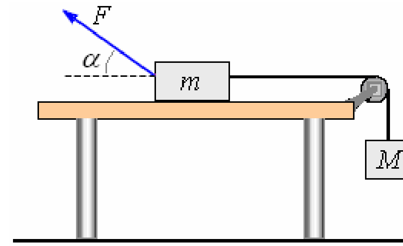
$\dfrac{mg}{((\cos\alpha + \mu\,\text{sen}\alpha))}(-\text{sen}\alpha + \mu\cos\alpha) = ma$

Finalmente

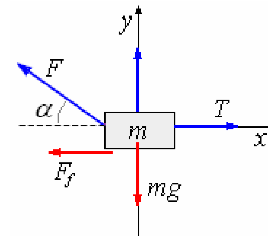
$a = \dfrac{(\mu\cos\alpha - \text{sen}\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\,\text{sen}\alpha)} g$

Este es el va1or crítico de a para que no resbale; el bloque resbalará para valores menores que el indicado.

Ejemplo 25. En el siguiente sistema mecánico, se aplica una fuerza F inclinada un ángulo α sobre el cuerpo de masa m, ubicado sobre la superficie horizontal con coeficiente de fricción μ. La polea por donde cuelga otro bloque de masa M no tiene roce y la cuerda se considera inextensible y de masa despreciable. Calcular la aceleración y la tensión de la cuerda.



Solución.
Se hacen los DCL y se aplica la segunda ley de Newton, suponiendo que el cuerpo de masa M desciende y tira a m hacia la derecha, lo que define el sentido de la aceleración.
Para m



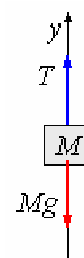
$\sum F_V = 0 \Rightarrow N + F\,\text{sen}\alpha - mg = 0$

$\Rightarrow N = mg - F\,\text{sen}\alpha$ (1)

y $\sum F_H = ma$

$\Rightarrow T - F\cos\alpha - F_f = ma$ (2)

Para M



$\sum F_V = -Ma$

$\Rightarrow T - Mg = -Ma$ (3)

Además: $F_f = \mu N$

De la ecuación (1):

$F_f = \mu(mg - F\text{sen}\alpha)$ (4)

De (3) se despeja T:

$T = Mg - Ma$ (5)

Ahora 4) y (5) se reemplazan en (2), lo que permite despejar la aceleración

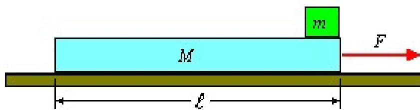
$$Mg - Ma - F\cos\alpha - \mu(mg - F\text{sen}\alpha) = ma$$

$$a = \frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu\text{sen}\alpha)}{M + m}$$

y la tensión T

$$T = Mg - M\frac{(M - \mu m)g - F(\cos\alpha - \mu\text{sen}\alpha)}{M + m}$$

Ejemplo 26. Una viga de masa M está situada en un plano horizontal. Sobre la viga se encuentra un cuerpo do masa m. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la viga, así como entre la viga y el plano es μ_k. Analizar el movimiento para diferentes valores do la fuerza F.



Solución.

Si $F \leq \mu_k(m + M)g$, no hay movimiento.

Supongamos que $F > \mu_k(m + M)g$. Analicemos el caso de ausencia de deslizamiento del cuerpo por la viga. Las ecuaciones del movimiento, en este caso, tendrían la siguiente forma:

$$F_{fm} = ma,$$

$$Ma = F - F_{fm} - F_{fM} = F - F_{fm} - \mu_k(m + M)g;$$

$$F_{fm} \leq \mu_k mg$$

de donde

$$a = \frac{F}{(m + M)} - \mu_k g,$$

$$F_{fm} = \frac{mF}{(m + M)} - \mu_k mg \leq \mu_k mg$$

que es posible, si

$k\,(m + M)\,g < F < 2k\,(m + M)\,g.$

Si $F > 2\mu_k(m + M)g$, entonces el cuerpo deslizará por la barra. En este caso las ecuaciones del movimiento tendrán la siguiente forma:

$$ma_m = \mu_k mg,$$

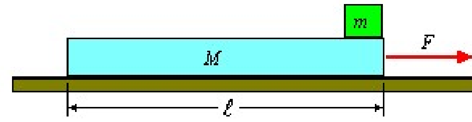
$$Ma_M = F - \mu_k mg - \mu_k(M + m)g$$

de donde

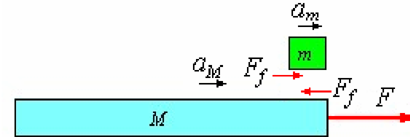
$$a_m = \mu_k g,\ a_M = \frac{F}{M} - \mu_k\frac{(2m + M)}{M}g$$

Que es fácilmente verificar en el caso de $a_M > a_m$

Ejemplo 27. Una viga do masa M está sobre un plano horizontal liso, por el cual puede moverse sin fricción. Sobre la viga hay un cuerpo do masa m. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la viga es μ_k. ¿Con qué valor de la fuerza F que actúa sobre la viga en dirección horizontal, el cuerpo comienza a deslizarse sobre la viga? ¿Dentro do cuánto tiempo el cuerpo caerá de la viga? La longitud do la viga es ℓ.



Solución.



Las ecuaciones del movimiento de la viga y del cuerpo tienen la siguiente forma:

$$F_{fm} = ma_m, \qquad (1)$$

$$F - \mu_k mg = Ma_M \qquad (2)$$

Donde F_{fm} es la fuerza do rozamiento, a_m y a_M son las aceleraciones.

Supongamos que no hay deslizamiento, entonces $a_m = a_M$

De las ecuaciones del movimiento podemos determinar la aceleración y la fuerza de rozamiento.

La fuerza de rozamiento es $F_{fm} = \dfrac{mF}{(m + M)}$

Para que no haya deslizamiento la fuerza de rozamiento debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$F_{fm} \leq \mu_k mg$, es decir, $\dfrac{F}{(m + M)} \leq \mu_k g$.

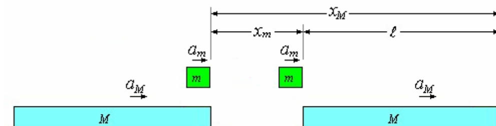
Si $F > \mu_k (M + m)\,g$, entonces surge el deslizamiento. Las ecuaciones (1) y (2) en este caso deben escribirse en la siguiente forma:

$$ma_m = \mu_k mg,\quad Ma_M = F - \mu_k mg$$

De estas ecuaciones obtenemos a_m y a_M:

$$a_m = \mu_k g,\quad a_M = \frac{(F - \mu_k mg)}{M}.$$

Es evidente que $a_M > a_m$.



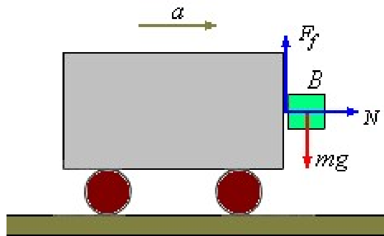
$$x_m = \frac{1}{2}a_m t^2,\ x_M = \frac{1}{2}a_M t^2$$

$$x_M - x_m = \ell = \frac{1}{2}a_M t^2 - \frac{1}{2}a_m t^2$$

$$\Rightarrow\ t = \sqrt{\frac{2\ell}{a_M - a_m}} = \sqrt{\frac{2\ell}{\dfrac{(F - \mu_k mg)}{M} - \mu_k g}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell M}{F - \mu_k g(M + m)}}$$

Ejemplo 28. En la figura, encontrar la aceleración del carro requerida para evitar que caiga el bloque *B*. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el carro es μ_k .



Solución.

Si el bloque no cae, la fuerza de fricción, F_f, debe balancear el peso del bloque:

$F_f = mg$.

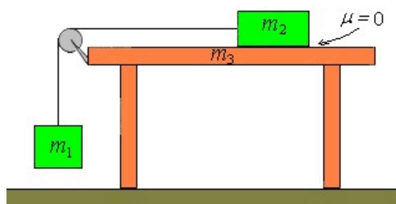
Pero el movimiento horizontal del bloque está dado por y $N = ma$.

Luego,

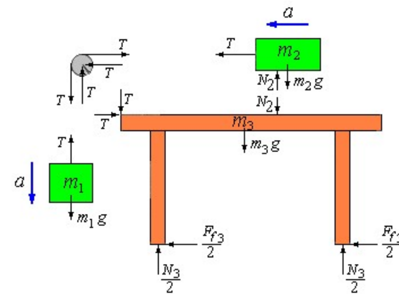
$$\frac{F_f}{N} = \frac{g}{a} \Rightarrow a = \frac{g}{F_f/N}$$

Como el valor máximo de $\frac{F_f}{N}$ es μ_s, debemos tener $a \geq \frac{g}{\mu_s}$ si el bloque no cae.

Ejemplo 29. Dos cuerpos, de las masas m_1 y m_2, se liberan de la posición mostrada en la figura. Si la masa de la mesa de superficie lisa (sin fricción) es m_3, encuentre la reacción del piso sobre la mesa mientras los dos cuerpos están en movimiento. Asuma que la mesa permanence inmóvil.



Solución. La figura muestra los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los elementos.



Cuerpo 1: $\sum F_{verticales} = m_1 g - T = m_1 a$

Cuerpo 2: $\sum F_{horizontales} = T = m_2 a$

Mesa: $\begin{cases} \sum F_{verticales} = N_3 - N_2 - T - m_3 g = 0 \\ \sum F_{horizontales} = T - F_{f3} = 0 \end{cases}$

Donde N_3 y F_{f3} (fricción) las componentes verticales y horizontales de la fuerza ejercida por el piso sobre la mesa.

(Asumimos que las patas de la izquierda y de la derecha comparten la carga igualmente. Esto no afecta nuestro análisis)

De las primeras dos ecuaciones,

$$a = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2)}$$

Luego, $F_{f3} = T = m_2 a = \frac{m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)}$

Finalmente,

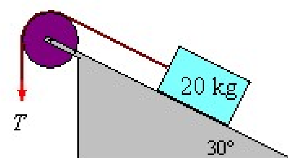
$$N_3 = T + m_2 g + m_3 g$$

$$= \left[\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} + m_2 + m_3\right]$$

Ejemplo 30. Se tiene un bloque de 20 kg sobre un plano inclinado que está sujeto a una cuerda (ver figura). Las superficies de contacto entre el bloque y el plano inclinado son rugosas con coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0,5$ y el de fricción estática $\mu_s = 0,7$.

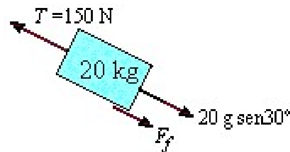
a) Si la tensión de la cuerda es de 150 N, determine la magnitud y sentido de la fuerza de rozamiento.

b) Si por un accidente se corta la cuerda, determine la aceleración del bloque.



Solución.

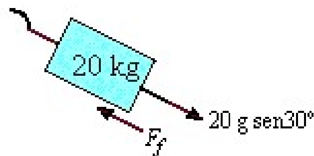
a)



$$T - mg\text{sen}30^\circ - F_f = 0 \;\Rightarrow$$

$$F_f = T - mg\text{se}30^\circ = 150 - 100 = 50 \text{ N}$$

en el sentido indicado en la figura (hacia abajo).
b)

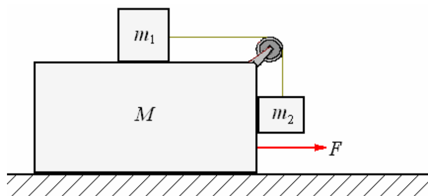


Cuando se rompe la cuerda para iniciar el movimiento debe vencerse a la máxima fuerza de fricción estática:

$$F_{fs} = \mu_s mg\cos 30^\circ = 0{,}7\left(20g\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 173 \text{ N}$$

Como 20*g* sen 30º = 100 N
100 N < 173 N, el movimiento no se inicia , por lo tanto la aceleración del bloque es cero.

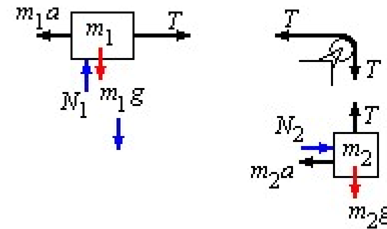
Ejemplo 31. Determinar la fuerza *F* aplicada al bloque de masa *M* de la figura adjunta, para que los bloques de masas m_1 y m_2 apoyados en *M*, no se muevan respecto de *M*. Todas las superficies son lisas, la polea y el cable tienen masa despreciable.



Solución.
Consideremos un sistema de referencia fijo en el suelo con el eje *x* paralelo a la fuerza aplicada $\vec{F}$.
De la primera ley de Newton aplicada al conjunto se tiene:

$$\vec{F} = (M + m_1 + m_2)\vec{a} \qquad (1)$$

Siendo $\vec{a}$ la aceleración del conjunto. Las masas m_1 y m_2 están en reposo sobre el bloque *M*, luego en la referencia O su aceleración es del conjunto. La fuerza que ejerce el cable sobre m_1 y la que ejerce sobre m_2 tiene el mismo módulo *T*.



La segunda ley de Newton para m_1 es

$$T - m_1 a = 0\,,\quad N_1 - m_1 g = 0$$

De aquí $\Rightarrow T = m_1 a \qquad (2)$

La segunda ley de Newton para m_2 es

$$N_2 - m_2 a = 0\,,\quad T - m_2 g = 0$$

De aquí $\Rightarrow T = m_2 g \qquad (3)$

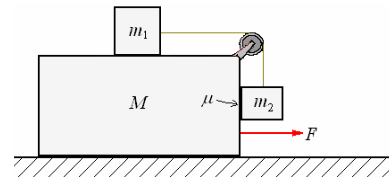
De (2) y (3) se tiene

$$\Rightarrow\; a = \frac{m_2}{m_1} g \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) se obtiene la fuerza aplicada a *M*

$$F = \frac{m_2}{m_1}(M + m_1 + m_2)g$$

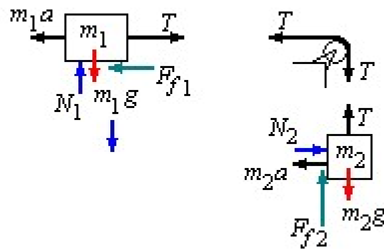
Ejemplo 32. Determinar la aceleración mínima con que debe desplazarse el bloque de masa *M* en sentido horizontal para que los bloques de masas m_1 y m_2 no se muevan respecto de *M*, siendo μ el coeficiente de rozamiento entre los bloques. La polea y el cable tienen masa despreciable.



Solución.
Consideremos un sistema de referencia fijo en el suelo con el eje *x* paralelo a la fuerza aplicada $\vec{F}$.
De la segunda ley de Newton aplicada al conjunto se tiene:

$$\vec{F} = (M + m_1 + m_2)\vec{a} \qquad (1)$$

Siendo $\vec{a}$ la aceleración del conjunto.
Las masas m_1 y m_2 están en reposo sobre el bloque *M*, luego en la referencia O su aceleración es del conjunto.
La fuerza que ejerce el cable sobre m_1 y la que ejerce sobre m_2 tiene el mismo módulo *T*.



La segunda ley de Newton para m_1 es

$$T - m_1 a - F_{f1} = 0,\ N_1 - m_1 g = 0$$

$$F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$$

$$\Rightarrow T = m_1 a + \mu m_1 g \qquad (2)$$

La segunda ley de Newton para m_2 es

$$N_2 - m_2 a = o,\ T + F_{f2} - m_2 g = 0$$

$$F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 a$$

$$\Rightarrow T = m_2 g - \mu m_2 g \qquad (3)$$

De (2) y (3) se tiene $\Rightarrow$

$$m_1 a + \mu m_1 g = m_2 g - \mu m_2 g$$

$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1)}{(m_1 + \mu m_2)} g \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1) se obtiene la fuerza aplicada a M

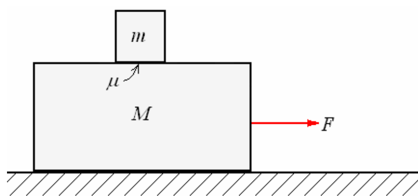
$$F = \frac{m_2}{m_1}(M + m_1 + m_2)g$$

Ejemplo 33. Un bloque de masa m se encuentra sobre otro bloque de masa M que está apoyado sobre una superficie horizontal lisa. El coeficiente de rozamiento entre los dos bloques es μ. Al bloque M se le aplica una fuerza horizontal dirigida hacia la derecha que depende del tiempo según la ley $F = k\,t$.

Determinar:

a) El instante τ en que m empieza a deslizar sobre M.

b) La aceleración de cada uno de los bloques.



Solución.

Diagrama del cuerpo libre del conjunto

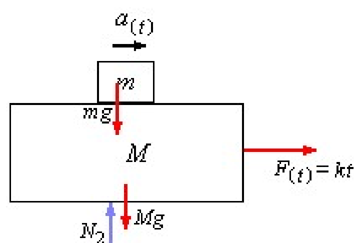
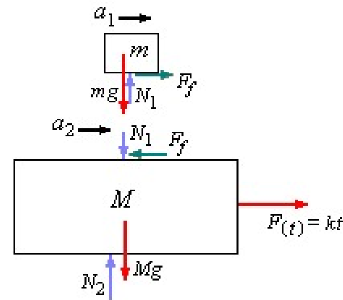


Diagrama del cuerpo libre masas separadas



a) Consideremos un sistema de referencia fijo en el suelo con el eje x paralelo a la fuerza aplicada $\vec{F}$.

Sea τ el instante en que m empieza a deslizar sobre M. Hasta dicho instante $t \leq \tau$, el conjunto se mueve con una aceleración común $\vec{a}$.

La segunda ley de Newton aplicada al conjunto en el instante $t = \tau$ es

$$k\tau = (M + m)a_{(\tau)},\ N_2 - (M + m)g = 0$$

$$\Rightarrow a_{(\tau)} = \frac{k}{(M + m)}\tau \qquad (1)$$

La segunda ley de Newton aplicada a la masa m en el instante $t = \tau$ es, (la fuerza de rozamiento sobre m tiene, en ese instante, su valor máximo $F_f = \mu\, m\, g$)

$$F_f = \mu N_1 = m a_{(\tau)},\ N_1 = mg$$

$$\Rightarrow a_{(\tau)} = \frac{\mu m g}{m} = \mu g \qquad (2)$$

De (1) y (2) queda $\Rightarrow \tau = \dfrac{(M + m)}{k}\mu g$ s

b) De (1) se tiene que la aceleración del conjunto para $t < \tau$ es

$$\Rightarrow a_{1(t)} = a_{(t)} = \frac{k}{(M + m)} t$$

Para $t > \tau$. Las fuerzas que actúan sobre m son constantes, luego la aceleración de m es

$$a_1 = a_{(\tau)} = \mu g$$

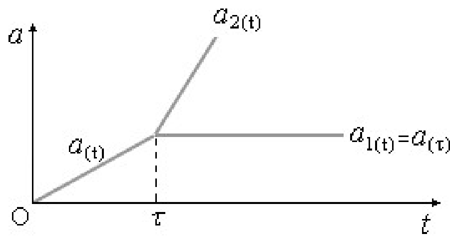
La segunda ley de Newton aplicada a la masa M es

$$kt - F_f = kt - \mu N_1 = M a_{2(t)},\ \text{como}\ N_1 = mg$$

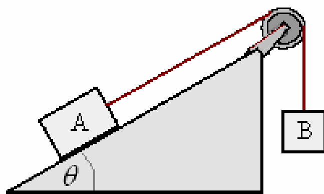
$$\Rightarrow kt - \mu m g = M a_{2(t)}\ \text{y}$$

$$a_{2(t)} = -\mu g \frac{m}{M} + \frac{k}{M} t \quad \frac{m}{s^2}$$

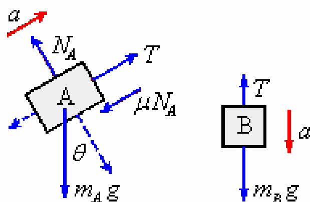
Gráfica de las aceleraciones en función del tiempo



Ejemplo 34. Dos bloques A y B de masas m_A y m_B están unidos mediante un cable que pasa a través de una polea tal como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es μ. Determinar el sentido del movimiento cuando se dejan en libertad a partir del reposo. El cable es inextensible y las masas del cable y la polea despreciables.



Solución.
Supongamos que el bloque A sube sobre el plano inclinado. Sea T la fuerza que ejercen los extremos del cable sobre los bloques dirigida, en ambos bloques, tal como se indica.



El movimiento de B es hacia abajo, luego

$\Rightarrow m_B g > T$

El movimiento de A es hacia arriba, luego

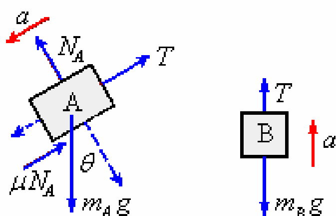
$\Rightarrow T > m_A g\,\text{sen}\theta + \mu m_A \cos\theta$

El movimiento de los bloques es el indicado si

$\Rightarrow m_B g > m_A g\,\text{sen}\theta + \mu m_A \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{m_B}{m_A} > \text{sen}\theta + \mu\cos\theta$$

Supongamos que el bloque A desciende sobre el plano inclinado.



El movimiento de B es hacia arriba, luego

$\Rightarrow m_B g < T$

El movimiento de A es hacia abajo, luego

$\Rightarrow T + \mu m_A \cos\theta < m_A g\,\text{sen}\theta$

El movimiento de los bloques es el indicado si

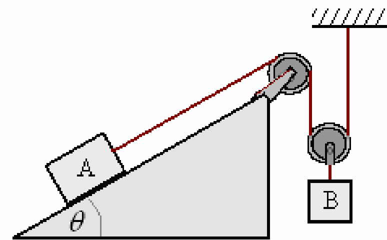
$\Rightarrow m_B g < m_A g\,\text{sen}\theta - \mu m_A \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{m_B}{m_A} < \text{sen}\theta - \mu\cos\theta$$

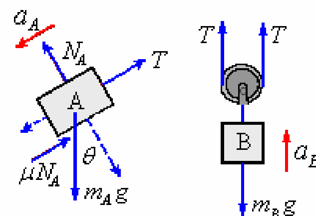
Los bloques no se mueven si

$$\Rightarrow \text{sen}\theta - \mu\cos\theta < \frac{m_B}{m_A} < \text{sen}\theta + \mu\cos\theta$$

Ejemplo 35. Dos bloques A y B de masas m_A = 10 kg y m_B = 7 kg, están unidos mediante un cable que pasa a través de las poleas tal como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es μ = 0,10 y θ = 30º. El cable es inextensible y las masas del cable y las poleas son despreciables. Determinar:
a) Las aceleraciones de los bloques;
b) La tensión del cable.



Solución.



Supongamos que el movimiento de A es hacia abajo, luego:

$T + \mu m_A g\cos\theta < m_A g\,\text{sen}\theta$

$\Rightarrow T < m_A g\,\text{sen}\theta - \mu m_A g\cos\theta$

El movimiento de B es hacia arriba, luego:

$m_B g < 2T$

De ambas expresiones queda

$$\frac{1}{2} m_B g < m_A g\,\text{sen}\theta - \mu m_A g\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}(7) < (10)\text{sen}30º - 0{,}10(10)\cos 30º$$

Con los valores $\Rightarrow$ 3,5 < 4,13

Desigualdad que se cumple, luego el movimiento es el previsto.

a) Consideremos un sistema de referencia con el eje *x* horizontal. Las posiciones de los bloques están relacionadas por la condición de ligadura

$$s_A + 2y_B = \text{constante},$$

Luego sus aceleraciones cumplen

$$a_A + 2a_B = 0 \Rightarrow a_B = -\frac{1}{2}a_A = a \qquad (1)$$

Fuerzas sobre los bloques

La segunda ley de Newton aplicada al bloque A es

$$m_A a_A = m_A g \operatorname{sen}\theta - T - \mu N_A,$$

$$N_A - m_A g \cos\theta = 0$$

De estas dos obtenemos:

$$T = m_A g(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - m_A a_A \qquad (2)$$

La segunda ley de Newton aplicada al bloque B es

$$2T - m_B g = m_B a_B$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m_B(a_B + g) \qquad (3)$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3),

$$m_B(a_B + g) = 2m_A g(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - 2m_A a_A$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1) y los valores:

$$7(a + 9{,}8) = 2(10)(9{,}8)(0{,}5 - 0{,}1\times 0{,}87) - 20(2a)$$

Resolviendo:

$a = 0{,}26\ \text{m/s}^2$

Las aceleraciones de los bloques son :

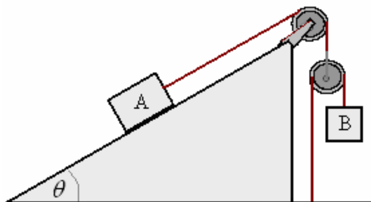
$a_A = 0{,}26\ \text{m/s}^2$ para arriba.

$a_B = 0{,}52\ \text{m/s}^2$ para abajo.

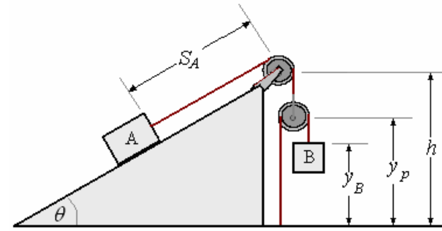
b) La magnitud de la tensión del cable es el valor de la fuerza que el cable ejerce sobre los bloques. De la ecuación (3) se tiene

$$T = \frac{1}{2}(7)(0{,}26 + 9{,}8) = 35{,}2\ \text{N}$$

Ejemplo 36. Dos bloques A y B de masas m_A y m_B están unidos mediante un cable que pasa a través de las poleas tal como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es μ. El cable es inextensible y las masas del cable y la polea son despreciables. Estudiar el sentido del movimiento de los bloques.



Solución.



Supongamos que el bloque A asciende por el plano inclinado. Consideremos un sistema de referencia con el eje *x* horizontal.

Las posiciones, por una parte, del bloque A y de la polea móvil, están relacionadas por las condiciones de ligadura

$$s_A + h - y_p = \text{constante}$$

Las posiciones de la polea y el bloque B, están relacionadas por las condiciones de ligadura

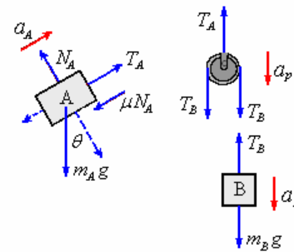
$$2y_p - y_B = \text{constante}$$

De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$2s_A + 2h - y_B = \text{constante}$$

Las componentes de las aceleraciones de los bloques satisfacen la condición

$$2a_A = a_B \qquad (1)$$



Sean T_A y T_B las fuerzas que los cables ejercen sobre los respectivos bloques. Fuerzas sobre los bloques y sobre la polea móvil.

Como la polea superior tiene masa despreciable solo cambia el sentido de la fuerza.

La masa de la polea móvil es cero, luego

La tensión en ambos lados son iguales (T_B) y

$$T_A = 2T_B \qquad (2)$$

De la segunda ley de Newton aplicada al bloque A se tiene:

$$T_A - m_A g \operatorname{sen}\theta - \mu N_A = m_A a_A$$

$$N_A - m_A g \cos\theta = 0$$

De estas ecuaciones obtenemos:

$$T_A = m_A g(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta) + m_A a_A \qquad (3)$$

De la segunda ley de Newton aplicada al bloque B se tiene

$$m_B g - T_B = m_B a_B$$

$$\Rightarrow T_B = m_B(g - a_B) \qquad (4)$$

De las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) obtenemos:

$$m_A g(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta) + m_A a_A = 2m_B(g - 2a_A)$$

$$a_A = \frac{2m_B g - m_A g(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)}{m_A + 4m_B}$$

El movimiento es el indicado, si se cumple:

$$\frac{2m_B}{m_A} > (\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)$$

El movimiento es de sentido opuesto, si se cumple:

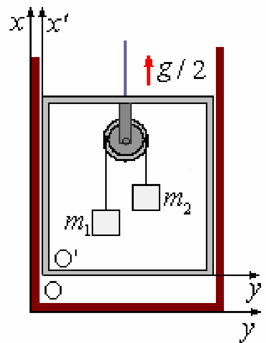
$$\frac{2m_B}{m_A} < (\text{sen}\theta - \mu\cos\theta)$$

El signo menos es porque en este caso el peso de la masa A es el que mueve al sistema y la fuerza de rozamiento está en sentido contrario a éste.

Ejemplo 37. A los extremos de un hilo que pasa a través de una polea fija al techo de la cabina de un ascensor se atan los cuerpos de masa m_1 y m_2 $(m_1 < m_2)$. La cabina comienza a subir con una aceleración constante $g / 2$. Despreciando la masa de la polea y la del hilo, así como el rozamiento, calcular:

a) La aceleración de m_1 y m_2 respecto de la cabina y con relación al foso del ascensor.

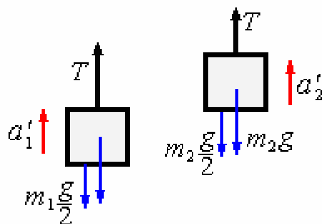
b) La fuerza con la cual la polea actúa sobre el techo de la cabina.



Solución.

a) El ascensor constituye una referencia no inercial en traslación que se mueve con una aceleración constante en sentido ascendente respecto de una referencia fija.

Seleccionemos una referencia con origen O′ en un punto del ascensor. La aceleración del origen O′ respecto de la referencia fija O es la aceleración del ascensor $\frac{1}{2}g\hat{j}$. Sean $a'_1\,\hat{j}$ la aceleración de m_1 y $a'_2\,\hat{j}$ la aceleración de m_2 en la referencia O'.



Las fuerzas exteriores que actúan sobre la m_1 son la tensión del cable T y el peso m_1g , y sobre m_2 son la tensión del cable T y el peso m_2g .

De la ecuación fundamental de la dinámica en la referencia no inercial se tiene

$$m_1a'_1 = T - m_1g - m_1\frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow m_1a'_1 = T - \frac{3}{2}m_1g \qquad (1)$$

$$m_1a'_2 = T - m_2g - m_2\frac{g}{2}$$

$$\Rightarrow m_1a'_2 = T - \frac{3}{2}m_2g \qquad (2)$$

De la condición de ligadura para los bloques se tiene

$$a'_1 + a'_2 = 0 \;\Rightarrow\; a'_1 = -a'_2 = a' \quad (3)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene

$$m_1a' = T - \frac{3}{2}m_1g \text{ y } m_1a' = -T + \frac{3}{2}m_2g$$

Sumando estas ecuaciones:

$$(m_2 + m_1)a' = \frac{3}{2}(m_2 - m_1)g$$

Despejando a'

$$a' = \frac{3}{2}\frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)}g$$

Finalmente:

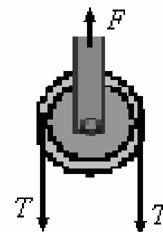
$$\vec{a'}_1 = a'\hat{j} \text{ y } \vec{a'}_2 = -a'\hat{j}$$

En la referencia fija, las aceleraciones de m_1 y de m_2 se obtienen de sumar a las anteriores la aceleración del ascensor

$$a_1 = \frac{g}{2} + a' = \frac{(2m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)}g \text{ y}$$

$$a_2 = \frac{g}{2} - a' = \frac{(2m_1 - m_2)}{(m_2 + m_1)}g$$

b)



La fuerza que la polea ejerce sobre el techo de la cabina es

$$F - 2T = 0 \;\Rightarrow\; F = 2T$$

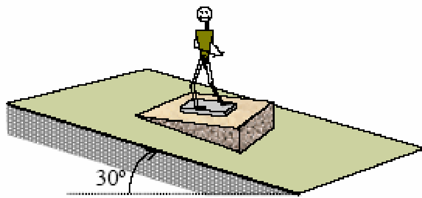
De la ecuación (1) y (3) se tiene

$$T = m_1\left(a'_1 + \frac{3}{2}g\right) = \frac{3m_1m_2}{(m_2 + m_1)}g$$

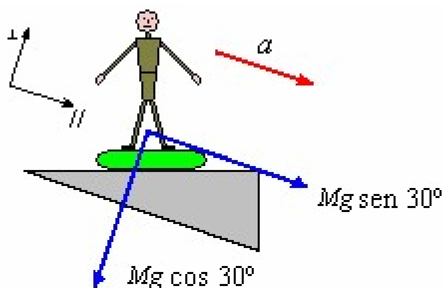
Luego

$$F = 2T = \frac{6m_1 m_2}{(m_2 + m_1)}$$

Ejemplo 38. Un niño de masa m = 45 kg se pesa en una báscula de resorte situada sobre una plataforma especial que se desplaza por un plano inclinado de ángulo θ = 30º como muestra la figura (no hay rozamiento entre la plataforma y el plano inclinado). ¿Cuál será la lectura de la báscula en estas condiciones?



Solución.
Sea M la masa del conjunto niño - cuña., y a la aceleración con la que desliza hacia abajo el conjunto.



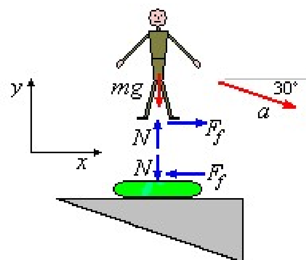
Aplicando la segunda ley de Newton al conjunto niño - cuña.

$$\sum F_{//} = Ma \Rightarrow Mg\text{sen}30^o = Ma \Rightarrow$$

$$a = g\text{sen}30^o = \frac{g}{2}$$

La aceleración del conjunto es $a = \frac{1}{2}g$

Solución en una referencia inercial.
Sobre el niño actúan: su peso mg y la reacción F_f en el apoyo. La indicación de la báscula el valor de la normal.



Aplicando la segunda ley de Newton al DCL del niño.

$$\sum F_x = F_f - ma\cos 30^o = 0 \quad (1)$$
$$\sum F_y = N - mg + ma\text{sen}30^o = 0 \quad (2)$$

de (1) $\Rightarrow$ $F_f = 45\frac{g}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 191N$

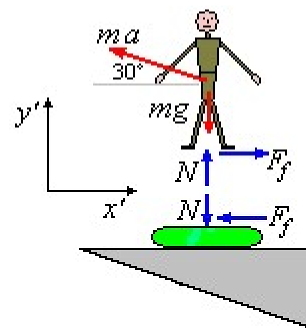
de (2) $\Rightarrow$

$$N = mg - ma\text{sen}30^o = 45\left(g - \frac{g}{4}\right)$$

= 33,45 Kg.

Siendo N la cantidad que marca la báscula.

Solución en una referencia no inercial .
Seleccionemos una referencia con origen O′ (x',y') en un punto de la plataforma. El niño está en reposo sobre la plataforma.



Aplicando la segunda ley de Newton al DCL del niño.

$$\sum F_x = F_f = ma\cos 30^o \quad (1)$$
$$\sum F_y = N - mg = -ma\text{sen}30^o \quad (2)$$

de (1) $\Rightarrow$ $F_f = 45\frac{g}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 191N$

de (2) $\Rightarrow$

$$N = mg - ma\text{sen}30^o = 45\left(g - \frac{g}{4}\right)$$

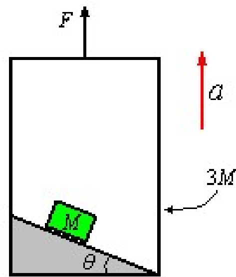
= 33,45 kg

Siendo N la cantidad que marca la báscula.

Ejemplo 39. Un ascensor de masa total 3M es levantado bajo la acción de una fuerza F. El piso del ascensor está inclinado un ángulo θ, con respecto a la horizontal. Además, un bloque de masa M se apoya sobre el centro del piso rugoso del ascensor (con coeficiente de fricción estática μ).

a) Hallar la aceleración del ascensor.
b) Haga el diagrama de cuerpo libre de la masa M.
c) ¿Cuál es el valor máximo de F para que el bloque dentro del ascensor no resbale respecto del piso del ascensor?
d) Si el ascensor pierde contacto con la fuerza F y empieza a caer libremente, calcule el valor de la fuerza normal entre el bloque y el piso del ascensor, y la fuerza de fricción sobre el bloque.

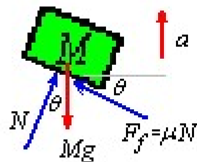
Solución.
a) Para hallar la aceleración del ascensor.



$$F-3Mg-Mg=(3M+M)a$$

$$\Rightarrow\ a=\frac{F-4Mg}{4M}=\frac{F}{4M}-g$$

b) Diagrama de cuerpo libre de la masa *M.*



c) Para que el bloque dentro del ascensor no resbale respecto del piso del ascensor se debe cumplir

$$M(g+a)\operatorname{sen}\theta\leq\mu M(g+a)\cos\theta$$

$$\Rightarrow\ \mu\geq\tan\theta\,.$$

Como a depende de *F*, y a esta en miembros de la igualdad, el que el bloque resbale dentro del ascensor solamente depende del coeficiente de fricción.

d) Si el ascensor pierde contacto con la fuerza *F* y empieza a caer libremente,

$N = 0$, por lo tanto $F_f = 0$

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

La primera ley de Newton dice que un objeto permanecerá en movimiento uniforme en línea recta con velocidad constante o en reposo si no actúa una tuerza sobre él. Entonces cuando un objeto se mueve en trayectoria circular, debe haber una fuerza sobre él cambiándole la trayectoria recta. Esta fuerza puede ser proporcionada por la tensión en una cuerda, para un objeto que se hace girar en una circunferencia horizontal al extremo de una cuerda; por la fuerza de la gravedad para un satélite orbitando la tierra.

Los objetos en movimiento circular no están en equilibrio, debe haber una fuerza resultante, de otro modo sólo habría un movimiento en línea recta.

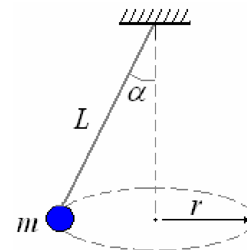
FUERZA CENTRÍPETA.

Una partícula que se mueve sobre una trayectoria circular de radio *R* con rapidez constante, se encuentra sometida a una aceleración radial de magnitud v^2/R. Por la segunda ley de Newton, sobre la partícula actúa una fuerza en la dirección de hacia el centro de la circunferencia, cuya magnitud es:

$$F_c=ma_c=m\frac{v^2}{R}$$

Por ser proporcional a la aceleración centrípeta, la fuerza F_c se llama **fuerza centrípeta**. Su efecto es cambiar la dirección de la velocidad de un cuerpo. Se puede sentir esta fuerza cuando se hace girar a un objeto atado a una cuerda, ya que se nota el tirón del objeto. Las fuerzas centrípetas no son diferentes de otras fuerzas ya conocidas, su nombre se debe a que apunta hacia el centro de una trayectoria circunferencial. Cualquiera de las fuerzas ya conocida pueden actuar como fuerza centrípeta si producen el efecto correspondiente, como ser la tensión de una cuerda, una fuerza de roce, alguna componente de la normal, la fuerza gravitacional en el caso de movimientos de planetas y satélites, etc.

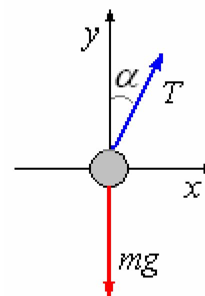
Ejemplo 40. Un cuerpo de masa *m*, sujeto al extremo de una cuerda de longitud *L*, que describe una trayectoria circular en el plano horizontal, genera una superficie cónica, por lo que se llama péndulo cónico. Determinar la rapidez y el período de revolución de la masa.



Solución.

La partícula está sometida a una aceleración centrípeta, y la fuerza centrípeta correspondiente está dada por la componente de la tensión de la cuerda en dirección radial hacia el centro de la circunferencia.

El D. C. L. de la masa *m*.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_y=0$$

$$\Rightarrow\ T\cos\alpha-mg=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{T}\cos\alpha=mg \qquad (1)$$

y $\sum F_x=ma$

$$\Rightarrow \mathrm{T}\operatorname{sen}\alpha=ma=m\frac{v^2}{r} \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1):

$$\tan\alpha=\frac{v^2}{rg}\ \Rightarrow\ v^2=rg\tan\alpha$$

De la geometría de la figura, $r = L\text{sen}\alpha$, reemplazando se obtiene la rapidez de *m*:

$$v^2 = (L\text{sen}\alpha)g\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{Lg\tan\alpha\,\text{sen}\alpha}$$

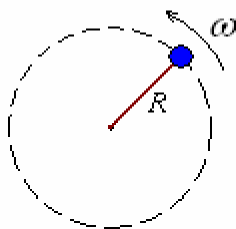
Para calcular el periodo *T*, esto es el tiempo que demora en dar una vuelta.
Se sabe que
$\Delta x = v\Delta t$, con $\Delta x = 2\pi r$, entonces:

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi L\,\text{sen}\alpha}{\sqrt{Lg\tan\alpha\,\text{sen}\alpha}}$$

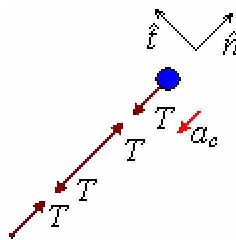
$$= 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}$$

Ejemplo 41. Una bola de masa *m*, atada al extremo de una cuerda se hace ir en un plano horizontal formando una circunferencia de radio *R*. Si tiene una velocidad angular ω, ¿cuál es la tensión en la cuerda?



Solución.
La figura muestra el D.C.L.



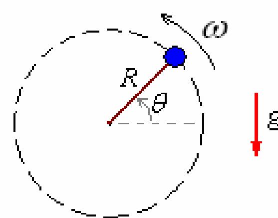
Aplicando la segunda ley de Newton a la masa m.

$$\sum F_n = ma_c \Rightarrow -T = -mR\omega^2$$

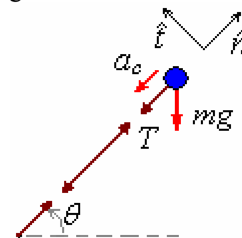
$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow 0 = mR\alpha$$

La tensión en la cuerda es $T = mR\omega^2$. La fuerza tangencial es cero y la aceleración tangencial α también es cero, ya que la velocidad angular es constante.

Ejemplo 42. Resolver el problema anterior pero en el caso que el giro sea en el plano vertical.



Solución. La figura muestra el D.C.L.



Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\sum F_n = ma_c \Rightarrow -T - mg\text{sen}\theta = -mR\omega^2$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow -mg\cos\theta = mR\alpha$$

La tensión en la cuerda es

$$T = mR\omega^2 - mg\text{sen}\theta$$

La fuerza tangencial es $-mg\cos\theta$ y la aceleración angular es

$$\alpha = -\frac{g}{R}\cos\theta$$

Como $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt}$, obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt} = -\frac{g}{R}\cos\theta$$

cuya solución esta fuera del alcance de este curso. Pero podríamos encontrar la tensión y fuerza tangencial para posiciones determinadas, es decir para valores dados de θ.

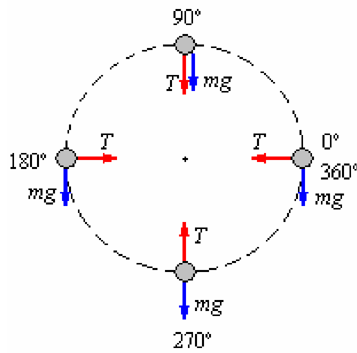
$$\text{Para } \theta = 0^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 \\ F_t = -mg \end{cases},$$

$$\text{Para } \theta = 90^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 - mg \\ F_t = 0 \end{cases},$$

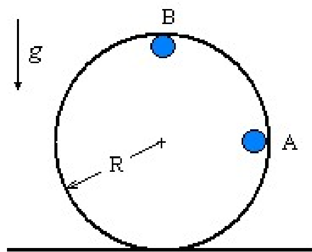
$$\text{Para } \theta = 180^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 \\ F_t = mg \end{cases},$$

$$\text{Para } \theta = 270^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 + mg \\ F_t = 0 \end{cases},$$

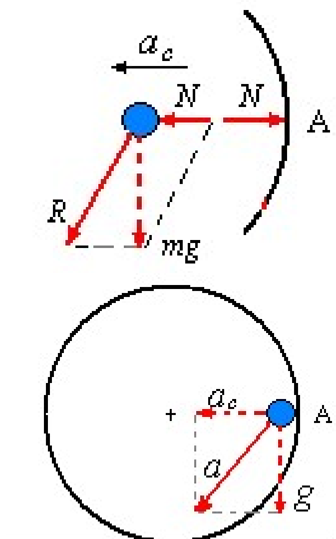
$$\text{Para } \theta = 360^\circ \begin{cases} T = mR\omega^2 \\ F_t = -mg \end{cases}$$



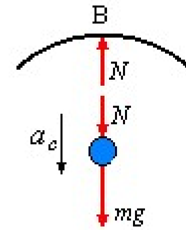
Ejemplo 43. Un pequeño bloque de masa m se desliza sobre una superficie lisa circular de radio R como se muestra en la figura. (La pista está sobre un plano vertical y g = aceleración de la gravedad)
a) Trace el diagrama de cuerpo libre del bloque cuando se encuentra en "A" y muestre (dibujando los vectores) la dirección de la fuerza resultante y su aceleración.
b) Cuando está en "A", ¿su rapidez aumenta o disminuye? (Justifique)
c) Si en "B" su velocidad es nula, ¿cuál es la trayectoria que seguirá la masa *m?*
d) Si en "B" su velocidad es $\sqrt{gR}$, ¿qué trayectoria seguirá la masa m?



Solución.
a) Trace el diagrama de cuerpo libre del bloque cuando se encuentra en "A" y muestre (dibujando los vectores) la dirección de la fuerza resultante y su aceleración.



b) Cuando el bloque está en A se dirige a B, su velocidad es en el sentido antihorario y su aceleración en el sentido horario. Luego su rapidez disminuye.
c) Si en "B" su velocidad es nula, ¿cuál es la trayectoria que seguirá la masa *m?*



$$N + mg = ma_c = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = -mg + m\frac{v^2}{R}$$

Si v = 0, el valor de N es negativo, lo que no permite al bloque sostenerse sobre la circunferencia, por consiguiente el bloque caerá verticalmente.
d) Si en "B" su velocidad es $\sqrt{gR}$, ¿qué trayectoria seguirá la masa m?

$$N = -mg + m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = -mg + m\frac{gR}{R} = 0,$$

el bloque tiene suficiente velocidad para seguir en la trayectoria circular.

Ejemplo 44. Un avión describe un rizo (un camino circular en un plano vertical) de 150 m de radio. La cabeza del piloto siempre apunta al centro del rizo. La rapidez del avión no es constante; es mínima en el cenit del rizo y máxima en el nadir.
a) En el cenit el piloto experimenta ingravidez. ¿Qué rapidez tiene el avión en ese punto?
b) En el nadir, la rapidez del avión es de 280 km/h. ¿Qué peso aparente tiene el piloto aquí? Su peso real es de 700 N.
Solución.
a) Sí el piloto siente ingravidez, está en caída libre, y

$a = g = \frac{v^2}{R}$, luego

$v = \sqrt{Rg} = \sqrt{(150)(9,80)} = 38,3 \text{ m/s}$, o 138 km/h.

b) El peso aparente es la suma de la fuerza neta hacia adentro (arriba) y el peso del piloto, o

$$P' = P + ma = P + m\frac{v^2}{R}$$

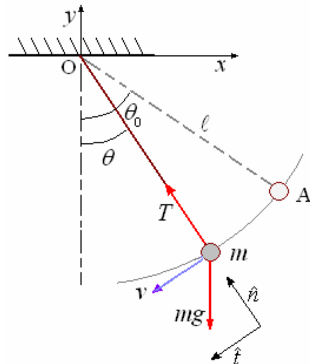
Aquí:
P = 700 N

$m = \frac{P}{g} = \frac{700}{9,8} = 71,43$ kg

v = 280 km/h = 77,6 m/s
R = 150 m
Luego:

$$P' = 700 + 71,43\left(\frac{77,6^2}{150}\right) = 3579 \text{ N}$$

Ejemplo 45. Una partícula de masa *m* que está unida al extremo de un cable de longitud ℓ, cuyo otro extremo está fijo, se mueve en un plano vertical, a partir de un punto A tal que el cable forma con la vertical un ángulo θ_0, iniciando el movimiento con velocidad cero. Determinar:
a) La velocidad de *v* de la esfera en función de θ.
b) La tensión del cable en función de θ.
c) La aceleración a en función de θ.



Solución.
En la referencia de origen O, la esfera recorre una circunferencia de radio ℓ con velocidad variable *v(t)*.
Las componentes intrínsecas la aceleración son:

$$a_t = \frac{dv}{dt},\ a_n = \frac{v^2}{\ell}$$

Sobre la masa *m* actúan la tensión del cable T y su peso mg.

De la segunda ley de Newton en componentes $\hat{n}$ y $\hat{t}$ se tiene:

$$\sum F_t = ma_t \ \Rightarrow\ mg\text{sen}\theta = ma_t$$

$$\sum F_n = ma_n \ \Rightarrow\ T - mg\cos\theta = ma_n$$

a) Para la componente tangencial se tiene:

$$mg\text{sen}\theta = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = g\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow vdv = g\text{sen}\theta\, ds = g\text{sen}\theta\, \ell d\theta$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales queda

$$v^2 = 2g\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

b) Para la componente normal:

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell} = 2mg(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

La tensión del cable es

$$T = mg(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta)$$

c) De las ecuaciones anteriores se tiene la aceleración:

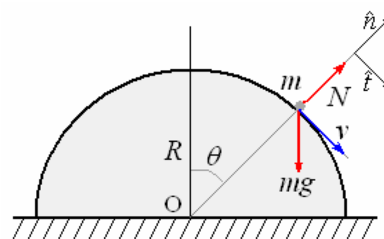
$$\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$$

$$a_t = g\text{sen}\theta,$$

$$T - mg\cos\theta = ma_n = 2mg(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow\ a_n = 2g(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

Ejemplo 46. Una partícula de masa *m* se encuentra en el polo de una semiesfera de radio *R*, la cual está apoyada sobre una superficie horizontal. Desplazada ligeramente de su posición de equilibrio, la partícula desliza sobre la superficie, la cual se supone lisa.
Determinar:
a) La velocidad *v* de la partícula en función del ángulo θ que forma su radio posición con el radio inicial.
b) El valor de la normal *N* en función de θ.
c) El valor de θ, en el instante en que la partícula se despega de la superficie.
Solución.



En la referencia de origen O, la partícula *m* tiene un movimiento circular no uniforme de radio *R*. Las componentes de la aceleración son:

$$a_t = \frac{dv}{dt},\ a_n = \frac{v^2}{R}$$

Sobre la masa *m* actúan el peso mg y la reacción en el apoyo *N*.
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow\ mg\text{sen}\theta = ma_t$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow\ N - mg\cos\theta = -ma_n$$

a) De la componente tangencial se tiene:

$$mg\text{sen}\theta = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = g\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow\ vdv = g\text{sen}\theta\, ds = Rg\text{sen}\theta\, d\theta$$

Integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales queda

$$v^2 = 2Rg(1 - \cos\theta)$$

Finalmente:

$$v = \sqrt{2Rg(1 - \cos\theta)}$$

b) De la componente normal se tiene:

$$N = mg\cos\theta - ma_n =$$

$$mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - 2mg(1 - \cos\theta)$$

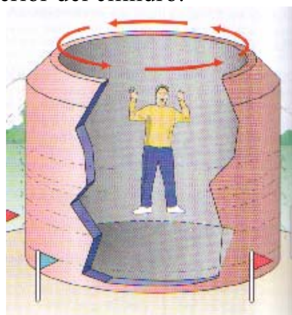
La normal es $N = mg(3\cos\theta - 2)$

c) La masa *m* deja de estar en contacto con la superficie cuando *N* = 0

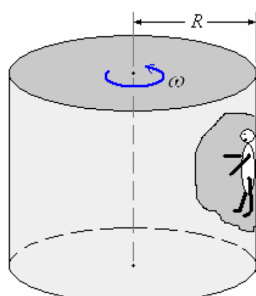
$$N = mg(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48,19º$$

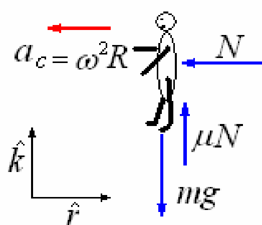
Ejemplo 47. En un parque de diversiones hay un cilindro grande vertical, de radio *R* que rota alrededor de su eje, con velocidad angular constante ω.
Explicar cómo es posible que las personas que están dentro, al retirárseles el piso permanezcan "pegadas" a la pared interior del cilindro.



Solución.



La figura muestra el D.C.L del hombre.



Aplicando La segunda ley de Newton:
Como el hombre no cae, radialmente está en reposo (*R* = constante)

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow -N = -m\omega^2 R$$

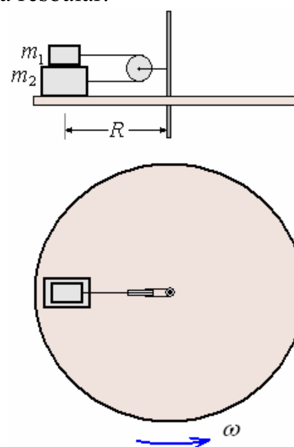
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow mg - \mu N = 0$$

De estas ecuaciones: $mg - \mu m\omega^2 R$

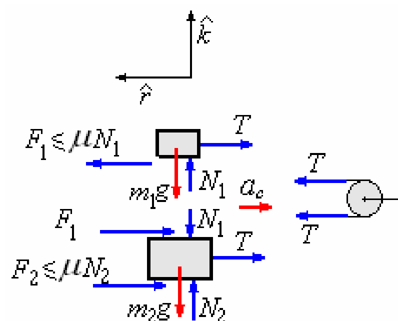
y $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$

Esto quiere decir que para que suceda el efecto de suspensión de las personas, la velocidad angular ω tiene que tener un valor relacionado con el radio *R* y el coeficiente de fricción μ .

Ejemplo 48. En la tornamesa mostrada en la figura el bloque de masa m_1 descansa sobre el bloque de masa m_2. Los bloques están a la distancia *R* del eje de rotación. El coeficiente de rozamiento estático entre las masas y entre m_2 y la tornamesa es μ
Considerando el rozamiento y la masa de la polea despreciables, encontrar la velocidad angular de la tornamesa para la cual los bloques justamente comienzan a resbalar.



Solución.
En este problema todo depende de tomar correctamente la dirección de la fuerza de fricción entre m_1 y m_2. Consideremos $m_2 > m_1$, por lo tanto m_2 tenderá a moverse hacia afuera, jalando a m_1 hacia adentro. La fuerza de fricción actuará en oposición a su movimiento relativo.
La figura muestra los D.C.L. de los componentes del sistema.



Aplicando la segunda Ley de Newton

$$\sum F_z = ma_z,\ \sum F_r = ma_r \text{ y } \sum F_t = ma_t$$

A la masa m_1:

$$N_1 - m_1 g = 0,\ -T + F_1 = -m_1\omega^2 R,\ F_t = 0$$

A la masa m_2:

$$N_2 - N_1 - m_2 g = 0,$$

$$-T - F_1 - F_2 = -m_2\omega^2 R,\ F_t = 0$$

De las ecuaciones obtenemos:

$$N_1 = m_1,\ N_2 = (m_1 + m_2)g$$

$$F_1 \leq \mu m_1 g,\ F_2 \leq \mu(m_1 + m_2)g$$

$$\text{y } 2F_1 + F_2 = (m_2 - m_1)\omega^2 R$$

Corno ω puede incrementarse hasta que F_1 y F_2 alcancen sus valores máximos

$$2\mu m_1 g + \mu(m_1 + m_2)g = (m_2 - m_1)\omega^2 R$$

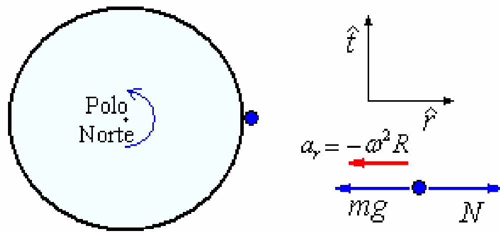
Finalmente

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu(3m_1 + m_2)}{R(m_2 - m_1)}}$$

Ejemplo 49. ¿Cómo afectará la rotación de la tierra al peso aparente de un cuerpo en el ecuador?

Solución.

La figura muestra la situación de un cuerpo situado en la línea ecuatorial



Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F_z = ma_z \Rightarrow F_z = 0$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow N - mg = -m\omega^2 R$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow F_t = 0$$

El peso de la masa es representado por la reacción N

$$N = mg - m\omega^2 R$$

Para tener una idea de cuánto afecta la rotación de la tierra es necesario hacer el cálculo numérico para esta consideración:

El radio de la tierra en el ecuador: $R = 6{,}378 \times 10^6$m

La velocidad angular de la tierra

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 7{,}27 \times 10^{-5}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

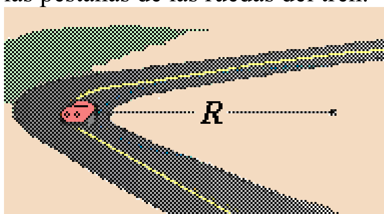
La aceleración de la gravedad en el Ecuador: $g = 9{,}780490$ m/s^2

$$\text{Porcentaje} = \frac{\omega^2 R}{g} \times 100 = 0{,}34\%$$

CURVAS EN LAS PISTAS.

Para un cuerpo como un vehículo o un vagón de tren que se mueven describiendo una trayectoria curva de radio r, sobre el vehículo debe actuar una fuerza centrípeta para evitar que continúe moviéndose en línea recta y se salga de la pista; esta es la fuerza para hacer que el vehículo gire por la pista curva.

La fuerza centrípeta necesaria la da el roce de las llantas o las pestañas de las ruedas del tren.



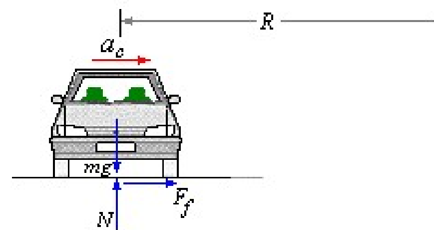
Curvas sin peraltar

En estos casos la fuerza de rozamiento es la que nos proporciona toda la componente normal que servirá para tomar la curva. Siempre que tengamos que ésta es mayor que la aceleración normal el automóvil será capaz de tomar la curva, es decir, el caso límite se alcanza cuando

$$F_r = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

Ejemplo 50. ¿Cuál es la velocidad a que puede ir un automóvil por una curva sin peralte, de radio R, sin derrapar?, el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale μ.

Solución.



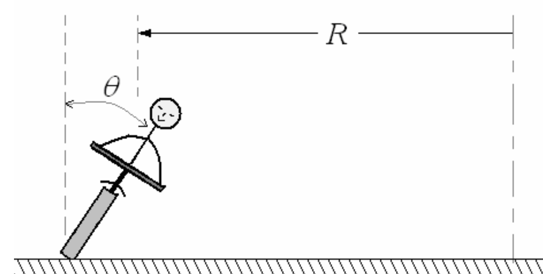
$$\sum F_h = ma_c \quad \sum F_V = 0 \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$F_f = \mu N = \mu mg = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow v = \sqrt{\mu g R}$$

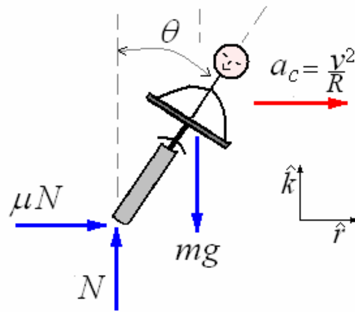
Ejemplo 51. El ciclista tiene que inclinarse al desplazarse por una pista circular (o para pasar por una curva), Encontrar la relación de la velocidad con el radio de curvatura, el ángulo de inclinación y μ coeficiente de fricción.



Solución.



La figura muestra el D.C.L.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_z = ma_z \Rightarrow N - mg = 0$$

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow \mu N = m\frac{v^2}{R}$$

De las ecuaciones obtenemos

$$N = mg \text{ y } \mu mg = m\frac{v^2}{R}$$

Finalmente $v = \sqrt{\mu g R}$

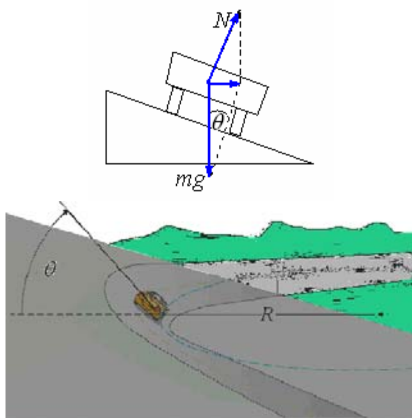
Del D.C.L. también obtenemos:

$$\tan\theta = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

Esto quiere decir que si el motociclista al realizar una curva no se reclina y el piso no es lo suficientemente áspero (fricción), éste caerá.

Curvas peraltadas sin rozamiento

Para no tener que confiar en el roce o reducir el desgaste de los rieles y pestañas, la carretera o la vía pueden inclinarse, como en la figura. En este caso la componente de la normal dirigida hacia el centro de curvatura proporciona la fuerza necesaria para mantener al móvil en la pista. A la inclinación de la pista o vía se le llama ángulo de **peralte,** θ**.**



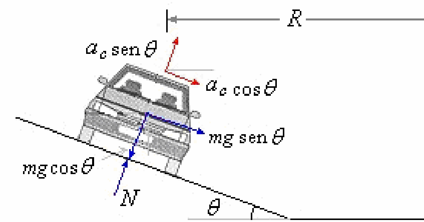
En estos casos se toma la proyección de la normal sobre la horizontal como causante de la fuerza centrípeta. Este caso se tiene, que:

$$\tan\theta = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{Rg}$$

Siendo θ, la inclinación de la carretera**.**

Ejemplo 52. ¿Cuál es la velocidad a que puede ir un automóvil por una curva con peralte, de radio *R,* sin derrapar, el peralte es de θ grados?

Solución.



$$\sum F_{\perp} = 0 \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{//} = ma_c\cos\theta \Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta = m\frac{v^2}{R}$$

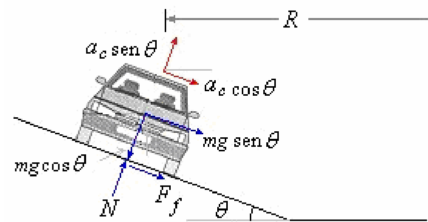
$$\Rightarrow v = \sqrt{gR\tan\theta}$$

Curvas peraltadas con rozamiento

Este es un caso bastante más complejo de analizar.

Ejemplo 53. ¿Cuál es la velocidad a la que puede ir un automóvil por una curva con peralte, de radio *R,* para que no se deslice hacia el exterior, el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale μ., el peralte es de θ grados?

Solución.



$$F_f = \mu N\,,\; a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{//} = ma_c\cos\theta$$

$$\Rightarrow mg\,\text{sen}\,\theta + \mu N = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$\sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\text{sen}\,\theta$$

$$mg\,\text{sen}\,\theta + \mu\left(mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\text{sen}\,\theta\right) = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$mg\,\text{sen}\,\theta + \mu mg\cos\theta + \mu m\frac{v^2}{R}\text{sen}\,\theta = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

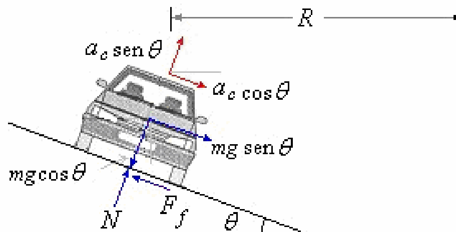
$$mg(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta) = m\frac{v^2}{R}(\cos\theta - \mu\,\text{sen}\,\theta)$$

$$v = \sqrt{gR\frac{(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta)}{(\cos\theta - \mu\,\text{sen}\,\theta)}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{gR\frac{(\tan\theta + \mu)}{(1-\mu\tan\theta)}}$$ Para que no se vaya

Ejemplo 54. ¿Cuál es la velocidad a laque puede ir un automóvil por una curva con peralte, de radio *R*, para que no se deslice hacia el interior, el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale μ., el peralte es de θ grados?

Solución.



$$F_f = \mu N\,,\ a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{//} = ma_c \cos\theta \Rightarrow$$

$$mg\text{sen}\theta - \mu N = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$\sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}sen\theta$$

$$mg\text{sen}\theta - \mu\left(mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta\right) = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$mg\text{sen}\theta - \mu mg\cos\theta - \mu m\frac{v^2}{R}\text{sen}\theta = m\frac{v^2}{R}\cos\theta$$

$$mg(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta) = m\frac{v^2}{R}(\cos\theta + \mu\text{sen}\theta)$$

$$v = \sqrt{gR\frac{(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta)}{(\cos\theta + \mu\text{sen}\theta)}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{gR\frac{(\tan\theta - \mu)}{(1+\mu\tan\theta)}}$$ Para que no se caiga

La velocidad debe de estar entre esos valores para permanecer en la carretera.

$$\sqrt{gR\frac{(\tan\theta + \mu)}{(1-\mu\tan\theta)}} \geq v \geq \sqrt{gR\frac{(\tan\theta - \mu)}{(1+\mu\tan\theta)}}$$

MOVIMIENTO EN MARCOS DE REFERENCIA NO INERCIALES

Hasta este momento nuestro estudio de mecánica clásica lo hemos realizado en sistemas de referencia que están en reposo o con movimiento con velocidad constante con respecto a un sistema considerado en reposo. A este conjunto de marcos de referencia se le conoce como MARCOS DE REFERENCIA INERCIALES.

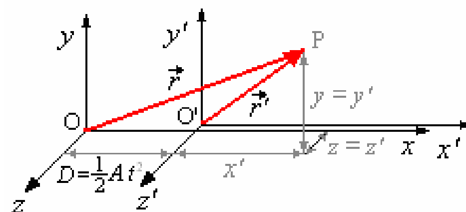
En los problemas trabajados hasta esta parte el primer paso era dibujar un sistema de coordenadas. Elegimos un sistema fijo a tierra, pero no pusimos atención al hecho que la tierra no es un marco inercial debido a que la tierra al viajar en su orbita casi circular alrededor del sol experimenta una aceleración centrípeta hacia el centro de la tierra. Sin embargo, estas aceleraciones son pequeñas comparadas con la aceleración de la gravedad y a menudo se pueden despreciar. En la mayoría de los casos se supondrá que la tierra es un marco inercial.

Ahora veremos cómo cambian los resultados cuando se trabaja en un MARCO DE REFERENCIA NO INERCIAL, que es el nombre que se da a un marco de referencia acelerado.

MARCO CON MOVIMIENTO DE TRASLACION NO UNIFORME.

Consideremos los sistemas S y S' tal corno se muestra en la Figura siguiente. El sistema S es inercial y el sistema S' se mueve con respecto a S con aceleración constante $\vec{A} = A\hat{i}$, tal que

$$D = \frac{1}{2}At^2.$$



De la figura obtenemos que la posición de la partícula P es:

$$x = x' + \frac{1}{2}At^2\,,\ y = y'\,,\ z = z'$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \frac{1}{2}At^2\hat{i}$$

Derivando con respecto al tiempo encontramos

$$v_x = v'_{x'} + At\,,\ v_y = v'_{y'}\,,\ v_z = v'_{z'}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + At\hat{i}$$

Derivando nuevamente encontramos

$$a_x = a'_x + A\,,\ a_y = a'_{y'}\,,\ a_z = a'_{z'}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + A\hat{i} \text{ o } \vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$$

Si la partícula P tiene una masa *m* y aplicarnos la segunda ley de Newton del movimiento en el sistema inercial S obtenemos

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Donde P es la suma de todas las fuerzas de interacción que actúan sobre las partículas.

Para relacionar con el sistema no inercial S'

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}' + A\hat{i}\right) \text{ o } m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}$$

Aquí vemos que para que el observador según S' pueda aplicar la segunda ley de Newton debemos introducir una fuerza extra $\vec{F}_A$ a la llamaremos **fuerza de arrastre** y debemos incluirla en los diagramas de fuerzas:

$$\vec{F}_A = -m\vec{A}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_A$$

De este modo, en el sistema S':

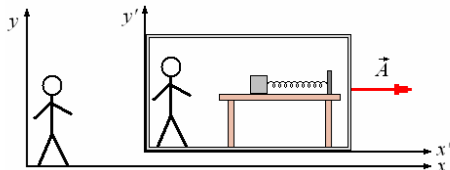
Donde $\vec{F}'$ es la suma de las fuerzas reales más la de arrastre

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_A$$

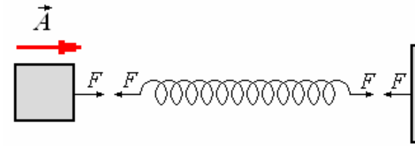
Recalquemos el carácter ficticio de $\vec{F}_A$. Para aplicar una fuerza real sobre un cuerpo debemos ponerlo en interacción con otro, de manera que, según la tercera ley de Newton, si A ejerce una fuerza sobre B, $\vec{F}_{AB}$, a su vez B ejercerá una fuerza sobre A, $\vec{F}_{BA}$, tal que $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

Ahora, ¿es la reacción de la fuerza de arrastre?, ¿cuál es el otro cuerpo que está ejerciendo la fuerza ?. No existe tal cuerpo, la fuerza no tiene reacción, es una fuerza ficticia que agrega un observador ubicado en un sistema acelerado (respecto a uno inercial) para justificar los fenómenos que observa.

Ejemplo 55. La fuerza para estirar o comprimir un resorte es proporcional a su deformación lineal, $F = -k\Delta\ell$, donde k es la constante del resorte y el signo menos significa que la fuerza es en oposición a la deformación. Si sobre una mesa sin fricción que se encuentra en un vagón se coloca una masa. m sujeta a un resorte de constante k y largo ℓ, como se muestra en la figura. El tren arranca con una aceleración A que se mantiene constante en la dirección x. Calcular la deformación del resorte desde el punto de vista del observador en tierra y desde el punto de vista del observador en el vagón.



Solución.
Observador en tierra:
La figura muestra el D. C. L. de la masa m.



El observador ve que el resorte se estira $\Delta\ell$. La fuerza es

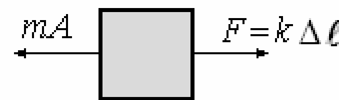
$F = k\Delta\ell$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow k\Delta\ell = mA$$

$$\Rightarrow \Delta\ell = \frac{mA}{F}$$

Observador en el vagón:
La figura a continuación muestra el D.C.L. de la masa m que no se mueve para el observador en el vagón. Como es sistema no inercial tenemos que aplicar la fuerza ficticia $-mA$.



Aplicando la segunda ley de Newton

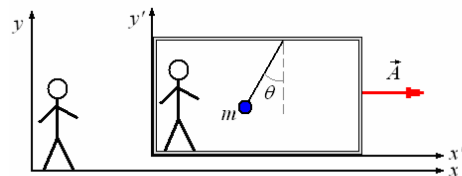
$$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow -mA = k\Delta\ell$$

$$\Rightarrow \Delta\ell = \frac{mA}{F}$$

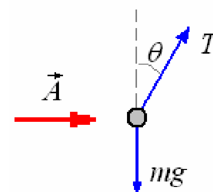
Ejemplo 56. Analizar el caso de masa m colgada mediante un hilo del techo de un vagón, que se mueve con una aceleración A.

a) Desde el punto de vista de un observador en tierra (S).

b) para un observador dentro del vagón (S').



Solución.
a) Para un observador en S:
El D.C.L. de la masa m



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T\text{sen}\theta = mA \quad (1)$$

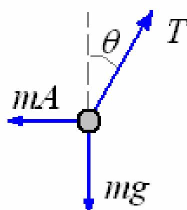
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow T\cos\theta = mg \quad (2)$$

Dividiendo (1) : (2)

$$\tan\theta = \frac{A}{g}$$

b) Para un observador en S'
El D.C.L..de la masa *m*



Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F_{x'} = 0 \;\Rightarrow\; T\text{sen}\theta - mA = 0$$

$$\Rightarrow\; T\text{sen}\theta = mA = 0 \qquad (1)$$

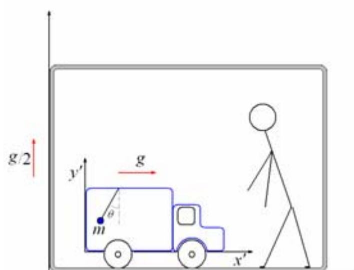
$$\sum F_{y'} = 0 \;\Rightarrow\; T\cos\theta - mg = 0$$

$$\Rightarrow\; T\cos\theta = mg \qquad (2)$$

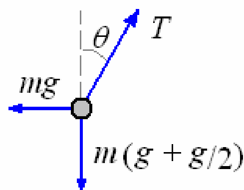
Dividiendo (1) : (2) obtenemos:

$$\tan\theta = \frac{A}{g}$$

Ejemplo 57. Desde el techo de un carrito de juguete cuelga una masa *m* unida al cielorraso mediante una cuerda ideal. El carrito se encuentra en el piso de un ascensor que sube con aceleración *g*/2. A su vez el carrito tiene una aceleración horizontal de magnitud *g* respecto al ascensor. Encuentre el ángulo que forma la cuerda con la vertical, resuelva para un observador situado dentro del ascensor.



Solución.
Para un observador en el ascensor.
El D.C.L..de la masa *m*



Aplicando la segunda ley de Newton

$$\sum F_{x'} = ma_{x'}$$

$$\Rightarrow\; T\text{sen}\theta = mg \qquad (1)$$

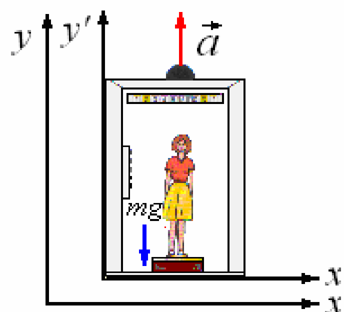
$$\sum F_{y'} = 0 \;\Rightarrow\; T\cos\theta - m\left(g + \frac{g}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\; T\cos\theta = m\frac{3}{2}g \qquad (2)$$

Dividiendo (1) / (2)

$$\tan\theta = \frac{g}{\frac{3}{2}g} = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \theta = 33{,}7^\circ$$

Ejemplo 58. Resolver el caso del peso del hombre en un ascensor cuando asciende con una aceleración constante *A*, desde el punto de vista del hombre en el ascensor.
Solución.



Aplicamos la segunda ley de Newton,

$$\sum F_{y'} = ma_{y'} \;\Rightarrow\; N - mg - ma = 0$$

$$\Rightarrow\; N = m(g + a)$$

El peso del hombre será la reacción *N*
En caso de subir con aceleración *a*:

$$N = m(g + a)$$

En caso de bajar con aceleración a:

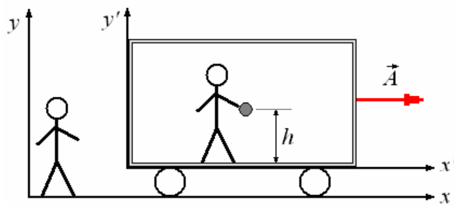
$$N = m(g - a)$$

Ejemplo 59. El pasajero de un tren deja caer una piedra en diversos estados de movimiento del tren. Hallar la trayectoria de dicha piedra que ve el pasajero y la trayectoria vista por un observador en tierra.
a) El tren acelera con aceleración *A* constante.
b) El tren frena con aceleración *A* constante.
Solución.
El tiempo en que la piedra esta en movimiento, es el mismo para todo sistema puesto que el movimiento vertical es independiente del horizontal.

$y = y' = h - \frac{1}{2}gt^2$, para $y = 0$ la piedra lega al piso:

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

a) Cuando el tren va con aceleración *A*, deja caer una piedra.
Considerando que en el momento que suelta la piedra el tren tiene una velocidad v_0.



Observador en tierra
Las ecuaciones del movimiento en el sistema S.
Movimiento de la piedra

$$x_{piedra} = v_0 t$$

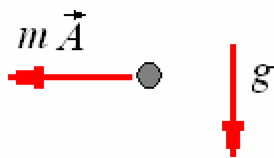
Movimiento del tren

$$x_{tren} = v_0 t + \frac{1}{2} A t^2$$

La piedra cae a una distancia

$\Delta x = x_{tren} - x_{piedra} = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.

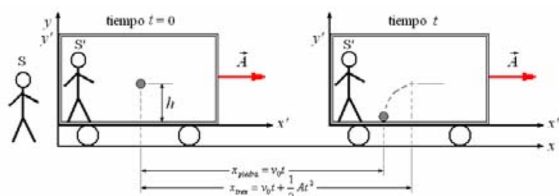
Observador en el tren
La ecuación del movimiento en el sistema S'
Movimiento de la piedra



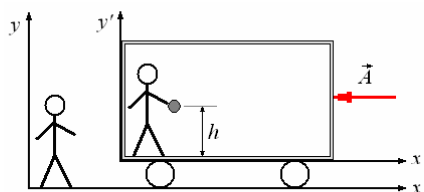
$$x_{piedra} = -\frac{1}{2} A t^2$$

La piedra cae a una distancia $\Delta x = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.

El gráfico siguiente muestra el moviendo visto por un observador en el sistema S y en el sistema S'.



b) Cuando el tren desacelera con aceleración *A*, deja caer una piedra.
Considerando que en el momento que suelta la piedra el tren tiene una velocidad v_0.



Observador en tierra
Las ecuaciones del movimiento en el sistema S.
Movimiento de la piedra

$$x_{piedra} = v_0 t$$

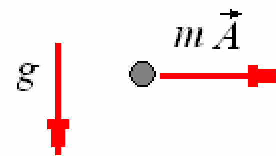
Movimiento del tren

$$x_{tren} = v_0 t - \frac{1}{2} A t^2$$

La piedra cae a una distancia

$\Delta x = x_{tren} - x_{piedra} = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.

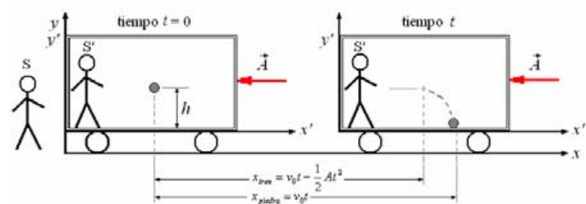
Observador en el tren
La ecuación del movimiento en el sistema S'
Movimiento de la piedra



$$x_{piedra} = \frac{1}{2} A t^2$$

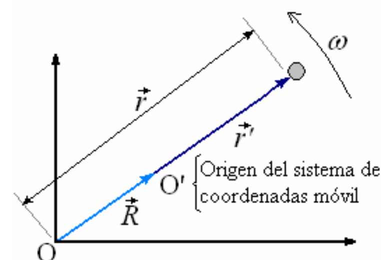
La piedra cae a una distancia $\Delta x = \frac{1}{2} A t^2$, detrás del punto de plomada.

El gráfico siguiente muestra el moviendo visto por un observador en el sistema S y en el sistema S'.



MARCO DE ROTACIÓN
Veamos el caso de un marco de referencia que está rotando con velocidad angular ω con respecto a otro marco de referencia. Supongamos que tenemos un objeto moviéndose alrededor de un punto arbitrario; este es un caso específico, sin embargo tiene todos los efectos en él.

La posición de la partícula con respecto a un sistema inercial está determinada por un vector $\vec{r}$.
Consideremos un nuevo sistema de coordenadas tal que siga al objeto, el nuevo origen está determinado por $\vec{R}$ contenido en $\vec{r}$ tal que la posición de la partícula en este nuevo sistema está ciada por $\vec{r}'$.



De la figura tenemos.

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' = R\hat{r} + r'\hat{r} = (R + r')\hat{r}$$

Derivando:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R + r')\hat{r} = \frac{d(R + r')}{dt}\hat{r} + (R + r')\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Como $\dfrac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{t}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat{r} + \frac{dr'}{dt}\hat{r} + (R + r')\omega\hat{t}$$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ es la velocidad de la partícula vista en el sistema inercial y $\dfrac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}'$ es la velocidad de la partícula vista en el sistema no inercial.

Tal que

$$\vec{v} = \frac{dR}{dt}\hat{r} + \vec{v}' + (R + r')\omega\hat{t}$$

Para encontrar la aceleración es necesario derivar nuevamente:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(R + r')\hat{r} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d(R + r')}{dt}r + (R + r')\omega\hat{t}\right]$$

Como $\dfrac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{t}$ y $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = -\omega\hat{r}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2(R + r')}{dt^2}\hat{r} + \frac{d(R + r')}{dt}\omega\hat{t} + \frac{d(R + r')}{dt}\omega\hat{t} + (R + r')\frac{d\omega}{dt}\hat{t} - (R + r')\omega^2\hat{r}$$

$$= \frac{d^2(R + r')}{dt^2}\hat{r} + 2\frac{d(R + r')}{dt}\omega\hat{t} + (R + r')\alpha\hat{t} - (R + r')\omega^2\hat{r}$$

$$= \left[\frac{d^2(R + r')}{dt^2} - (R + r')\omega^2\right]\hat{r} + 2\left[\frac{d(R + r')}{dt}\omega + (R + r')\alpha\right]\hat{t}$$

donde $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ es la aceleración de la partícula vista en el sistema inercial y

$\vec{a}' = \dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$ es la aceleración de la partícula vista en el sistema no inercial.

Llamando a

$$\vec{A}_r = \left[\frac{d^2(R + r')}{dt^2} - (R + r')\omega^2\right]\hat{r}$$

y $\vec{A}_t = 2\left[\dfrac{d(R + r')}{dt}\omega + (R + r')\alpha\right]\hat{t}$

Tenemos: $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_t\hat{t}$

Tal que: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$

Si la partícula tiene una masa m y aplicamos la segunda ley de Newton en el sistema inercial

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

donde $\vec{F}$ es la suma de todas las fuerzas de interacción que actúan sobre la partícula.

Para relacionar con el sistema inercia!

$$\vec{F} = m\left(\vec{a}' + \vec{A}\right) \text{ o } m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}$$

Para que el observador pueda aplicar la segunda ley de Newton debemos introducir aquí también una fuerza extra $\vec{F}_A$ y debemos incluirla en los diagramas de fuerzas

$$\vec{F}_A = -m\vec{A}$$

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{Ar}\hat{r} + \vec{F}_{At}\hat{t}$$

$$\frac{d^2(R + r')}{dt^2}\hat{r} + \frac{d(R + r')}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d(R + r')}{dt}\omega\hat{t} + (R + r')\frac{d\omega}{dt}\hat{t} + (R + r')\omega\frac{d\hat{t}}{dt}$$

$$\vec{F}_{Ar} = -m\left[\frac{d^2(R + r')}{dt^2} - (R + r')\omega^2\right]\hat{r}$$

y $\vec{F}_{At} = 2m\left[\dfrac{d(R + r')}{dt}\omega + (R + r')\alpha\right]\hat{t}$

De este modo, en el sistema no inercial

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_A$$

Recalquemos el carácter ficticio de $\vec{F}_A$ Con el objeto de clarificar esta idea veamos dos casos especiales:

a) El origen O' rota con velocidad angular constante ω a una distancia constante *b*, tal $R + r' = b$, *R* y *r'* son constantes.

$$\frac{d(R + r')}{dt} = 0 \text{ y } \frac{d^2(R + r')}{dt^2} = 0$$

$$\omega = \text{constante}, \ \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

Sólo nos queda

$$\vec{F}_{Ar} = m(R + r')\omega^2\hat{r} = mb\omega^2\hat{r}$$

Que es la fuerza ficticia del centro hacia afuera y se le da el nombre de FUERZA CENTRÍFUGA, debemos insistir que solo aparece en el marco no inercial.

b) El origen O' rota con velocidad angular constante ω y también se está alejando del origen fijo en O con una velocidad constante $V = \dfrac{d(R + r')}{dt}$.

Con esto, $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = 0$

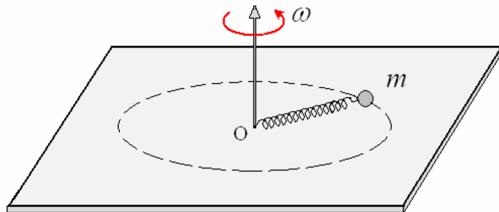
y nos queda

$$\vec{F}_{Ar} = m(R + r')\omega^2\hat{r}$$

y $\vec{F}_{At} = -2mV\omega\hat{t}$

Esta última fuerza ficticia, cuya dirección es transversal, se conoce como FUERZA DE CORIOLIS.

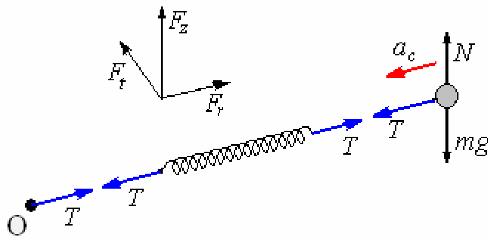
Ejemplo 60. Un cuerpo de masa de masa m unido a un resorte de constante k y longitud ℓ que gira con ve1ocidad angular ω constante en un plano horizontal sin fricción. Se quiere calcular el estiramiento $\Delta\ell$ del resorte.



Solución.

Visto por el observador inercial.

La figura muestra el D.C. L. de la masa



Aplicando la segunda ley de Newton, el resorte estira $\Delta\ell$, luego su longitud es $(\ell + \Delta\ell)$

$$\sum F_z = ma_z,\ \sum F_r = ma_r,\ \sum F_t = ma_t$$

Como: $a_z = 0$, $a_r = -\omega^2(\ell + \Delta\ell)$, $a_t = 0$

Tenemos

$$N - mg = 0,\ -T = -m\omega^2(\ell + \Delta\ell),\ F_t = 0$$

De aquí obtenemos:

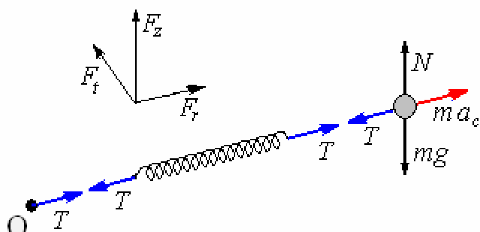
$$N = mg \text{ y } T = m\omega^2(\ell + \Delta\ell)$$

Como $T = k\Delta\ell$

$$k\Delta\ell = m\omega^2(\ell + \Delta\ell)$$

y $\Delta\ell = \dfrac{m\omega^2\ell}{k - m\omega^2}$

Visto por un observador no inercial colocado en el centro de rotación y girando con la misma velocidad angular.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F'_{z'} = ma'_{z'},\ \sum F'_{r'} = ma'_{r'},$$
$$\sum F'_{t'} = ma'_{t'}$$

Como $a'_{z'} = 0$, $a'_{r'} = 0$, $\sum F'_{t'} = ma'_{t'}$

Tenemos

$$N - mg = 0,\ -T + m\omega^2(\ell + \Delta\ell) = 0,\ F_t = 0$$

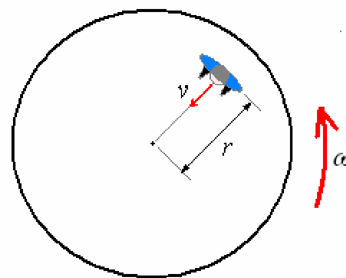
Como $T = k\Delta\ell$

$$-k\Delta\ell + m\omega^2(\ell + \Delta\ell) = 0$$

y $\Delta\ell = \dfrac{m\omega^2\ell}{k - m\omega^2}$

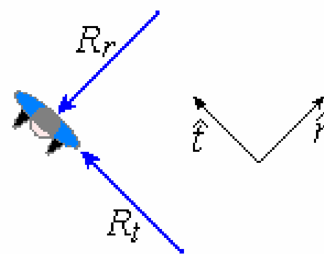
Visto por un observador no inercial colocado sobre la misma masa Este caso es idéntico al caso anterior.

Ejemplo 61. Se tiene una plataforma circular de radio R a la cual se le ha pintado un radio y gira con velocidad angular constante ω. Un hombre camina de afuera hacia adentro de la plataforma siguiendo la línea con una velocidad de módulo constante v. ¿Cuál es la fuerza que la plataforma ejerce sobre el hombre, en función de su posición?



Solución.

La figura muestra el D.C.L. del hombre



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -R_r = ma_r - mr\omega^2$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow R_t = m(-2v\omega + \alpha r)$$

Como: $a_r = 0$ y $\alpha = 0$:

$R_r = mr\omega^2$ y $R_t = -2mv\omega$

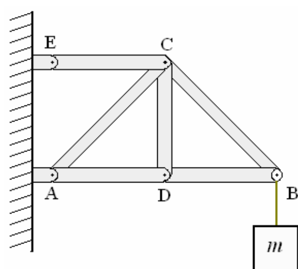
R_t es debido a la aceleración de coriolis.

R_r es el sentido indicado en la figura y R_t en el sentido contrario.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

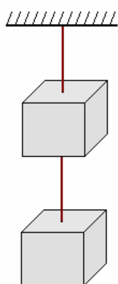
1. Sobre una partícula de masa m que parte del reposo en origen de coordenadas. actúa una fuerza $\vec{F} = \left(2\hat{i} + 3\hat{j}\right)$ Después de l0s la posición de la partícula viene dada por las coordenadas (3m; 4,5 m). ¿Cuál es su masa?
Respuesta. m = 33,3 kg.

2 Hallar las fuerzas que actúan sobre cada una de las seis barras rígidas de peso despreciable. Si están unidas mediante pivotes lisos y cada una de las barras cortas tiene una longitud ℓ .



Respuesta. AD = DB = mg ; CB = CA = mg/2, BC = 2mg; CD = 0.
CD se puede retirar y no pasa nada.

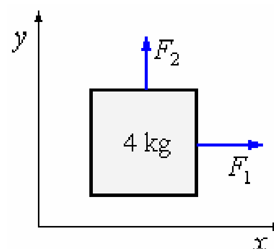
3. Dos cubos de masa m están unidos mediante una cuerda y uno de ellos está sujeto al techo mediante otra cuerda igual.
a) Si en el cubo inferior se hace presión suavemente hacia abajo. ¿Cuál de las cuerdas se romperá antes? ¿porqué?
b) Si la masa interior se golpea hacia abajo con un martillo, se rompe la cuerda de abajo ¿porqué?



Respuesta. a) La cuerda superior debido a que la tensión es mayor.
b) La tuerza de reacción inercial de la masa superior aumenta la resistencia frente a una aceleración rápida.

4. Una caja de 40 kg que está resbalando en el piso disminuye su velocidad de 5 m/s a 2 m/s. Asumiendo que la fuerza sobre la caja es constante, encontrar su magnitud y dirección relativa a la velocidad de la caja.
Respuesta. 20N opuesta a la velocidad.

5. ¿Qué fuerza en adición a $\vec{F}_1 = 4\hat{i}$ N y $\vec{F}_2 = 2\hat{j}$ N debe aplicarse al cuerpo en la figura, tal que:
a) no acelere?
b) tenga una aceleración $-4\hat{i}$ m/s^2



Respuesta. a) $\vec{F} = \left(-4\hat{i} - 2\hat{j}\right)$ N, b) $\vec{F} = \left(-16\hat{i} - 2\hat{j}\right)$ N

6. ¿Cuál es la mínima aceleración con la que puede deslizarse hacia abajo un hombre de 75 kg por una cuerda que solo soporta una tensión de 490N, ¿Cuál será la velocidad de la persona después de deslizarse la distancia de 20m?
Respuesta. a = 3,27 m/s^2 ; v = 11,4 m/s

7. El libro de Física I, está apoyado en el extremo superior de un resorte vertical, que a su vez esta 'parado' sobre una mesa. Para cada componente del sistema libro-resorte-mesa-tierra:
a) dibujar el diagrama de cuerpo libre,
b) identificar todos los pares de fuerzas de acción y reacción.

8. De acuerdo con la leyenda, un caballo aprendió las leyes de Newton. Cuando se le dijo que tirara una carreta, se negó argumentando que si él tiraba la carreta hacia delante, de acuerdo con la tercera ley de Newton habría una fuerza igual hacia atrás. De esta manera, las fuerzas estarían balanceadas y de acuerdo con la segunda ley de Newton, la carreta no aceleraría. ¿Cómo podría usted razonar con este misterioso caballo?

9. Dos alumnos de forestal ubicados en los bordes opuestos de un camino recto tiran a un carro por el camino, con fuerzas de 160 N y 200 N, que forman un ángulo de 30º y 60º respectivamente, con la dirección del camino.
Calcular la magnitud de la fuerza resultante y la dirección en la que se moverá el carro.
Respuesta. 256,1N, -21,3º

10. Una masa de 5kg cuelga de una cuerda de 1m de longitud que se encuentra sujeta a un techo. Calcular la fuerza horizontal que aplicada a la masa la desvíe 30 cm de la vertical y la mantenga en esa posición.
Respuesta. 15,7 N.

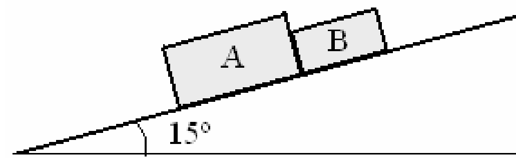
11. Tres fuerzas $\vec{F}_1 = \left(-2\hat{i} + 2\hat{j}\right)$N, $\vec{F}_2 = \left(5\hat{i} - 3\hat{j}\right)$N y $\vec{F}_3 = \left(-45\hat{i}\right)$N que actúan sobre un objeto le producen una aceleración de valor 3 m/s^2.
a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración?
b) ¿Cuál es la masa del objeto?
c) Si el objeto esta inicialmente en reposo, calcular su velocidad después de 10s?

12. Una mano ejerce una fuerza horizontal de 5 N para mover hacia la derecha a dos bloques en contacto entre sí uno al lado del otro, sobre una superficie horizontal sin roce. El bloque de la izquierda tiene una masa de 2 kg y el de la derecha de 1 kg.
a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre para cada bloque.
b) Calcular la aceleración del sistema,
c) Calcular la aceleración y fuerza sobre el bloque de 1 kg,
d) Calcular la fuerza neta actuando sobre cada cuerpo.
Respuesta. b) 5/3 m/s^2, c) 5/3 m/s^2, 5N, d) 5 N.

13. Una fuerza *F* aplicada a un objeto de masa m_1 produce una aceleración de 3 m/s^2. La misma fuerza aplicada a una masa m_2 produce una aceleración 1 m/s^2.
a) ¿Cuál es el valor de la proporción m_1/m_2?
b) Si se combinan m_1 y m_2, encuentre su aceleración bajo la acción de ***F*.**
Respuesta. a) 1/3, b) 0,75 m/s^2.

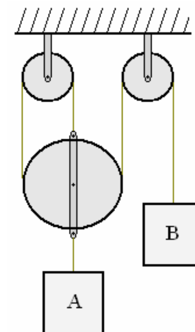
14. Dos bloques de masas *M* y *3M* ubicado a la derecha de *M*, que están sobre una mesa horizontal lisa se unen entre sí con una varilla de alambre horizontal, de masa despreciable. Una fuerza horizontal de magnitud 2*Mg* se aplica sobre *M* hacia la izquierda.
a) Hacer los diagrama de cuerpo libre.
b) Calcular la aceleración del sistema.
c) Calcular la tensión del alambre.
Respuesta. b) 5 m/s^2, c) 15*Mg* N.

15. Dos paquetes se colocan sobre un plano inclinado como muestra la figura. El coeficiente de rozamiento entre el plano y el paquete A es 0,25 y entre el plano y el paquete B es 0,15. Sabiendo que los paquetes están en contacto cuando se dejan libres, determinar:
a) la aceleración de cada paquete,
b) la fuerza ejercida por el paquete A sobre el B.
c) Resolver el problema invirtiendo las posiciones de los paquetes.



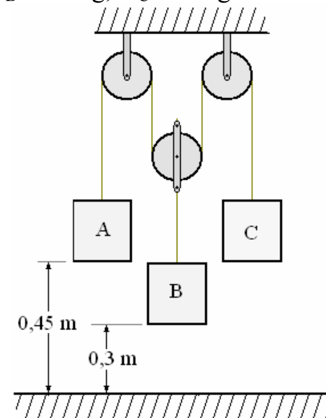
Respuesta: a) $a_A = a_B = 0,738$ m/s^2, b) 5,68 N

16. Un bloque A de 100 kg está unido a un contrapeo 8 de 25 kg mediante un cable dispuesto como muestra la figura. Si el sistema se abandona en reposo, determinar:
a) la tensión en el cable.
b) la velocidad de B transcurridos 3 s,
c) la velocidad de A cuando ha recorrido 1,2 m.



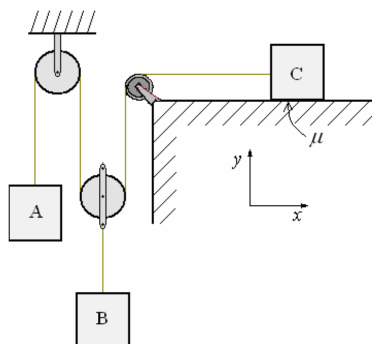
Respuesta. a) 302 N, b) 6,79 $\hat{j}$ m/s, c) -1,346 $\hat{j}$ m/s

17. Determinar la aceleración de cada uno de los bloques de la figura, ¿Que bloque llega primero al suelo?
m_A=5kg, m_B = 15 kg, m_C = 10kg



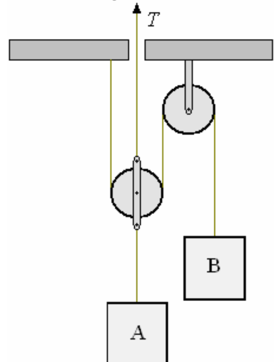
Respuesta. $\vec{a}_A == 4,04\hat{j}$ m/s^2,
$\vec{a}_B == -0,577\hat{j}$ m/s^2, $\vec{a}_C == -2,89\hat{j}$ m/s^2
C llega primero.

18. En la figura μ = 0,45 , 5 kg . m_A = 5 kg, m_B = 20 kg m_C = 15 Kg. determinar la aceleración de cada bloque.



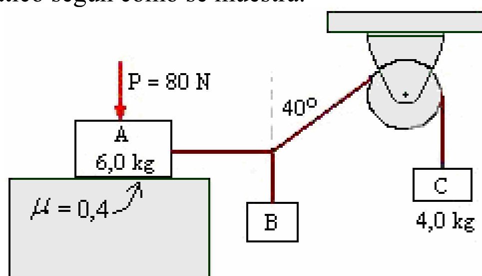
Respuesta. $\vec{a}_A = 4{,}91\hat{j}$ m/s², $\vec{a}_B = -2{,}45\hat{j}$ m/s², $\vec{a}_C = 0$

19. Determinar la aceleración del cilindro B de la figura, si a) $T = 1500$ N, b) $T = 4000$ N.
m_A=250 kg, m_B = 100 kg,



Respuesta. a) -3,11 $\hat{j}$ N b) -9,81 $\hat{j}$ N

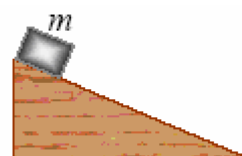
20. Se tiene un sistema formado por tres bloques y una polea sin fricción. El bloque A tiene una masa de 6,0 kilogramos y está en una superficie áspera (μ = 0,40). El bloque C tiene una masa de 4,0 kilogramos. Una fuerza externa P = 80 N, se aplica verticalmente al bloque A, la que mantiene el sistema en equilibrio estático según como se muestra.



a) ¿Cuál es la masa del bloque B? ¿Cuál es la fuerza de fricción sobre el bloque A?
b) se quita la fuerza externa de 8,0 N. Las masas de los bloques B y C se ajustan, de modo el sistema siga en reposo tal como se muestra, pero están justo por iniciar el movimiento. La masa del bloque A no se cambia. Las tensiones en las dos cuerdas verticales son:
Respuesta.
a) 3,1 kg 25.2 N
b) 28 N y 37 N

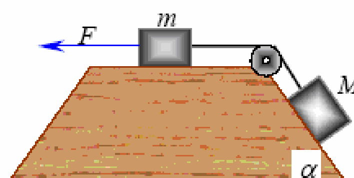
21. Pepe anda esquiando, cuando en algún momento sube 5 m deslizándose por la pendiente de un cerrito nevado en sus esquíes, saliendo desde la cima ubicada a 3 m de altura respecto a la horizontal, con una rapidez de 10 m/s. El coeficiente de roce entre la nieve y los esquíes es 0,1.
a) Calcular la rapidez con la cual el esquiador comienza a subir la pendiente.
b) Determine la distancia horizontal que vuela Pepe cuando sale de la punta del cerro.
Respuesta. a) 13 m/s, b) 16,6 m.

22. El bloque de masa *m* de la figura parte del reposo, deslizándose desde la parte superior del plano inclinado 30º con la horizontal. El coeficiente de roce cinético es 0,3.
a) Calcular la aceleración del bloque mientras se mueve sobre el plano.
b) Calcular la longitud del plano si el bloque sale con una rapidez de 5 m/s.
c) Si el bloque cae al suelo a una distancia horizontal de 3 m desde el borde del plano, determine el tiempo total del movimiento.



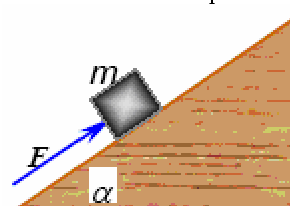
Respuesta. a) 2,4 m/s², b) 5,2 m, c) 2,8 s.

23. En el sistema de la figura, se aplica una fuerza *F* sobre *m*. El coeficiente de roce es μ entre cada cuerpo y los planos. Deducir la expresión de la magnitud de *F* para que el sistema se mueva:
a) con rapidez constante,
b) con aceleración *a* constante.

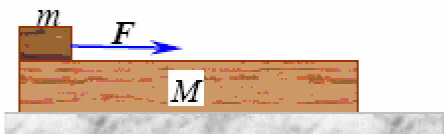


Respuesta. b)
$Mg(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) + \mu mg + a(m + M)$.

24. En el sistema de la figura, la fuerza *F* paralela al plano inclinado empuja al bloque de masa *m* haciéndolo subir una distancia *D* sobre el plano, de coeficiente de roce μ. Calcular en función de *m, F, g, D*, μ y α, la aceleración del bloque.



25. Una fuerza *F* se aplica a un pequeño bloque de masa *m* para hacerlo moverse a lo largo de la parte superior de un bloque de masa *M* y largo *L*. El coeficiente de roce es μ entre los bloques. El bloque *M* desliza sin roce en la superficie horizontal. Los bloques parten del reposo con el pequeño en un extremo del grande, como se ve en la figura.
a) Calcular la aceleración de cada bloque relativa a la superficie horizontal.
b) Calcular el tiempo que el bloque *m* demora en llegar al otro extremo de *M*, en función de *L* y las aceleraciones.



Respuesta. a) $(F-\mu mg)/m$, $\mu mg/(m+M)$,
b) $[2L/(a_1-a_2)]^{1/2}$.

26. Un bloque de masa *M* se ubica sobre un pequeño plano inclinado un ángulo α sin roce, que tiene su extremo inferior fijo a un eje vertical que puede girar. En algún momento el eje gira con el plano con rapidez constante.
Demostrar que si la masa asciende desde la base del plano, su rapidez cuando ha subido una distancia *L* es $v = \sqrt{gL\text{sen}\alpha}$.

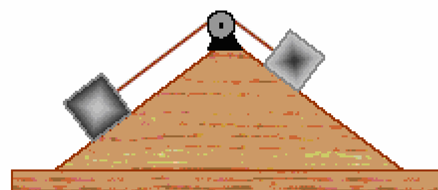
27. Una fuerza dependiente del tiempo, $\vec{F} = \left(8\hat{i} - 4t\hat{j}\right)$ N (donde *t* está en segundos), se aplica a un objeto de 2 kg inicialmente en reposo.
a) ¿En qué tiempo el objeto se moverá con una velocidad de 15 m/s?
b) ¿A qué distancia está de su posición inicial cuando su velocidad es 15 m/s?
c) ¿Cuál es la posición del objeto en este tiempo?
Respuesta. a) 3s, b) 20,1m, c) $\left(18\hat{i} - 9\hat{j}\right)$ m

28. Una araña de 2×10^{-4} kg está suspendida de una hebra delgada de telaraña. La tensión máxima que soporta la hebra antes de romperse es $2,1 \times 10^{-3}$ N. ¿Cuál es la aceleración máxima con la cual la araña puede subir por la hebra con toda seguridad?
Respuesta. 0,5m/s^2.

29. Los instrumentos de un globo meteorológico tienen una masa de 1 kg.
a) El globo se suelta y ejerce una fuerza hacia arriba de 5 N sobre los instrumentos. ¿Cuál es la aceleración del globo y de los instrumentos?
b) Después de que el globo ha acelerado durante 10 segundos, los instrumentos se sueltan. ¿Cuál es velocidad de los instrumentos en el momento en que se sueltan?
c) ¿cuál es la fuerza neta que actúa sobre los instrumentos después de que se sueltan?
d) ¿En qué momento la dirección de su velocidad comienza a ser hacia abajo?

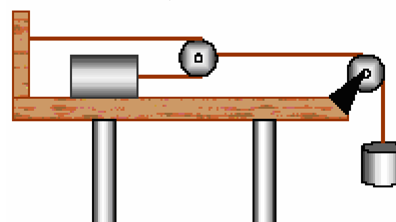
30. Sobre el planeta X un objeto pesa 12 N. En el planeta Y, donde la magnitud de la aceleración de caída libre es 1,6*g*, el objeto pesa 27 N. ¿Cuál es la masa del objeto y cuál es la aceleración de caída libre en el planeta X?
Respuesta. 1,7 kg, 7m/s^2.

31. Dos bloques de 1 y 2 kg, ubicados sobre planos lisos inclinados en 30º, se conectan por una cuerda ligera que pasa por una polea sin roce, como se muestra en la figura. Calcular:
a) la aceleración de cada bloque,
b) la tensión en la cuerda.
c) si la aceleración cuando los planos son rugosos fuera ½ de la calculada en ese problema, calcular: el coeficiente de roce y la tensión en la cuerda.

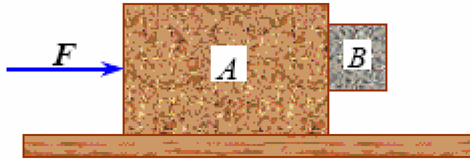


32. Un trineo de 50 kg de masa se empuja a lo largo de una superficie plana cubierta de nieve. El coeficiente de rozamiento estático es 0,3, y el coeficiente de rozamiento cinético es 0,1.
a) ¿Cuál es el peso del trineo?
b) ¿Qué fuerza se requiere para que el trineo comience a moverse?
c) ¿Qué fuerza se requiere para que el trineo se mueva con velocidad constante?
d) Una vez en movimiento, ¿qué fuerza total debe aplicársele al trineo para acelerarlo a 3 m/s^2?

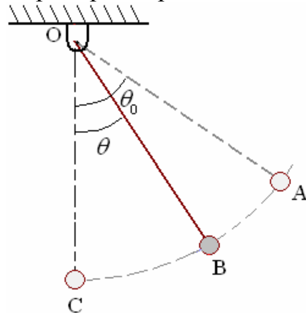
33. La masa m_1 sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a la masa m_2 por medio de una polea móvil y una polea fija sin masas. Si a_1 y a_2 son magnitudes de las aceleraciones de m_1 y m_2, respectivamente. Determinar:
a) una relación entre estas aceleraciones.
b) las tensiones en las cuerdas, y
c) las aceleraciones a_1 y a_2 en función de m_1, m_2 y *g*.



34. Calcular la fuerza *F* que debe aplicarse sobre un bloque *A* de 20 kg para evitar que el bloque *B* de 2 kg caiga. El coeficiente de fricción estático entre los bloques A y B es 0,5, y la superficie horizontal no presenta fricción.

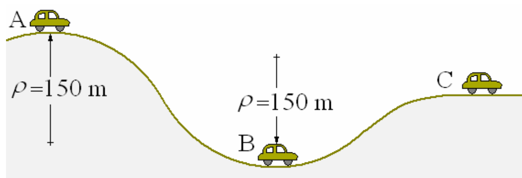


35. Una bola de masa *m* se suelta sin velocidad inicial desde un punto A y oscila en un plano vertical al extremo de una cuerda de longitud *L*. Determinar:
a) la componente tangencial de la aceleración en el punto B.
b) la velocidad en el punto B.
c) la tensión en la cuerda cuando la bola para por el punto mas bajo.
d) el valor de si la tensión en la cuerda es 2 *mg* cuando la bola pasa por el punto C



Respuesta. a) $g\text{sen}\theta$, b) $\sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$, c) $mg(3 - 2\cos\theta_0)$, d) 60°.

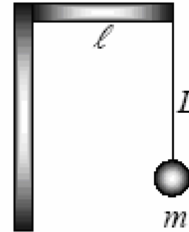
36. Tres automóviles circulan a la velocidad de 80 km/h por la carretera representada en la figura. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre las llantas y la carretera es 0,60, determinar la desaceleración tangencial de cada automóvil sí sus respectivos frenos sen repentinamente accionados y las ruedas deslizan.



Respuesta. a_A =3,91 m/s^2, a_B = 7,86 m/s^2, a_C = 5.89 m/s^2.

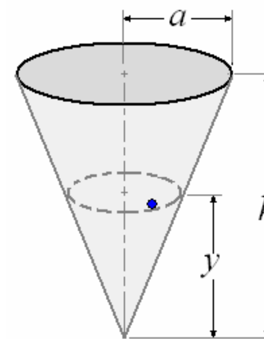
37. ¿Con qué ángulo debe peraltarse una carretera en una curva de 50 m de radio, para que un vehículo pueda tomar la curva a 72 km/h, con un coeficiente de rozamiento 0,30?
Respuesta: $22,5° \leq \theta \leq 55,9°$

38. En el sistema de la figura, el brazo del péndulo es de longitud ℓ y la cuerda de largo *L*.
a) Calcular la rapidez tangencial para que el sistema gire en torno al eje de rotación que pasa por la barra vertical, de modo que la cuerda que sostiene a la masa *m* forme un ángulo de $\alpha°$ con la vertical.
b) Calcular la tensión de la cuerda.
c) Si el sistema da una vuelta en 30 s, determinar El ángulo que forma la cuerda con la vertical.



Respuesta. a) $v = \sqrt{g(\ell + L\text{sen}\alpha)\tan\alpha}$,
b) *mg*/cos α.

39. Una bola pequeña da vueltas con una rapidez y recorriendo una circunferencia horizontal en el interior de un cono recto de base circular. Expresar la rapidez y en función de la altura y de la trayectoria sobre el vértice del cono.



Respuesta. $v = \sqrt{gy}$

40. ¿Cuál es el mínimo radio que un motociclista con velocidad de 21 m/s puede hacer en una pista que tiene un coeficiente de fricción con las llantas igual a 0,3? ¿Cuál es el ángulo que hará la motocicleta con la horizontal?
Respuesta: 147 m; 73° 20'

41. Un estudiante hace girar un balde que contiene 2 kg de agua en una circunferencia vertical de 1,2m de radio, considerar
a) ¿Cuál es la máxima velocidad para que el agua permanezca en el balde?
b) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el balde sobre el agua en el punto inferior de la circunferencia?
c) ¿a la altura de los hombros?
d) Si el balde pesa 10k, hallar cada una de las fuerzas que actúan sobre el balde en el punto inferior de la circunferencia.

Respuesta. a) $2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}$, b) $2mg$, c) $\sqrt{2}mg$
d) 10 N debido a la tierra, 40 N debido al agua, 100 N debido al hombre.

42. Una mesa giratoria horizontal tiene una aceleración angular de α = 3 rad/s^2. En el instante en que la velocidad angular vale 2,4 rad/s, una partícula

de masa 1,8 kg descansa sin deslizar sobre la mesa, con tal que esté situada a una distancia inferior a 50 cm del eje vertical de rotación de la mesa,
a) ¿Cuál es el valor de la tuerza de rozamiento?
b) Hallar el coeficiente de rozamiento estático entre el objeto y la mesa.
Respuesta: a) F_f = 7,9 N b) μ_s = 0,45

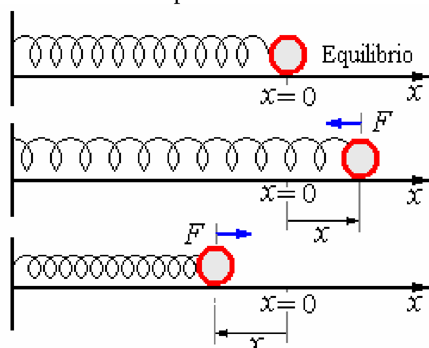
43. Se tiene una partícula de masa 5*g* que se mueve sobre una trayectoria curva y su aceleración en un momento dado vale $\vec{a} = \left(3\hat{t} + 4\hat{n}\right)$ cm/s^2. Hallar:
a) la aceleración tangencial,
b) la aceleración centrípeta,
c) el módulo de la aceleración total,
d) el ángulo ϕ que la aceleración total forma con la tangente a la curva,
e) la componente tangencial de la fuerza aceleradora,
f) la componente centrípeta de la fuerza aceleradora,
g) la fuerza aceleradora total.
Respuesta. a) a_t = 3 cm/s^2 , b) a_t = - 4 cm/s^2 ; c) a = 5 cm/s^2, d) ϕ = 53,1°; e) F_t = 15 x 10^{-5} N, f) F_r = 20 x 10^{-5} N, g) F = 25 x 10^{-5} N.

44. Describir e interpretar las fuerzas que realmente se apreciarían si nos encontráramos con los ojos vendados y:
a) de pie sobre una plataforma elevada.
b) cayendo libremente en el aire.
c) estando sentado en el suelo de una plataforma en rotación, como la de un carrusel a una cierta distancia de su centro.
Respuesta. a) Una fuerza de reacción de la plataforma hacia arriba.
b) Ninguna fuerza.
c) Una fuerza de reacción de la plataforma y una fuerza hacia afuera (radial).

45. Calcular el ángulo de peralte de una carretera en una curva de radio 150 m, para que un camión de 15 toneladas pueda girar con una rapidez de 70 km/hr, sobre un pavimento cubierto de escarcha.
Respuesta. 14º

CAPÍTULO 5. TRABAJO Y ENERGÍA

INTRODUCCIÓN
Con lo que hemos visto hasta el momento estamos en condiciones de analizar un movimiento en situaciones en que la fuerza es constante. Una vez aplicada La segunda ley de Newton, determinamos la aceleración $a = F/m$. De aquí podemos determinar la velocidad y la posición. Pero en el caso en que la fuerza no es constante, por ejemplo cuando se jala una masa situada en un extremo de un resorte, el problema se complica.



La figura muestra un cuerpo de masa *m* sobre una superficie horizontal lisa, conectado a un resorte helicoidal. Si el resorte se estira o se comprime una longitud pequeña desde su posición no deformada o de equilibrio, el resorte ejercerá una fuerza sobre el cuerpo $F = -kx$, donde x es el desplazamiento del cuerpo desde la posición de equilibrio $(x = 0)$, k es la constante del resorte, el signo negativo (-) significa que la fuerza es en sentido opuesto al sentido del desplazamiento. Esta ley de fuerza se conoce como la ley de Hooke, de la cual nos ocuparemos en el Capítulo de Elasticidad

Apliquemos la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

Con $F = -kx$ y $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$,

Obtenemos:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

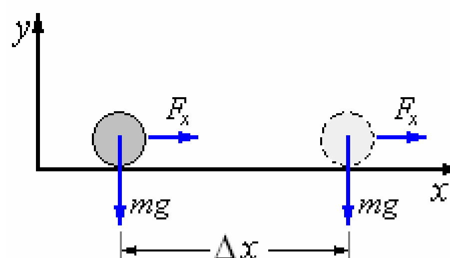
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

A pesar de ser una ecuación simple esta última, todavía no tenernos el conocimiento matemático para resolverla. Es decir, estamos en condiciones de plantear las ecuaciones del movimiento, pero no sabemos resolverlas.
Veremos aquí que se puede tomar un atajo y resolver de otra forma el problema. En este capitulo se verán los conceptos de Trabajo y Energía que se pueden aplicar a la dinámica de un sistema mecánico sin recurrir a las leyes de Newton.

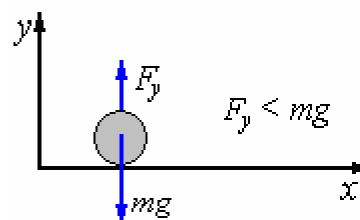
Sin embargo, es importante notar que los conceptos de Trabajo y Energía se fundamentan en las leyes de Newton y por lo tanto no requieren ningún principio nuevo.

TRABAJO
El término "trabajo" que se usa en la vida cotidiana es para definir una actividad de algún tipo que incluye un esfuerzo físico o mental y cuya finalidad sea el alcance de algún objetivo definido y bien establecido. En el estudio de la mecánica tiene un significado más restringido, por ejemplo si subimos cierta altura *h* con una masa *m* decimos que hemos realizado un trabajo *W*, si subimos la misma altura *h* pero con una masa 2*m*, se habrá realizado un trabajo 2*W*, igual a que si se hubiese transportado una masa *m* una altura 2*h*, o si se hubiese transportado dos veces la masa *m*, la altura *h*. Estas observaciones sugieren que el trabajo es una magnitud física proporcional a la fuerza y a la distancia, pero que puede sumarse como un escalar.
Cuando una fuerza constante F_x mueve un cuerpo realizando un desplazamiento Δx que tiene la misma dirección que la fuerza, se define la cantidad de trabajo realizado por esta fuerza como:

$$W = F_x \Delta x$$



Ahora consideremos que sobre la misma masa m actúa una fuerza vertical F_y, menor que el peso mg del bloque, como tal no dará origen a ningún movimiento vertical y por lo tanto no estará realizando trabajo.

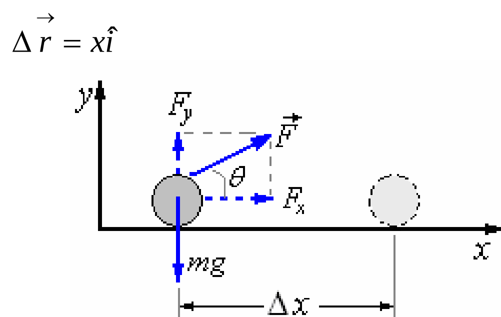


Si ahora aplicamos al mismo tiempo las dos fuerzas, la fuerza aplicada es:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$$

Si el desplazamiento del bloque es únicamente en la dirección *x*,

$\Delta \vec{r} = x\hat{i}$



El trabajo realizado es el producto escalar de la tuerza por el desplazamiento es:

$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = \left(F_x \hat{i} + F_y \hat{j}\right) \cdot \Delta x\hat{i} = F_x \Delta x$

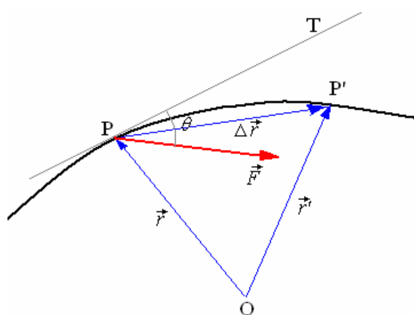
O $\Delta W = F \Delta x \cos\theta$

Donde

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ y

θ es el ángulo formado entre la fuerza aplicada y el desplazamiento.

Consideremos el caso general de una fuerza $\vec{F}$ cualquiera que mueve a una partícula sobre una trayectoria curva como se muestra en la siguiente figura.



Sea P la posición de la partícula en un instante t, la posición con respecto al origen de coordenadas O está dada por

$\vec{OP} = \vec{r}$

La partícula en el tiempo Δt describe la trayectoria $\overset{\frown}{PP'}$, si esta es suficientemente pequeña se puede asimilar como la cuerda $\vec{PP'}$, el desplazamiento de la partícula en el tiempo Δt es $\vec{PP'} = \Delta \vec{r}$

Cuando P' tiende a P $(\Delta t \rightarrow 0)$.

La dirección de la cuerda $\vec{PP'}$ es el de la tangente PT en P, $\Delta \vec{r}$ es $d\vec{r}$, la fuerza es constante en dirección y sentido.

El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ para el desplazamiento $d\vec{r}$ es un trabajo diferencial.

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$dW = \left|\vec{F}\right| \left|d\vec{r}\right| \cos\theta$

$dW = F\, ds \cos\theta$

$dW = F_t\, ds$

Es el trabajo realizado por la componente tangencial de la fuerza F_t.

El trabajo de la componente normal F_n es nulo.

Para evaluar el trabajo realizado para ir desde el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a un punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tenemos que integrar el trabajo diferencial.

$$W_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para esto tenemos que conocer como varía $\vec{F}$

$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

Siendo $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

Tenemos: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Luego: $W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$

La unidad de trabajo es una unidad derivada de las unidades de fuerza y de longitud.

$[W] = FL = ML^2T^{-2}$

En el sistema Internacional la unidad de trabajo es el Joule (J).

1 Joule = (1 Newton)(1 metro)

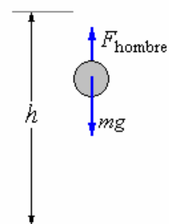
Ejemplo 1. Un hombre levanta una masa *m* con una fuerza tal que la coloca a una altura *h* sobre el piso a velocidad constante.

a) ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad?

b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce el hombre?

Solución.

a)



$$W_{gravedad} = \int_{y=0}^{y=h} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^h \left(-mg\hat{k}\right) \cdot dy\hat{k}$$

$$= -mg \int_0^h dy = -mgh$$

b) Podríamos hacerlo directamente por la ley de Newton, pero lo haremos con los conceptos de trabajo. Como la masa se mueve con velocidad constante, el trabajo realizado es cero.

$W_{hombre} + W_{gravedad} = 0$

$\Rightarrow W_{\text{hombre}} = -W_{gravedad} = mgh$

También tenemos:

$$W_{\text{hombre}} = \int_{y=0}^{y=h} \vec{F}_{\text{hombre}} \cdot d\vec{r} = \int_0^h F\hat{k} \cdot dy\hat{k}$$

$$= F\int_0^h dy = Fh$$

Luego: $Fh = mgh \Rightarrow F = mg$

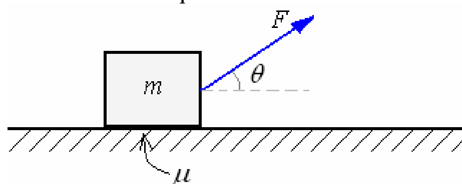
Y $\vec{F} = mg\hat{k}$

Ejemplo 2. Se arrastra una caja de masa m sobre un piso horizontal, el coeficiente de fricción cinético entre la caja el piso es μ, mediante una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal, la caja se desplaza un distancia s hacía la derecha,

a) Calcule el trabajo realizado por la fuerza

b) Calcule el trabajo efectuado por La fuerza de fricción.

e) Determine el trabajo neto efectuado sobre la caja por todas las fuerzas que actúan sobre ella.



Solución.

a) El trabajo efectuado por $\vec{F}$ es:

$$W_F = \int_{x=0}^{x=s} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como $\vec{F} = F\cos\theta\,\hat{i} + F\text{sen}\theta\,\hat{j}$ y $d\vec{r} = dx\hat{i}$

$$W_F = \int_{x=0}^{x=s} \left(F\cos\theta\,\hat{i} + F\text{sen}\theta\,\hat{j}\right) \cdot dx\hat{i}$$

$$= Fs\cos\theta = F_x\,s$$

La componente vertical de $\vec{F}$ no realiza trabajo.

b) Como $\vec{F}_f = -\mu N\hat{i}$

Y $N = mg - F\text{sen}\theta$

Obtenemos $\vec{F}_f = -\mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)\hat{i}$

El trabajo efectuado por $\vec{F}_f$ es

$$W_f = \int_0^s \vec{F}_f \cdot d\vec{r} = \int_0^s -\mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)\hat{i} \cdot dx\hat{i}$$

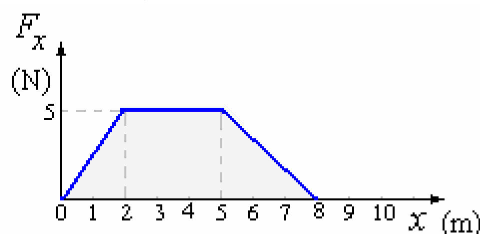
$$= -\mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)s$$

c) El trabajo neto sobre la caja es la suma de los resultados obtenidos en a) y b).

$$W_{neto} = W_F + W_f = F\cos\theta s - \mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)s$$

$$= \left[F\cos\theta - \mu\left(mg - F\text{sen}\theta\right)\right]s$$

Ejemplo 3. Una fuerza que actúa sobre un cuerpo varía con respecto a x como se muestra en la figura. Calcule el trabajo cuando el cuerpo se mueve desde $x = 0$ hasta $x = 8$ m.



Solución.

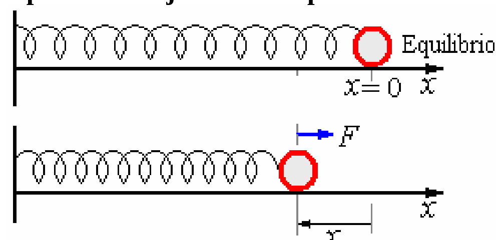
El trabajo realizado por la fuerza es exactamente igual al área bajo la curva desde $x = 0$ hasta $x = 8$.

$$W = \frac{1}{2}(5\text{N})(2-0)\text{m} + (5\text{N})(5-2)\text{m} + \frac{1}{2}(5\text{N})(8-5)\text{m}$$

= (5 + 15 + 7,5) Nm

= 27,5 J

Ejemplo 4. Trabajo realizado por un resorte.



El resorte de la figura, cuando se deforma o estira hasta una cierta posición x, ejercerá una fuerza restauradora $F = -kx$.

Solución.

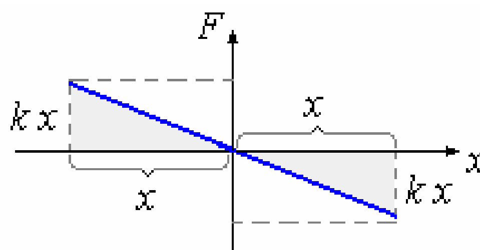
Supongamos que el objeto se empuja hacia la izquierda una distancia x respecto a la posición de equilibrio y se deja libre.

El trabajo realizado desde $x_1 = -x$ hasta $x_2 = 0$ por la fuerza del resorte a medida que el objeto se mueve es

$$W = \int_{x_1=-x}^{x_2=0} F_x dx = \int_{-x}^{0} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Y si consideramos el trabajo realizado por el resorte a medida que se estira de $x_1 = 0$ a $x_2 = x$ el trabajo es $W = -\frac{1}{2}kx^2$

Este resultado podemos obtenerlo también de La gráfica F versus x, como se muestra en la figura siguiente.



Ejemplo 5. La posición de una partícula en el plano está dada por $\vec{r} = 3t\hat{i} - 2t^2\hat{j}$ (t en segundos, r en

metros), la fuerza ejercida sobre la misma es

$\vec{F} = 4\hat{i} - 5\hat{j}$ (en Newton).

¿Qué trabajo se realiza sobre la partícula en el intervalo de t = l s a t = 3 s?

Solución.

$\vec{r} = 3t\hat{i} - 2t^2\hat{j} \Rightarrow d\vec{r} = 3dt\hat{i} - 4tdt\hat{j}$

Luego

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(4\hat{i} - 5\hat{j}\right)\cdot\left(3dt\hat{i} - 4tdt\hat{j}\right)$$
$$= 12dt + 20tdt$$

El trabajo W realizado sobre la partícula entre t = 1 y t = 3.

$$W = \int_{xt=1}^{t=3} dW = \int_1^3 (12 + 20t)dt$$
$$= \left[12t + \frac{1}{2}20t^2\right]_1^3 = 126 - 22 = 104 \text{ J}$$

El trabajo realizado sobre la partícula es 104 Joules.

ENERGIA CINETICA

Consideremos una partícula de masa m bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$.

La segunda ley de Newton afirma que:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

También sabemos que $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$.

Multiplicando escalarmente:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Como $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ es el trabajo diferencial dW y

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot d\vec{v}\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$$
$$= m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

De aquí:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Reemplazando obtenemos:

$$dW = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

El trabajo para ir de P_1 donde la velocidad es v_1 al punto P_2 donde la velocidad es v_2 será:

$$W_{1\to 2} = \int_{P_1}^{P_2} dW = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Aquí tenemos una medida para el trabajo realizado sobre la partícula expresada en función de la variación de la magnitud $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$.

Esta magnitud se define como la ENERGIA CINETICA K de la partícula.

Entonces: $K = \frac{1}{2}mv^2$

La energía cinética es una propiedad general del movimiento de la partícula es la ENERGIA DEL MOVIMIENTO. Sus dimensiones son las de trabajo.

$[K] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$

Su unidad es la misma que la del trabajo.

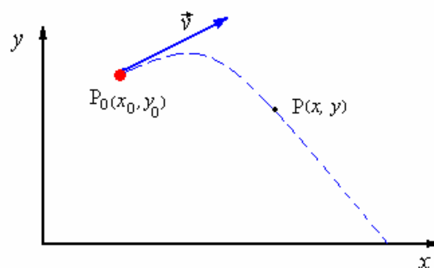
Resulta conveniente escribir:

$W_{1\to 2} = K_2 - K_1 = \Delta K$

El trabajo realizado por la fuerza al desplazar una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula.

Ejemplo 6. Encontrar la variación de la energía cinética de un proyectil en función de su altura. Se lanza un proyectil de masa m desde el punto P_0 (x_0, y_0) con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$.

Solución.



Para un proyectil la posición en función del tiempo es;

$$x = x_0 + v_{0x}t,\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Y la velocidad

$v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} - gt$

La energía cinética en P_0 es

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right)$$

La energía cinética en P es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - 2v_{0y}gt + g^2t^2\right)$$

La variación de energía entre P y P_0 es:

$$\Delta K = K - K_0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

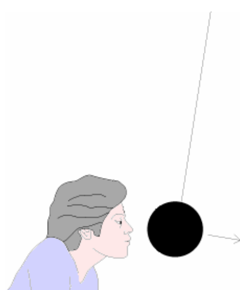
$$= \frac{1}{2}m\left(-2v_{0y}gt + g^2t^2\right)$$

$$= -mg\left(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

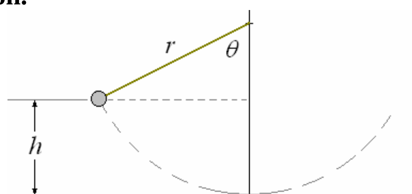
Como $y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

Resulta $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(y - y_0)$

Ejemplo 7. En una demostración experimental para ilustrar la conservación de la energía por medio del dispositivo siguiente. Se ata una bola del bowling a un extremo de una cuerda, y se sujeta el otro extremo al techo de la sala de conferencias. Se sostiene la bola parado en una escala tijeras alta, Para la demostración se suelta del reposo en el extremo de la nariz, la bola volverá de la oscilación más arriba y golpeará violentamente la cara, (intente esto alguna vez si usted desea experimentar un juego para asustar)
La demostración impresiona a la clase, pero no por la razón esperada. Aunque la cuerda es bastante fuerte para sostener la bola cuando está inmóvil, cuando la dejé ir, la cuerda se rompió en el fondo del arco y la bola fue despedida alrededor del salón "Boing boing, boing" y dispersó a los presentes en todas las direcciones.
Una bola de bowling realmente rebota en el concreto. Suponga que la bola pesa 80 N y la cuerda tenía 4,0 m de largo y tenía una resistencia a ruptura de 120 N. ¿Cuál es el máximo ángulo con la vertical con el que se habría podido lanzar la bola sin tener la rotura de la cuerda?



Solución.



La cuerda debe proporcionar suficiente fuerza ascendente para balancear el peso más la fuerza radial necesaria para que la bola haga la curva hacia arriba. La tensión en la cuerda será así la mayor en el punto más bajo del arco, donde la fuerza de la gravedad está dirigida hacia abajo y la bola se mueve lo más rápidamente.

$$\text{fuerza radial} = \frac{mv^2}{r}$$

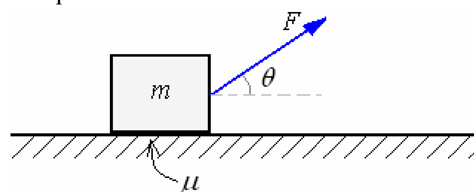
$$T - mg = \frac{mv^2}{r} \text{ y } mhg = \frac{1}{2}mv^2$$

$$h = r - r\cos\theta \quad T - mg = 2mg(1 - \cos\theta)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{T - mg}{2mg} = 1 - \frac{120 - 80}{2(80)} = 0,75$$

$$\Rightarrow \theta = 41,4^\circ$$

Ejemplo 8. Se arrastra una caja de masa m sobre un piso horizontal, el coeficiente de fricción cinético entre la caja el piso es μ, mediante una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal. Si se empieza a jalar desde el reposo y considerando que ya se inició el movimiento ¿Cuál es la velocidad del bloque después que recorre una distancia s?



Solución.
En este caso como la fuerza F es constante, por la ley de Newton podríamos encontrar la aceleración, que es constante, pero vamos a hacerlo por conceptos de Energía Cinética y Trabajo.
Encontramos que

$$W_{Neto} = [F\cos\theta - \mu(mg - Fsen\theta)]s$$

Sabemos que

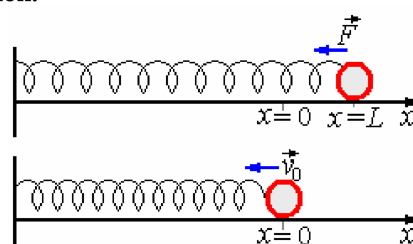
$$W_{Neto} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Como: $v_1 = 0$ y $v_2 = v$

Finalmente:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}[F\cos\theta - \mu(mg - Fsen\theta)]s}$$

Ejemplo 9. Para el caso de la masa *m* atada a un resorte con constante de rigidez *k* . ¿Cuál es la velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio después de estirarlo una longitud *L* y soltarlo?
Solución.



El trabajo realizado desde $x = L$ a $x = 0$ por la fuerza restauradora del resorte $F = -kx$ Es:

$$W_R = \frac{1}{2}kL^2$$

También $W_R = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

Siendo $v_2 = v_0$ y $v_1 = 0$

Tenemos $\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0$

$$\Rightarrow\ v_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}L$$

Para el caso que mostramos la respuesta correcta es la negativa.

Ejemplo 10. Un objeto de masa *m* se mueve en el eje *x* sujeto a la fuerza $\vec{F} = m\frac{A}{x^2}\hat{i}$ donde *A* es una constante y *x* es la distancia desde el origen.
a) ¿Cuánto trabajo realiza esta fuerza si el objeto se mueve de *x* = *a* a *x* = *b*?
b) ¿Si la masa tenía una velocidad *v* en la dirección positiva de *x*, Cuál es su velocidad en *b*?
Solución.
a) El trabajo que realiza la fuerza para mover la masa desde *x* = *a* a *x* = *b* es:

$$W_{ab} = \int_{x=a}^{x=b}\vec{F}\cdot d\vec{r}\ ,\ \vec{F} = m\frac{A}{x^2}\hat{i}\ ,\ d\vec{r} = dx\hat{i}$$

Luego $W_{ab} = \int_a^b m\frac{A}{x^2}\hat{i}\cdot dx\hat{i} = mA\int_a^b\frac{dx}{x^2} =$

$$mA\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = mA\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

b) Como $W_{ab} = K_b - K_a = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$

Siendo $v_a = v_0$

Tenemos $mA\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$v_b = \sqrt{2A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + v_0^2}$$

SISTEMAS CONSERVATIVOS Y NO CONSERVATIVOS

Un sistema conservativo es aquel en el que el trabajo realizado por las fuerzas del sistema es independiente de la trayectoria seguida por el móvil desde una posición a otra, no existen fuerzas de rozamiento, ni dispositivos que puedan producir pérdida de la energía cinética.



Si en un sistema conservativo el trabajo efectuado por la fuerza para desplazar la partícula de A a B es independiente del camino entre A y B, se puede escribir:

$$W_{AB} = -W_{BA}$$

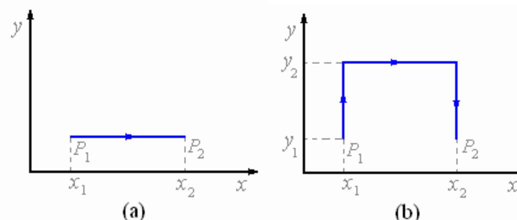
En un circuito cerrado

$$W_{AA} = W_{AB} + W_{BA}$$

Como $W_{AB} = -W_{BA}\ \Rightarrow\ W_{AA} = W_{AB} - W_{AB} = 0$

El trabajo total efectuado por una fuerza conservativa sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve alrededor de cualquier trayectoria cerrada y regresa a su posición inicial.
Naturalmente la definición de un sistema no conservativo es aquel que no satisface las condiciones anteriores.

Ejemplo 11. Sistema no Conservativo. - La fuerza de fricción. Supongamos que un bloque se mueve del punto P_1 (x_1, y_1) al punto P_2 (x_2, y_1), siguiendo Las trayectorias mostradas en las figuras siguientes, el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es μ. Calcular el trabajo realizado por la fricción en ambos casos.



Solución.
Por la trayectoria (a)

$$W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2}\vec{F}_f\cdot d\vec{r}$$

Aquí $\vec{F}_f = -\mu N\hat{i}\ ,\ d\vec{r} = dx\hat{i}$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2}(-\mu N)dx = \mu N(x_2 - x_1)$$

Por la trayectoria (b)

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2}\vec{F}_{f1}\cdot d\vec{r}_1 + \int_{x_1}^{x_2}\vec{F}_{f2}\cdot d\vec{r}_2 + \int_{y_2}^{y_1}\vec{F}_{f3}\cdot d\vec{r}_3$$

Aquí

$$\vec{F}_{f1} = -\mu N\hat{j}\ ,\ d\vec{r}_1 = dy\hat{j}$$

$$\vec{F}_{f2} = -\mu N\hat{i}\ ,\ d\vec{r}_2 = dx\hat{i}$$

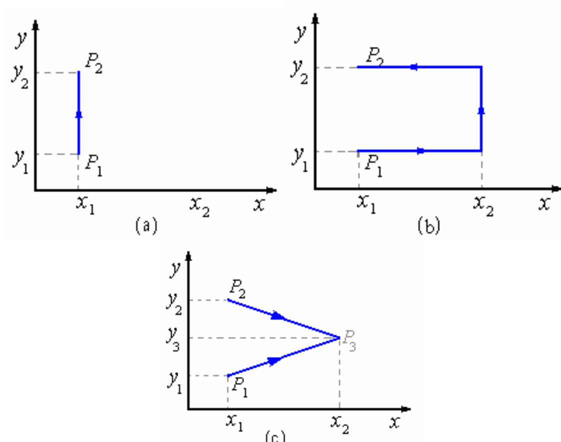
$$\vec{F}_{f3} = \mu N\hat{j}\ ,\ d\vec{r}_3 = dy\hat{j}$$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2}(-\mu N)dy + \int_{x_1}^{x_2}(-\mu N)dx + \int_{y_2}^{y_1}(\mu N)dy$$
$$= -\mu N(y_2 - y_1) - \mu N(x_2 - x_1) + \mu N(y_1 - y_2)$$
$$= -\mu N(x_2 - x_1) - 2\mu N(y_2 - y_1)$$

Obviamente el trabajo realizado por la fuerza de fricción por las dos trayectorias a) y b) no son iguales, por consiguiente cuando hay fuerza de fricción el sistema no es conservativo. (La fricción no es conservativa).

Ejemplo 12. Sistema Conservativo. La fuerza de la gravedad Supongamos que un bloque de masa *m* se mueve del punto P$_1$(x_1 ,y_2) al punto P$_2$(x_2 ,y_2) donde *y* es la dirección vertical. Calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitacional con los tres casos mostrados en la figura.



Solución.

Por la trayectoria a)

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

Aquí

$$\vec{F}_g = -mg\hat{j}, \; d\vec{r} = dy\hat{j}$$

Luego

$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_2} -mgdy = -mg(y_2 - y_1)$$

Por la trayectoria b)

$$W_{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_1 + \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_2 + \int_{x_2}^{x_1} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_3$$

Aquí

$$\vec{F}_g = -mg\hat{j}, \; d\vec{r}_1 = dx\hat{i}, \; d\vec{r}_2 = dy\hat{j}, \; d\vec{r}_3 = dx\hat{i}$$

Luego

$$W_{P_1P_2} = 0 + \int_{y_1}^{y_2}(-mg)dy + 0 = -mg(y_2 - y_1)$$

Igual que en a)

Por la trayectoria c).

$$W_{P_1P_2} = W_{P_1P_3} + W_{P_3P_2}$$

$$W_{P_1P_2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} + \int_{r_3}^{r_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

Aquí

$$\vec{F}_g = -mg\hat{j}, \; d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$
$$\vec{F}_g \cdot d\vec{r} = (-mg\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = (-mg)dy$$

Luego

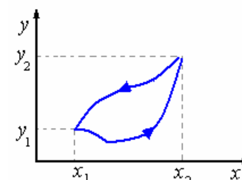
$$W_{P_1P_2} = \int_{y_1}^{y_3}(-mg)dy + \int_{y_3}^{y_2}(-mg)dy$$
$$= -mg(y_3 - y_1) - mg(y_2 - y_3)$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$

Resultado igual que en a) y b)

Luego la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa.

Trabajo en una trayectoria cerrada.

Si completamos la trayectoria volviendo al punto inicial, tenemos una trayectoria cerrada y el trabajo es cero.



El trabajo para ir de 1 a 2 es

$$W_{r_1r_2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_{x_1}^{x_2} (F_x\hat{i} + F_y\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy$$

Como

$$\vec{F} = -mg\hat{j}: \; F_y = -mg \,.\; F_x = 0$$
$$W_{r_1r_2} = 0 - mg(y_2 - y_1)$$
$$= -mg(y_2 - y_1)$$

El trabajo para ir 2 a 1 es

$$W_{r_2r_1} = \int_{x_2}^{x_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_2}^{x_1} F_x dx + \int_{y_2}^{y_1} F_y dy$$
$$= 0 - mg(y_1 - y_2)$$
$$= -mg(y_1 - y_2)$$

El trabajo total es

$$W_{r_1r_1} = W_{r_1r_2} + W_{r_2r_1}$$
$$= -mg(y_2 - y_1) - mg(y_1 - y_2)$$
$$= 0$$

Esto no sucedería en el caso de una fuerza no conservativa, como la fuerza de fricción.

LA FUNCION ENERGÍA POTENCIAL

El trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

Para mover una partícula de

$P_1(x_1. y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es igual a:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2}\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

Para un sistema conservativo el trabajo es independiente de la trayectoria seguida.

Su integral debe ser un diferencial exacto, digamos - dU, tal que integrándolo, solamente los límites determinan el valor de la integral.

Esto es:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2}(-dU) = (-U)_{P_1}^{P_2} = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

Aquí llamamos a U, energía potencial, cuyas unidades son las mismas que las de trabajo.

Hemos determinado la función energía potencial a partir de una fuerza dada.

Consideremos ahora el problema inverso, a partir de una función energía potencial determinar la fuerza

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Como U es función de x, y y z, podemos escribir esta derivada en función de sus derivadas parciales:

$$dU_{(x,y,z)} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Relacionando con los componentes de la fuerza obtenemos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Ejemplo 13. La fuerza de la gravedad es un ejemplo de fuerza conservativa.

Solución.

Tomemos la vertical a la tierra como el eje y, tal que:

$$\vec{F}_g = F_g\hat{j} = -mg\hat{j}$$

El trabajo realizado por la gravedad cuando la partícula se desplaza desde el punto y_1 al punto y_2 es:

$$W_{12} = \int_{y_1}^{y_2} -mg\hat{j}\cdot dy\hat{j} = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$= -mg\left(y_2 - y_1\right)$$

Como $W_{12} - \Delta U$:

$$-mg\left(y_2 - y_1\right) = -\Delta U = U_{(y_1)} - U_{(y_2)}$$

O $\Delta U = U_{(y_2)} - U_{(y_1)} = mgy_2 - mgy_1$

Si consideramos la energía potencial igual a cero en el nivel de referencia $y = 0$, la energía potencial a cualquier altura con respecto a $y = 0$ es:

$$U_{(y)} = mgy$$

También podíamos haber determinado esta función a partir de:

$$dU = -F_g dy \Rightarrow dU = -(-mg)dy = mgdy$$

Integrando

$$\int dU = \int mgdy + C$$

$$U_{(y)} = mgy + C$$

Donde C es una constante relacionada con las condiciones de cada caso, por ejemplo aquí consideramos para $y = 0$

$\Rightarrow U_{(0)} = 0$.

La constante es $C = 0$

$\Rightarrow U_{(y)} = mgy$

Como comprobación, a partir de esta energía potencial podemos encontrar la fuerza.

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial mgy}{\partial x} = 0$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial mgy}{\partial y} = -mg$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial mgy}{\partial z} = 0$$

Luego: $\vec{F} = -mg\hat{j}$

Ejemplo 14. Determinar la función energía potencial asociada a un resorte de constante de rigidez k.

Solución.

Consideremos que el resorte está en el eje x, y se estira en esa dirección.

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

Tenemos que:

$$dU = -F_x dx = -(-kx)dx = kxdx$$

Integrando

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Si para la posición de equilibrio $x = 0$, la energía potencial es cero, C es igual a cero y

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Ahora realicemos el problema inverso:

Dado $U = \frac{1}{2}kx^2$ encontrar la fuerza correspondiente:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Luego $\vec{F} = -kx\hat{i}$

Ejemplo 15. Energía potencial gravitatoria cerca de la tierra. Por la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza de atracción de dos masas es directamente proporcional al producto de estas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}$$

Donde *m* es la masa e un cuerpo, *M* la masa de la tierra, *r* la distancia entre las masas, *G* es la constante gravitatoria universal.
Si *r* = *R* (radio de la tierra), la masa *m* está sobre la superficie de la tierra y

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{R^2}\hat{r} = -mg\hat{r}$$

La energía potencial es

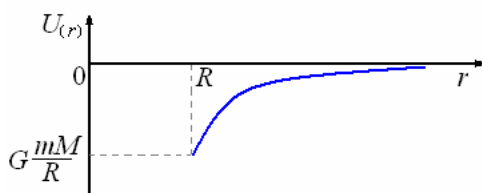
$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = G\frac{mM}{r^2}dr$$

$$U = \int G\frac{mM}{r^2}dr + C$$

$$U = -G\frac{mM}{r} + C$$

Para evaluar la constante *C* consideremos que el potencial *U* es cero para *r* infinito, de aquí C es igual a cero,
Luego

$$U_{(r)} = -G\frac{mM}{r}$$



CONSERVACION DE LA ENERGÍA
Hasta esta parte tenemos dos formas de encontrar el trabajo realizado sobre un objeto por una fuerza, la primera válida para todo caso ya sea fuerza conservativa o no conservativa

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K .$$

Y la segunda para el caso de fuerzas conservativas

$$W_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Luego podemos escribir

$$W_{12} = K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

Colocando las energías iniciales a un lado y las finales al otro tenemos:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Esta ecuación es la forma matemática de "El principio de conservación de la energía mecánica".
Si definimos la energía mecánica total del sistema *E* como la suma de la energía cinética y potencial se puede expresar la conservación de la energía mecánica como:

$$E = K + U = \text{Constante}$$

Ejemplo 16. Fuerza de la gravedad: Se suelta una partícula de masa *m* desde la altura *h* sobre el suelo. Cuando la partícula está a una altura y del suelo, su velocidad es *v*.
Su energía potencial es $U = mgy$

Su energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$

La energía mecánica total es:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Para $y = h$, $v = 0$

$$E = 0 + mgh = mgh$$

Para $y = 0$, $v = v_0$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

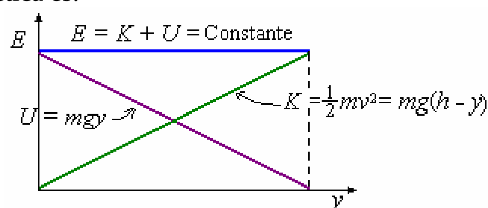
Para cualquier instante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$

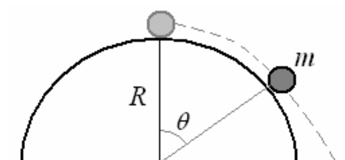
De aquí $v^2 = 2g(h - y) \Rightarrow$

$$v = \sqrt{2g(h - y)}$$

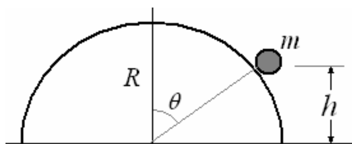
El gráfico de la variación de energía potencial y cinética es:



Ejemplo 17. Una masa pequeña *m* se suelta desde el reposo de la parte más alta de una superficie esférica de radio *R*, sin fricción. ¿A qué ángulo con vertical dejará el contacto con la esfera?



Solución.
Cuando la masa está a una altura *h* su energía es igual a cuando está en el punto más alto.



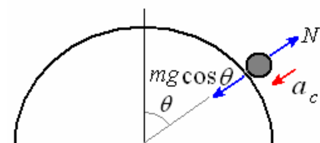
$$mgR + 0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

Con $h = R\cos\theta$

$$mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v^2 = gR(2 - 2\cos\theta)$$

La segunda ecuación de Newton cuando la masa esta en la posición del ángulo θ:



Con $a_c = \frac{v^2}{R}$:

$$N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}$$

La masa deja la superficie esférica cuando:

$N = 0$

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} = \frac{mgR(2 - 2\cos\theta)}{R}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{v^2}{Rg} = 2 - 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = 48{,}2^o$$

Ejemplo 18. Fuerza de un resorte: Se jala una masa a sujeta a un resorte de constante *k* sobre una superficie sin fricción, desde la posición de equilibrio *x* = 0 hasta una distancia *L* y se suelta.
A una distancia *x* de la posición de equilibrio la velocidad de la masa es *v*.

Su energía potencial es $U = \frac{1}{2}kx^2$

Su energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2$

Su energía mecánica total es:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para $x = L$, $v = 0$

$$E = 0 + \frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}kL^2$$

Para $x = 0$, $v = v_0$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

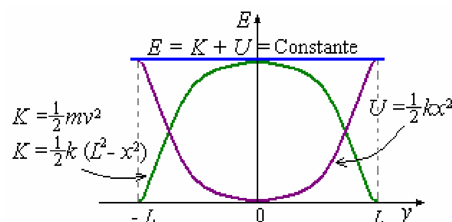
Para cualquier instante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kL^2$$

De aquí: $v^2 = \frac{k}{m}\left(L^2 - x^2\right)$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(L^2 - x^2\right)}$$

El gráfico de la variación de la energía potencial y cinética es:



Ejemplo 19. Calcular la velocidad necesaria para que una partícula pueda escapar de la atracción de la tierra. La energía total *E* de una partícula de masa *m* que está a una distancia *r* del centro de la tierra y que tiene una velocidad *v* es:

$E = K + U$, donde $K = \frac{1}{2}mv^2$ y

$$U = -G\frac{mM}{r}$$

Luego: $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \text{Constante}$

Si la partícula escapa de la atracción de la tierra y se sitúa a una distancia infinita de ésta su potencial es cero.

$$r \to \infty , \ U_\infty = -G\frac{mM}{r} \to 0$$

En esta región con la velocidad menor posible

$v_\infty = 0$ Tenemos $K_\infty = 0$

Luego: $E = K + U = 0$

Como *E* es constante $\Rightarrow E = 0$

La energía *E* de la partícula en la superficie de la tierra con la velocidad v_e para que pueda escapar:

$$E = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{mM}{R} = 0$$

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Como en la superficie de la tierra

$$F = -G\frac{mM}{R^2} = -mg \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$$

Tenemos: $v_e = \sqrt{2gR}$

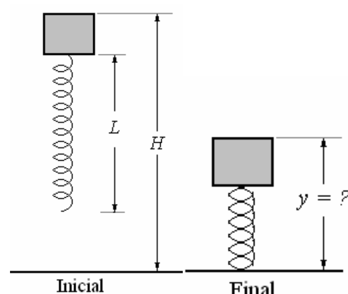
Siendo

$$g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ y } R = 6{,}4\times 10^6\text{m}$$

Obtenemos; $v_e = 1{,}12\times 10^4 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Ejemplo 20. Se tiene un resorte de longitud *L* y constante *k* conectado a la base de un bloque de masa *m*, Se suelta el bloque desde la altura *H*. ¿Cuál será la distancia mas cercana al piso que alcanzará el bloque antes de rebotar?

Solución.



En el instante inicial la energía es solamente la potencia1 gravitatoria es $U = mgH$, la energía cinética es cero, tal que la energía total es $E = mgH$.

En el instante final: La energía potencial es la correspondiente a la masa a una altura *y*, más la del resorte comprimido una longitud $(L-y)$, es decir:

$$U = U_g + U_r = mgy + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

Como en ese instante ha cesado el movimiento, la energía cinética es cero,

La energía total es:

$$E = mgy + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

Por la conservación de la energía

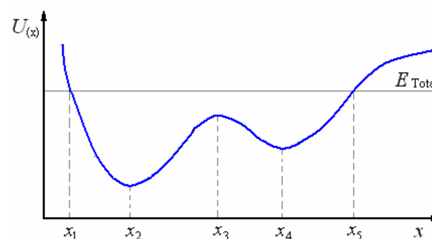
$$mgH = mgy + \frac{1}{2}k(L-y)^2$$

La solución de esta ecuación es:

$$y = -\left(\frac{mg}{R} - L\right) \pm \frac{mg}{k}\left[1 + \frac{2k}{mg}(H-L)\right]$$

Siendo el valor positivo de *y* la solución significativa.

Ejemplo 21. El gráfico de la figura muestra la función potencial y la energía total de un movimiento. ¿Qué podemos decir acerca del movimiento?



Solución.

Velocidad de la partícula:

Tenemos que

$$E_{Total} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U_{(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E - U_{(x)} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{(x)}\right)}$$

La energía cinética:

- Es igual a cero en x_1 y x_5.
- Tiene su valor máximo donde $U_{(x)}$ es mínimo, el punto x_2

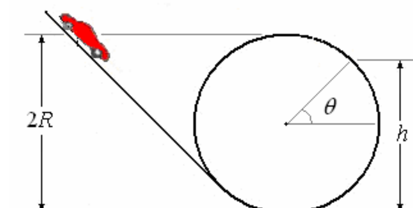
La partícula se mueve entre x_1 y x_5, fuera de estos valores la velocidad sería imaginaria.

Como $F_x = -\dfrac{dU_{(x)}}{dt}$, la pendiente del gráfico de $U_{(x)}$ en determinado punto corresponde a La fuerza actuante, tal que la fuerza se hace cero donde la pendiente es cero, como en x_2, x_3 y x_4.

La fuerza es positiva entre x_1 y x_2.entre x_3 y x_4. La fuerza es negativa entre x_2 y x_3, entre x_4 y x_5.

Los puntos en que *U* es mínimo, son posiciones de equilibrio estable, como son x_2 y x_4.

Ejemplo 22. En la figura, un auto de juguete de masa *m* se libera del reposo en la pista circular. ¿Si se suelta a una altura 2*R* sobre el piso, ¿cuán arriba sobre el piso estará cuando sale de la pista, desprecie la fricción?



Solución.

En la figura de arriba:

$$h = R(1 + \text{sen}\,\theta)$$

Despreciando las pérdidas por fricción la energía total es constante, de tal manera que:

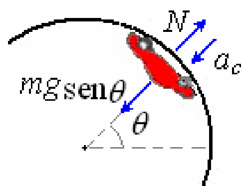
Siendo *v* la velocidad del auto a la altura *h*.

$$mg(2R) = mg(h) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$mg(2R) = mgR(1 + \text{sen}\,\theta) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$gR = gR\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}v^2 \quad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton en la altura *h*:



$$mg\text{sen}\,\theta - N = ma_c$$

$N = 0$, condición de caída.

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Luego:

$$mg\text{sen}\,\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow$$

$$v^2 = gR\text{sen}\,\theta \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$gR = gR\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}gR\text{sen}\,\theta \Rightarrow$$

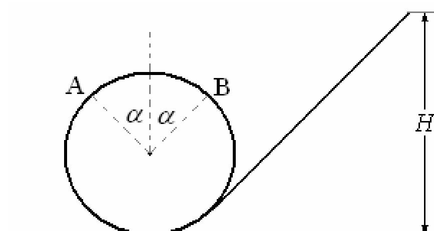
$$gR = \frac{3}{2}gR\text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{2}{3}$$

Finalmente:

$$h = R(1 + \text{sen}\,\theta) = R\left(1 + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{3}R = 1{,}67\,R$$

Ejemplo 23. Una masa pequeña resbala sobre una superficie inclinada pasando por un rizo de radio *R*.
a) ¿Cuál es la altura mínima *H* de la que debe soltarse a fin de que el cuerpo no deje la superficie interior del rizo al dar la vuelta?
b) ¿Con que velocidad llega la masa al punto A?
c) ¿Cuál es el valor del ángulo α, con el que se puede retirar el segmento $\overset{\frown}{AB}$ de la circunferencia de tal modo que la masa que sale de A alcance el punto B después de viajar una cierta distancia en el aire.

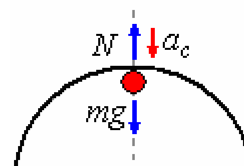


Solución.
a) Siendo *v* la velocidad de la masa en la parte superior del rizo.
Por conservación de la energía:

$$mg(H) = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$gH = 2gR + \frac{1}{2}v^2 \quad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton en ese punto:



$$mg - N = ma_c$$

$N = 0$, condición de caída.

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Luego:

$$mg = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow$$

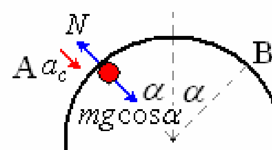
$$v^2 = gR \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$gH = 2gR + \frac{1}{2}gR \Rightarrow$$

$$H = \frac{5}{2}R \Rightarrow H = 2{,}5R$$

b) Sea *v* la velocidad en el punto A su altura es $h = R(1 + \cos\alpha)$



Por conservación de la energía:

$$mg(H) = mgR(h) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

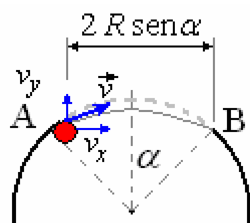
$$mg(2{,}5R) = mgR(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = 2g(2{,}5R) - 2gR(1 + \cos\alpha) \Rightarrow$$

$$v^2 = 3gR - 2gR\cos\alpha \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{gR(3 - 2\cos\alpha)}$$

c) La masa sale del punto A, como un proyectil con velocidad inicial $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$



En el tiempo *t* de su recorrido vertical debe alcanzar al punto B.
Recorrido vertical:

$$y = v\text{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando llega a B, *y* = 0:

$$0 = v\text{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \frac{2v}{g}\text{sen}\alpha$$

Su recorrido horizontal es

$$x = v_x t = v\cos\alpha t$$

Para $t = \frac{2v}{g}\text{sen}\alpha$ debe de estar en B, luego:

$$2R\text{sen}\alpha = v\cos\alpha\left(\frac{2v}{g}\text{sen}\alpha\right) \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{gR}{\cos\alpha}$$

Igualando esta expresión de la velocidad con la encontrada anteriormente:

$$gR(3 - 2\cos\alpha) = \frac{gR}{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\cos^2\alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0$$

Resolviendo:

$$\cos\alpha = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

En nuestro caso tomamos la solución ½, con la que obtenemos $\alpha = 60°$

Ejemplo 24. Un arco del tiro al arco ejerce la fuerza *kx* de la ley de Hooke en una flecha cuando la cuerda se jala una distancia *x*. Se supone que un arquero ejerce una fuerza de 220 N jalando a la flecha una distancia de 64 cm.
a) ¿Cuál es la constante del resorte del arco?
b) ¿Cuál es la velocidad de una flecha de masa 24 g cuando deja el arco?



Solución.

a) $k = \frac{F}{x} = \frac{220}{0,64}$ = 344 N/m

b) $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$\frac{1}{2}kx^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}x$$

$$v = \sqrt{\frac{344}{0,024}}(0,64) = 76,6 \text{ m/s}$$

Ejemplo 24. Puenting. Un saltador que pesa 800 N se ata con una cuerda elástica al tobillo y se salta de una torre alta. La cuerda tiene una longitud si estirar de 30 m, y un extremo se une al punto donde el salto comienza. ¿La constante del resorte de la cuerda elástica es 200 N/m. ¿Cuánto recorrerá el saltador antes de que la cuerda detenga su descenso?



Solución.
Sea el punto más bajo del salto *h* = 0. La energía cinética inicial y la energía cinética en el punto más bajo son ambas igual a cero.
Tal que por la conservación de la energía:

$$mgh = 0 + \frac{1}{2}kx^2, \text{ donde } x = h - 30.$$

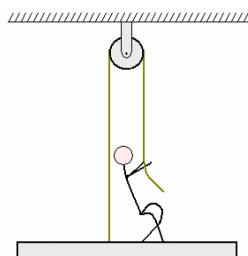
Sustituyendo
mg = 800 N y *k* = 200 N/m, y resolviendo:

$$h^2 - 68h + 900 = 0 \Rightarrow$$

$$h = 68 \pm \sqrt{(68)^2 - 4(900)} = 50 \text{ m, o } 18 \text{ m.}$$

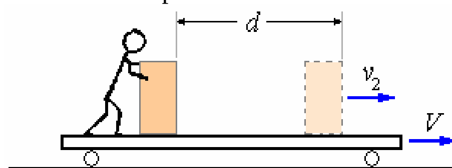
La solución correcta es *h* = 50 m. La solución *h* = 18 m corresponde al rebote que comprime la cuerda “amortiguador auxiliar”, pero una cuerda no se comprime como un resorte.

Ejemplo 25. En la figura mostrada, el hombre y la plataforma tienen una masa *m*, el hombre se eleva una distancia *h* tirando la cuerda del lado derecho.
a) ¿En cuánto aumenta su energía potencial gravitatoria?
b) ¿Qué fuerza debe ejercer para elevarse?
c) ¿Qué longitud de cuerda debe tirar para llegar a la posición superior?
d) ¿Despreciando el rozamiento ¿Qué trabajo habrá realizado?

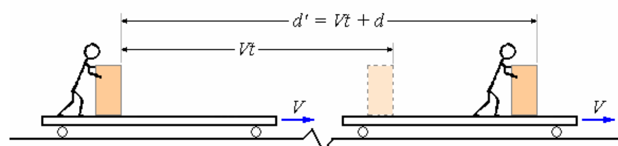


Solución.
a) La energía potencial gravitatoria es
$U_{(y)} = mgy + C$
Para la posición inicial
$U_1 = mgy_1 + C$
Para la posición final
$U_2 = mgy_2 + C$
El aumento de la energía potencial gravitatoria es:
$U = U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1) = mgh$
b) La fuerza para elevar el sistema, siendo esta conservativa,
$$F = -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg$$
Como la polea divide en dos, la fuerza F_h que debe ejercer el hombre es: $F_h = \frac{mg}{2}$.
c) Para llegar a la posición superior la cuerda debe ser tirada en una longitud dos veces *h*
$d = 2h$.
d) EL trabajo realizado por el hombre es:
$$W_h = F_h d = \left(\frac{mg}{2}\right)(2h) = mgh$$
Justamente igual al cambio de energía.

Ejemplo 26. Observadores en movimiento relativo. Sobre una plataforma en movimiento horizontal con una velocidad constante *V*. un hombre empuja una caja de masa *m* con una fuerza *F* una distancia *d* partiendo del reposo. Demostrar la validez de la conservación de la energía desde los puntos de vista de observadores en marcos inerciales diferentes.
Solución.
Las leyes de Newton se cumplen sólo en marcos de referencia inerciales. Si se cumplen en uno en particular entonces se cumplen en todos los marcos de referencia que se muevan a velocidad constante en relación a este mareo.
a) Observador en la plataforma.



El observador en la plataforma ve que la caja, de masa *m*, se mueve bajo la acción de la fuerza *F*. El trabajo realizado para mover la distancia *d* es:
$W = Fd$
La aceleración de la caja es $a = \frac{F}{m}$
Como la caja parte del reposo su velocidad en la posición final es:
$$v_2 = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$
El observador determina que el cambio de energía:
$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$
Como $v_1 = 0$ y $v_2 = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$
$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(\frac{2Fd}{m}\right) = Fd$$
El observador sobre la plataforma concluye que:
$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(\frac{2Fd}{m}\right) = Fd$$
$$W = \Delta K$$
b) Observador situado en tierra:



El observador en tierra ve que la caja se mueve bajo la acción de la fuerza *F*, en este caso la caja se mueve la distancia $d' = Vt' + d$,. Siendo *t* el tiempo que demora el recorrido de la distancia *d* sobre la plataforma,
$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2dm}{F}}\text{, luego } d' = V\sqrt{\frac{2dm}{F}} + d$$
El trabajo es:
$$W' = Fd' = F\left(V\sqrt{\frac{2dm}{F}} + d\right)$$
$$W' = Fd + V\sqrt{2Fdm}$$
El observador ve que la caja tiene una velocidad inicial
$$v'_1 = V$$
y una velocidad final
$$v'_2 = V + v_2 = V + \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

El observador en tierra determina que el cambio de energía es:
$$\Delta K' = K'_2 - K'_1 = \frac{1}{2}mv'^2_2 - \frac{1}{2}mv'^2_1$$
$$\Delta K' = \frac{1}{2}m\left(V + \sqrt{\frac{2Fd}{m}}\right)^2 - \frac{1}{2}mV^2$$

$$\Delta K' = Fd + V\sqrt{2Fdm}$$

Aquí se cumple también la conservación de la energía:

$$W' = \Delta K'$$

SISTEMAS NO CONSERVATIVOS.
Supongamos que también intervienen fuerzas no conservativas, como la fricción.

El trabajo total para mover la partícula de r_1 a r_2 es

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$$

Este trabajo es también igual a la suma del trabajo realizado por las fuerzas conservativas y del trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, es decir:

$$W_{12} = W_{12\,\text{CONSERVATIVAS}} + W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

Como:

$$W_{12\,\text{CONSERVATIVAS}} = U_1 - U_2$$

$$W_{12} = U_1 - U_2 + W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

De las expresiones de trabajo total tenemos:

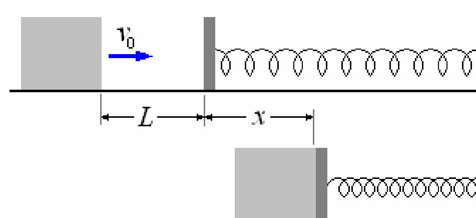
$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

$$\Rightarrow (K_2 - U_2) - (K_1 - U_1) = W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

$$E_2 - E_1 = W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}}$$

A diferencia que en un Sistema conservativo, no es igual a cero.
Esta última expresión nos permite calcular el trabajo de fuerzas no conservativas, fuerzas que en general son complicadas y que en principio deberíamos de calcular resolviendo integrales curvilíneas.

Ejemplo 27. A un bloque de masa *m* se le da un empujón tal que adquiere la velocidad v_0 a lo largo del eje *x*. Después de resbalar distancia *L* golpea un resorte de constante *k*. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la masa es μ . ¿Cuánto se comprime el resorte?
Solución.



Sea *x* La longitud que se comprime el resorte.
La distancia recorrida por la masa es
$(L + x)$.

La energía inicial es solo la energía cinética de la masa:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

La energía final es solo la energía potencial del resorte:

$$E_f = \frac{1}{2}kx^2$$

El trabajo hecho por la fricción

$$W_f = \int_{x_1}^{x_2} F_f\,dx,\ x_1 = 0,\ x_2 = L + x,$$

$$F_f = -\mu N = -\mu mg$$

Luego:

$$W_{12} = \int_0^{L+x} (-\mu mg)dx = -\mu mg(L + x)$$

Como en un Sistema no Conservativo.

$$W_{12\,\text{NO CONSERVATIVAS}} = E_2 - E_1$$

$$-\mu mg(L + x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$x = -\frac{\mu mg}{k} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k^2} - \frac{m}{k}\left(2\mu gL - v_0^2\right)}$$

Ejemplo 28. Un cuerpo de masa 10 kilogramos cae desde una altura de 15 metros y alcanza el suelo en 2 segundos. Considerando constante la fuerza de resistencia del aire.
a) ¿Cuál era la magnitud de la fuerza de resistencia?
b) ¿Cuánta energía mecánica se ha perdido?
c) ¿Qué velocidad tenía el cuerpo inmediatamente antes de chocar Contra el suelo?
Solución.
a) Siendo el peso y la fuerza de resistencia del aire las fuerzas que intervienen y siendo ambas constantes tenemos que la aceleración a del cuerpo es constante.

Como $h = \frac{1}{2}at^2$

La aceleración es $a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2(15)}{2^2} = 7{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$mg - F_g = ma$$

$$F_g = m(g - a) = 10(9{,}8 - 7{,}5) = 23\ \text{N}$$

b) La energía que se ha perdido es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas.

$$W_{\text{NO CONSERVATIVAS}} = F_g d = (23)(15) = 345\ \text{J}$$

c) Como $W_{\text{NO CONSERVATIVAS}} = E_2 - E_1$

Siendo

$$E_1 = K_1 + U_1 = 0 + mgh = (10)(9{,}8)(15)$$
$$= 1470\ \text{J}$$

$$E_2 = K_2 + U_{21} = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = 5v_2^2$$

Tenemos:

$$5v_2^2 - 1470 = 345 \Rightarrow v_2^2 = \frac{1470 - 345}{5} = 225$$

Finalmente: $v_2 = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Una manera directa de llegar al mismo resultado es considerar que la aceleración efectiva de salida es

$a = 7{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, la velocidad después de 2 segundos es:

$$v_2 = at = \left(7{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y LA FRICCIÓN

La ley de la conservación de la energía se puede aplicar a los sistemas donde las fuerzas no conservativas como actúan las fuerzas de la fricción. Si un sistema trabaja contra la fricción, la energía mecánica del sistema disminuirá.

Así si W_f es el trabajo hecho contra la fricción, entonces energía inicial - la energía perdida por la fricción

$$E_1 - W_f = E_2$$

$$U_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 - W_f = U_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

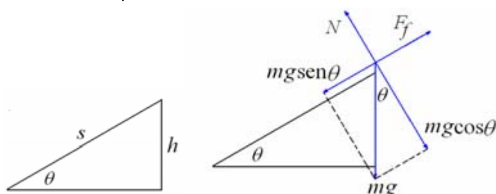
Ejemplo 29. Cerca de Lewiston, Idaho, hay una carretera muy inclinada donde circulan camiones cargados con madera. Han ocurrido varios accidentes serios cuando los carros perdieron sus frenos yendo para abajo de la colina a gran velocidad. Se han construido rampas de contención que se espera puedan detener a los vehículos sin frenos. Suponga que un carro que viaja a 40 m/s encuentra una rampa inclinada para arriba 30º sobre horizontal. La grava floja en la rampa proporciona una fuerza friccional para ayudar a detener al carro mientras sube la rampa. La grava tiene un coeficiente eficaz de fricción de 0,50. ¿Cuán lejos a lo largo de la rampa el carro viajaría antes de detenerse?

Solución.

$N = mg\cos\theta$

$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\theta$$

$$U_1 + K_1 - W_f = U_2 + K_2$$



$$0 + \frac{1}{2}mv^2 - F_f s = mgh + 0 \qquad h = s\,\text{sen}\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - (\mu mg\cos\theta)s = mgs\,\text{sen}\theta$$

$$s = \frac{v^2}{2g(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta)}$$

$$= \frac{(40)^2}{2(9{,}8)(\text{sen}30^\circ + 0{,}5\cos 30^\circ)} = 87{,}5 \text{ m}$$

POTENCIA

Tan importante como saber cual es el trabajo realizado es conocer también la rapidez con la cual se realiza. Para proporcionar una medida cuantitativa de este concepto que incluye tanto el trabajo como el tiempo necesario para realizarlo se tiene a la Potencia.

La potencia mide la rapidez con la que el trabajo se está realizando.

Si se realiza un trabajo W en un intervalo de tiempo (de t_1 a t_2) **la Potencia media** es:

$$P_m = \frac{W_{12}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Cuando $t_2 \rightarrow t_1$, $\Delta t \rightarrow 0$, tendremos

La Potencia instantánea en el instante t.

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

También como

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Tenemos

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

El análisis dimensional

$$[P] = [F][L][T]^{-1} = [M][L]^2[T]^{-1}$$

Su unidad en el sistema internacional es J/s llamado Watt ó Vatio cuyo símbolo es W.

Un múltiplo muy usado es el kilowatt (kW)

1 kW = 10^3 W

Existe una unidad de energía o trabajo en términos de la unidad de potencia el kilowatt-hora (kwh), es la energía convertida o consumida en una hora a una razón constante de 1 kW.

1 kWh (10^3W)(3600s) = 3,6 x 10^6 .J

Para tener una idea de cuanto es 1 Watt, imaginemos que tenemos que levantar una masa de 50 kg. a una altura de 1 metro, cada 5 minutos y realizar este trabajo durante una jornada de 8 horas. Si levanta cada 5 minutos, serán 12 veces por hora, siendo 8 horas por día, hará un total de 12 x 8 = 96 veces al día.

El trabajo realizado es:

$$W = 96mgh$$

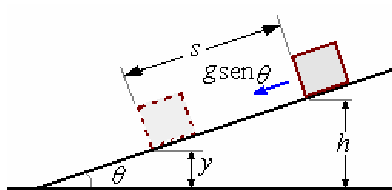
$$= 96(50\text{Kg})(9{,}8\text{m/s})(1\text{m}) = 47040 \text{ J}$$

Para determinar la potencia tenemos que dividirlo por el número de segundos en un día.

$$P = \frac{47040\text{J}}{8 \times 3600s} = 1{,}63 \text{ W}$$

Comparemos esta potencia con la potencia de un motor pequeño de 1 hp (horse power).
El hp es la unidad de potencia en el sistema inglés
1 hp = 746 W

Ejemplo 30. Si un objeto que parte del reposo se desliza por un piso liso inclinado un ángulo θ con respecto a la horizontal de altura *h*, hallar la potencia *P* gastada por la gravedad en función de la posición *y* del objeto con respecto a la parte inferior plano inclinado.
Solución.



La potencia es:

$$P = \frac{dW}{dt}, \text{ siendo } W = Fd$$

Con

$$F = mg \operatorname{sen}\theta \text{ y } d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g \operatorname{sen}\theta\, t^2$$

Tenemos

$$W = (mg \operatorname{sen}\theta)\left(\frac{1}{2}g \operatorname{sen}\theta\, t^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}mg^2 \operatorname{sen}^2\theta\, t^2 \text{ y}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mg^2 \operatorname{sen}^2\theta\, t^2\right)$$

$$= mg^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Como ha recorrido la distancia *s*:

$$s = \frac{(h-y)}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{2}g\operatorname{sen}\theta\, t^2$$

Obtenemos:

$$t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g\operatorname{sen}^2\theta}}$$

Luego

$$P = mg^2 \operatorname{sen}^2\theta \sqrt{\frac{2(h-y)}{g\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$= mg\operatorname{sen}\theta\sqrt{2g(h-y)}$$

Otra manera de obtener es considerar que:

$$P = Fv$$

Donde

$$F = mg \operatorname{sen}\theta \text{ y } v = at = g\operatorname{sen}\theta\, t$$

Luego: $P = (mg \operatorname{sen}\theta)(g \operatorname{sen}\theta\, t)$

$$= mg^2 \operatorname{sen}^2\theta\, t$$

Como $t = \sqrt{\dfrac{2(h-y)}{g\operatorname{sen}^2\theta}}$

Obtenemos:

$$P = mg^2 \operatorname{sen}^2\theta \sqrt{\frac{2(h-y)}{g\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$= mg\operatorname{sen}\theta\sqrt{2g(h-y)}$$

Ejemplo 31. El flujo de agua de un río es de 50 m^3 por segundo, se tiene un desnivel de 200 metros y se quiere aprovechar construyendo una hidroeléctrica
a) Si la energía del agua que cae se utilizase totalmente ¿Que potencia se podría obtener?
b) Si toda la energía procedente de la caída del río se convirtiese en energía eléctrica y se vendiese a un sol el kilowatt-hora ¿Cuánto dinero se cobraría en un día?
Solución.
a) El trabajo realizado por una masa *m* que cae desde una altura *h* es:
$W = mgh$
Como $m = \rho V$,
Donde ρ es la densidad del agua. *V* es el volumen.

$$W = \rho V g h$$

La potencia que se obtiene al pie de la salida es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\rho V g h$$

De estas cantidades la que varía con el tiempo es *V*.

$$\frac{dV}{dt} = 50\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Luego

$$P = \rho g h \frac{dV}{dt}$$

Como

$$\rho = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3},\ g = 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ h = 200\text{m}$$

Obtenemos

$$P = \left(1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(200\text{m})\left(50\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)$$

$= 9{,}8 \times 10^7$ W

b) Si tenemos una potencia $P = 9{,}8 \times 10^7 = 9{,}8 \times 10^4$ kW y consideramos que se consume las 24 horas del día. La energía obtenida es igual a todo el trabajo realizado.

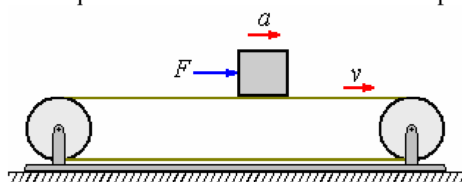
$$dW = Pdt$$

$$W = P\int_{t_1}^{t_2} dt = P(t_2 - t_1) = P\Delta t$$

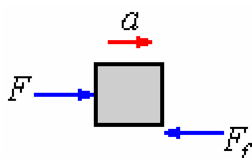
$$W = (9{,}8 \times 10^4 kW)(24h) = 235{,}2 \times 10^4 \text{ kW-h}$$

si el precio de cada kW-h es 1 sol, cada día se obtendrán 2,352 millones de soles.

Ejemplo 32. En la figura, un bloque de masa *m* descansa sobre una faja que se mueve con velocidad constante *v*. El coeficiente de fricción entre el bloque y la faja es μ_k.
Tomando como tiempo inicial $t = 0$, una fuerza horizontal *F* aplicada al bloque le produce una aceleración constante *a*.
a) Determinar la fuerza *F* y la potencia disipada en fricción como función del tiempo.
b) Si la fuerza *F* es ejercida por un hombre que se encuentra sobre la faja. Determinar la potencia que este libera en función del tiempo.
e) Si la fuerza *F* es ejercida por un hombre que camina sobre el piso al costado de la faja. Determinar la potencia que este libera en función del tiempo.



Solución.
a) Aplicando la segunda ley de Newton a la masa *m* en la figura



$$F - F_f = ma$$

Como $F_f = \mu_k N = \mu_k mg$, obtenemos:

$$F = ma + \mu_k mg$$

y la potencia disipada en fricción es

$P = F_f v_0 = (\mu_k mg)v_0$, siendo $v_0 = at$

$$P = \mu_k mgat$$

b) La fuerza que hace el hombre sobre la faja es

$$F = ma + \mu_k mg$$

Su velocidad en función del tiempo es

$$v' = v + v_0 = v + at$$

y la potencia que debe dar el hombre es

$$P = Fv' = (ma + \mu_k mg)at$$

c) La tuerza que hará el hombre sobre el piso es igual al caso anterior:

$$F' = ma + \mu_k mg$$

La velocidad del hombre en función del tiempo en este caso es:

$$v' = v + at$$

Luego la potencia que debe dar el hombre es:

$$P' = F'v' = (ma + \mu_k mg)(v + at)$$

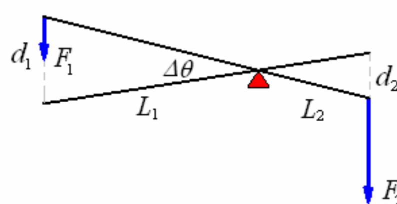
MÁQUINAS
Una máquina simple es un dispositivo usado para magnificar una fuerza o para cambiar una desplazamiento pequeño en grande. Las máquinas comunes son la palanca, el plano inclinado, el gato hidráulico, o una combinación de engranajes.
El trabajo se hace típicamente en la máquina (el trabajo W_1 de entrada), y entonces la máquina alternadamente hace un cierto trabajo W_2 de salida.
El estado de la energía de la máquina no cambia apreciable durante este proceso, así que si la fricción es insignificante, $W_1 = W_2$, basado en la idea de la conservación de energía. Muy a menudo las fuerzas de entrada y de salida son constantes, en las cuales el caso $W_1 = W_2$, lo que lleva a:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow F_2 = \frac{d_1}{d_2} F_1$$

Aquí F_1 actúa sobre una distancia d_1 y F_2 actúa sobre una distancia d_2. La ventaja mecánica de la máquina se define como

$$\text{VM} = \frac{F_2}{F_1}$$

Ejemplo 33. La palanca de barra es un dispositivo usado para levantar objetos pesados (por ejemplo, un piano o una pieza grande de maquinaria). Consiste en una barra larga que se apoya en un fulcro una distancia corta del extremo de levantar de la barra.
Suponga que el fulcro de una barra de la palanca está a 3 centímetros de la carga, y el punto donde usted empuja hacia abajo en el otro extremo está a 1,50 m del fulcro.
¿Qué fuerza mínima tendría que ejercer para levantar una carga de 2000 N?
¿Si mueve el extremo de la barra 4 centímetros hacia abajo, cuánto levantará la carga?
Solución.



Si la barra rota con un ángulo pequeño $\Delta\theta$, entonces

$d_1 = L_1 \Delta\theta$ y $d_2 = L_2 \Delta\theta$

$$F_1 L_1 \Delta\theta = F_2 L_2 \Delta\theta$$

$$F_1 = \frac{L_2}{L_1} F_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{(0,03)}{1,50}(2000)$$

$= 40$ N

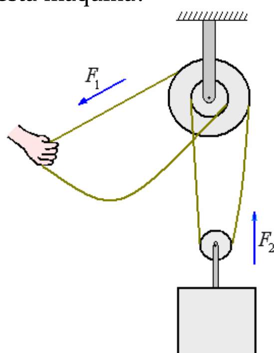
Para triángulos semejantes

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{L_1}{L_2} \quad d_2 = \frac{L_2}{L_1} d_1 \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{(0{,}03)}{L(1{,}50)}(0{,}04)$$
$= 0{,}008$ m = 8 mm.

Observe que una fuerza pequeña de entrada da lugar a una fuerza grande de salida, pero el precio que se paga es que un desplazamiento grande de la entrada produce solamente un desplazamiento pequeño de salida.

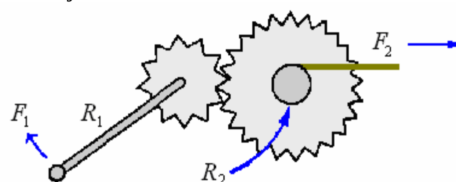
Ejemplo 34. Se bosqueja aquí un polipasto diferenciado de la clase usada para levantar un motor de auto. Las poleas tienen dientes que engranan con una cadena continua. Las poleas están soldadas juntas, hay 18 dientes en la polea externa y 16 dientes en la polea interna. Así cuando la polea hace una revolución, 18 acoplamientos de la cadena se levantan y 16 acoplamientos bajan, dando por resultado la elevación de la carga. ¿Cuál es la ventaja mecánica de esta máquina?



Solución.
Considere qué pasa cuando la polea superior hace una revolución, es decir, cuando el trabajador jala 18 eslabones de la cadena hacia él con fuerza F_1.
Sea L = longitud de un eslabón.
El trabajo de la entrada es $W_1 = F_1(18\,L)$.
El lazo de la cadena que va bajo de la carga es acortado así por 18 eslabones y alargado por 16 eslabones, con un acortamiento neto de $18L - 16L = 2L$ que acorta al lazo $2L$ y levanta la carga L (intente esto con un pedazo de cuerda para convencerse de esta característica).

Así el trabajo de la salida es $W_2 = F(L)$.
Despreciando la fricción.
$W_1 = W_2$ o $F_1(18\,L) = F_2(L)$
La ventaja mecánica del polipasto es VM = 18.

Ejemplo 35. Un trailer está equipado de un sistema para sacar barcos del agua. Consiste en una manija larga de 30 centímetros unido al eje de un engranaje pequeño con 12 dientes. Este engranaje pequeño endienta con un engranaje más grande con 36 dientes. Se une a este engranaje grande un tambor del radio 2 centímetros en el cual se enrolla la línea atada al barco (la línea es una cuerda.)
¿Qué tensión se puede aplicar a la línea cuando la manivela se empuja con una fuerza de 80 N?
So1ución.
Considere que pasa cuando la manivela hace una revolución. La mano mueve una distancia $d_1 = 2\pi R_1$.
El engranaje grande mueve 12/36 = 1/3 revoluciones.
La línea es jalada una distancia $d_2 = 2\pi R_2/3$.

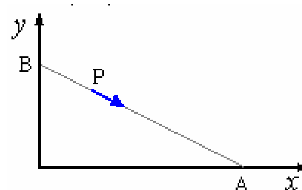


$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow$$
$$F_2 = \frac{d_1}{d_2}F_1 = \frac{2\pi R_1}{2\pi R_2/3}F_1 = 3\frac{R_1}{R_2}F_1$$
$$F_2 = 3\left(\frac{30}{2}\right)(80) = 3600 \text{ N.}$$
La ventaja mecánica:
$$\text{VM} = \frac{3600}{80} = 45$$
La ventaja mecánica del torno (despreciando la fricción) es 45.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1 Defina primero en palabras y luego en una expresión matemática.
a) El trabajo realizado por una fuerza cualquiera.
b) La energía cinética de una partícula.

2 Una partícula P en el plano xy está sometida a la acción de la fuerza $\vec{F} = y^2\hat{i} - x^2\hat{j}$. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza para desplazar P sin fricción desde B $(0,.b)$ a A $(a,\ 0)$.



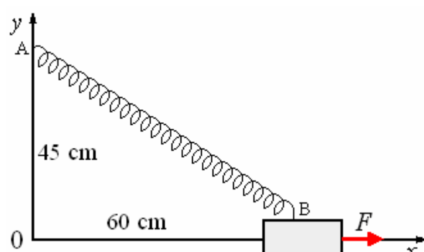
Respuesta. $W = \dfrac{ab}{3}(a+b)$

3. Un depósito cilíndrico de altura H tiene una masa m de agua que lo llena hasta la mitad, que ha de bombearse en su totalidad por encima del borde del mimo. ¿Cuánto trabajo ha de realizar la bomba?

Respuesta. $\Delta W = \frac{3}{4} mgH$

4. ¿Qué fuerza horizontal, constante debe aplicarse a un carro de masa 500 kg que viaja en una carretera horizontal a 36 km/h para que se detenga en 30 metros? ¿Quién proporciona la fuerza?
Respuesta. 2500 N, proporcionada por la carretera.

5. Un resorte está unido en A a un plano vertical fijo y a un bloque B que resbala sobre una varilla lisa horizontal O*x*. La longitud del resorte no estirado es 45 cm y la constante del resorte es k = I000 N/m. ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte sobre B cuando se mueve 60 cm desde O por efecto de la fuerza *F*?

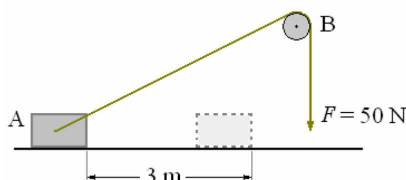


Respuesta: 99,38 J

6. Un resorte de masa despreciable y constante *k* cuelga del cielorraso de un ascensor y lleva suspendido una masa *in*. Cuando el ascensor se mueve hacia arriba durante *t* segundos con una aceleración uniforme $a = \frac{1}{2} g$. la reacción inercial hace que el resorte se alargue.
a) ¿Cuánto trabajo realiza el ascensor sobre el sistema resorte-masa?
b) ¿Cuánto trabajo realiza sobre el resorte?

Respuesta. a) $\frac{1}{4} mg^2 t^2$ b) $\frac{1}{8} \frac{m^2 g^2}{k}$

7. En la figura se mueve el cuerpo A a lo largo de un plano horizontal liso por medio de la fuerza constante *F* = 5º N aplicada al extremo de una cuerda unida a A y que pasa por una pequeña polea sin rozamiento en B. Calcular el trabajo realizado sobre A por la cuerda mientras A se desplaza 3 m,



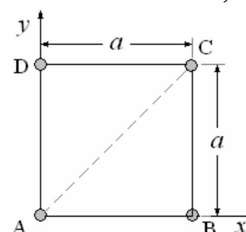
Respuesta. *W* = 120 J

8. Una fuerza cuya magnitud varía con *x* de acuerdo a $F = A + Bx$ actúa sobre objeto que puede moverse solamente en el eje *x*. El ángulo con el que actúa la fuerza también varía tal que $\cos\theta = 1 - x^2$. El objeto se mueve entre $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
¿Cuál es el trabajo realizado cuando el objeto se mueve de *x* = 0 a *x* = *a*?

Respuesta. $Aa + B\frac{a^2}{2} - B\frac{a^4}{4}$

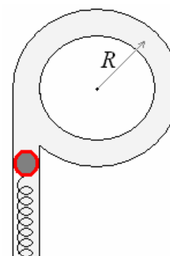
9. Un bloque que se mueve a lo largo del eje *x* comienza del reposo en *x* = *A* y se mueve a *x* = *B* luego vuelve a *x* = *A* donde queda en reposo nuevamente. Si una de las fuerzas actuante sobre el bloque es opuesta en dirección y proporcional a la magnitud de la velocidad, tal que $\vec{F}_v = -b\vec{v}$ con *b* Constante. Demostrar que el trabajo realizado por esta fuerza no es cero para una trayectoria cerrada.

10. La fuerza $\vec{F} = x^2 y\hat{i} + xy^2\hat{j}$ actúa sobre la partícula .P (*x*,*y*) que se mueve en el plano *xy*.
a) Demostrar que *F* no es una fuerza conservativa.
b) Determinar el trabajo de *F* cuando se mueve de A a C, a lo largo de los caminos ABC, ADC y AC.



Respuesta. a) Si $\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$, b) $W_{ABC} = \frac{a^4}{3}$, $W_{ADC} = \frac{a^4}{3}$. $W_{AC} = \frac{a^4}{2}$

11. El tubo de la figura se halla en un plano horizontal, su resorte comprimido inicialmente 10 cm.. y al dispararse una bolita entra en una canaleta circular de radio *R*, la fricción es constante igual a 1 Newton. ¿Cuántas vueltas dará la bolita antes de detenerse?
R= 50 cm *k* = 62 N/m

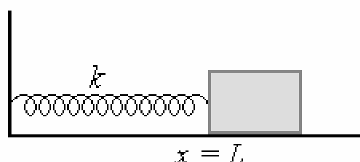


Respuesta. Una vuelta.

12. Se aplica una fuerza de 1 N a una partícula de 50 g que está inicialmente en reposo sobre una superficie.

a) ¿Cuánto trabajo realiza sobre la partícula en l0 s si la superficie es lisa y la fuerza es horizontal?
b) El mismo caso de a) pero la fuerza hace un ángulo de 60º con la horizontal.
c) El caso b) pero con rozamiento entre la partícula y la superficie 0,25 y ¿Cuánto trabajo se consume en vencer el rozamiento?
Respuesta. a) $\Delta W = 1000 J$, b) $\Delta W = 2505 J$, c) $\Delta W = 143 J$, $\Delta W = 46 J$

13. Encontrar la función energía potencial de un resorte si el origen se coloca en la pared y la longitud del resorte sin estirar es *L*.



Respuesta. $U_{(x)} = \frac{1}{2}kx^2 - kLx + C$

Si $C = \frac{1}{2}kL^2 \Rightarrow$

$$U_{(x)} = \frac{1}{2}k\left(x^2 - 2Lx + L^2\right) = \frac{1}{2}k(x - L)^2$$

14. Una partícula que se mueve a lo largo del eje *x* está sometida a la acción de una fuerza en un sistema conservativo a la que le corresponde la siguiente función energía potencial.

$$U_{(x)} = a + bx^2 - cx^4$$

Determinar los coeficientes *a. b* y *c*, si se sabe que el potencial se anula en el origen, que *x* = 2 m en una posición de equilibrio y que una partícula de 5 kg con una velocidad en el origen de 2 m/s queda en reposo en *x* = l m.
Respuesta. a = 0, b = 80/7 J/m^2 , c = 10/7 J/m^4

15. La energía potencial entre dos moléculas vecinas viene dada por:

$$U_{(r)} = \frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

siendo *r* la separación entre las moléculas.
a) ¿Cuál es la fuerza entre ellas en función de *r*?
b) ¿Cuál es la posición de equilibrio de las dos moléculas?
c) ¿Qué energía seria necesaria para alejarlas de su posición de equilibrio indefinidamente?

Respuesta. a) $F_{(r)} = -6\frac{A}{r^7} + 12\frac{B}{r^{13}}$, b)

$r = \left(\frac{2B}{A}\right)^{1/6}$, c) $\Delta E = \frac{A^2}{4B}$

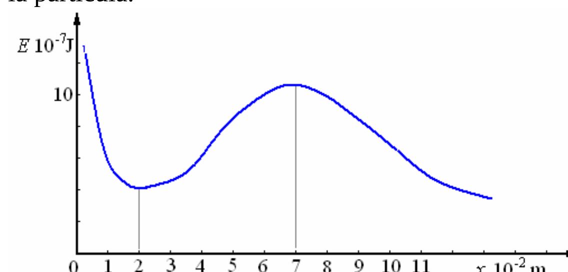
16. Hallar la fuerza conservativa que da origen a la función energía potencial.

$$U_{(r)} = 3x^2y + \frac{zy}{x} - y^2$$

Respuesta.

$$\vec{F} = y\left(\frac{z}{x^2} - 6x\right)\hat{i} + \left(2y - 3x^2 - \frac{z}{x}\right)\hat{j} - \frac{y}{x}\hat{k}$$

17. Una partícula de masa 4y penetra en una región en la cual su energía potencial es la indicada en la figura y pasa valores grandes de x, a los cuales su energía potencial es cero, tiene una energía cinética de 16 x 10^{-7} J .
a) ¿Cuál es su energía cinética en los puntos A, B y C?
b) Estando en el punto A, la partícula pierde bruscamente la mitad de su energía total. (la gráfica de la energía potencial no se altera). Describe cualitativamente el movimiento subsiguiente, dando el dominio de valores de *x* en el cual puede moverse la partícula.



Respuesta. $E_A = 8\times 10^{-7}$ J , $E_B = 12\times 10^{-7}$ J, $E_C = 6\times 10^{-7}$ J

18. Un bloque de masa *m* es lanzado hacia arriba en un plano inclinado con una velocidad de magnitud v_0 . El ángulo del plano es θ y el coeficiente de fricción del bloque y el plano es μ . Si el bloque viaja una distancia *L* hasta detenerse y comienza a bajar volviendo a su posición original. Calcular,
a) El trabajo realizado por la fuerza normal durante el movimiento.
b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción durante el movimiento.
c) El trabajo realizado por la fuerza de gravedad durante el movimiento.
d) Encontrar *L* en función de v_0 , y θ.
e) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando vuelve al punto inicial?
Respuesta. a) 0, b) $-2\mu mgL\cos\theta$, c) 0,

d) $L = \frac{v_0^2}{2g(\mu\cos\theta + \text{sen}\theta)}$,

e) $v = \sqrt{v_0^2 - 4\mu gL\cos\theta}$

19. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de magnitud v_0 y formando un ángulo θ con la

horizontal. Usando la conservación de la energía encontrar.
a) La altura máxima alcanzada.
b) La magnitud de la velocidad cuando el proyectil está a la mitad de su máxima altura.

Respuesta. a) $h = \dfrac{v_0^2 \text{sen}^2\theta}{2g}$,

b) $v = v_0\sqrt{\dfrac{\left(1+\cos^2\theta\right)}{2}}$

20. Una fuerza $F = 8t$ (t en segundos, F en Newton), actúa la partícula P de masa m = 4kg durante un tiempo t = 6 s.
Sí parte del reposo a partir del origen.
a) Calcular el trabajo efectuado.
b) Calcular la energía cinética al instante t.
Respuesta. a) W = 2592 J, b) $K = 2t^4$ J.

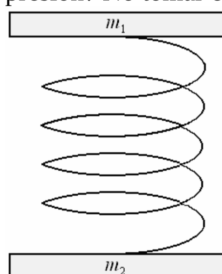
21. Un resorte de longitud ℓ y constante k se sujeta a un bloque de masa m y al piso. Si el bloque se levanta a una altura 3ℓ y soltado desde el reposo.
a) ¿Cuál será la velocidad del bloque cuando esté a una altura 2ℓ ?
b) ¿Cuál será la máxima compresión del resorte?

Respuesta. a) $v = \sqrt{3\dfrac{k}{m}\ell^2 + 2g\ell}$,

b)

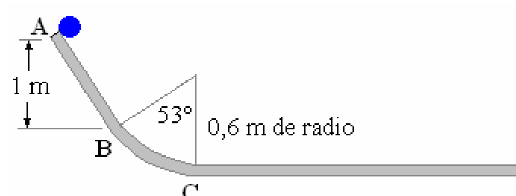
$$y = \frac{k\ell - mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{k\ell - mg}{k}\right)^2 + \frac{\left(3k\ell^2 + 6mg\ell\right)}{k}}$$

22. Dos placas cuyas masas son m_1 y m_2, respectivamente, están conectadas por un resorte. ¿Qué fuerza deberá aplicarse a la placa superior para elevar la placa inferior después que se retira la presión? No tomar en cuenta la masa del resorte.



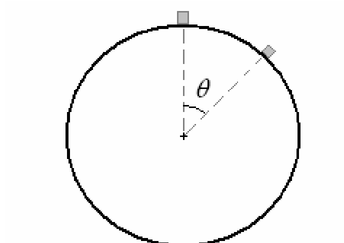
Respuesta. a) $F > \left(m_1 + m_2\right)g$

23. Una bolita de masa m desliza a partir del reposo hacia abajo por un carril doblado como se muestra en la figura, el rozamiento es despreciable, hallar:
a) La reacción normal del carril en A.
b) La energía cinética de la bolita en B.
c) La reacción normal del carril en 8.
d) La energía cinética de la bolita en C.
e) La reacción normal del carril en C.



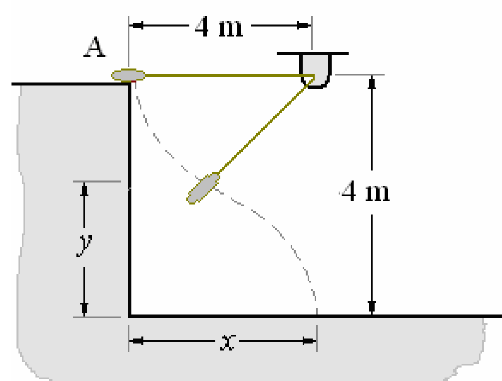
Respuesta. a) 0,5 mg , b) 0.3 mg , c) 2,5 mg d) 1,1 mg , e) 5,4 mg

24. Un bloque pequeño de masa m resbala partiendo de la parte superior de una esfera sin fricción de radio R. ¿Cuál es el ángulo en el que el bloque pierde contacto con la esfera.



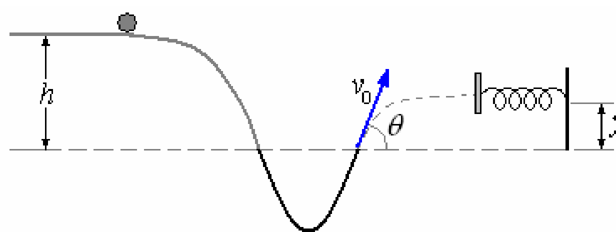
Respuesta. a) $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$

25. 1n saco se empuja suavemente por el borde de una pared en A y oscila en un plano vertical colgado del extremo de una cuerda de 4m que puede soportar una tensión máxima igual a dos veces el peso del saco.
a) Determinar la altura a la que se rompe la cuerda.
b) ¿A qué distancia de la pared vertical caerá al .suelo el saco?



Respuesta. a) y = 1,33 m

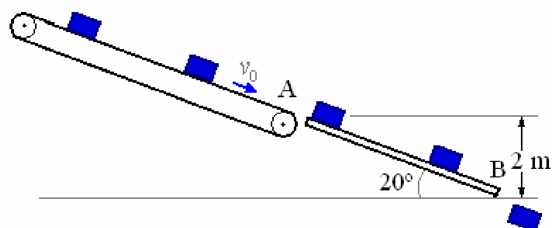
26. Una bola pequeña de masa m = l g desliza hacia el fondo de un valle moviéndose sin rozamiento como se indica en la figura. Partiendo del reposo, la bola cae desde una altura h = 2m y abandona el fondo del valle formando un ángulo θ con la horizontal. En el punto más elevado de su trayectoria la bola choca con un resorte montado sobre una pared y lo comprime 2 cm. La constante del resorte es k = 49 N/m.
a) ¿A qué altura y está el resorte? b) ¿Cual es el ángulo θ?



Respuesta. a) y =1 m, b) $\theta = 45^o$

27. Una bola de acero de masa 1 kg está unida a un extremo de un alambre de 1m de largo y gira alrededor del otro extremo con una velocidad angular de 120 rpm. ¿Cuál es la energía cinética de la bola?
Respuesta. 78,88 J

28. La faja transportadora de la figura se mueve con una velocidad constante v_0 y descarga los paquetes sobre la rampa AB. El coeficiente de rozamiento entre los paquetes y la rampa es 0,30. Sabiendo que los paquetes deben alcanzar el punto B con una velocidad de 4 m/s, determinar la velocidad v_0 requerida en la faja transportadora.



Respuesta. 3,02 m/s

29. Una locomotora ejerce un tiro constante en la barra de tracción de 160000 N mientras aumenta la velocidad de 48 a 72 km/h. ¿Cuál es la potencia que desarrolla la locomotora:
a) al comienzo del periodo?
b) al final del periodo?
c) ¿Cuáles la potencia .media durante el periodo?
Respuesta. a) 2859 hp , b) 4290 hp c) 3574 hp

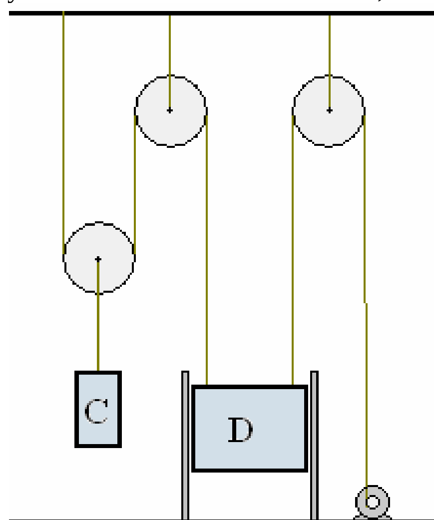
30. Una grúa industrial puede levantar su máxima permitida de 25 toneladas a la velocidad de 20mm/s. Sabiendo que la grúa es movida por un motor de 10 kW. Determinar su rendimiento.
Respuesta. 49%

31. ¿Cuál es la velocidad máxima la que un motor capaz de suministrar 10 kW puede elevar un ascensor de masa 500kg, sin tomar en cuenta las fuerzas de rozamiento?
Respuesta. v = 2,0 m/s

32. Si a un automóvil de masa 1000 kg que se mueve sobre una carretera horizontal con una velocidad de 48 km/h se le apaga al motor, este recorre aún 0,8 km antes de detenerse. carga
a) Considerando que la fuerza de rozamiento es independiente de la velocidad, calcule su valor medio.
b) ¿Qué potencia debe consumirse para mantener el automóvil en movimiento con una velocidad de 48 km/h?
Respuesta. a) F_f = 110 N b), P = 2 hp

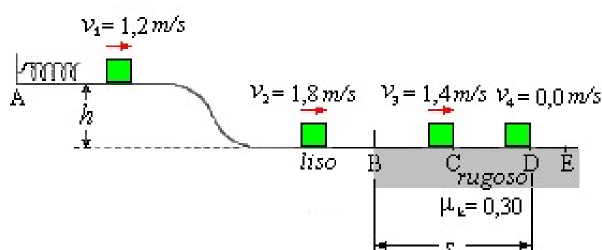
33. Un automóvil de 1500 kg se desplaza 200 m mientras es acelerado uniformemente desde 50 hasta 73 km/h. Durante todo el movimiento el automóvil se desplaza sobre una carretera horizontal, y la resistencia al movimiento es igual al 2 por ciento del peso del automóvil. Determinar:
a) La máxima potencia requerida.
b) La potencia requerida para mantener la velocidad constante de 75 km/h.
Respuesta. a) 25 kW , b) 6,13 kW

34. Un peso D y el contrapeso C tienen cada uno una masa de 350 kg. Determinar la potencia requerida cuando el peso:
a) Se mueve hacia arriba con velocidad constante de 4m/s.
b) Tiene una velocidad instantánea de 4m/s hacia arriba y una aceleración hacia arriba de 0,9 rn/s^2.



Respuesta. 6,86 kW , 8.44 kW

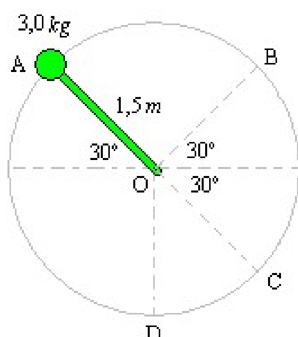
35. Un bloque de 0,50 kilogramos es sujetado contra el resorte por una fuerza externa horizontal de 36 N. Se quita la fuerza externa, y el bloque se proyecta con una velocidad v_1 = 1,2 m/s a partir de la separación del resorte. El bloque desciende una rampa y tiene una velocidad v_2 = 1,8 m/s en la base. La pista es sin fricción entre los puntos A y B. El bloque ingresa a una sección rugosa en B, extendiendo hasta E. El coeficiente de fricción cinética es 0,30. La velocidad del bloque es v_3 = 1,4 m/s en C. El bloque se mueve hasta C donde se detiene.



a) La constante del resorte es:
b) La compresión inicial del resorte en cm es:
c) La altura *h* de la rampa en cm es:
d) El trabajo realizado por la fricción entre los puntos B y C es:
e) La distancia s que el bloque viaja entre los puntos B y D es:

Respuesta.
a) 1800 N/m, b) 2,0, c) 9, d) -0.32 J e) 0,55 m

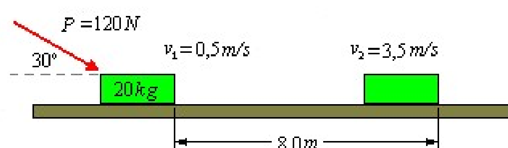
36. Una barra sin masa de 1,5 m se fija libremente a un pivote sin fricción en O. Una bola de 3,0 kilogramos se une al otro extremo de la barra. La bola se sostiene en A, donde la barra hace un ángulo 30º sobre el horizontal, y se lanza. El montaje de la bola-barra puede girar libremente en un círculo vertical entre A y B



a) La bola pasa a través de C, donde la barra forma un ángulo de 30º debajo de la horizontal. La rapidez de la bola cuando pasa por C es:
b) la tensión en la barra cuando la bola pasa por el punto más bajo D es:

Respuesta. a) 5,4 m/ s, b) 120 N

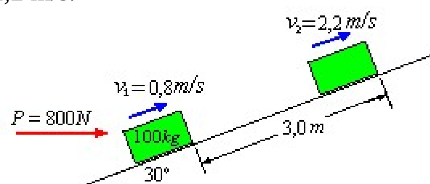
37. Una fuerza externa constante P =120 N se aplica a una caja de 20 kilogramos, que está en una superficie horizontal áspera. La fuerza empuja la caja una distancia de 8,0 m, en un intervalo del tiempo de 4,0 s, y la velocidad cambia de v_1 = 0,5 m/s a v_2 = 3,5 m/s.



a) El trabajo realizado por la fuerza externa es:
b) El trabajo realizado por la fricción es:
c) La razón de cambio promedio de la energía cinética de la caja, en los 4,0 segundos es:

Respuesta. a) 830 J, b) -700 J, c) 30W

38. Un cajón de 100 kilogramos está en una superficie áspera inclinada 30º. Una fuerza externa constante P de 800 N se aplica horizontalmente al cajón. La fuerza empuja el cajón una distancia de 3,0 m arriba de la pendiente, en un intervalo del tiempo de 2,0 s, y la velocidad cambia de v_1 = 0,8 m/s a v_2 = 2,2 m/s.



a) El trabajo realizado por el peso es:
b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción es:
c) El trabajo realizado por la fuerza normal es:
d) La potencia media producida por la fuerza externa P durante los 2,0 segundos es:

Respuesta.
a) -1500 J, b) - 400 J c) Cero , d) 1050 W

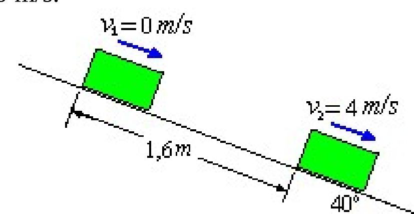
39. Una muchacha lanza una piedra de un puente. Considere las maneras siguientes que ella puede lanzar la piedra. La velocidad de la piedra con la que lanza es igual en cada caso.
Caso A: Lanzada derecho para arriba.
Caso B: Lanzada derecho para abajo.
Caso C: Lanzada con ángulo de 45º sobre horizontal.
Caso D: lanzada horizontalmente.
¿En qué caso la velocidad de la piedra será mayor cuando llega al agua?

Respuesta. la rapidez es la misma en todos los casos.

40. Para hacer el trabajo sobre un objeto,
A) es necesario que haya fricción.
B) es necesario que no haya fricción.
C) el objeto debe moverse.
D) la fuerza que hace el trabajo debe estar dirigida perpendicularmente al movimiento del objeto.
E) la fuerza aplicada debe ser mayor que la fuerza de la reacción del objeto.

Respuesta. C) el objeto debe moverse.

41. Un bloque de 8,0 kilogramos se lanza del reposo, v_l = 0 m/s, en una pendiente rugosa. El bloque se mueve una distancia de 1,6 m abajo de la pendiente, en un tiempo de 0,80 s, y adquiere una velocidad de v_2 = 4,0 m/s.



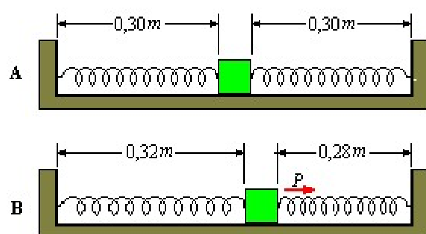
a)) El trabajo realizado por el peso es:
b) La razón promedio a la cual la fuerza de fricción realiza trabajo en el intervalo de tiempo de 0,80 s es:

c) La razón promedio a la cual la fuerza normal realiza trabajo en el intervalo de tiempo de 0,80 s es:
d) La razón promedio a la cual el bloque gana energía cinética durante el intervalo de tiempo de 0,80 s es:
Respuesta.
a)) + 80 J, b) - 20 W, c) Cero, d) 80 W

42. Una persona de 60 kilogramo cae desde el reposo uno distancia 1,20 m sobre una plataforma de masa insignificante apoyada sobre un resorte duro. La plataforma baja 6 cm antes de que persona vuelva al reposo. ¿Cuál es la constante del resorte?
Respuesta. 4,12 x 10^5 N/m

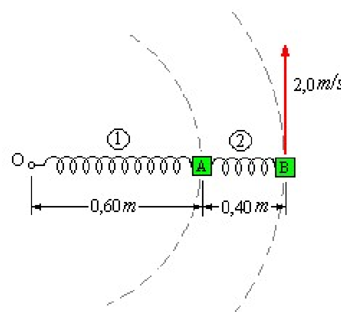
43. Un objeto está sujeto a una fuerza restauradora $F = 6x^3$, donde x es el desplazamiento del objeto desde su posición de equilibrio. ¿Qué trabajo debe realizarse para mover al objeto desde $x = 0$ $x = 0,15$ m?
Respuesta. 7,59 x 10^{-4} J

44. Dos resortes idénticos tienen longitudes sin estirar de 0,25 m y las constantes de la fuerza de 200 N/m. Los resortes se unen a un bloque pequeño y se estiran a una longitud de 0,30 m como en la figura A. Una fuerza externa P tira del bloque 0,02 m a la derecha y lo sostiene allí. (Véase La Figura B)



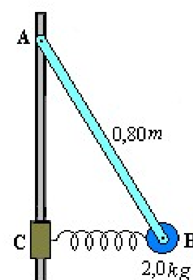
a) El trabajo requerido para ensamblar los resortes y el bloque (figura A) es :
b) La fuerza externa P, que mantiene al bloque en su lugar (figura B) es:
c) El trabajo realizado por la fuerza externa P en jalar el bloque 0,02 m es:
Respuesta.
a) 0,50 J, b) E) 8 N, c) 0,08 W

45. El bloque A (0,40 kg) y el bloque B (0,30 kg) están sobre una mesa sin fricción. El resorte 1 conecta al bloque A a una varilla sin frición O y el resorte 2 conecta el bloque Ay el bloque B. Los bloques están en movimiento circular uniforme alrededor de o, y los resortes tienen longitudes de 0,60 m y 0,40 m, como se muestra. La velocidad lineal del bloque B es 2.0 m/s.



a) El resorte 2 estira 0,06 m. La constante de fuerza del resorte 2 es:
b) La constante de fuerza del resorte 1 es igual a 30 N/ m. La longitud sin estirar del resorte 1 es:
Respuesta. a) 20 N/m, b) 0,53 m

46. Una barra ligera de 0,80 m se fija libremente a un eje vertical en A. Un disco de 2,0 kilogramos se une a la barra en B. Un resorte se une a la masa en B y a la manga en el eje en C. A La manga es sin fricción, permitiendo que se baje y suba libremente, de modo que el resorte sea siempre horizontal cuando esté estirado. La longitud del resorte sin estirar es 0,45 m y la constante es 210 N/m.



a) El eje está girando y el resorte estirado tiene una longitud de 0,48 m. La aceleración radial del disco es:
b) El eje está girando y la varilla forma un ángulo de 40º con el eje. El resorte está estirado y horizontal. La aceleración radial del disco es:
c) El eje está girando y el resorte tiene una longitud de 0,45 m. La aceleración radial del disco es:
Respuesta.
a) 10,5 m/s^2 b) 15,0 m/s^2, c) 6,7 m/ s^2

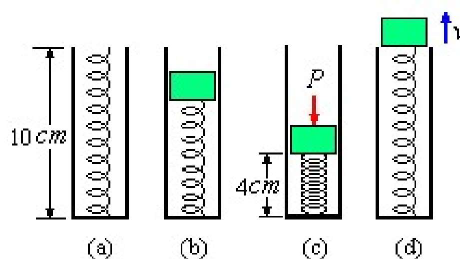
47. Cierto coche que viaja 20 resbalones del mph a una parada en 20 metros del punto donde los frenos fueron aplicados. ¿En qué distancia el coche pararía aproximadamente la tenía que va 40 mph?
Respuesta. 80 metros

48. Un motor de la arena en una mina levanta 2.000 kilogramos de la arena por minuto una distancia vertical de 12 metros. La arena está inicialmente en el resto y se descarga en la tapa del motor de la arena con la velocidad 5 m/s en un canal inclinado de cargamento. ¿En qué tarifa mínima se debe la energía proveer a esta máquina?
Respuesta. 4,34 kW

49. La constante de un resorte es 500 N/m y su longitud sin estirar es 0,60 m. Un bloque de 4,0 kilogramos se suspende del resorte. Una fuerza

externa tira hacia abajo lentamente el bloque, hasta que el resorte se ha estirado a una longitud de 0,72 m. se quita y el bloque sube.
a) La fuerza externa sobre el bloque es:
b) Cuando el resorte se ha contraído una longitud de 0.60 m, la velocidad del bloque hacia arriba es: :
c) Cuando el resorte se ha contraído una longitud de 0.66 m, la aceleración del bloque incluyendo su dirección es:
Respuesta. a) 20 N, b) 0,4 m/ s, c) 2 m/s^2, hacía abajo

50. la constante de un resorte es 200 N/m y su longitud sin estirar es 10 centímetros. El resorte se pone dentro de un tubo liso de 10 centímetros de alto (la figura a). Un disco de 0,40 kilogramos se coloca sobre el resorte (figura b). Una fuerza externa P empuja el disco hacia abajo, hasta que el resorte tiene 4 centímetros de largo (la figura c). Se quita la fuerza externa, el disco se proyecta hacia arriba y emerge del tubo (figura d).



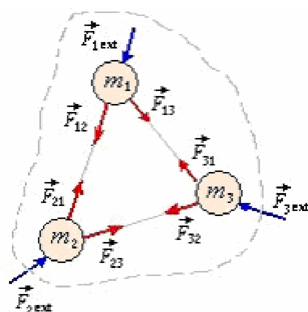
a) La compresión del resorte en la figura b es:
b) La fuerza externa P en la figura c es:
c) La energía potencial elástica del resorte en la figura c es:
d) La aceleración inicial del disco cuando la fuerza externa es removida es:
e) La velocidad v del disco cuando emerge del tubo en la figura d es:
Respuesta. a) 2,0 , b) 8N, c) 0,36 J, d) 20 m/s^2, e) 0,80m/s

CAPÍTULO 6. SISTEMA DE PARTÍCULAS

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estado estudiando el movimiento de los objetos cualquiera que sea sin considerar su estructura. Ahora demostraremos que lo estuvimos haciendo bien considerando al objeto sin tomar en cuenta las fuerzas que actúan sobre sus partes. Introduciremos el concepto de centro de masa de un sistema de partículas, también se introducirá el concepto de cantidad de movimiento y se demostrará que este se conserva cuando el sistema se encuentra aislado de los alrededores,

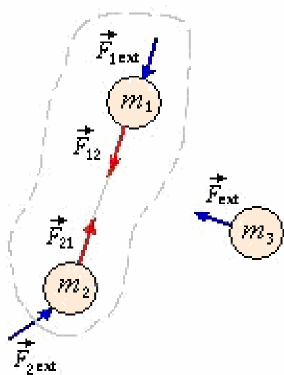
SISTEMA DE PARTICULAS



La figura muestra un sistema de partículas compuesto de tres masas. En el sistema existen dos tipos de fuerzas,

a) Las fuerzas externas como la atracción gravitacional de la tierra por ejemplo.

b) Las fuerzas internas que las partículas ejercen unas sobre otras (estas fuerzas pueden ser gravitacionales, e1éctricas, etc.)

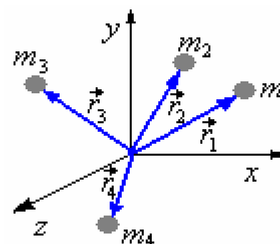


En la figura hemos cambiado el contorno del sistema, excluyendo la masa m_3. Como Una Consecuencia de esto las fuerzas internas Sobre m_1 y m_2 debido a m_3 ya no son internas, se han sumado a las fuerzas externas previas, produciendo una nueva fuerza resultante.

La selección del contorno de un sistema es similar a seleccionar un sistema de coordenadas.

SEGUNDA LEY DE NEWTON APLICADA A UN SISTEMA DE PARTICULAS

La figura siguiente muestra un sistema de n partículas de masas m_1, m_2, …..m_n, con posiciones especificadas por $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ………… $\vec{r}_n$,, respectivamente.



La segunda ley de Newton para la partícula m_i es:

$$\vec{F}_i = m\vec{a}_i = \vec{F}_{iexter} + \vec{F}_{i\,int}$$

Donde:

$\vec{F}_{i\,int}$ = suma de las fuerzas internas sobre m_i

$\vec{F}_{i\,ext}$ = suma de las fuerzas externas sobre m_i

La suma de las fuerzas internas sobre la masa m_i es:

$$\vec{F}_{1int} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{F}_{12} = \sum_{(j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}$$

En general para la partícula i es:

$$\vec{F}_{i\,int} = \sum_{(j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}$$

La fuerza total para el sistema es:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{i=n} m\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{i\,ext} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{(j\neq i)}^{n} \vec{F}_{ij}$$

Por la tercera ley de Newton cada una de las fuerzas

$\vec{F}_{ij}$ tiene un $\vec{F}_{ji}$ igual, pero de sentido contrario

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

De modo que $\sum_{i=0}^{n} \sum_{(j \neq i)=1}^{n} \vec{F}_{ij} = 0$

Consecuentemente solo queda

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\,\text{ext}} \quad \text{o} \quad \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\,\text{ext}}$$

CENTRO DE MASA

Frecuentemente es muy práctico reemplazar un sistema de muchas partículas con una partícula simple equivalente de masa igual. La pregunta es donde colocar esta partícula simple con respecto al origen de *x* e *y*.

Definamos el vector posición del centro de masa por la ecuación:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Llamando a $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ (masa total de las *n* partículas).

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Como $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$

Tenemos que: $x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$,

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \ , \ z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

Si hacemos que el número de elementos *n*, se aproximen al infinito, la sumatoria se reemplaza por una integral y *m* por el elemento diferencial *dm*.

Luego.

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \int x dm$$

De igual forma se obtiene:

$$y_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \int y dm \ ,$$

$$z_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} z_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \int z dm \ \text{y}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm$$

MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA.

Si en la ecuación: $\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^{n} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext}$

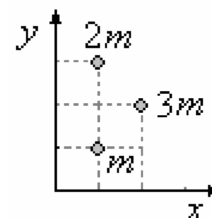
Sustituimos $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_{CM}$

Obtendremos la ecuación del movimiento del centro de masa

$$\frac{d^2}{dt^2} M \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext} \Rightarrow M \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iext}$$

El punto indicado por $\vec{r}_{CM}$, vector posición del centro de masa, se mueve se mueve como si en el estuviera concentrada toda la masa y las fuerzas externas del sistema.

Ejemplo 1. Centro de masa de tres masas puntuales.



El centro de masa esta dado por:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$= \frac{m(1) + 2m(1) + 3m(2)}{m + 2m + 3m}$$

$= \frac{9m}{6m} = \frac{3}{2}$

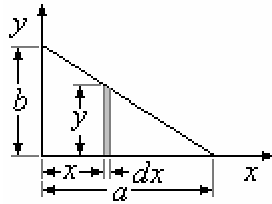
$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$= \frac{m(1)+2m(3)+3m(2)}{m+2m+3m}$$

$$= \frac{13m}{6m} = \frac{13}{6}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{3}{2}\hat{i} + \frac{13}{6}\hat{j}$$

Ejemplo 2. Centro de masa de un triángulo.



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm$$

Para evaluar

$$dm = \frac{\text{masa total}}{\text{área total}} \times \text{área de la lámina}$$

$$= \frac{M}{\frac{1}{2}ab} ydx = \frac{2M}{ab} ydx$$

Luego: $x_{CM} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int x\left(\frac{2M}{ab}\right)ydx$

$$= \frac{2}{ab}\int_0^a xydx$$

Para poder integrar tenemos que expresar la variable *y* en función de *x*.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow y = \frac{b}{a}(a-x)$$

Sustituyendo:

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\frac{b}{a}(a-x)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x(a-x)dx$$

$$= \frac{2}{a^2}\int_0^a \left(ax - x^2\right)dx = \frac{2}{a^2}\left[a\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

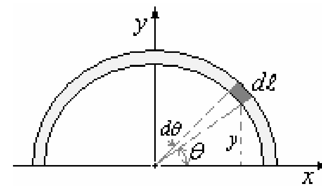
$$= \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a}{3}$$

Realizando cálculos similares encontramos:

$$y_{CM} = \frac{b}{3}$$

Finalmente: $\vec{r}_{CM} = \frac{a}{3}\hat{i} + \frac{b}{3}\hat{j}$

Ejemplo 3. Centro de masa de un arco semicircular.



Por el sistema de coordenadas escogido, $x_{CM} = 0$, porque por cada elemento de masa a la derecha (+), existe otro elemento igual a la izquierda (-). Sin embargo para y_{CM} es diferente.

$y_{CM} = \frac{1}{M}\int ydm$, en este caso $dm = \lambda d\ell$

Donde $\lambda = \frac{M}{\pi R}$ y $d\ell = Rd\theta$

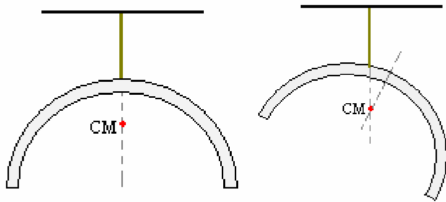
Como $y = R\,\text{sen}\,\theta$, tenemos:

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^\pi (R\,\text{sen}\,\theta)\lambda R d\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^\pi \text{sen}\,\theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda R^2}{M}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = \frac{R^2}{M}\left(\frac{M}{\pi R}\right)(2)$$

$$= \frac{2R}{\pi} = 0{,}64R$$

El centro de masa no se encuentra dentro del cuerpo. Las figuras siguientes muestran como localizar experimentalmente el centro de masa primero colgándolo de la parte superior y luego de otro punto cualquiera.



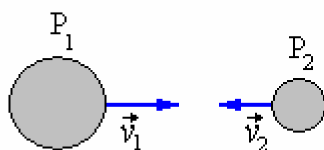
Ejemplo 4. Explosión de una granada



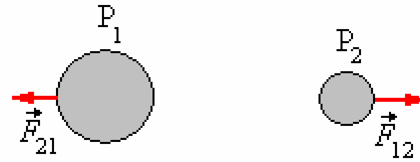
Una granada lanzada al aire que explota en varios fragmentos. La única fuerza externa sobre la granada es la fuerza de la gravedad, entonces la granada sigue una trayectoria parabólica. Si la granada no estallara continuaría moviéndose a lo largo de la trayectoria parabó1ica indicada en la figura. Como las fuerzas de la explosión son internas, no afectan al movimiento del centro de masa. Entonces. Después de La explosión el centro de masa de los fragmentos sigue la misma trayectoria que tendría la granada s! no hubiera habido explosión.

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

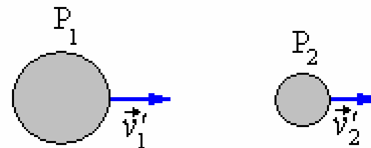
Supongamos el caso de dos partículas esféricas P_1 y P_2 de masas m_1 y m_2 con trayectorias contenidas en la misma recta, se aproximan una a otra con velocidades $\vec{v}_1$, y $\vec{v}_2$ respectivamente.



Cuando P_1 y P_2 entran en contacto, P_1 ejerce sobre P_2 la fuerza F_{12} y P_2 ejerce sobre P_1 la fuerza F_{21}. De acuerdo con la tercera ley de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

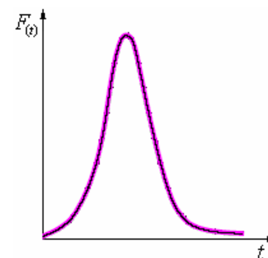


Después que P_1 y P_2 se separan, las velocidades respectivas son $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$ diferentes de $\vec{v}_1$, y $\vec{v}_2$.



Ahora nos preguntamos. ¿Qué pasa durante el choque?

El tiempo de contacto total Δt es muy pequeño, quizás solo de aproximadamente 0,001 segundos. La fuerza de contacto inicialmente es cero, aumenta hasta un valor muy grande y. finalmente disminuye hasta cero, cuando dejan de estar en contacto. La figura siguiente muestra una variación típica de la fuerza en el tiempo de contacto.



Sea $t_f - t_i = \Delta t$ el tiempo que dura el choque, aplicando la segunda ley de Newton a las partículas P_1 y P_2.

$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1 = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \text{ y}$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2 = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

O $\vec{F}_{12}\, dt = m_1 d\vec{v}_1$ y $\vec{F}_{21}\, dt = m_2 d\vec{v}_2$

Integrando las dos relaciones durante el choque,

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1 \int_{v_1}^{v'_1} d\vec{v}_1 \text{ y}$$
$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt = m_2 \int_{v_2}^{v'_2} d\vec{v}_2$$

Finalmente

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1\left(\vec{v'}_1 - \vec{v}_1\right) \text{ y}$$
$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}\, dt = m_2\left(\vec{v'}_2 - \vec{v}_2\right)$$

Trabajando con el primer miembro

$\int_{t_i}^{t_f} F dt$ corresponde al área bajo la curva mostrada en la figura anterior, a ésta cantidad la llamaremos

IMPULSO $\left(\vec{J}\right)$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{(t)}\, dt$$

Sus dimensiones son: [F] [T] = [M][L][T]$^{-1}$

En el sistema internacional sus unidades son:

Newton.segundo (N.s)

Trabajando con el segundo miembro

$$m_1\left(\vec{v'}_1 - \vec{v}_1\right) \text{ y } m_2\left(\vec{v'}_2 - \vec{v}_2\right)$$

Llamaremos a la cantidad $m\vec{v} = \vec{p}$,

CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL o Momentum lineal de la partícula (lo designaremos en la práctica simplemente como **cantidad de movimiento**), cuyas dimensiones son:

[M] [[L]] = [M] [L] [T]$^{-1}$

En el sistema internacional sus unidades son:

kg.m.s^{-1}

La partícula P_1 ha sufrido en el intervalo $t_f - t_i = \Delta t$, un cambio de la cantidad de movimiento $\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}\, dt = m_1\left(\vec{v'}_1 - \vec{v}_1\right) = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

y esta cantidad es también igual al impulso $\vec{J}$ recibido en ese instante por la partícula

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Luego: "**El cambio de la cantidad de movimiento es igual al impulso**".

Ejemplo 5. Una pelota de 100 gramos está en reposo sobre el piso, cuando recibe un puntapié que la lanza con una velocidad de 30 m/s.

a) ¿Qué impulso se dio a la pelota?

b) Si el tiempo que el pie está en contacto con la pelota es 10^{-3} segundos. ¿Cuál es la magnitud aproximada de la fuerza impulsiva?

Solución.

a) El impulso es igual al cambio de la cantidad de movimiento:

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

En este caso

$$m = 0{,}1 \text{ kg}, \ \vec{v}_i = 0, \ \vec{v}_f = 30\hat{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{J} = (0{,}1)(30\hat{i}) - 0 = 3\hat{i}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$$

b) Se puede obtener un estimado de la fuerza que actúa sobre la pelota, dividiendo e1 impulso $\vec{J}$ por el tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ en que actúa la fuerza :

$$\vec{F} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$$

Como $\vec{J} = 3\hat{i}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ y $\Delta t = 0{,}001\, s$

$$\vec{F} = \frac{3\hat{i}}{0,001} = 3000\hat{i} \text{ N}$$

Ejemplo 6. Se deja caer una pelota de masa *m* de una altura *h* sobre el nivel del suelo y rebota hasta una altura h_1

a) ¿Cuál es la velocidad v_i inmediatamente antes de chocar con el suelo?

b) ¿Cuál es la velocidad v_f inmediatamente después de chocar con el suelo?

c) ¿Cuál es el impulso $\vec{J}$ que se le da a la pelota en el impacto con el suelo?

Solución.

a) Como $\vec{v}_0 = 0$, $x = 0$, $y = h_0$

$$\vec{v}_i = \sqrt{2gh_0}\,\hat{j}$$

b) Como después de chocar $y = h_1$, la velocidad $\vec{v}_f$ después de chocar es:

$$\vec{v}_f = \sqrt{2gh_1}\,\hat{j}$$

c) El impulso de la pelota es:

$$\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_0}\right)\hat{j}$$

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La cantidad de movimiento de una partícula de masa *m* y velocidad $\vec{v}$ es:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La cantidad de movimiento de *n* partículas es la suma de las cantidades de movimiento individuales,

$$\vec{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$$

Usando la expresión de centro de masa

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{CMi}$$

De aquí $\vec{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{CMi}$

La cantidad de movimiento total de un sistema es igual a la cantidad de movimiento de la masa total concentrada en el centro de masa del sistema.

Derivando nuevamente la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = M\frac{d}{dt}\vec{v}_{iCM} = M\vec{a}_{iCM} = \vec{F}_{i\text{ext}}$$

Esta cantidad es muy importante, ya que si no hay fuerza externa,

$$\vec{F}_{i\text{ext}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{total} = \text{CONSTANTE}$$

Esto es la conservación de la cantidad de movimiento. Si no hay fuerzas externas sobre un sistema. La cantidad de movimiento total del sistema es constante.

Ejemplo 7. Tres partículas de masas 2 kg, 1 kg y 3 kg respectivamente con vectores posición

$$\vec{r}_1 = \left[5t\hat{i} - 5t^2\hat{j} + (3t-2)\hat{k}\right]\text{cm},$$
$$\vec{r}_2 = \left[(2t-3)\hat{i} - \left(12-5t^2\right)\hat{j} + \left(4+6t-3t^3\right)\hat{k}\right]\text{cm}$$
$$\text{y } \vec{r}_3 = \left[(12t-1)\hat{i} - \left(t^2+2\right)\hat{j} - t^3\hat{k}\right]\text{cm}$$

Donde *t* es el tiempo en segundos.

Encontrar: a) La velocidad del centro de masa en *t* = 1 s y *t* = 2 s.

b) La cantidad de movimiento lineal total del sistema en *t* = 1 s y *t* = 2 s.

c) Analizar si el sistema de tres partículas es sistema aislado

Solución.

a) La posición del centro de masa esta dada por la expresión:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Reemplazando valores, obtenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \left[(3t-1)\hat{i} + \left(-t^2+3\right)\hat{j} + \left(-t^3+2t\right)\hat{k}\right]\text{cm}$$

La velocidad del centro de masa es

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \left[3\hat{i} - 2t\hat{j} + \left(-3t^2+2\right)\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Para $t = 1$ s

$$\vec{v}_{1M} = \left[3\hat{i} - 2\hat{j} + -\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Para $t = 2$ s

$$\vec{v}_{2M} = \left[3\hat{i} - 4\hat{j} + -8\hat{k}\right]\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

b) La cantidad de movimiento del sistema es:

$$\vec{p} = +m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = M\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{p} = 6\left[3\hat{i} - 2t\hat{j} + \left(-3t^2+2\right)\hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

Para $t = 1$ s

$$\vec{p}_1 = 6\left[3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

Para $t = 2$ s

$$\vec{p}_2 = 6\left[3\hat{i} - 4\hat{j} - 8\hat{k}\right]\frac{\text{kg cm}}{\text{s}}$$

c) Como , $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2$, $\vec{p}$ no es constante, luego el sistema no es aislado.

Ejemplo 8. Un pescador de masa 70 kg está en un bote estacionario de masa 200 kg, cuando su ayudante que no sabe nadar y está en el agua cogido del extremo opuesto, se suelta. El pescador corre 2,5 m hasta alcanzar este extremo. ¿A que distancia del ayudante ahogándose se encontrará el pescador cuando alcance el extremo del bote?

Solución.

Consideremos aislado el sistema bote, pescador, ayudante, por lo tanto su cantidad de movimiento es constante.

$$\vec{p} = M\vec{v}_{cm} = \text{CONSTANTE}$$

Como en inicio el sistema está en reposo:

$$\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{cm} = 0$$

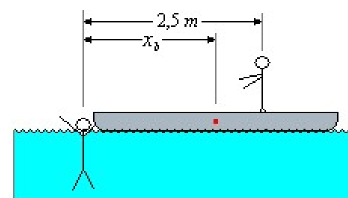
Como $\vec{v}_{cm} = \dfrac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = 0$

$\vec{r}_{cm} = \text{CONSTANTE}$, la posición del centro de masa permanece constante

En éste problema que es en una sola dimensión:
$x_{cm} = \text{CONSTANTE}$

Tomemos como punto de referencia la posición del ayudante en el extremo del bote, al soltarse seguirá en la misma posición.

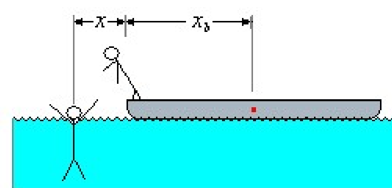
Analicemos la posición inicial.



El centro de masa del sistema pescador-bote está en:

$$x_{cm} = \frac{m_b x_b + m_p(2{,}5)}{m_b + m_p}$$

Analicemos la posición final.



El centro de masa esta en:

$$x_{cm} = \frac{m_b(x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

Como la posición del centro de masa del sistema es invariante, se tiene:

$$\frac{m_b x_b + m_p(2,5)}{m_b + m_p} = \frac{m_b(x_b + x) + m_p x}{m_b + m_p}$$

$$\Rightarrow (m_b + m_p)x = m_p(2,5)$$

Reemplazando valores:

$$x = \frac{70(2,5)}{(200 + 70)} = 0,65\text{m}$$

La posición del pescador estará a 0,65 metros del ayudante.

Ejemplo 9. Un muchacho de masa m_1 y una muchacha de masa m_2, ambos con patines, se encuentran en reposo uno en frente del otro, El muchacho empuja a la muchacha, mandándola hacia el este con una velocidad $\vec{v}$. Describa el movimiento del muchacho.

Solución.

Siendo un sistema cerrado la cantidad de movimiento se conserva,

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} = 0,$$

Si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades del muchacho y la muchacha después del empujón, respectivamente:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$$

Considerando el movimiento en el eje *x*, y la dirección al este como sentido positivo

$$\vec{v}_2 = \vec{v} = v\hat{i}$$

De aquí

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 v\hat{i} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} v\hat{i}$$

EI muchacho sale con una velocidad de módulo

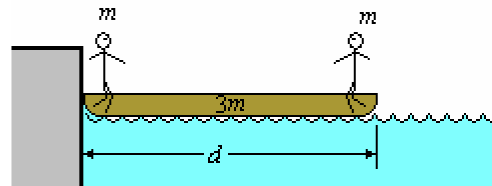
$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v$ dirigida hacia el oeste,

Ejemplo 10. Dos personas de masa *m* cada una, se encuentran paradas en los extremos opuestos de un bote de longitud *d* y masa 3*m* que se encuentra en reposo sobre un líquido sin fricción, tal como se muestra en la figura. Las personas caminan una hacia la otra con rapidez constante y se encuentran a *d*/4 del extremo izquierdo del bote.

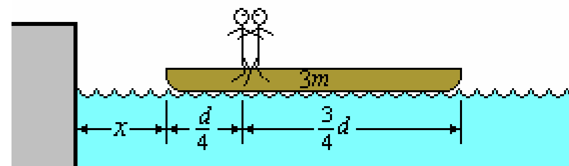
a) Si la persona de la izquierda se mueve con velocidad v_0 respecto al bote, ¿cuál es la velocidad que tiene la otra persona, respecto al bote?

b) ¿Cuál es la velocidad del bote, respecto a tierra, durante el movimiento de ambas personas?

c) ¿Cuánto avanzo el bote hasta el momento del encuentro?



Solución.



a)

El tiempo empleado para encontrarse es el mismo para las dos personas

$$\frac{d/4}{v_0} = \frac{3d/4}{v_1} \quad \Rightarrow v_1 = 3v_0 \text{ Hacia la izquierda}$$

b) Por conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$$

$$\vec{p}_{antes} = 0$$

$$\vec{p}_{después} = m(v_0 + v_b)\hat{i} + m(-3v_0 + v_b)\hat{i} + 3mv_b\hat{i} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_b = \frac{2}{5} v_0 \hat{i}$$

c)

El tiempo de caminata de las personas es $t = \frac{d}{4v_0}$,

luego el bote se habrá movido

$$x = v_b t = \left(\frac{2}{5}v_0\right)\left(\frac{d}{4v_0}\right) = \frac{d}{10}$$

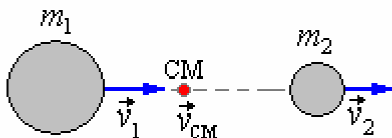
SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASA

Cuando la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema es cero, la cantidad de movimiento total es constante. Muchas veces es conveniente escoger un sistema de coordenada., con el origen situado en el centro de masa. Este sistema se denomina “SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASA”

Con respecto a este sistema la velocidad del centro de masa por supuesto es cero y la cantidad de movimiento total es cero.

El análisis de la mayor parte de los choques es más sencillo en el sistema de referencia centro de masa.

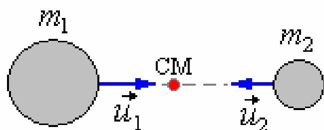
La transformación de un sistema de referencia cualquiera a un sistema centro de masa no es difícil. Consideremos un sistema do dos partículas m_1 y m_2 con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente cuyo centro de masa se mueve con velocidad $\vec{v}_{CM}$, como se muestra en la figura.



La cantidad de movimiento es:

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$$

Para transformar esta expresión al sistema Centro de masa, las velocidades de las partículas con respecto al centro de masa son como se muestra en la figura siguiente.



Las velocidades relativas al centro de masa son:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} \text{ y } \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}$$

Como $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

y $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

$$= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

Como comprobación, calculemos la cantidad de movimiento total con respecto al centro de masa, el cual debe ser igual a cero.

$$\vec{p} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

$$= \vec{p} = m_1\left[\frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\right]$$

$$= m_2\left[-\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\right] = 0$$

En la sección siguiente veremos ejemplos de aplicación usando el sistema de referencia centro de masa.

CHOQUES

Se llama choque o colisión entre dos cuerpos a un fenómeno en el que los cuerpos Participantes son libres antes y después de la interacción, sobre los que no actúan fuerzas resultantes.

La interacción dura un tiempo muy corto, durante el cual los cuerpos ejercen entre si fuerzas de cierta intensidad.

Por lo general en los choques só1o participan dos cuerpos, aunque esto no es estrictamente necesario.

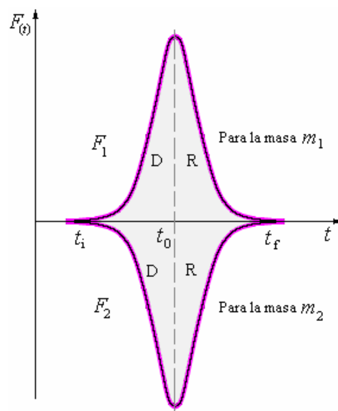
Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ antes del choque y velocidades $\vec{v'}_1$ y $\vec{v'}_2$ después del choque respectivamente.

En todo choque entre dos cuerpos se conserva la cantidad de movimiento, esto es:

$$\vec{p} = \vec{p'} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p'}_1 + \vec{p'}_2$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v'}_1 + m_2 \vec{v'}_2$$

Ahora nos introduciremos en el proceso complejo que acompaña al choque, el instante $\Delta t = t_f - t_i$, en el que aparece la fuerza de interacción, este periodo vamos a dividirlo en dos partes, los periodos de deformación y restitución. La figura muestra el gráfico de la fuerza de interacción en función del tiempo entre las masas m_1 y m_2.



E1 tiempo t_0 es el instante de máxima deformación en el que empieza la restitución y las dos masas poseen la misma velocidad

$$\vec{v}_{01} = \vec{v}_{02} = \vec{v}_0$$

Vamos a aplicar la ecuación impulso - cantidad de movimiento para el periodo de deformación (D), $t_i \rightarrow t_0$:

Para la masa m_1:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_1 dt = m_1 \vec{v}_0 - m_1 \vec{v}_1 = \vec{J}_D$$

Para la masa m_2:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_2 dt = m_2 \vec{v}_0 - m_2 \vec{v}_2 = \vec{J}_{2D} = -\vec{J}_{1D}$$

Resolviendo para $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

$$\vec{v}_1 = -\frac{\vec{J}_{1D}}{m_1} + \vec{v}_0 \ , \ \vec{v}_2 = \frac{\vec{J}_{1D}}{m_2} + \vec{v}_0$$

La diferencia de estas velocidades es:

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{J}_{1D}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \vec{J}_{1D}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)$$

Ahora aplicaremos la ecuación Impulso-cantidad de movimiento por el periodo de restitución (R). $t_0 \rightarrow t_f$.

Para la masa m_1:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_1 dt = m_1 \vec{v'}_1 - m_1 \vec{v}_0 = \vec{J}_R$$

Para la masa m_2:

$$\int_{t_i}^{t_0} \vec{F}_2 dt = m_2 \vec{v'}_2 - m_2 \vec{v}_0 = \vec{J}_{2R} = -\vec{J}_{1R}$$

Resolviendo para $\vec{v'}_1$ y $\vec{v'}_2$.

$$\vec{v'}_1 = \frac{\vec{J}_{1R}}{m_1} + \vec{v}_0 \ , \ \vec{v'}_2 = -\frac{\vec{J}_{1R}}{m_2} + \vec{v}_0$$

La diferencia de estas velocidades es:

$$\vec{v'}_2 - \vec{v'}_1 = -\vec{J}_{1R}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$= -\vec{J}_{1R}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)$$

De lo visto encontramos la relación entre el impulso de restitución y el impulso de deformación.

$$\frac{\vec{J}_{1R}}{\vec{J}_{1D}} = -\frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)} = \varepsilon$$

A esta relación se le conoce como coeficiente de restitución (ε).

Esta relación fue propuesta por Newton y tiene validez solamente aproximada.

EI valor de esta relación depende de muchos factores tales como la geometría, las propiedades de los materiales, la velocidad, por ello debemos contentarnos con una determinación experimental.

Ejemplo 11. Una pelota de béisbol de 0,15 kg de masa se está moviendo con una velocidad de 40 m/s cuando es golpeada por un bate que invierte su dirección adquiriendo una velocidad de 60 m/s, ¿qué fuerza promedio ejerció el bate sobre la pelota si estuvo en contacto con ella 5 ms?.

Solución.

Datos: m = 0,15 kg

v_i = 40 m/s

v_f = - 60 m/s (el signo es negativo ya que cambia el sentido)

t = 5 ms = 0,005 s

$\Delta p = J$

$p_f - p_i = J \Rightarrow mv_f - mv_i = F\,t$

$\Rightarrow F = m(v_f - v_i)/t$

F = 0,15 kg.(- 60 m/s - 40 m/s)/0,005 s

= 0,15 kg.(- 100 m/s)/0,005 s

= - 3000 N

CASOS DE CHOQUE

Perfectamente elástico

$$\varepsilon = 1,\ (v'_2 - v'_1) = -(v_2 - v_1)$$

Inelástico $\varepsilon < 1$

El coeficiente de restitución y tiene un valor entre 0 y 1.

Perfectamente plástico

$$\varepsilon = 0,\ (v'_2 - v'_1) = 0$$

Explosivo $\varepsilon > 1$

Ejemplo 12.

a) Choque perfectamente elástico. En este caso no hay pérdida en la energía mecánica asociada al impacto, la energía cinética permanece constante.

$$K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2$$

$$m_1\left(v'^2_1 - v_1^2\right) = m_2\left(v'^2_2 - v_2^2\right)$$

Por conservación de la cantidad de movimiento tenemos:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2,$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = m_2\left(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2\right)$$

Asumiendo que el movimiento es en una sola dirección

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$

Dividiendo entre si las expresiones halladas por energía y por cantidad de movimiento obtenemos.

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \Rightarrow (v'_2 - v'_1) = -(v_2 - v_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(v'_2 - v'_1)}{-(v_2 - v_1)} = 1$$

El cual es por supuesto el coeficiente de restitución de un choque perfectamente elástico $\varepsilon = 1$.

b) Choque perfectamente plástico. En un choque perfectamente Plástico, después del choque las masas quedan juntas, es decir tienen la misma velocidad, tal que

$\vec{v}'_2 = \vec{v}'_1$, por lo tanto:

$\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = 0$ y $\varepsilon = 0$

Ejemplo 13. Medición del coeficiente de restitución ε.

Si se quiere medir el coeficiente de restitución de 1os materiales, se realiza mediante una bola hecha con uno de los materiales y una superficie plana hecha con el otro material, la que se coloca sobre el suelo. Se suelta verticalmente la bola sobre la superficie desde una altura h_1.

Conocemos la velocidad de la bola al momento del choque

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

La bola rebota verticalmente hasta una altura h_2, tal que la velocidad v'_1 de la bola después del choque es:

$$v'_1 = -\sqrt{2gh_2}$$

Como la superficie no tiene velocidad inicial ni velocidad final $v_2 = 0$ y $v'_2 = 0$.

Encontramos que:

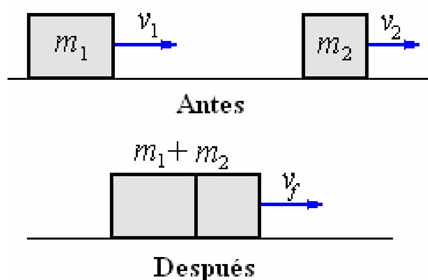
$$\varepsilon = -\frac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)} = -\frac{v'_1}{v_1}$$

Reemplazando valores:

$$\varepsilon = -\frac{-\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Ejemplo 14. Choque plástico o inelástico

a) Velocidades de igual dirección y sentido.



Supongamos un cuerpo 1 de masa m_1 y velocidad v_1 que se dirige a hacia el cuerpo 2 de masa m_2 y velocidad v_2, siendo ambas velocidades de igual dirección y sentido. Sobre cada cuerpo actuó en el momento del choque, el impulso que le provocó el otro cuerpo, entonces hay dos acciones de igual intensidad y sentido contrario, en consecuencia ambas cantidades de movimiento serán iguales y de sentido contrario. Luego del choque ambos cuerpos continúan juntos con una velocidad final común a ambos.

La velocidad final será:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

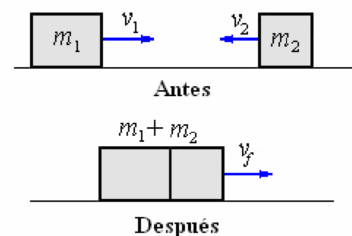
Como v_{1f} y v_{2f} son iguales porque ambos cuerpos siguen juntos:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_f$$

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{(m_1v_{1i} + m_2v_{2i})}{(m_1 + m_2)}$$

b) Velocidades de igual dirección y sentido contrario.



En este caso los cuerpos poseían velocidades de igual dirección pero de sentido contrario antes del choque, como en el caso anterior luego del impacto continúan juntos, con una velocidad final que estará dada por la diferencia de las cantidades de movimiento. La velocidad final será:

$$m_1v_{1i} - m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

Igualmente:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_f$$

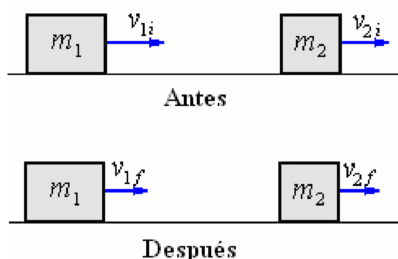
$$m_1v_{1i} - m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{(m_1v_{1i} - m_2v_{2i})}{(m_1 + m_2)}$$

La velocidad final mantendrá la misma dirección pero tendrá el sentido de la velocidad del cuerpo que antes del choque tenía mayor cantidad de movimiento.

Ejemplo 15. Choque elástico

a) Velocidades de igual sentido



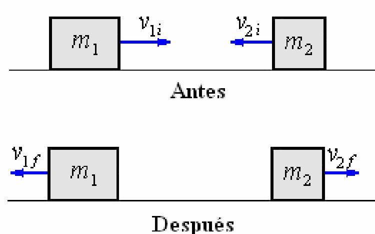
Durante el choque cada cuerpo recibe una cantidad de movimiento que es igual a la velocidad perdida por el otro. Al recuperar su forma inicial, cada uno pierde o gana respectivamente, la cantidad de movimiento ganada o perdida en el momento del choque, la velocidad final de cada uno será:

$$v_{1f} = \frac{m_2}{m_1}\left(v_{2i} - v_{2f}\right) + v_{1i}$$

Si las masas son iguales

$$v_{1f} = v_{2i} - v_{2f} + v_{1i}$$

b) Velocidades de distinto sentido



En este caso los cuerpos literalmente rebotan, y la velocidad final de cada uno será:

$$v_{1f} = \frac{m_2}{m_1}\left(v_{2i} + v_{2f}\right) - v_{1i}$$

Si las masas son iguales

$$v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} - v_{1i}$$

El principio de conservación del impulso es el mismo que el de conservación de la cantidad de movimiento.

Cabe aclarar que en la práctica podemos aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento durante los choques, siempre que el tiempo que el tiempo de duración del impacto sea muy pequeño.

Ejemplo 16. Choque plástico. Las dos partículas quedan en contacto después del choque.

Estudiar desde dos puntos de vista:

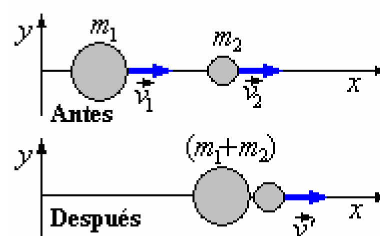
a) Observado desde tierra, sistema laboratorio y

b) Observado desde el centro de masa.

Solución.

a) Sistema laboratorio.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



Por conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}' \quad \text{y}$$

$$\vec{v}' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{\left(m_1 + m_2\right)} = \frac{\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)}\hat{i}$$

La energía mecánica antes del choque es:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

La energía mecánica después del choque es:

$$K' = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v'^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right)^2}{\left(m_1 + m_2\right)}$$

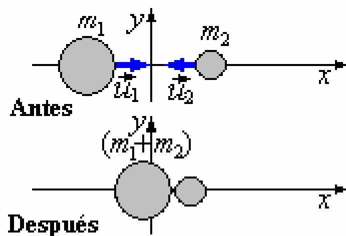
La relación de la energía es:

$$\frac{K'}{K} = \frac{m_1}{\left(m_1 + m_2\right)} \frac{\left(v_1 + \frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2}{\left(v_1^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2^2\right)}$$

Por ejemplo la caída de un meteorito a la tierra, la que suponemos inmóvil ($v_2 = 0$) y $m_1 << m_2$, obtenemos $K' = 0$ y $\frac{K'}{K} = 0$, éste es un choque perfectamente plástico. Si K fuera diferente de cero, la totalidad de la energía se transformaría en calor.

b) Sistema centro de masa.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



En éste caso:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \text{ y}$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

Con $\vec{v}_2 = 0$,

Obtenemos:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \text{ y } \vec{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

Después del choque m_1 y m_2 entran en contacto constituyendo una sola partícula de masa $(m_1 + m_2)$ que está en reposo en el sistema centro de masa,

$u'_1 = u'_2 = 0$.

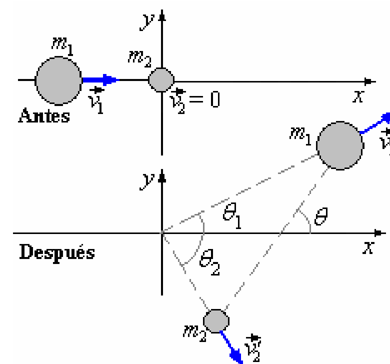
Aquí también $K' = 0$, $\varepsilon = 0$.

Ejemplo 17. Choque elástico. Consideremos dos partículas, una con masa m_1 y velocidad $\vec{v}_1$, la segunda con masa m_2 y velocidad $\vec{v}_2 = 0$

Solución.

a) Sistema laboratorio.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \qquad (1)$$

En sus componentes:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\theta_1 + m_2 v'_2 \cos\theta_2$$

$$0 = m_1 v'_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 v'_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Como es un choque elástico la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 \qquad (2)$$

En las ecuaciones (1) y (2) conocidas las masas m_1 y m_2, tenemos como incógnitas v_1, v'_1, v'_2, θ_1 y θ_2. Contamos con tres ecuaciones. Para resolver necesitamos conocer al menos dos de las cantidades anteriores.

En el caso particular en que $m_1 = m_2$, podemos llegar a la relación;

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$$

Elevándola al cuadrado:

$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2 + 2\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2$$

Por la conservación de la energía:

$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2$$

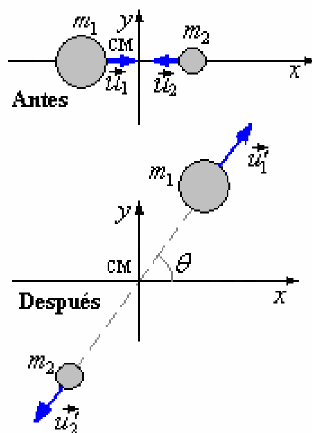
Luego, obtenemos:

$$\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0$$

Las velocidades $\vec{v}'_1$ y $\vec{v}'_2$ son ortogonales, esto nos dice que las trayectorias de las partículas después del choque son perpendiculares entre sí, tal que:
$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$

b) Sistema centro de masa.

La figura muestra las dos partículas antes y después del choque.



Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{u}'_1 + m_2 \vec{u}'_2 = 0$$

De aquí:

$$u_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_2} u_1\right)^2, \; u'^2_2 = \left(\frac{m_1}{m_2} u'_1\right)^2$$

Como es un choque elástico la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2$$

Reemplazando u_2 y u'_2 en función de u_1 y u'_1 respectivamente.

$$(m_1 u_1)^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) = (m_1 u'_1)^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)$$

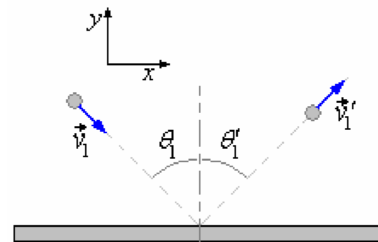
De aquí se deduce:

$$m_1 u_1 = m_1 u'_1 \Rightarrow u_1 = u'_1 \quad \text{y}$$

$$m_2 u_2 = m_2 u'_2 \Rightarrow u_2 = u'_2$$

Para un choque elástico $\varepsilon = 1$, como se espera.

Ejemplo 18. Reflexión de partícula sobre un plano. Consideremos dos partículas, una con masa m_1, que incide sobre una masa m_2 de superficie plana como se muestra en la figura. La masa m_1 tiene velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}'_1$ antes y después del choque, la superficie inicialmente está inmóvil $\vec{v}_2 = 0$ y tiene una velocidad $\vec{v}'_2$ después del choque.



Solución.

Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Para la energía tenemos que tomar en cuenta si el choque es elástico o no.

a) **Choque elástico.**

En éste caso la energía mecánica se conserva
$K = K'$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

De aquí obtenemos: $v'^2_1 - v_1^2 = \dfrac{m_2}{m_1} v'^2_2$

Expresión que podemos escribir como;

$$\left(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1\right) \cdot \left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = \frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2 \cdot \vec{v}'_2$$

De la conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = m_2\,\vec{v}'_2 \Rightarrow \left(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1\right) = \frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_2$$

Reemplazando ésta expresión en la de la energía, obtenemos:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$$

Como

$$\vec{v}_1 = v_1 \operatorname{sen}\theta_1 \hat{i} - v_1 \cos\theta_1 \hat{j}\ ,$$
$$\vec{v}'_1 = v'_1 \operatorname{sen}\theta'_1\, \hat{i} + v'_1 \cos\theta'_1\, \hat{j}\ ,$$

$$\vec{v}'_2 = -v'_2\, \hat{j}$$

Reemplazando obtenemos:

$$v_1 \operatorname{sen}\theta_1 \hat{i} - v_1 \cos\theta_1 \hat{j} + v'_1 \operatorname{sen}\theta'_1\, \hat{i}$$
$$+ v'_1 \cos\theta'_1\, \hat{j} = -v'_2\, \hat{j}$$

De aquí:

$$v_1 \operatorname{sen}\theta_1 + v'_1 \operatorname{sen}\theta'_1 = 0 \quad \text{y}$$
$$v_1 \cos\theta_1 - v'_1 \cos\theta'_1 = v'_2$$

En el caso en que $v'_2 = 0$ (la superficie no se mueve)

$\theta_1 = \theta'_1$ y $v_1 = v'_1$

b) **Choque inelástico.**

En éste caso $K > K'$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 > \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_1 v'^2_2$$

Para encontrar la relación de *K* y *K'* podemos usar el coeficiente de restitución ε.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{K'}{K}}\ ,\ \text{siendo } 0 \le \varepsilon \le 1$$

Ejemplo 19. En un parque de diversiones dos amigos juegan con los autitos "chocones". En cierto momento las direcciones de ambos vehículos forman un ángulo α. Un auto se dirige con velocidad $\vec{v}_1$ y el otro con velocidad $\vec{v}_2$ de tal modo que chocan.

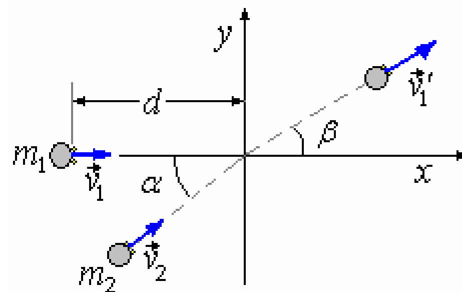
Después del choque el auto 1 sale con velocidad $\vec{v}'_1$ cuya dirección forma un ángulo β, tal como se indica en la figura.

a) Hallar la velocidad del auto 1 luego del impacto.

b) Determinar la posición del centro de masa y las ecuaciones paramétricas del mismo.

c) Determinar si el choque es elástico o no.

$m_1 = m_2 = 200\ \text{kg}$, $v_{01} = 3\ \text{m/s}$,
$v_{02} = 1\ \text{m/s}$, $v'_1 = 2\ \text{m/s}$, $\alpha = 53^\circ$, $\beta = 37^\circ$,
$d = 3\ \text{m}$



Solución.

a) por conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \Rightarrow$$
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

Aquí

$$\vec{v}_1 = 3\hat{i}\ ,$$

$$\vec{v}_2 = (1)\cos 53^\circ \hat{i} + (1)\operatorname{sen}53^\circ \hat{j}$$
$$= 0{,}6\hat{i} + 0{,}8\hat{j}\ ,$$

$$\vec{v}'_1 = (2)\cos 37^\circ \hat{i} + (2)\operatorname{sen}37^\circ \hat{j}$$
$$= 1{,}6\hat{i} + 1{,}2\hat{j}$$

Reemplazando:

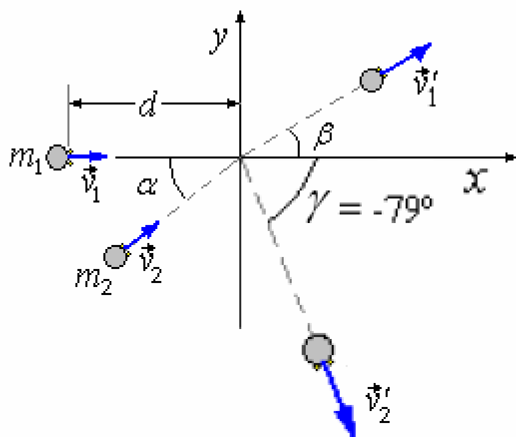
$$3\hat{i} + 0{,}6\hat{i} + 0{,}8\hat{j} = 1{,}6\hat{i} + 1{,}2\hat{j} + \vec{v}'_2$$

$$\Rightarrow \vec{v}'_2 = 2\hat{i} - 0{,}4\hat{j}$$

$$v'_2 = \sqrt{2^2 + 0{,}4^2} = \sqrt{4{,}16}$$

$$= 2{,}04 \text{ m/s}$$

$$\tan\gamma = \frac{2}{-0{,}4} = -5 \Rightarrow \gamma = -79^o$$



b) Para determinar la posición del centro de masa es necesario conocer la posición inicial de la masa m_2. Como m_1 y m_2 emplean el mismo tiempo desde el inicio hasta el choque:

$$t = \frac{d}{v_1} = \frac{3m}{3m/s} = 1s$$

La posición inicial de m_2 es:

$$x_{20} = -v_{2x}t = -0{,}6(1) = -0{,}6 \text{ m},$$
$$y_{20} = -v_{2y}t = -0{,}8(1) = -0{,}8 \text{ m}$$

Siendo la posición inicial de m_1

$$x_{10} = -3m, \; y_{10} = 0$$

El centro de masa está dado por:

$$x_{CM} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1 + m_2}, \; y_{CM} = \frac{y_1m_1 + y_2m_2}{m_1 + m_2}$$

Como $m_1 = m_2 = 200kg$

$$x_{CM} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \; y_{CM} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

<u>Antes del choque:</u>

$$x_1 = -3 + 3t, \qquad y_1 = 0$$

$$x_2 = -0{,}6 + 0{,}6t, \; y_2 = -0{,}8 + 0{,}8t$$

Luego

$$x_{CM} = -1{,}8 + 1{,}8t, \; y_{CM} = -0{,}4 + 0{,}4t$$

<u>Después del choque:</u>

$$x_1 = 1{,}6(t-1), \; y_1 = 1{,}2(t-1)$$

$$x_2 = 2(t-1), \; y_2 = -0{,}4(t-1)$$

Luego

$$x_{CM} = 1{,}8(t-1), \; y_{CM} = 0{,}4(t-1)$$

c) Para saber si es elástico o no, tenemos que analizar si la energía se conserva o no.

La energía cinética antes del choque es:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(200)(3)^2 + \frac{1}{2}(200)(1)^2$$

= 900 +100 = 1000 J

La energía cinética después del choque es:

$$K' = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$$

$$= \frac{1}{2}(200)(2)^2 + \frac{1}{2}(200)(2{,}04)^2$$

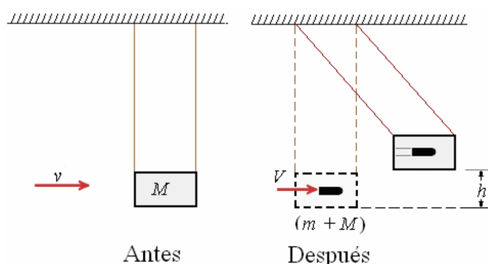
= 400 + 416 = 816 J

Hay una disminución de la energía cinética:

$\Delta K = 816 – 1000 = - 184$ J

Luego el choque es inelástico.

Ejemplo 20. El péndulo balístico. Este es el caso de un choque perfectamente plástico, se utiliza para medir la velocidad de un proyectil. Un proyectil de masa *m* y velocidad *v* se incrusta en el bloque de madera de masa *M*.



Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento.

$$m\vec{v} = (m + M)\vec{V}$$

La energía cinética después del choque es:

$K' = \frac{1}{2}(m + M)V^2$, ésta se convierte en energía potencial $U = (m + M)gh$

Luego $(m + M)V^2 = (m + M)gh$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

La velocidad del proyectil es:

$$v = \frac{(m + M)}{m}V = \frac{(m + M)}{m}\sqrt{2gh}$$

Ejemplo 21. Una bala de 5,00 g se dispara contra un bloque de madera de 1,00 kg suspendido de un hilo de 2,000 m, atravesándolo. El centro de masa del bloque se eleva 0,45 cm. Calcule la rapidez de la bala al salir del bloque si su rapidez inicial es de 450 m/s.

Solución.

La rapidez del bloque de madera después de que la bala ha atravesado (pero antes de que el bloque comience a elevarse; esto asume una gran fuerza aplicada por un tiempo corto, una situación característica de las balas) es

$$V = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9,80)(0,45\times10^{-2})}$$

$= 0,297$ m/s

La rapidez final v de la bala es

$$v = \frac{p}{m} = \frac{mv_0 - MV}{m} = v_0 - \frac{M}{m}V$$

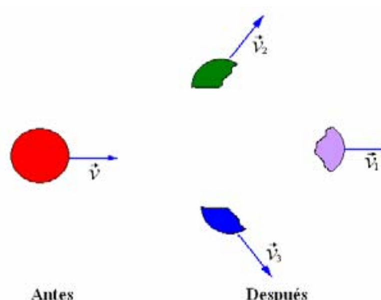
$$= 450 - \frac{1,00}{5,00\times10^{-3}}(0,297)$$

$= 390,6$ m/s .

Ejemplo 22. Un satélite artificial en vuelo explota en tres partes iguales. Una parte continúa a lo largo de su línea original de vuelo y las otras dos van en direcciones cada una inclinada 60º a la trayectoria original. La energía liberada en la explosión es dos veces más que la energía que tenía el saté1ite en el momento de la explosión. Determinar la energía cinética de cada fragmento Inmediatamente después de la explosión.

Solución.

La figura muestra el satélite antes y después de la explosión.



Por conservación de la cantidad de movimiento.

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$$

La cantidad de movimiento debe conservarse en las tres dimensiones *x*, *y*, *z* , independientemente, de allí que v_1, v_2, v_3 y v deben ser coplanares.

Así obtenemos:

$$Mv = \frac{M}{3}v_1 + \frac{M}{3}v_2\cos 60º + \frac{M}{3}v_3\cos 60º$$

y $\frac{M}{3}v_2\text{sen}60º - \frac{M}{3}v_3\text{sen}60º = 0$

De estas dos ecuaciones encontramos que:

$v_2 = v_3$ (1)

$3v = v_1 + v_2$ (2)

La energía inicial es: $E_i = \frac{1}{2}Mv^2$

La energía final es:

$$E_f = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{2}Mv^2$$

Esta energía es igual a la suma de las energías de los tres fragmentos.

$$\frac{3}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{3}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{3}v_3^2$$

$9v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ (3)

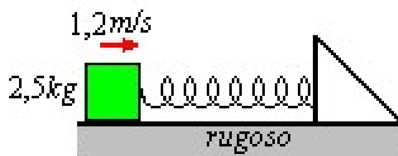
De las ecuaciones (1), (2) y (3) obtenemos:

$v_1 = v$, $v_2 = 2v$, $v_3 = 2v$

La energía cinética de cada uno de los fragmentos inmediatamente después de la explosión es:

$$K_1 = \frac{1}{6}Mv^2,\ K_2 = \frac{2}{3}Mv^2,\ K_3 = \frac{2}{3}Mv^2$$

Ejemplo 23. Un bloque de 2,5 kg, se desliza sobre una superficie rugosa, cuando contacta con el resorte tiene una velocidad de 1,2 m/s. el bloque se detiene momentáneamente cuando el resorte se ha comprimido 5,0 cm. El trabajo realizado por la fricción, desde el instante en que el bloque hace contacto con el resorte hasta el instante en que hace el alto es 0,50 J.
a) ¿Cuál es la constante del resorte (*k*)?
b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción?
c) Después de la compresión del resorte, el bloque se aleja de él, ¿cual es la velocidad del bloque, después de separarse del resorte?



Solución.
a) Energía antes = Energía después

$$\frac{1}{2}(2,5)(1,2)^2 = \frac{1}{2}k(0,05)^2 + 0,5$$

$\Rightarrow$ k = 1040N/m

b) $W_f = \mu mgd$

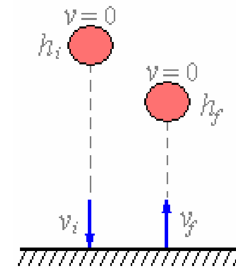
$$\Rightarrow \mu = \frac{W_f}{mgd} = \frac{0,5}{2,5\times 9,8\times 0,05} = 0,41$$

c) $\frac{1}{2}kx^2 - Wf = \frac{1}{2}mv^2$

$$\frac{1}{2}(1040)(0,05)^2 - 0,5 = \frac{1}{2}(2,5)v^2$$

$\Rightarrow$ v = 0,80 m/s

Ejemplo 24. Una pelota de masa m = 100 g se deja caer desde una altura h = 2m. La pelota rebota verticalmente hasta ¾ h después de golpear el suelo.
a) Calcular la cantidad de movimiento de la pelota antes y después de golpear el suelo,
b) si la duración del golpe fue de 0,01 s, calcular la fuerza media ejercida por el piso sobre la pelota.
Solución.
En la figura se muestra el esquema de la situación.



a) Cantidad de movimiento inicial:

$$\vec{p}_i = -mv_i\hat{j}$$

Cantidad de movimiento final:

$$\vec{p}_f = mv_f\hat{j}$$

Los valores de las velocidades inicial y final se pueden calcular usando el principio de conservación de la energía.
Inicial:

$$0 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{2gh_i}$$

Final:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + 0 = 0 + mgh_f$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh_f} = \sqrt{2g\left(\frac{3}{4}h_i\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}gh_i}$$

Por lo tanto, las cantidades de movimiento inicial y final son:

$$\vec{p}_i = -m\sqrt{2gh_i}\,\hat{j},\ \vec{p}_f = m\sqrt{\frac{3}{2}gh_i}\,\hat{j}$$

Reemplazando los valores, se tiene:

$p_i = -0,63$ kgm/s, $p_f = -0,54$ kgm/s

b) Usando la aproximación del impulso:

$$\vec{J} = \vec{F}_m \Delta t = \Delta \vec{p} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_f}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_m = \frac{0{,}54\hat{j} - \left(-0{,}63\hat{j}\right)}{0{,}01}$$

$$= 118\hat{j}\ \text{N}$$

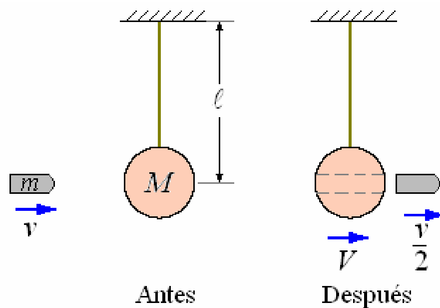
Ejemplo 25. Una bala de la masa *m* y con velocidad *v* pasa a través de un péndulo de masa *M*. La bala emerge con una velocidad de *v*/2. El péndulo está suspendido por una barra rígida de longitud *l* y masa insignificante. ¿Cuál es el valor mínimo de *v* tal que la masa del péndulo gire un círculo completo?

Solución.

En esta colisión, se conserva la cantidad de movimiento pero la energía no.

Este es un ejemplo de una colisión inelástica que no es perfectamente inelástica.

Para la colisión:



$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después} \Rightarrow mv = m\frac{v}{2} + MV$$

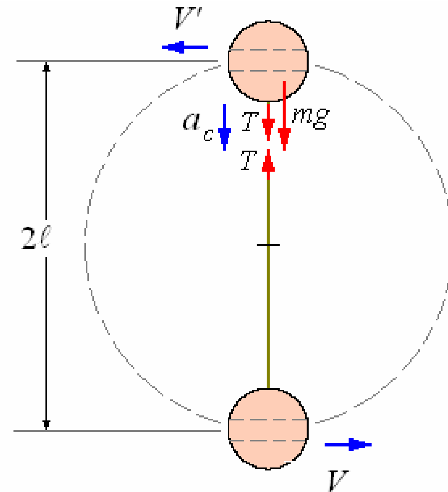
De aquí:

$$v = \frac{2M}{m}V \quad (1)$$

Después de la colisión se conserva la energía para el péndulo (la conservación de la energía para la bala después de la colisión no es útil desde que su energía no cambia). Este tratamiento nos da la velocidad del péndulo el momento después de la colisión:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + Mg(2\ell) \quad (2)$$

Condición para que pueda dar la vuelta



$$T + Mg = Ma_c$$

Condición mínima para hacer movimiento circular

$$T = 0$$

Luego

$$Mg = M\frac{V'^2}{\ell} \Rightarrow V'^2 = g\ell \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}Mg\ell + Mg(2\ell) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{5}{2}Mg\ell \Rightarrow V = \sqrt{5g\ell}$$

Reemplazando el valor de *V* en (1):

$$v = \frac{2M}{m}\sqrt{5g\ell}$$

MOVIMIENTO CON MASA VARIABLE - PROPULSIÓN POR REACCIÓN

Por la conservación de la cantidad de movimiento si un cuerpo en reposo puede expulsar una parte de su masa en cierta dirección, el resto de la masa se moverá en sentido opuesto, con igual cantidad de movimiento. Si este proceso puede mantenerse durante un tiempo, el resto de la masa, como es el caso de un cohete, aparecerá para un observador externo en reposo. Como si se estuviese acelerando. Esto se expresa mediante la forma más general de la segunda ley de Newton.

Como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

Siendo la masa variable

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

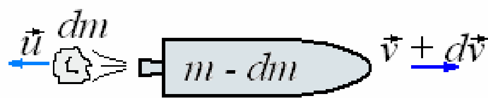
Expresión que nos permite determinar el movimiento de un cuerpo cuya masa cambia durante su movimiento.

Cuando aplicamos al caso de un cohete aparecen los problemas, evidentemente *m* es la masa del cohete que va cambiando. ¿Cuál es la velocidad de escape del combustible? No es igual a $\vec{v}$, la velocidad del cohete. Si no existe fuerza externa, ¿ $\vec{F}$ debe ser cero? Entonces no se moverá el cohete. Analicemos el problema desde el punto de vista de la conservación de la cantidad de movimiento.

Sea el cohete mostrado en la figura siguiente, en el instante *t*, tiene una masa *m* y una velocidad $\vec{v} = v\hat{i}$, con una cantidad de movimiento lineal $m\vec{v}$.



En la figura siguiente se muestra el cohete en el instante $t + dt$, a expulsado una masa dm que sale con una velocidad $\vec{u} = -u\hat{i}$ relativa al cohete. Ahora la masa del cohete es $(m - dm)$ y su velocidad es $\left(\vec{v} + d\vec{v}\right)$.



La cantidad de movimiento lineal total es:

$$(m - dm)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dm\left(\vec{v} - \vec{u}\right)$$

Por conservación de la cantidad de movimiento lineal tenemos: $\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$

$$m\vec{v} = (m - dm)\left(\vec{v} + d\vec{v}\right) + dm\left(\vec{v} - \vec{u}\right)$$

$$m\vec{v} = m\vec{v} + md\vec{v} - dm\vec{v} + dmd\vec{v} + dm\vec{v} - dm\vec{u}$$

Como el infinitésimo $dmd\vec{v}$ es de segundo orden, podemos despreciar éste término; luego

$$md\vec{v} - dm\vec{u} = 0$$

Dividiendo por dt se obtiene: $m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt} = 0$

Como $\vec{v}$ es la velocidad del cohete, $\frac{d\vec{v}}{dt}$ es la aceleración $\vec{a}$.

De éste modo:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Por la segunda ley de Newton se puede identificar la cantidad $\vec{u}\frac{dm}{dt}$ como una fuerza, tal que **la fuerza de empuje** es:

$$\vec{F} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Como $\vec{u}$ es negativa y $\frac{dm}{dt}$ por se pérdida de mas también es negativa, $\vec{F}$ es positiva, como esperábamos. Esta es una fuerza externa que produce aceleración al cohete, al que ahora consideraremos como un sistema aislado sobre el que hay una fuerza externa.

Velocidad del cohete.

De la expresión $md\vec{v} - dm\vec{u} = 0$, obtenemos:

$$d\vec{v} = \vec{u}\frac{dm}{m}$$

$$\vec{v}_{(t)} = \vec{u}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = \vec{u}\left[\ln\right]_{m_0}^{m} = \vec{u}\ln\frac{m}{m_0}$$

Como $\vec{u}$ es negativa y $m < m_0$, $\ln\frac{m}{m_0}$ es negativa.

Luego la velocidad es positiva.

Velocidad límite del cohete.

Una vez que se haya terminado el combustible la masa se reduce a m_1, y llegamos a la velocidad límite.

$$\vec{v}_m = \vec{u} \ln \frac{m_1}{m_0}$$

Una vez alcanzada ésta velocidad, ésta permanecerá constante.

Ejemplo 26. Un cohete y su combustible tienen una masa inicial m_0. El combustible se quema a una razón constante $\frac{dm}{m} = C$.Los gases son expulsados con una velocidad constante $\vec{u}$ respecto al cohete.

a) Despreciando la resistencia del aire, hallar la velocidad del cohete en el instante *t*, después de despegar de la tierra.

b) ¿Cuál es la altura que alcanza en el momento que se acaba el combustible?

Solución.

a) Las fuerzas que actúan sobre el cohete son la fuerza de empuje y la fuerza de la gravedad. Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{u}\frac{dm}{dt} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Donde $\vec{u} = -u\hat{k}$, $\vec{g} = -g\hat{k}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{k}$

y $\frac{dm}{dt} = -C \Rightarrow m = m_0 - Ct$

Reemplazando $uC - (m_0 - Ct)g = (m_0 - Ct)\frac{dv}{dt}$

o $\frac{dv}{dt} = -g + \frac{uC}{(m_0 - Ct)}$

Integrando $\int_0^v dv = \int_0^t -gdt + \int_0^t \frac{uC}{(m_0 - Ct)}dt$

La velocidad en el instante *t* es:

$$v_{(t)} = -gt - u\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0}$$

b) Antes de encontrar la altura que alcanza en el momento que se acaba el combustible, encontraremos la altura para el tiempo *t*.

Como $v_{(t)} = \frac{dz}{dt}$, tenemos:

$$dz = -gtdt - u\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0}dt$$

Integrando

$$\int_0^z dz = -\int_0^t gtdt - \int_0^t u\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0}dt$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{u}{C}(m_0 - Ct)\left[\ln\frac{(m_0 - Ct)}{m_0} - 1\right]$$

El tiempo t_1 en que se acaba el combustible es cuando $m = m_1$. Como $m = m_1 - Ct$, obtenemos:

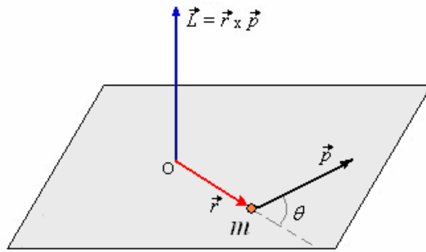
$$t_1 = \frac{m_0 - m_1}{C}$$

Reemplazando t_1 en la expresión anterior encontramos la altura que alcanza en el momento en que el combustible se acaba.

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR Y MOMENTO DE UNA FUERZA O TORQUE

Consideremos una partícula P de masa m, su posición con respecto al origen O en un instante dado está determinada por el vector $\vec{r}$.

La partícula tiene una velocidad $\vec{v}$ y su cantidad de movimiento lineal es $\vec{p} = m\vec{v}$.



LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR O MOMENTUM ANGULAR $\vec{L}$

Se define como el producto vectorial de $\vec{r}$ y $\vec{p}$,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

La dirección de $\vec{L}$ es perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{p}$, su sentido lo da la regla de la mano derecha, su módulo es:

$$L = rp \operatorname{sen}\theta = rmv \operatorname{sen}\theta$$

Como $v\operatorname{sen}\theta$ es la velocidad tangencial (v_t) y $v_t = \omega r$, siendo ω la velocidad angular. Podemos escribir:

$$L = mr^2\omega$$

MOMENTO DE INERCIA (I).

Llamando Momento de Inercia al producto mr^2,

Tenemos:

$$L = I\,\omega, \text{ vectorialmente } \vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

Las dimensiones de la cantidad de movimiento angular son:

$$[L] = [M][L]^2[T]^{-1}$$

Sus unidades en el sistema internacional:

$$\frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}} \text{ o J s}$$

Derivando la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \text{ y } \vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

Luego

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Por otra parte si $\vec{F}$ es la fuerza que produce el movimiento de la partícula, por la Segunda Ley de Newton tenemos:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Luego $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$

A esta cantidad que produce un cambio en la cantidad de movimiento angular se le conoce como

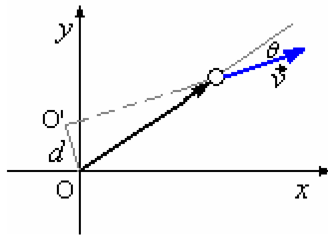
MOMENT0 DE UNA FUERZA o TORQUE $\left(\vec{\tau}\right)$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Tiene como módulo $\tau = rF \operatorname{sen}\theta$

Su sentido está dado por la regla de la mano derecha.

Ejemplo 27. Una partícula de masa *m* se mueve en el plano *xy* con una velocidad $\vec{v}$ a lo largo de una línea recta. ¿Cuál es la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular con respecto al origen O?



Solución.

La posici6n de la partícula es $\vec{r}$.

La velocidad de la partícula es $\vec{v}$.

Su cantidad de movimiento lineal es

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Su cantidad de movimiento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = rmv\,\text{sen}\,\theta\left(-\hat{k}\right)$$

La magnitud es: $L = rmv\,\text{sen}\,\theta = mvd$, donde $d = r\,\text{sen}\,\theta$

Luego $\vec{L} = -(mvd)\hat{k}$

Podemos ver que la cantidad de movimiento angular con respecto a O' es cero.

Ejemplo 28. En determinado instante, la Posición de una partícula con respecto a un origen O de coordenadas está dada por el vector $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ (en metros) . En ella actúa una fuerza $\vec{F} = 16\hat{i} + 32\hat{j}$ (en Newton) . Encontrar el torque originado por la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula. Con referencia al origen O.

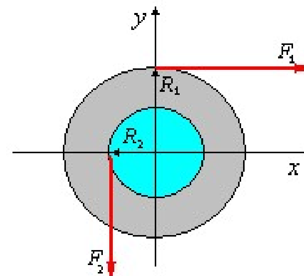
Solución.

El torque es: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(3\hat{i} + 4\hat{j}\right) \times \left(16\hat{i} + 32\hat{j}\right)$

$= (3)(32)\hat{k} + (4)(16)\left(-\hat{k}\right) = 96\hat{k} - 64\hat{k}$

$= 32\hat{k}$ Nm

Ejemplo 29. Un cilindro sólido Puede girar alrededor de un eje sin fricción como se ve en la figura. Una cuerda enrollada alrededor del radio exterior R_1 ejerce una fuerza F_1 hacia la derecha. Una segunda cuerda enrollada alrededor de la otra sección cuyo radio es R_2 ejerce una fuerza F_2 hacia abajo. ¿Cuál es el torque que actúa sobre el cilindro alrededor del eje z que pasa por O?



Solución.

Sobre el cilindro actúan:

$\vec{F}_1 = F_1\hat{i}$ en $\vec{r}_1 = R_1\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = -F_2\hat{j}$ en $\vec{r}_2 = -R_2\hat{i}$

El torque neto sobre el cilindro es:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -R_1F_1\hat{k} + R_2F_2\hat{k}$$

$$= \left(R_2F_2 - R_1F_1\right)\hat{k}$$

Si F_1 = 10 N, R_1 = 2 m y F_2 = 5 n, R_2 = 1 m:

$$\vec{\tau} = [(5N)(1m) - (10N)(2m)]\hat{k} = -15\hat{k}\ \text{N m}$$

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

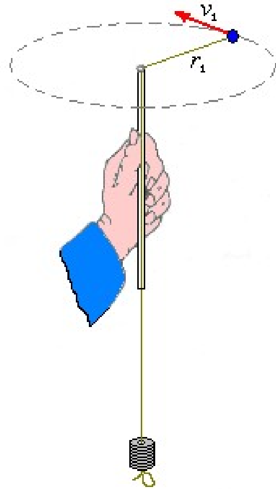
En el caso de una partícula come en la sección anterior, si el torque aplicado con relación a un punto dado de referencia es cero, tenemos que:

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0$, por consiguiente: $\vec{L} = \text{CONSTANTE}$

La cantidad de movimiento angular con respecto al punto de referencia es constante.

Ejemplo 30. Una partícula de, masa *M* en el extremo de un hilo gira con velocidad v_1 cuando el radio es r_1, si disminuimos el radio de r_1 a r_2, ¿qué sucede con la velocidad?

Solución.



La figura indica la forma como se puede realizar esta experiencia, para disminuir el radio basta jalar el hilo.

Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento angular:

$L_{\text{antes}} = L_{\text{después}}$

$$r_1 M v_1 = r_2 M v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$$

También podemos hallar el trabajo realizado para acortar el radio.

$$K_{antes} = \frac{1}{2} M v_1^2 ,$$

$$K_{después} = \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} M \left(v_1 \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 v_1^2$$

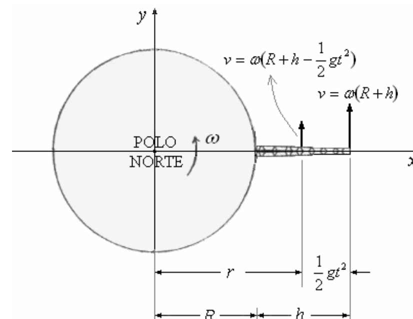
El trabajo realizado es igual al cambio de energía cinética.

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} M \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 v_1^2 - \frac{1}{2} M v_1^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_1^2 \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right]$$

Ejemplo 31. Cálculo de la desviación de un cuerpo situado en la línea ecuatorial y que cae desde una altura h.

Solución.



En la figura, sea una partícula de masa *m* a una altura *h* sobre la superficie de la Tierra en un punto que, para simplificar, consideramos que se encuentra sobre el ecuador. Para los casos de interés físico, la altura *h* será por lo común muy pequeña en comparación con el radio, *R* de la Tierra. Si se supone que la partícula parte del reposo en relación a un punto de la superficie de la Tierra verticalmente por debajo de él entonces, inicialmente, el componente radial de la velocidad v_r de la partícula desaparece y su componente tangencial v_θ será $\omega(R + h)$, en donde ω es la velocidad angular de la Tierra. Al soltarse, debido a la atracción gravitacional de la Tierra, la partícula comienza a caer verticalmente hacía abajo y, por ende, su distancia radial r del centro de la Tierra comienza a disminuir. De $L = mrv_\theta$ se deduce que el componente tangencial de su velocidad v_θ debe aumentar este proceso y de modo tal que haga que el producto rv_θ sea constante. En términos más cuantitativos, esto quiere decir que durante su descenso hacia el suelo, la distancia radial *r* y la velocidad tangencial v_θ se deben relacionar por medio de

$$mrv_\theta = m\omega(R + h)^2 \qquad (1)$$

Puesto que, inicialmente, la velocidad de la partícula es $\omega(R + h)$, de tal modo que su cantidad de movimiento angular *L* en relación al centro de la Tierra es $m\omega(R + h)^2$ Anticipándonos al hecho de que la desviación hacia el este será muy pequeña, podemos escribir para la distancia radial *r* del cuerpo al centro de la Tierra en cualquier instante t,

$$r = R + h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Y al sustituir esto en (1) obtenemos:

$$v_\theta = \frac{\omega (R+h)^2}{R+h-\frac{1}{2}gt^2} = \frac{\omega (R_o + h)}{\left[1-\frac{1}{2}gt^2/(R+h)\right]} \qquad (3)$$

Para calcular la magnitud de la desviación hacia el este, sea v_y en el instante t, la velocidad del cuerpo que cae en la dirección hacia el este, tal y como lo ve un observador fijo con respecto a la superficie de la Tierra. Entonces

$$v_y = v_o - r\omega$$

$$= \frac{\omega (R_o + h)}{\left[1-\frac{1}{2}gt^2/(R+h)\right]} - (R+h-\frac{1}{2}gt^2)\omega$$

$$= (R+h)\omega\left[1+\frac{\frac{1}{2}gt^2}{R+h}\right] - (R+h)\omega + \frac{1}{2}gt^2\omega$$

$$= gt^2\omega$$

Donde la segunda igualdad se obtiene de la utilización de (2) y (3) y la tercera, a continuación, mediante el hecho de que $gt^2 << (R + h)$ y el empleo del teorema binomial. Al integrar esta fórmula para v_y se obtiene, para la desviación total hacia el este y en el instante t,

$$y = \frac{1}{3}gt^3\omega .$$

Finalmente, puesto que el tiempo que necesita la partícula para caer la distancia h es de $(2hg)^{1/2}$, la deflexión total hacia el este d, se puede expresar como sigue

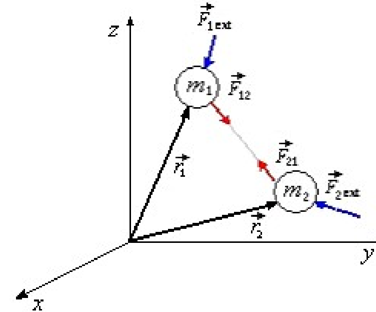
$$d = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (4)$$

Por ejemplo, si se deja caer una partícula desde una altura de 100 metros, su desviación hacia el este, según esta fórmula, se descubre que es (al sustituir los valores h = 100 metros y ω = 7,2 x 10^{-5}rad/s) de 2,2 cm. Esta desviación es muy pequeña y sólo se puede observar en condiciones controladas cuidadosamente.

Es importante recordar la base física para la deflexión pronosticada en (4). Conforme la partícula desciende hacia la superficie de la Tierra su velocidad tangencial v_θ debe aumentar para que el producto rv_θ sea constante. Por consiguiente, de esto se desprende que su velocidad tangencial debe sobrepasar a la del punto de la superficie que se encontraba inicial e inmediatamente por debajo, y, en esta forma, se desvía hacia el este.

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTICULAS.

Vamos a considerar un sistema de dos partículas, como se muestra en la figura.



Para la partícula 1: $\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{L}_1}{dt}$, donde

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{1ext}\right)$$

$\vec{F}_1$ Es la fuerza total sobre la partícula 1.

$\vec{F}_{12}$ Es la fuerza ejercida por la partícula 2 y

$\vec{F}_{1\,ext}$ Es la suma de las fuerzas externas sobre la partícula 1.

$$\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1\,ext} = \vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{1\,ext}$$

Similarmente para partícula 2.

$$\vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2\,ext} = \vec{\tau}_{21} + \vec{\tau}_{2\,ext}$$

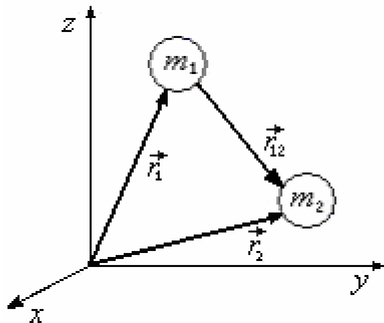
Sumando $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \frac{d\vec{L}_{total}}{dt}$

Para los Torques internos tenemos:

$$\vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

Como $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$$\vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_{12}$$



De la figura: $\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{12}$

Reemplazando

$$\vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{21} = -\vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12}$$

Como $\vec{r}_{12}$ y $\vec{F}_{12}$ son paralelos: $\vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12} = 0$, y

$$\vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{21} = 0$$

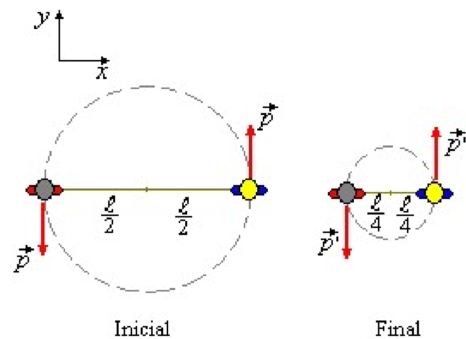
De aquí: $\vec{\tau}_{1\,ext} + \vec{\tau}_{2\,ext} = \dfrac{d\vec{L}_{total}}{dt}$ y $\vec{\tau}_{ext} = \dfrac{d\vec{L}_{total}}{dt}$

Vemos si $\vec{\tau}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{total} = \text{CONSTANTE}$, independiente del tiempo.

Ejemplo 32. Dos hombres se encuentran en una pista de patinaje, ambos sostienen una cuerda de longitud ℓ. ¿Qué pasa con la cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ de cada uno de ellos, si ambos jalan la cuerda y acortan la distancia entre ellos a $\ell/2$? Asumir que se mueven en círculo y que la magnitud de sus cantidades de movimiento son iguales.

Solución.

Las únicas fuerzas externas al sistema son la fuerza de la gravedad y la reacción normal del piso, estas fuerzas se cancelan. Las únicas fuerzas que, intervienen en el sistema son las internas, por lo tanto la cantidad de movimiento angular del sistema se conserva.



Al estar sujetos los dos hombres a la cuerda su movimiento es circular y si consideramos que el piso está en el plano xy,

Tenemos:

$$\vec{L}_{inicial} = 2\frac{\ell}{2} p\hat{k} = \ell p\hat{k},$$

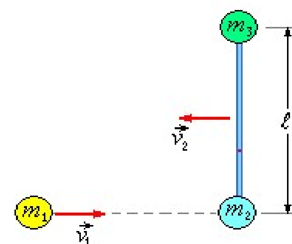
$$\vec{L}_{final} = 2\frac{\ell}{4} p'\hat{k} = \frac{\ell p'}{2}\hat{k}$$

Como $\vec{L}_{inicial} = \vec{L}_{final} \Rightarrow \vec{p}' = 2\vec{p}$

La cantidad de movimiento lineal final de cada hombre es el doble de la cantidad de movimiento lineal inicial.

CONSTANTE, Independiente, del tiempo

Ejemplo 33. Una partícula de masa m_1 se desplaza sobre un plano horizontal con velocidad $\vec{v}_1$. Dos partículas de masas m_2 y m_3 unidas por una varilla de masa despreciable se mueven con velocidad $\vec{v}_2$, como se indica en la figura.



Suponiendo un choque totalmente plástico entre m_1 y m_2

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, $\vec{v}_1 = 20\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\hat{i}$, $\vec{v}_2 = -10\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\hat{i}$, $\ell = 1\text{m}$

Calcular:

a) La posición del centro de masa respecto a la masa m_2 en el momento del choque.

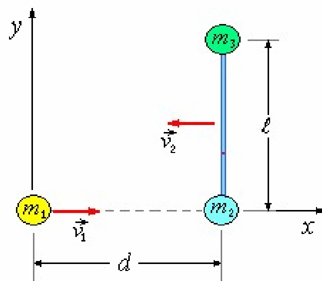
b) La ley del movimiento del centro de masa.

c.) La velocidad angular de rotación alrededor del centro de masa después del choque.

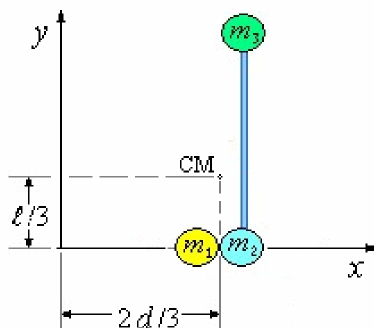
Solución.

a) En el momento del choque, tomando como referencia la posición de m_2, el centro de masa está en:

Posición en el instante partida (t = 0).



Posición en el instante de encuentro.



$$x_{CM} = \frac{m_1\left(\frac{2d}{3}\right) + m_2\left(\frac{2d}{3}\right) + m_3\left(\frac{2d}{3}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m(2d)}{3m} = \frac{2d}{3}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1(0) + m_2(0) + m_3(\ell)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{\ell}{3} = \frac{1}{3}\text{ m}$$

b) Como parten del reposo, la cantidad de movimiento total del sistema es cero.

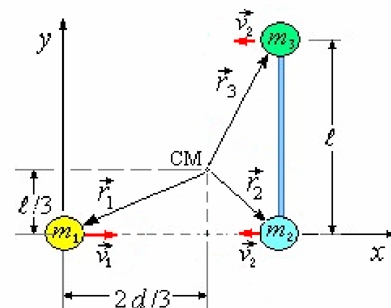
$$\vec{P}_{total} = M\vec{v}_{cm} = 0$$

Como $\vec{v}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{cm}$ $\therefore$ $\vec{r}_{cm}$ = constante.

El centro de masa permanece en la misma posición.

c) Consideremos la cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masa antes y después del choque.

<u>Antes del choque.</u>



$$\vec{L} = \vec{r}_{1cm}\times\vec{p}_1 + \vec{r}_{2cm}\times\vec{p}_2 + \vec{r}_{3cm}\times\vec{p}_3$$

$$\vec{r}_{1cm} = -\frac{2d}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j},\ \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = 20\hat{i}$$

$$\vec{r}_{2cm} = (d - v_2 t)\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j},\ \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = -10\hat{i}$$

$$\vec{r}_{3cm} = (d - v_2 t)\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j},\ \vec{p}_3 = m_3\vec{v}_2 = 20\hat{i}$$

Nota: En los vectores posición ($\vec{r}_{1cm}, \vec{r}_{2cm}, \vec{r}_{3cm}$) solo ponemos la posición en el eje y, porque la posición en x se va a anular con el producto vectorial.

Reemplazando:

$$\vec{L} = \left(-\frac{1}{3}\hat{j}\right)\times(20\hat{i}) + \left(-\frac{1}{3}\hat{j}\right)\times(-10\hat{i}) + \left(\frac{2}{3}\hat{j}\right)\times(-10\hat{i})$$

$$\vec{L} = \frac{20}{3}\hat{k} - \frac{10}{3}\hat{k} + \frac{20}{3}\hat{k} = 10\hat{k}$$

<u>Después del choque:</u>

Como después del choque el sistema gira alrededor del centro de masa con velocidad angular $\vec{\omega}$, podemos expresar la cantidad de movimiento angular en función del momento de inercia.

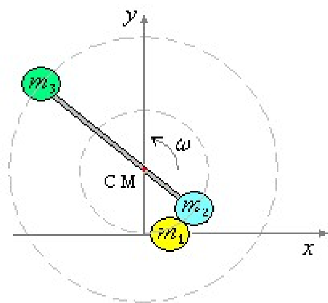
$$\vec{L}' = I\vec{\omega},\ I = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow$$

$$I = m_1\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m_3\left(\frac{2\ell}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

luego $\vec{L}' = \frac{2}{3}\vec{\omega}$

Por conservación de la cantidad de movimiento angular $\vec{L}' = \vec{L}$

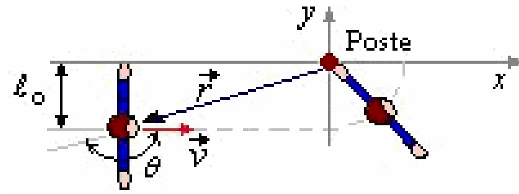
$$10\hat{k} = \frac{2}{3}\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = 15\hat{k}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Ejemplo 34. Un muchacho va corriendo por la acera con una velocidad constante *v* con sus brazos estirados perpendicularmente a su recorrido. La distancia entre los extremos de los dedos de sus manos es $2\ell_0$. Cuando al correr pasa junto a un poste, se coge al mismo con la mano izquierda, levanta los pies del suelo, y gira por aire alrededor del poste.

a) Si su masa es, *M*. ¿Cuál es el valor de su cantidad de movimiento angular respecto al poste cuando corre por la acera?

b) Si la fuerza de reacción del poste no só1o lo hace girar, sino que además proporciona una fuerza impulsiva que hace frenar ligeramente su movimiento hacia adelante, de modo que su energía cinética se reduce a los cuatro quintos de su valor original. ¿Cuál es su momento de inercia respecto al poste?



Solución.

a) La cantidad de movimiento con que se acerca el muchacho es:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = rmv\,\text{sen}\,\theta\hat{k}$$

Como $r\,\text{sen}\,\theta = \ell_0 \Rightarrow \vec{L} = m\ell_0 v\hat{k}$

b) Cuando el muchacho se coge del poste, las fuerzas de reacción centrípeta e impulsiva deben pasar por el poste por lo tanto no ejercen ningún torque sobre el muchacho y la cantidad movimiento angular se conserva.

$$\vec{L} = m\ell_0 v\hat{k} = \text{constante}$$

La energía cinética después de cogerse del poste es $K' = \frac{4}{5}K$.

K es la energía cinética antes de cogerse, $K = \frac{1}{2}mv^2$

Luego:

$$K' = \frac{4}{5}K = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{2}{5}mv^2 \quad (1)$$

También $K' = \frac{1}{2}I\omega^2$, como $\vec{L} = I\omega\hat{k} \Rightarrow$

$$\omega = \frac{L}{I}$$

Reemplazando éste valor de ω en *K'* :

$$K' = \frac{L^2}{2I} = \frac{(m\ell_0 v)^2}{2I} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{2}{5}mv^2 = \frac{(m\ell_0 v)^2}{2I}$$

Luego su momento de inercia es $I = \frac{5}{4}m\ell_0^2$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Una masa m_1 se sitúa en (x_1, y_1, z_1) y otra masa m_2 en (x_2, y_2, z_2).
a) Hallar 1a distancia r_0 entre m_1 y m_2.
b) Hallar la distancia r_1 entre m_1 y el centro de masa.
c) Hallar la distancia r_2 entre m_2 y et centro de masa.
Respuesta. a)

$$r_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

b) $r_1 = \frac{m_2 r_0}{(m_1 + m_2)}$, c) $r_2 = \frac{m_1 r_0}{(m_1 + m_2)}$

2. Dos partículas de masas m_1 = 1 kg y m_2 = 3 kg se mueven por el espacio, sus vectores posición Son:

$\vec{r}_1 = 3\hat{i} + t\hat{j} - \sqrt{t}\hat{k}$, $\vec{r}_2 = \text{sen}\, t^2\hat{i} + \hat{k}$

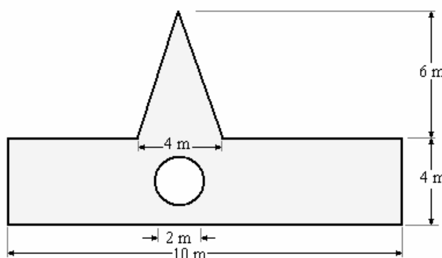
a) Hallar el centro de masa.
b) ¿Cuál es su aceleración?
c) Hallar su aceleración vista por un observador que se mueve con velocidad constante $\vec{v} = \hat{j} + 3\hat{k}$.
Respuesta. a)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{4}\left[\left(3 + 3\text{sen}\, t^2\right)\hat{i} + t\hat{j} + \left(3t - \sqrt{t}\right)\hat{k}\right]$$

b) $\vec{a}_{CM} = \frac{1}{2}\left(\cos t^2 + 2t^2 \text{sen}\, t^2\right)\hat{i} + \frac{1}{16}t\hat{k}$

c) igual que b)

3. Encontrar el centro de masa de una lámina delgada mostrada en la figura

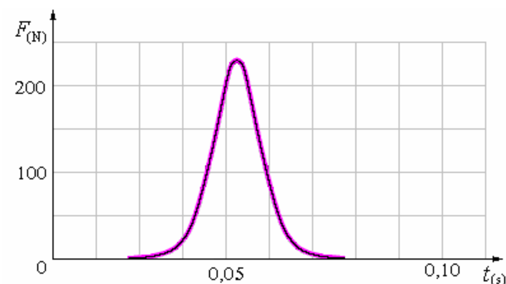


Respuesta. y = 0,983m encima del centro del orificio

4. Una fuerza $\vec{F} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ actúa sobre un cuerpo en el intervalo de $0 \le t \le 6s$. Hallar el impulso sobre el cuerpo.

Respuesta. 181 + 72j + 324l$18\hat{i} + 72\hat{j} + 324\hat{k}$

5. Suponga que la fuerza que actúa sobre una pelota de tenis (m = 0,060 kg) en función del tiempo está dada por la gráfica de la figura. Usando métodos gráficos estime:
a) El impulso total dado a la bola.
b) La velocidad de ésta después de haber sido golpeada, suponiendo que estaba en reposo en el momento de ser golpeada.



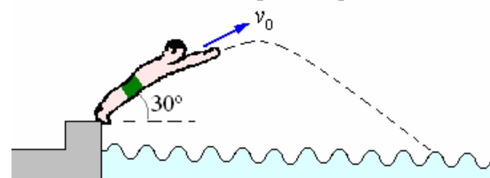
Respuesta. a) 4,5 Ns b) 75 m/s

6. Un flujo de partículas idénticas de masa m y velocidad uniforme $\vec{v}$, inciden sobre un plano fijo de área A, la dirección forma un ángulo θ con la normal. Después del choque las partículas tienen una velocidad $\vec{v}'$, la dirección es simétrica a la de $\vec{v}$. También $\vec{v} = \vec{v}'$.
a) Calcular el Impulso que se ejerce sobre cada partícula en el momento del choque.
b) Calcular el valor de la fuerza comunicada a la superficie por unidad de tiempo. Siendo n el numero de partículas por unidad de volumen de chorro incidente.

Respuesta. a) $\vec{J} = (2v\cos\theta)\hat{n}$,

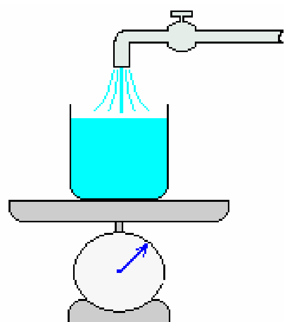
b) $F = 2nAmv^2\cos^2\theta$

7. Un nadador de 70 kg se lanza al agua desde el podio de una piscina con una velocidad de 3m/s en la dirección de la figura. Calcular la fuerza ejercida sobre el podio durante los 0,8s que el nadador ejerce el esfuerzo sobre el mismo para impulsarse en el salto.



Respuesta. $\vec{F} = \left(-227\hat{i} - 818\hat{j}\right)\text{N}$

8. Un recipiente de 0,25 kg con capacidad para 5 kg de agua se llena de un caño en 5 s. En el instante en que el recipiente está medio lleno, la balanza lee 3,0 kg. Si no se salpica el agua, ¿Cuál es la velocidad del agua que cae en dicho instante.



Respuesta. 2,45 m/s

9. Una bala de fusil de masa *m* y de velocidad constante v_0, penetra en un bloque de madera fijo; la bala se detiene después de recorrer una distancia *d* con un movimiento uniformemente retardado.
e) Calcular la desaceleración a de la bala, deducir la fuerza de desaceleración.
b) Calcular el tiempo de desaceleración.
c) ¿Cuál es el impulso comunicado a la bala por el bloque? Comparar con la cantidad de movimiento de la bala antes del choque.
Realizar la aplicación numérica para v_0 = 600 m/s, *d* =30 cm, *m* = 40 g

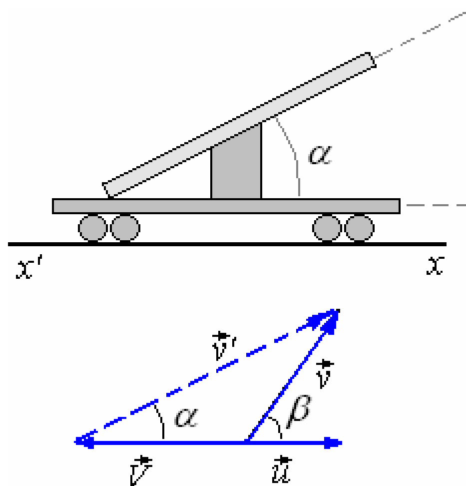
Respuesta. a) $a = \dfrac{v_0^2}{2d} = 6\times 10^5 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

$F = ma = 24\times 10^7\ \text{N}$,

b) $t = \dfrac{v_0}{a} = 10^{-3} s$

c) $J = F\,t$ = 24 N, $J = mv_0$

10. Un cañón fijo sobre un vagón que se puede desplazar si fricción sobre una vía rectilínea horizontal con una masa total *M*. El cañón forma un ángulo α con la horizontal.
a) Si el vagón está en reposo el cañón dispara un obús de masa *m*, determinar la relación entre las velocidades *v* y *V* del obús y del cañón.
b) Si la velocidad del obús relativa al cañón es *v'* (forma un ángulo θ con V), determinar la relación entre v' y V.
c) El vagón se desplaza con una velocidad rectilínea constante *u* sobre la vía antes del disparo. El obús tiene una velocidad *v* relativa al cañón en movimiento a la velocidad *V* después del disparo:
Calcular la variación de la velocidad (*u* - *v*) del vagón
Encontrar la velocidad $\vec{v}$ del obús.
d) Deducir del cálculo anterior el alcance *R* del obús.



Respuesta. a) $v = -\dfrac{M}{m}\dfrac{V}{\cos\alpha}$,

b) $v' = -\left(1 + \dfrac{M}{m}\right)\dfrac{V}{\cos\beta}$,

c) $u - v = \dfrac{m}{m+M} v'\cos\beta$,

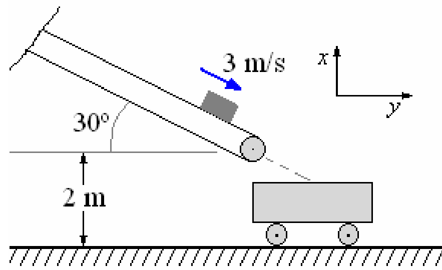
$\vec{v} = \left(u + Mv'\cos\beta\right)\hat{i} + v'\text{sen}\beta\hat{j}$

d) $R = \dfrac{2v^2}{g}\text{sen}\beta\left(u + \dfrac{Mv^2}{M+m}\cos\beta\right)$

11. Desde la plataforma de un tren que se mueve con una velocidad de 10 m/s se arroja un paquete de 25 kg, Este es cogido en el aire por una persona que está junto a la vía. Desde el tren se observa que esta persona retrocede con una velocidad de 7,5 m/s. ¿Cuál es la masa de la persona?
Respuesta. 75 kg.

12. Un muchacho está en medio de un lago congelado sin fricción de tal manera que no puede moverse. Para poder salir él lanza su sombrero de masa 0,5 kg hacia el norte con una velocidad de 12 m/s a 53' con la horizontal. Si la masa del muchacho es 60 kg y el radio del lago es 400 metros. ¿Qué pasa7
Respuesta. El muchacho resbala hacia el sur y llega a la orilla 1 h 51 min después.

13. Un paquete de 10 kg se descarga de una cinta transportadora con una velocidad de 3 m/s y cae en una vagoneta de 25 kg. ¿Si la vagoneta está inicialmente en reposo y puede rodar libremente, Cuál es su velocidad final?

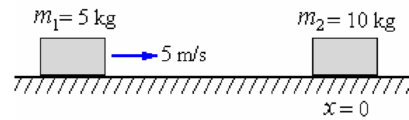


Respuesta. $v = 0{,}732\ \hat{i}$ m/s

14. Un hombre de 75 kg se lanza al agua desde la proa de su bote de 50 kg. La componente horizontal de su movimiento es 1 m/s respecto al bote. Hallar las velocidades del hombre y del bote respecto a un observador en el muelle.
a) Si el bote está inicialmente en reposo
b) Si el bote se movía inicialmente hacia adelante con una velocidad de 2 m/s. No considerar pérdidas de energía debido al agua
Respuesta. a) $v_1 = 0{,}4$ m/s , $v_2 = 0{,}6$ m/s
b) $v_1 = 2{,}4$ m/s , $v_2 = 1{,}4$ m/s

15. Un cañón dispara un obús de 2,4 kg hacia arriba. A1canza su máxima altura, 313,6 m y se parte en dos, 0,8 kg y 1,6kg. Las dos partes llegan a tierra simultáneamente. La pieza de 1,6 kg toca tierra a 480 m de la explosión (medida a lo largo del eje x).
a) ¿Cuánto tiempo tomaría al obús volver a tierra si no se hubiera partido?
b) ¿Cuál es la velocidad de cada una de las piezas justamente después de la explosión?
c) Encontrar la cantidad de movimiento de cada pieza justamente antes de tocar tierra.
Respuesta. a) 8 segundos
b) $\vec{v}_{(1,6)} = 60\hat{i}$ m/s (16), $\vec{v}_{(0,8)} = -120\hat{i}$ m/s
c) $\vec{p}_{(1,6)} = 96\hat{i} - 125{,}44\hat{j}$ kg.m/s ,
$\vec{p}_{(0,8)} = -96\hat{i} - 62{,}72\hat{j}$ kg.m/s
(El movimiento es en el plano *xy*; $g = 9{,}8$ m/s^2)

16. Un bloque de masa 10 kg está en reposo en el origen segundo con masa 5 kg se mueve a lo largo del eje *x* con velocidad de magnitud v_0 = 5 m/s. Los bloques choca quedan unidos. y se mueven en el eje *x*. La superficie tiene fricción despreciable.
a) ¿Cuando el bloque de 5 kg está en x = -10 donde está centro de masa?
b) Encontrar la cantidad de movimiento de la masa de 5 kg, de la masa de 10kg y del centro de masa antes del choque.
c) ¿Cuál es la velocidad del sistema combinado?

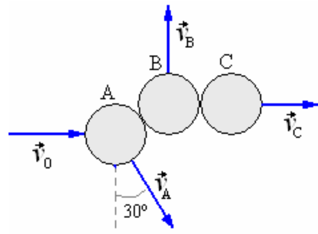


Respuesta. a) x_{CM} = - 3 1/3 m,
b) $\vec{p}_1 = 25\ \hat{i}$ kg.m/s, $\vec{p}_2 = 0$, $\vec{p}_{CM} = 25\ \hat{i}$ kg.m/s
c) $\vec{v} = 1\ 2/3\ \hat{i}$ m/s

17. Dos bolas P_1 y P_2 de masas m_1 y m_2 están suspendidas del cielorraso por dos hilos inextensibles de la misma longitud ℓ ; P_1 y P_2 están en contacto sin presión con los hilos verticales.
Se saca P_1 de la posición de equilibrio a un ángulo θ_0 manteniendo el hilo tenso, luego se suelta sobre P_2.
Calcular:
a) La velocidad de P_1 justo antes del choque.
b) Las velocidades v'_1 y v'_2 de P_1 y P_2 inmediatamente después del choque perfectamente elástico. Discutir este resultado para valores relativos de las masas m_1 y m_2.
c) Las alturas de las posiciones limites de P_1 y P_2 después del choque.
Aplicación numérica; $\ell = 1$ m . θ_0 = 60º, $m_2 = m_1/2$
Respuesta. a) $v_1 = \sqrt{2g\ell\cos\theta_0}$, $v_1 = 3{,}13$ m/s ,
b) $v'_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$, $v'_1 = 1{,}05$ m/s

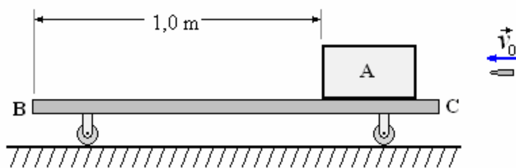
Para $m_1 > m_2$ v_1 y v'_1 tienen el mismo sentido.
Para $m_2 > m_1$ v'_1 tiene sentido contrario de v_1.
$v'_2 = \dfrac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$, $v'_2 = 4{,}22$ m/s
v'_2 en todo caso tiene el mismo sentido que v_1
c) $h_1 = \dfrac{v'^2_1}{2g} = 0{,}056$ m , $h_2 = \dfrac{v'^2_2}{2g} = 0{,}91$ m

18. En un Juego de billar, la bola A está moviéndose con 1a velocidad $\vec{v}_0$ = 31 m/s cuando choca con las bolas B y C que están juntas en reposo. Tras el choque, se observan la tres bolas moviéndose en las direcciones que muestra 1a figura, con θ = 30º. Suponiendo Superficies lisas y choques perfectamente elásticos, hallar los módulos de la velocidades, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_C$.



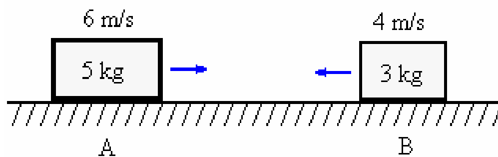
Respuesta. v_A = 1,5 m/s , v_B = 1,29 m/s , $\vec{v}_C$ 2,25 m/s

19. Se dispara una bala de 39 g con una velocidad de 500 m/ contra un bloque A de 5 kg de El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y la plataforma es 0,5. Si la masa de la plataforma es 4 kg y puede rodar libremente, hallar:
a) La velocidad final de la plataforma y e1 bloque.
b) La posición final del bloque sobre la plataforma.



Respuesta. a) 2,16 m/s b) El bloque se detiene a 0,33 m de B.

20. La figura muestra dos masas sobre una superficie con rozamiento despreciable. El coeficiente de restitución entre Las dos masas es 0,73; determinar:
a) Sus velocidades después del choque.
b) La pérdida de energía durante el choque.

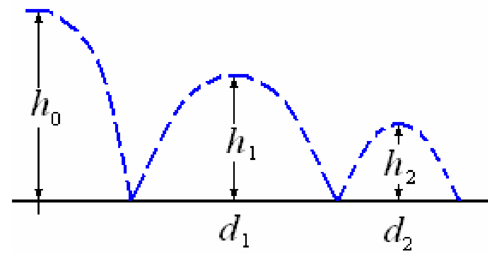


Respuesta: a) $\vec{v}_A$ = - 0,563 $\hat{i}$ m/s, $\vec{v}_B$ = 6,94 $\hat{i}$ m/s
b) ΔK = 41 J

21. Se deja caer una pelota al suelo desde una altura y. Si el coeficiente de restitución es ε, escribir expresiones para el tiempo total que tardará la pelota en dejar de dar bote y la distancia total que recorrerá en este tiempo.

Respuesta. $t = \sqrt{\dfrac{2y}{g}}\dfrac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}$, $s = y\dfrac{(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)}$

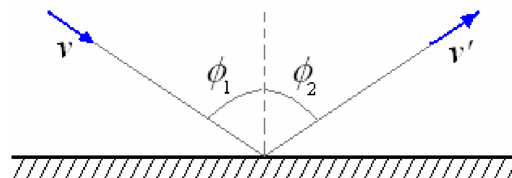
22. Una bola cae desde una altura h = 0,900 m sobre una superficie lisa. Si la altura del primer rebote es h_1 = 0,800 m y la distancia d_1 = 0,400 m, calcular:
a) El coeficiente de restitución.
b) La altura y longitud del segundo rebote.



Respuesta. a) 0,943 m, b) 0,711 m, 0,37 m

23. Un objeto de 5 kg que se mueve con una velocidad de 1,2 m/s choca directamente con un objeto de 20 kg que está en reposo. Se observa que el objeto menor rebota con una velocidad de 0,6 m/s
a) ¿Cuál es la pérdida de energía cinética por el impacto?
b) ¿Cuál es el coeficiente de restitución?
Respuesta: a) ΔK = - 0,675 J, b) ε = 0,875

24. Una bola choca contra un plano liso formando un ángulo ϕ_1 con la normal del mismo y rebota con un ángulo ϕ_2. Encontrar La expresión correspondiente al coeficiente de restitución



Respuesta. $\varepsilon = \dfrac{\tan\phi_1}{\tan\phi_2}$

25. Ira partícula de masa m_1 tiene un choque frontal perfectamente elástico con una partícula de masa m_2 inicialmente en reposo. ¿Cuál es la pérdida relativa de energía cinética correspondiente a la partícula . m_1

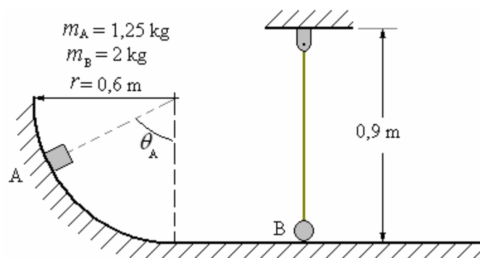
Respuesta. $\dfrac{\Delta K}{K} = 4\dfrac{m_1}{m_2\left(1+\dfrac{m_1}{m_2}\right)^2}$

26. Una masa m_1 se mueve a lo largo del eje x con una velocidad v_0 a lo largo de una mesa sin fricción. Choca con otra nasa, la cual está inicialmente en reposo. La masa m_2 sale a lo largo del eje y. Si se pierde la mitad de la energía cinética original en el choque.
¿Cual es el módulo de la velocidad y con que ángulo sale después de la colisión?

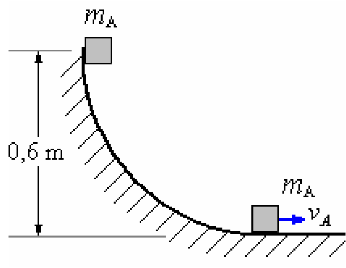
Respuesta. $v_2 = m_1 v_0 \sqrt{\dfrac{3}{2\left(m_2^2 + m_1 m_2\right)}}$,

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{m_1 v_0}{m_2 v_2}\right) = \cos^{-1}\left[\dfrac{2}{3}\dfrac{(m_1 + m_2)}{m_2}\right]^{\frac{1}{2}}$

27. Se deja en libertad el bloque A cuando θ_A = 90 y desliza sin rozamiento, hasta chocar con la bola B. Si el coeficiente de restitución es 0,90, calcular
a) La velocidad de B inmediatamente después del choque.
b) La máxima tracción que soporta el hilo que sostiene a B
c) La altura máxima a la que se eleva B.



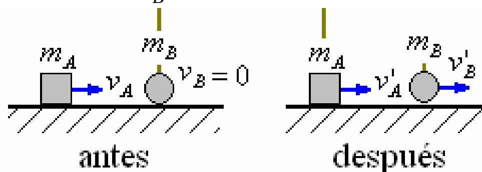
Solución.
a) Por conservación de energía encontraremos v_A.



$m_A g r = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \Rightarrow$

$v_A = \sqrt{2gr} = \sqrt{2(9,8)(0,6)}$
= 3,43 m/s

Por conservación de la cantidad de movimiento encontraremos v'_B



v_A = 3,43 m/s v_B = 0

$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow$

$(1,25)(3,43) = 1,25 v'_A + 2 v_B \Rightarrow$

$v'_A + 1,6 v'_B = 3,43$ (1)

El coeficiente de restitución es 0,90

$\varepsilon = -\dfrac{(v'_2 - v'_1)}{(v_2 - v_1)} = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A} = 0,9$

$\dfrac{v'_B - v'_A}{v_A} = 0,9 \Rightarrow \dfrac{v'_B - v'_A}{3,43} = 0,9 \Rightarrow$

$v'_B - v'_A = 0,9(3,43) = 3,09$ (2)

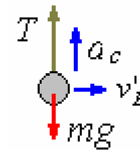
Sumando (1) y (2):

$v'_B + 1,6 v'_B = 3,09 + 3,43$

La velocidad de B inmediatamente después del choque es

v'_B = 2,51 m/s

b) El diagrama del cuerpo libre de B, inmediatamente después del choque

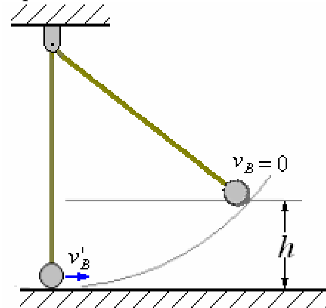


$\sum F_r = m_B a_c \Rightarrow T - m_B g = m_B \dfrac{v'^2_B}{0,9} \Rightarrow$

$T = m_B \left(\dfrac{v'^2_B}{0,9} + g\right)$

$= 2\left(\dfrac{2,51^2}{0,9} + 9,8\right)$ = 33,6 N

c) Por conservación de energía encontramos la altura máxima a la que se eleva B.



$\frac{1}{2} m_B v'^2_B = m_B g h \Rightarrow$

$h = \dfrac{v'^2_B}{2g} = \dfrac{2,51^2}{2(9,8)}$ = 0,321 m

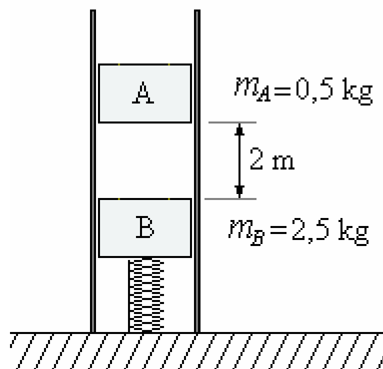
28. Un bloque de masa *M* está en reposo sobre una masa sin fricción. Lo podemos golpear con un bloque que se quede adherido o con un bloque muy duro con el que se producirá un choque perfectamente elástico. Ambos bloques tienen masa *m* y pueden ser lanzados can velocidad V_0 ¿En cuál de los casos el bloque *M* se moverá más rápidamente? (considerar el movimiento en una sola dimensión).

Respuesta. a) $v'_2 = \dfrac{m}{m + M} V_0$,

b) $v'_2 = \dfrac{2m}{m + M} V_0$

En el segundo caso es el doble que en el primero.

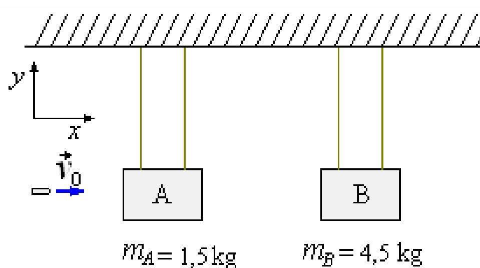
29. Un cilindro A cae sobre otro B apoyado sobre un resorte de constante k = 3000 N/m desde una altura de 2m. Si el choque es perfectamente plástico, calcular:
a) El desplazamiento máximo de B.
b) La pérdida de energía en el choque.



Respuesta. a) 3,47 cm , b) 8,18 J

30. Los parachoques se diseñan de tal manera que un automóvil de 1600 g que golpea una pared rígida a la velocidad de 12 km/h no sufra daño. Suponiendo que ese choque es perfectamente plástico. Calcular:
a) La energía absorbida por el parachoques durante el impacto.
b) La velocidad a la que el automóvil puede golpear a otro de iguales características, que está en reposo sin dañarse.
Respuesta. a) 8890 J b) 24 km/h

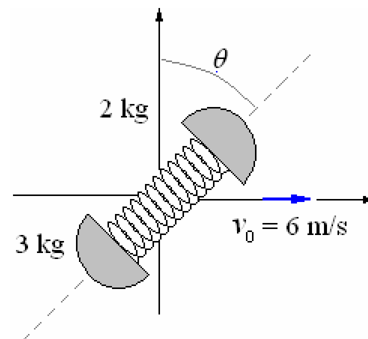
31. Se dispara una bala de 25g en dirección horizontal. La bala atraviesa el bloque A y queda alojada dentro de bloque B. Por dicha causa los bloques A y B comienzan a moverse con velocidades iniciales de 2,4 y 1.8 m/s. respectivamente.
Hallar:
a) La velocidad inicial v_0 de la bala.
b) La velocidad de la bala en el trayecto entre el bloque A y el B.



Respuesta. a) $470\hat{i}\ m/s$ b) 3261 m/s

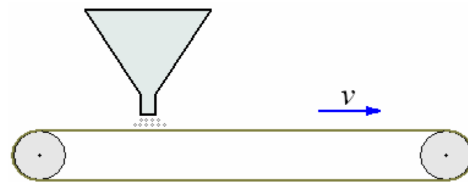
32. Una explosión rompe un objeto en dos piezas una de las cuales tiene 1,5 veces la masa de la otra. Si se liberan 4500 J en la explosión. ¿Cuánta energía cinética adquiere cada pedazo?
Respuesta. 1800 J, 2700 J

33. Cuando se rompe la cuerda que une las partículas A y B, el resorte comprimido las obliga a separarse (el resorte no está unido a las partículas). La energía potencial del resorte comprimido es de 60 J y el conjunto posee la velocidad inicial $\vec{v}_0$ Si se rompe la cuerda cuando $\theta = 30^o$, hallar la velocidad resultante de cada partícula



Respuesta. $\vec{v}_A = 9\hat{i} + 5{,}2\hat{j}$ m/s y
$\vec{v}_B = 4\hat{i} - 3{,}5\hat{j}$ m/s

34. Un depósito suelta arena a una banda transportadora razón de 75 kg/s. Si la banda se mueve con una rapidez constate v = 2,2 m/s. ¿Qué fuerza se necesita para mantenerla en movimiento? No tomar en cuenta la fricción



Respuesta. 165 N

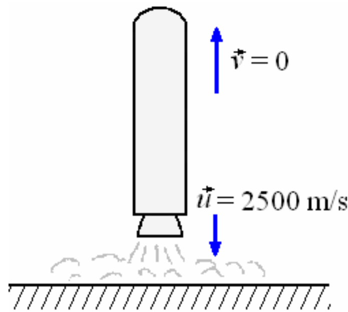
35. Un trineo lleno de arena se desliza sin fricción por una pendiente de 30º. La arena se escapa por un agujero en el trineo a un ritmo de 2 kg/s. Si el trineo parte del reposo con una masa inicial de 40 kg. ¿Cuánto tardó en recorrer 120m a lo largo de la pendiente?
Respuesta. 7 segundos

36. Un cohete que consume combustible a un ritmo constante k se encuentra sometido a la acción de una fuerza externa constante de valor F además de la fuerza de reacción de los gases. La masa inicial del cohete más combustible es m_0. La configuración de la tobera de escape es de tal manera que la velocidad relativa de los gases es igual al negativo de la velocidad v del cohete.
a) Escribir la ecuación del movimiento.
b) Obtener $v_{(t)}$.

Respuesta. a) $F = (m_0 - kt)\dfrac{dv}{dt} - kv$,

b) $v_{(t)} = \dfrac{Ft}{m_0}$

37. Un cohete experimental se proyecta de forma que pueda mantenerse inmóvil sobre el suelo. El cuerpo del cohete tiene una masa de 1200 kg y la carga de combustible inicial es de 3600 kg,. e1 combustible se quema y se expulsa con una velocidad de 2500 m/s. Hallar la velocidad de consumo de combustible necesario.
a) en el momento de encender el cohete.
b) cuando se consume la última partícula de combustible.



Respuesta. a) 18,84 kg/s . b) 4.71 kg/s

38. Una bala de masa *m* se dispara con una velocidad $\vec{v}_B = -v_B \hat{i}$, si para $x = x_0$, $y = a$ (permanece constante) ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular con respecto al origen en función de *x*?

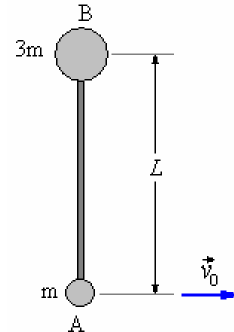
Respuesta. $\vec{L} = mv_0 a\hat{k}$

39. Un obús de masa m se dispara de un cañón en el origen, El obús se mueve en el plano y con una velocidad inicial de magnitud v_0 y un ángulo θ con el eje *x*.
a) ¿Cuál es el torque sobre el obús, con respecto al origen en función del tiempo?
b) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del, obús con respecto al origen en función del tiempo?
c) Comprobar que $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Respuesta. a) $\vec{\tau} = -v_0 mgt\cos\theta\,\hat{i}$

b) $\vec{L} = -\dfrac{1}{2}v_0 mgt^2\cos\theta\,\hat{i}$

40. Dos esferas pequeñas A y B están unidas por una varilla rígida de longitud ℓ y masa despreciable. Las dos masas reposan sobre una superficie lisa horizontal cuando se comunica repentinamente a A la velocidad $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$. Hallar: a) La cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular del sistema respecto al centro de masa.
b) Las velocidades de A y B cuando la varilla ha girado 90º.
c) Las velocidades de A y B cuando la varilla ha girado 180º.

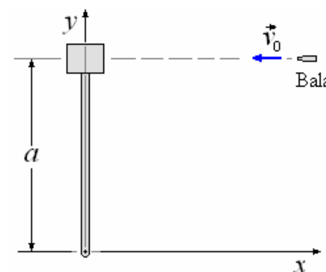


Respuesta: a) $\vec{p} = mv_0\hat{i}$, $\vec{L} = \dfrac{3}{4}m\ell v_0\hat{k}$

b) $\vec{v}_A = \dfrac{1}{4}v_0\hat{i} + \dfrac{3}{4}v_0\hat{j}$, $\vec{v}_B = \dfrac{1}{4}v_0\hat{i} - \dfrac{1}{4}v_0\hat{j}$

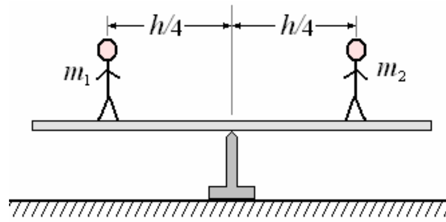
c) $\vec{v}_A = -\dfrac{1}{2}v_0\hat{i}$, $\vec{v}_B = \dfrac{1}{2}v_0\hat{i}$

4l. Se tiene una varilla rígida de masa despreciable sujeta a un eje sin rozamiento de tal manera que la varilla pueda rotar libremente. Al otro extremo de la varilla hay un bloque de masa *M*. Si se dispara una bala de masa *m* con una velocidad v_0 tal como se muestra en la figura. ¿Si la bala se incrusta en el bloque, cuál será la velocidad angular del bloque alrededor del eje7



Respuesta. $\omega = \dfrac{mv_0}{(m+M)a}$

42. Una barra de longitud b está pivotada en su centro de tal manera que puede rotar en el plano horizontal. Dos niños están sobre la barra en las posiciones mostradas en la figura 7.59. a cual está rotando con una velocidad angular en el sentido antihorario visto desde arriba. Si el niño de masa m_1 empieza a moverse hacia el centro tal que su distancia a el es $b/4 - at^2$, ¿Cuál debe ser el movimiento del niño de masa m_2 para que la velocidad angular de la barra permanezca constante? (La masa de la barra es despreciable),



Respuesta. Debe cambiar su distancia al centro de acuerdo a la ecuación $\sqrt{\frac{b^2}{16} + \frac{m_1}{m_2} at^2 \left(\frac{b}{2} - at^2 \right)}$

43. Un taco golpea a una bola de billar ejerciendo una fuerza promedio de 50 N durante un tiempo de 0,01 s, si la bola tiene una masa de 0,2 kg, ¿qué velocidad adquirió la bola luego del impacto?.

Respuesta. v_f = 2,5 m/s

44. Una fuerza actúa sobre un objeto de 10 kg aumentando uniformemente desde 0 hasta 50 N en 4 s. ¿Cuál es la velocidad final del objeto si partió del reposo?.

Respuesta. v_f = 10 m/s

45. Se rocía una pared con agua empleando una manguera, la velocidad del chorro de agua es de 5 m/s, su caudal es de 300 cm^3/s, si la densidad del agua es de 1 g/cm^3 y se supone que el agua no rebota hacia atrás, ¿cuál es la fuerza promedio que el chorro de agua ejerce sobre la pared?.

Respuesta. F = 1,5N

46. Se dispara horizontalmente una bala de 0,0045 kg de masa sobre un bloque de 1,8 kg de masa que está en reposo sobre una superficie horizontal, luego del impacto el bloque se desplaza 1,8 m y la bala se detiene en él. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es de 0,2, ¿cuál era la velocidad inicial de la bala?.

Respuesta. v_{1i} = 1073 m/s

47. Se dispara una bala de 0,01 kg de masa contra un péndulo balístico de 2 kg de masa, la bala se incrusta en el péndulo y éste se eleva 0,12 m medidos verticalmente, ¿cuál era la velocidad inicial de la bala?.

Respuesta. v_{1i} = 309,8 m/s

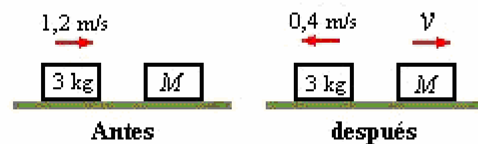
48. Una partícula A de masa m_A se encuentra sujeta por medio de un resorte comprimido a la partícula B de masa $2m_A$, si la energía almacenada en el resorte es de 60 J ¿qué energía cinética adquirirá cada partícula luego de liberarlas?.

Respuesta. $E_{c\,Bf}$ = 20 J

49. Un cuerpo de masa m_1 = 2 kg se desliza sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad inicial v_{1i} = 10 m/s, frente a él moviéndose en la misma dirección y sentido se encuentre el cuerpo de masa m_2 = 5 kg cuya velocidad inicial es v_{2i} = 3 m/s, éste tiene adosado un resorte en su parte posterior, cuya constante elástica es k = 1120 N/m, ¿cuál será la máxima compresión del resorte cuando los cuerpos choquen?.

Respuesta. Δx = 0,28 m

50. Un bloque de 3,0 kilogramos, moviéndose sobre una superficie sin fricción con una velocidad de 1,2 m/s, tiene una colisión perfectamente elástica con un bloque de la masa M en el reposo. Después de la colisión el bloque de 3,0 kilogramos retrocede con una velocidad de 0,4 m/s.



a) La masa M es:
b) La velocidad del bloque de masa M después de la colisión es:
c) Los bloques están en el contacto para 0,20 s. La fuerza media en el bloque de 3,0 kilogramos, mientras los dos bloques están en contacto, es:
Respuesta. a) 6,0 kg, b) 0,8 m/ s, c) 24 N

51. El bloque de 8 kilogramos tiene una velocidad v y es detrás del bloque de 12 kilogramos que tiene una velocidad de 0,5 m/s. la superficie es de fricción despreciable. Los bloques chocan y se juntan. Después de la colisión, los bloques tienen una velocidad común de 0,9 m/s.

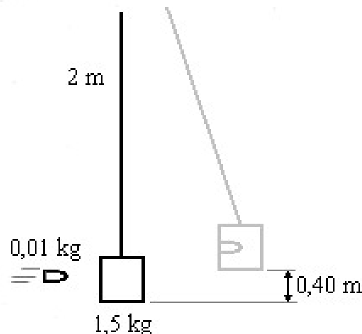


a) La pérdida de energía cinética de los bloques debido a la colisión está la más cercana a:

b) El impulso sobre el bloque de12 kg debido a la colisión es
Respuesta. a) 2,4 J, b) 4,8 N s

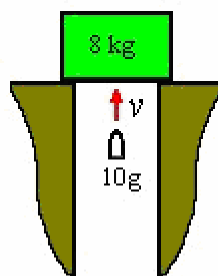
52. Una bola de acero de 72 g se lanza desde el reposo y cae verticalmente sobre una placa de acero. La bola golpes la placa y está en contacto con ella por 0,5 ms, la bola elásticamente, y vuelve a su altura original. El intervalo de tiempo para el viaje es 0,30 s.
a) La fuerza promedio ejercida sobre la bola durante el contacto es
b) Asumiendo que la placa no se deforma durante el contacto. La energía elástica máxima almacenada por la bola es:
Respuesta. a) 420 N, b) 0,08 J

53. Una bala de la masa 0,01 kilogramos que se mueve horizontalmente golpea un bloque de madera de masa 1,5 kilogramos suspendida como péndulo. ¿La bala se aloja en la madera, y juntos giran hacia arriba una distancia de 0,40 m. cuál era la velocidad de la bala momentos antes del impacto con el bloque de madera? La longitud de la cuerda es 2 metros.



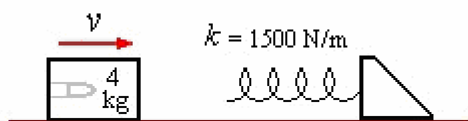
Respuesta. 66,7m/s

54. Una bala de 10 g se dispara verticalmente en un bloque de 8 kilogramos. El bloque se levanta 3 mm. La bala penetra en el bloque en un intervalo de tiempo de 0,001 s. asume que la fuerza en la bala es constante durante la penetración.



a) La energía cinética inicial de la bala es:
b) El impulse en el bloque debido a la captura de la bala es:
c) La penetración de la bala en el bloque, es:
Respuesta. a) 190 J, b) 2,0 Ns, c)) 10 cm.

55. Una bala de 8 g se tira en un bloque de 4,0 kilogramos, en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. La bala se aloja en el bloque. El bloque se mueve hacia el resorte y lo comprime 3,0 centímetros. La constante de la fuerza del resorte es 1500 N/m.

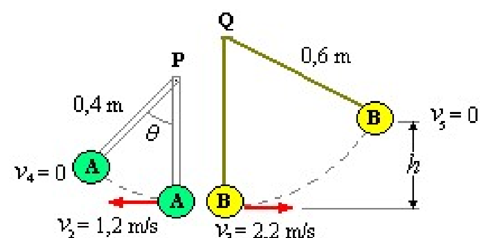


a) La velocidad de la bala es:
b)) El impulso del bloque (con la bala), debido al resorte, durante el tiempo en el cual el bloque y el resorte están en contacto está es:
Respuesta. a) 290 m/s, b) 4,7 N.s

56. En una demostración una bola de acero pequeña de la masa *m* se sostiene sobre una superbola de masa *M* (superbola es una bola de goma del coeficiente de restitución muy alto). La combinación junta se suelta del reposo. Cuando el superbola golpea el piso rebota casi elásticamente, golpeando a bola de acero que todavía está moviéndose hacia abajo. Esta colisión es también bastante elástica, y consecuentemente bola de acero se golpea y es lanzada derecho hasta una altura *H*. Si *h* es la altura de la cual los objetos fueron soltados, y $M >> m$, entonces bola de acero pequeña se levantará a una altura:
Respuesta. 9 *h*

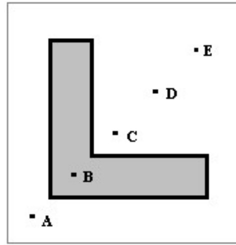
57. Una muchacha de masa 50 kilogramos lanza una bola de la masa 0,1 kilogramos contra una pared. La bola golpea la pared horizontalmente con una velocidad de 20 m/s, y rebota con esta misma velocidad. ¿La bola está en contacto con la pared 0,05 s, cuál es la fuerza media ejercida sobre la bola por la pared?
Respuesta. 80N

58. La bola A, de la masa 3,0 kilogramos, se une a una barra ligera de 0,4 m, que gira libremente en P. La bola B está suspendida de Q por una cuerda de 0,6 m y está en reposo. La bola A se levanta a cierto nivel y se suelta. La bola A desciende, y tiene una velocidad v_1 = 3,6 m/s en el fondo, antes de chocar a la bola B. Las velocidades de las bolas A y B después del choque son: v_2 = - 1,2m/s y v_3 =2,2 m/s...



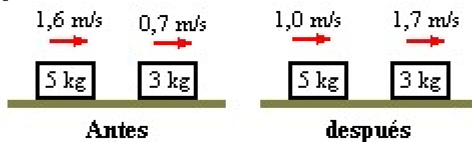
a) La masa de la bola B es:
b) La magnitud del impulso sobre la bola A es:
c) La bola A rebota y gira un ángulo θ, donde la velocidad v_4 es cero. El valor de θ es:
d) La bola B se eleva hasta la altura *h*, donde la velocidad v_5 es cero. El valor de *h* es:
Respuesta. a) 6,6 kg, b) 14.4 N. s, c) 35º d) 0,25 m

59. Una pieza en forma de L se corta de una hoja uniforme de metal. ¿Cuál de los puntos indicados es el más cercano al centro de la masa del objeto?



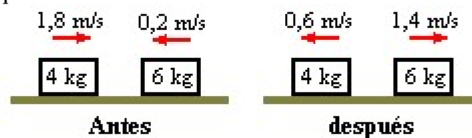
Respuesta. C

60. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?

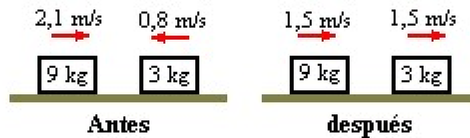


Respuesta. Parcialmente inelástico.

61. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



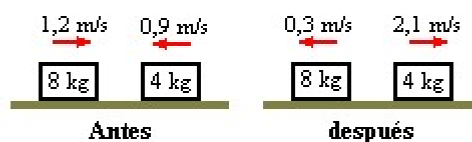
Respuesta. Perfectamente elástico.



62. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?

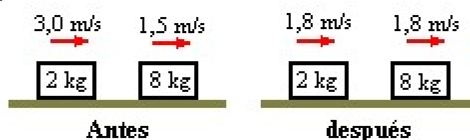
Respuesta. no posible porque la cantidad de movimiento no se conserva.

63. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



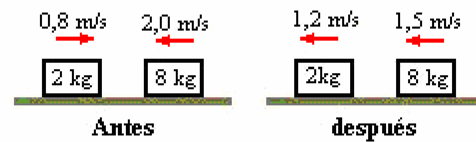
Respuesta. Caracterizado por un incremento en energía cinética.

64. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



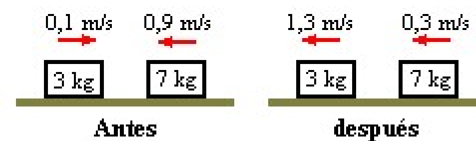
Respuesta. Completamente inelástico

65. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



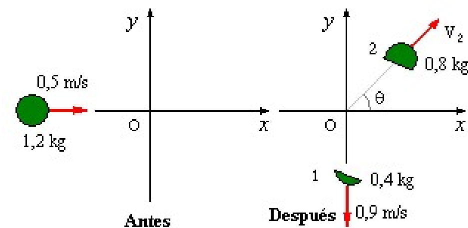
Respuesta. Parcialmente inelástico

66. Las masas de los bloques, y las velocidades antes y después del choque están dadas. ¿Qué clase de choque es?



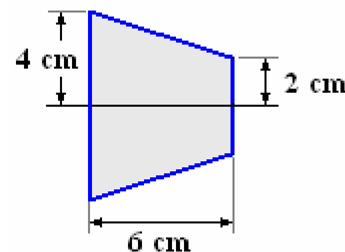
Respuesta. Parcialmente inelástico

67. Un resorte activa una bomba de juguete de 1,2 kg sobre una superficie lisa a lo largo del eje *x* con una velocidad de 0,50 m/s. en el origen O, la bomba estalla en dos fragmentos. El fragmento 1 tiene una masa de 0,4 kilogramos y una velocidad de 0,9 m/s a lo largo del eje *y* negativo.



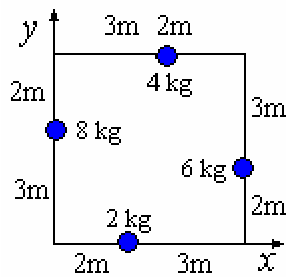
a) La componente en *x* de la cantidad de movimiento del fragmento 2 debido a la explosión es:
b) El ángulo θ, formado por el vector velocidad del fragmento 2 y el eje *x* es:
c) La energía liberada por la explosión es:
Respuesta. a) 0., N. s, b) 31º, c) 0,32 J

68. Un cono trunco homogéneo de metal tiene una base circular mayor de radio 4 cm y la menor de radio 2 cm. Su altura es 6 cm. ¿A qué distancia de su diámetro mayor está situado el centro de masa?



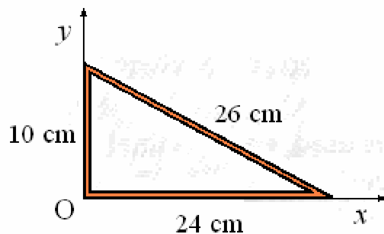
Respuesta. 2,36 cm

69. Cuatro masas puntuales se colocan como se muestra en la figura: ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa?



Respuesta. (23, 2,8)

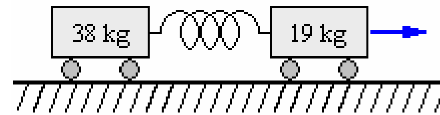
70. Un alambre uniforme de longitud 60 cm y masa 60 g , está doblado en un triángulo rectángulo. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masa?



Respuesta. (10, 3)

71. Una partícula de la masa 5,01 x 10^{-27} kilogramos, moviéndose a 1,88 x 10^{5} m/s, choca con una partícula idéntica que inicialmente está en el reposo. Después de la interacción, las partículas (que no pueden ser distinguidas) se mueven con los ángulos 55,4º y 34,6º, ambos son medidos con respecto a la dirección original del movimiento. ¿Qué velocidades finales tienen las partículas?
Respuesta. 1,55 x 10^{5} m/s a 346º,
1,07 x 10^{5} m/s a 55,4º

72. Un carro de 19 kg está conectado por medio de un resorte comprimido con un carro 38 kg. Los dos carros se están moviendo a la derecha a una velocidad de 25 m/s cuando el resorte se desenrolla y propulsa repentinamente el carro de 19 kg hacia adelante con una velocidad de 27 m/s. encontrar la velocidad del segundo carro con respecto al centro de la masa del sistema.



Respuesta. 1 m/s
7
3. Una fuerza de 5,3 N es necesaria para sujetar a un paraguas en un viento fuerte. Si las moléculas del aire tienen una masa de 4,7 x 10^{-26} kilogramos, y cada una golpea al paraguas (sin rebotar) con una velocidad de 2,0 m/s en la misma dirección, ¿cuántos átomos golpean al paraguas cada segundo? Asuma que el viento sopla horizontalmente para no tomar en cuenta la gravedad.
Respuesta. 5,6 x 10^{25} por Segundo

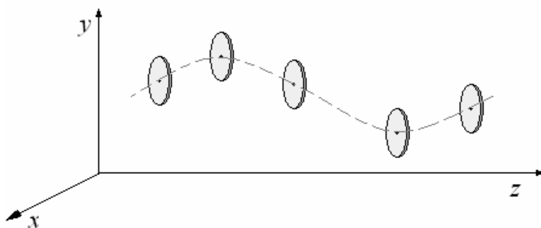
74. Un cohete debe ser lanzado al espacio donde no hay campo gravitacional. el 81% de la masa inicial del cohete es combustible y este combustible se expulsa con una velocidad relativa de 2300 m/s. si se asume que todo el combustible será utilizado, encuentra la velocidad final de la última porción de combustible expulsado relativo a un observador estacionario.
Respuesta. 1500 m/ s

CAPÍTULO 7. Cuerpo rígido

INTRODUCCION
En el capitulo anterior estudiamos el movimiento de un sistema de partículas. Un caso especial importante de estos sistemas es aquel en que la distancia entre dos partículas cualesquiera permanece constante en el tiempo, esto es un CUERPO RIGIDO.
A pesar que no existen cuerpos que sean estrictamente rígidos, todos los cuerpos pueden ser deformados, sin embargo el modelo del cuerpo rígido es útil en muchos casos en que la deformación es despreciable.
La descripción cinemática y dinámica de un cuerpo extenso aunque este sea rígido en un movimiento en tres dimensiones matemáticamente es muy complejo y es tratado en libros avanzados de dinámica. Es complejo porque un cuerpo tiene seis grados de libertad; su movimiento involucra traslación a lo largo de tres ejes perpendiculares y rotación alrededor de cada uno de estos ejes. No llegaremos a hacer un tratamiento general directo, pero si desarrollaremos el movimiento del cuerpo rígido en dos dimensiones.

MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO
En esta parte expondremos algunos tipos de movimiento de los cuerpos rígidos.

TRASLACION.
Por traslación entendemos al movimiento en el que lodos los puntos del cuerpo se mueven en la misma dirección, con la misma velocidad y la misma aceleración en cada instante**.**



Por la definición de centro de masa, tenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Donde M es la masa total del cuerpo rígido y

$$M \vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i$$

Diferenciando dos veces

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{CM} = \sum m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i$$

$$M \vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

La suma de las fuerzas que actúan sobre las n partículas determinan la aceleración del centro de masa.

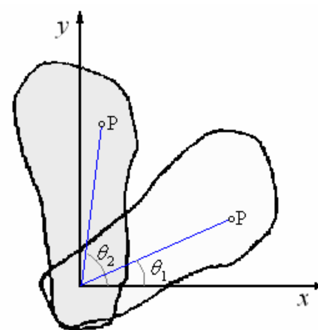
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum \vec{F}_i}{M}$$

Tal como se mostró para un sistema de partículas, las fuerzas internas se anulan de pares, de forma que solamente importarán las fuerzas externas tal que

$$M \vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext}$$

"El movimiento de traslación del cuerpo rígido es como si toda su masa estuviera concentrada en el centro de masa y las fuerzas externas actuaran sobre él".
Todo el estudio que hemos lecho anteriormente para la partícula corresponde a la traslación de un cuerpo rígido. No importa ni la forma, ni el tamaño.

ROTACIÓN.
Es el movimiento en que uno de los puntos se considera fijo.
Sí se considera fijo un punto, el único movimiento posible es aquel en el que cada uno de los otros puntos se mueve en la superficie de una esfera cuyo radio es la distancia del punto móvil al punto fijo.
Si se consideran dos puntos fijos, el único movimiento posible es aquel en que todos los puntos con excepción de aquellos que se encuentran sobre la línea que une los dos puntos fijos, conocida como EJE, se mueven en circunferencias alrededor de éste.



Cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido puede ser considerado como una combinación de traslación y rotación.



En los capítulos anteriores ya hemos profundizado bastante sobre movimiento de traslación

estudiaremos aquí el movimiento de rotación alrededor de un eje y el movimiento de rotación traslación.

CANT1DAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO

La cantidad de movimiento angular de una partícula respecto a un punto es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

En coordenadas polares:

$$\vec{r} = r\hat{r}\ ,\ \vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{t}$$

$$\vec{L} = r\hat{r} \times m\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{t}\right)$$

$$\vec{L} = mr^2\hat{r}\omega \times \hat{t}$$

$\hat{r} \times \hat{t}$ tiene la dirección y sentido de $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

Si consideramos al cuerpo rígido como *n* partículas que giran alrededor de un eje, la cantidad de movimiento angular de éste será la suma de la cantidad de movimiento angular de cada una de las partículas.

$$\vec{L}_{total} = m_1r_1^2\vec{\omega} + m_2r_2^2\vec{\omega} + ... + m_nr_n^2\vec{\omega}$$

$$= \left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ... + m_nr_n^2\right)\vec{\omega}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2\right)\vec{\omega}$$

La cantidad entre paréntesis es el MOMENTO DE INERCIA DEL CUERPO RÍGIDO alrededor de un eje.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$$

Es importante darse cuenta que el momento de inercia depende de la distribución de la masa del cuerpo.

En el caso de un cuerpo rígido continuo, los m_i tienden a dm y $\sum$ se transforma en $\int_M$, de aquí:

$$I = \int_M r^2 dm$$

Como $m = \rho V$, donde ρ es la densidad y *V* el volumen del cuerpo:

$$dm = \rho dV$$

Tenemos: $I = \int_V \rho r^2 dV$

Para muchos cuerpos de forma geométrica simple ésta integral puede evaluarse fácilmente.

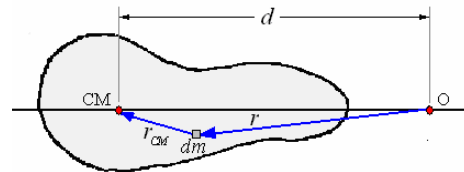
Dos teoremas que simplifican los cálculos del momento de inercia son:

I) El teorema de Steiner o de los ejes paralelos.

"El momento de inercia del cuerpo respecto a un eje es igual al momento de inercia del cuerpo respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masa es el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los ejes".

$$I_0 = I_{CM} + Md^2$$

Demostración. La figura siguiente representa la sección de un cuerpo en el plano del papel, CM es el eje normal al plano del papel a través del centro de masa y O es un eje paralelo. Escogiendo un elemento diferencial de masa dm , escribamos la expresión para los momentos de inercia con respecto a los dos ejes.



$$I_{CM} = \int_M r_{CM}^2 dm \quad I_0 = \int_M r^2 dm$$

usando la ley de los cosenos, obtenemos:

$$r^2 = r_{CM}^2 + d^2 - 2r_{CM}d\cos\theta$$

reemplazando

$$I_0 = \int_M \left(r_{CM}^2 + d^2 - 2r_{CM}d\cos\theta\right)dm$$

$$I_0 = \int_M r_{CM}^2 dm + d^2\int_M dm - 2d\int_M r_{CM}\cos\theta dm$$

El primer término

$$\int_M r_{CM}^2 dm = I_{CM}$$

El segundo término

$$d^2\int_M dm = Md^2$$

El tercer término es cero porque es la suma en todo el cuerpo d los productos del elemento de masa y sus distancias al eje a través del centro de masa, de aquí:

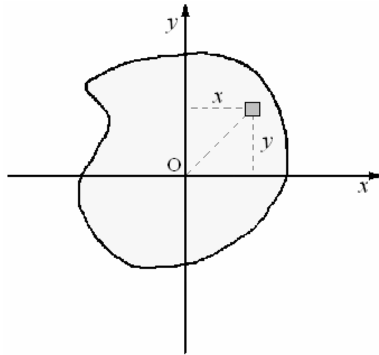
$$I_0 = I_{CM} + Md^2$$

II. El teorema de la figura plana.

El momento de inercia de una figura plana con respecto a un eje perpendicular a la misma es igual a la suma de los momentos de inercia de la figura plana con respecto a dos ejes rectangulares en el plano de la figura los cuales se intersecan con el eje dado

Demostración:

En la figura siguiente el eje *z* pasa por O perpendicular al piano *y*. Elegimos un elemento diferencial de masa *dm* y escribimos los momentos de inercia de la figura para cada uno de los tres ejes.



$I_x = \int_M y^2 dm$, $I_y = \int_M x^2 dm$, $I_z = \int_M r^2 dm$

con $r^2 = x^2 + y^2$

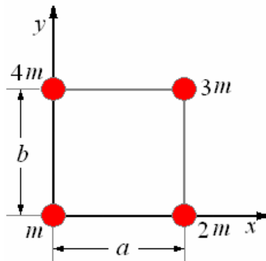
$$\int_M r^2 dm = \int_M \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$= \int_M x^2 dm + \int_M y^2 dm$$

$$I_z = I_x + I_y$$

Ejemplo 1. A continuación evaluaremos los momentos de inercia algunos cuerpos simples.

a) Hallar el momento de inercia del sistema mostrado en la figura, las masas son puntuales unidas por varillas rígidas de masa despreciable.



Solución.

Momento de inercia respecto al eje *x*.

$$I_x = \sum y_i^2 m_i$$

$$= m(0)^2 + 2m(0)^2 + 3m(b)^2 + 4m(b)^2$$

$$= 7mb^2$$

Momento de inercia respecto al eje *y*.

$$I_y = \sum x_i^2 m_i$$

$$= m(0)^2 + 2m(a)^2 + 3m(a)^2 + 4m(0)^2$$

$$= 5ma^2$$

Momento de inercia respecto al eje *z*.

$$I_z = \sum r_i^2 m_i$$

$$= m(0)^2 + 2m(a)^2 + 3m\left(a^2 + b^2\right) + 4m(b)^2$$

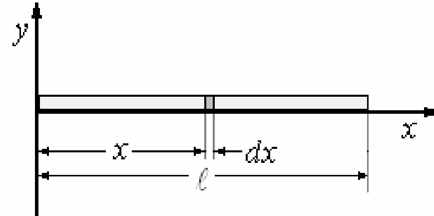
$$= 7mb^2 + 5ma^2$$

Aquí comprobamos

$$I_z = I_x + I_y$$

b) Momento de inercia de una varilla delgada rígida de longitud ℓ y masa *m*, con respecto a un extremo y con respecto al centro de masa.

Solución.



Tomemos un elemento diferencial *dx*, cuya masa es:

$$dm = \frac{M}{\ell} dx$$

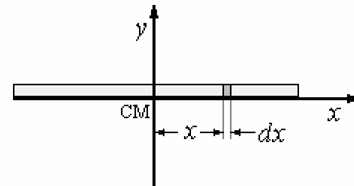
El momento de Inercia de la varilla es:

$$I_O = \int_M x^2 dm = \int_0^\ell x^2 \frac{M}{\ell} dx$$

$$= \frac{M}{\ell} \int_0^\ell x^2 dx = \frac{M}{3\ell}\left[x^3\right]_0^\ell$$

$$= \frac{1}{3} M\ell^3$$

El momento de inercia de la varilla con respecto al centro de masa



$$I_{CM} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x^2 \frac{M}{\ell} dx = \frac{M}{3\ell}\left[x^3\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}$$

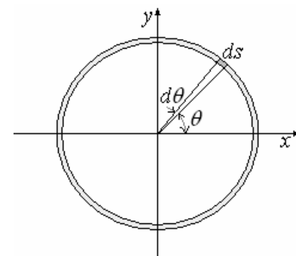
$$= \frac{1}{12} M\ell^3$$

Aquí comprobamos:

$$I_O = I_{CM} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

c) Momento de inercia un anillo de masa *M* y radio *R*, en el plano *xy*, Con respecto a los ejes *x, y, z*.

Solución.



La masa del elemento diferencial $ds = Rd\theta$ es:

$$dm = \frac{M}{2\pi R} ds = \frac{M}{2\pi} d\theta$$

El momento de inercia del anillo con respecto al eje z es:

$$I_z = \int_M R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{MR^2}{2\pi}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = mR^2$$

Por el teorema de la figura plana

$$I_z = I_x + I_y$$

Por simetría

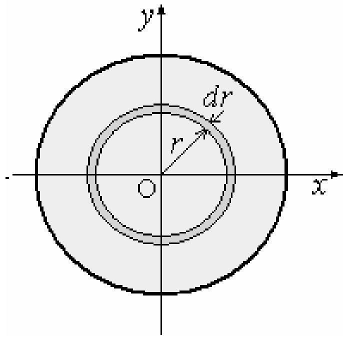
$$I_x = I_y$$

Luego

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{2} MR^2$$

d) El momento de inercia de un disco de radio R y masa M con respecto al eje perpendicular que pasa por su centro.

Solución.



Consideremos como elemento diferencial al anillo de radio r y ancho dr, su masa es:

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$$

El momento de inercia de este anillo con respecto al eje perpendicular que pasa por O es

$$dI_O = r^2 dm = r^2 \frac{2M}{R^2} r dr$$

$$= \frac{2M}{R^2} r^3 dr$$

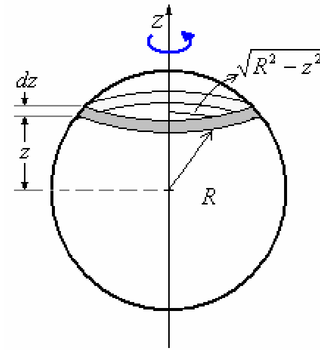
El momento de inercia del disco es:

$$I_O = \int dI_O = \int_0^R \frac{2M}{R^2} r^3 dr = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{1}{2} MR^2$$

e) El momento de inercia de una esfera con respecto a un eje que pasa por su centro.

Solución.



Consideremos la esfera como una serie de discos. Tomemos un disco diferencial como se muestra en la figura, su radio es $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, su espesor dz.

La masa del disco es:

$$dm = \frac{M}{V} \pi r^2 dz = \frac{M}{V} \pi \left(R^2 - z^2\right) dz$$

M es la masa de la esfera y $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ el volumen de la esfera.

El momento de inercia del disco con respecto al eje z es:

$$dI_z = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{V}\pi\left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

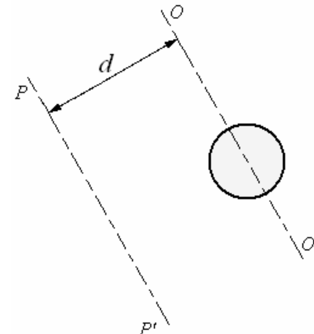
El momento de inercia de la esfera lo encontramos integrando esta expresión desde $z = -R$ a $z = R$.

$$I_z = \int dI_z = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\frac{M}{V}\pi\left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

$$= \frac{M}{V}\pi \int_0^R \left(R^2 - z^2\right)^2 dz = \frac{8}{15}\frac{\pi M R^5}{V}$$

$$= \frac{2}{5} MR^2$$

Para encontrar el momento de inercia con respecto a un eje arbitrario como se muestra en la figura siguiente aplicamos el teorema de Steiner.



$$I_P = I_O + Md^2 = \frac{2}{5} MR^2 + Md^2$$

$$I_P = Md^2\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{d}\right)^2\right]$$

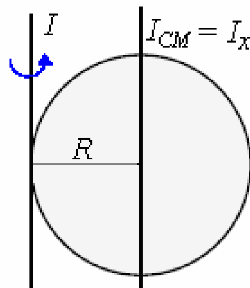
En el caso en que $R << d$ podemos considera como

si fuera una masa puntual y el momento de inercia se reduce a:

$$I_O = Md^2$$

Ejemplo 2. Hallar el momento de inercia de un disco de masa *M* y radio *R* que gira alrededor de un eje paralelo a un diámetro y que pasa por el borde del disco.

Solución.



Por el teorema de las figuras planas
$I_z = I_x + I_y$;

Además por simetría
$I_x = I_y$,

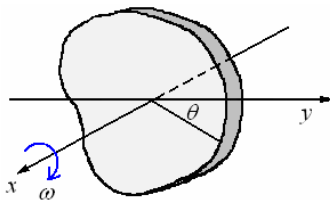
Por tanto
$I_x = I_z/2 = ¼\, MR^2$

Aplicando el teorema de Steiner

$I = ¼\, MR^2 + MR^2$
$= 5/4\, MR^2$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA ROTACION

En esta sección vamos a analizar el movimiento de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo en el espacio.



El cuerpo gira en torno al eje *x*. Si $\theta = \theta(t)$ es el desplazamiento angular del punto del cuerpo desde la línea referencial, la velocidad angular del cuerpo es:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Como cada punto del cuerpo gira a la misma velocidad angular ω, el desplazamiento $\theta(t)$ de cualquier punto describe el desplazamiento del cuerpo como un todo.

Para el sistema de partículas vimos que la suma de los torques producidos por las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual al cambio de la cantidad de movimiento angular.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Esto es válido también para el cuerpo rígido, donde L es la cantidad de movimiento angular can respecto al eje *x* de la figura anterior.

Como $\vec{L} = I\vec{\omega} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right)$

Siendo *I* el momento de inercia del cuerpo en torno al eje dado, es constante en el tiempo y

$$\vec{\tau} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

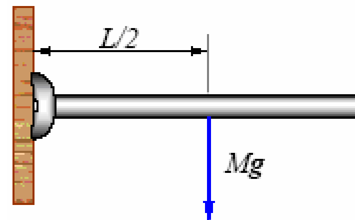
Como $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$, aceleración angular del cuerpo

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Esta expresión tiene similitud a la ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Ejemplo 3. Una barra uniforme de longitud *L* y masa *M*, que gira libremente alrededor de una bisagra sin fricción, se suelta desde el reposo en su posición horizontal, como se muestra en la figura. Calcular la aceleración angular de la barra y su aceleración lineal inicial de su extremo.



Solución.

Como el torque de la fuerza en la bisagra es cero, se puede calcular el torque en torno a la bisagra producido por la otra fuerza externa que actúa sobre la barra, que es su peso, suponiendo que la barra es homogénea y que el peso actúa en su centro geométrico. Entonces:

$$\tau = rMg = \frac{1}{2}LMg$$

Como $\tau = I\alpha$, y el momento de inercia de la barra es $I = \frac{1}{3}ML^2$.

Se tiene: $I\alpha = \frac{1}{2}LMg$

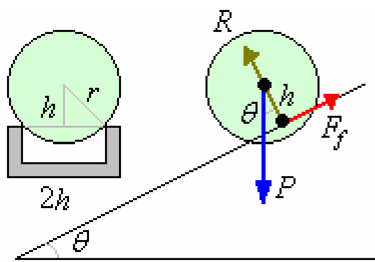
$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\frac{1}{2}LMg}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

Para calcular la aceleración lineal del extremo de la barra, usamos la ecuación $a_t = \alpha L$.

Reemplazando α:

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

Ejemplo 4. Una esfera rueda sobre una barra, con sección en forma de U, inclinada. Determinar la aceleración.



Solución.

Las fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso, *P*, la reacción normal del plano, *R*, y la fuerza de rozamiento F_f.

Como la reacción *R* y el rozamiento F_f están aplicados en el eje instantáneo de rotación no realizan ningún torque, sólo el peso:

$\tau = hmg \operatorname{sen}\theta$, siendo $h = \left(r^2 - b^2\right)^{1/2}$

El momento de inercia de la esfera con relación al eje instantáneo de rotación es

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + mh^2$$

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación:

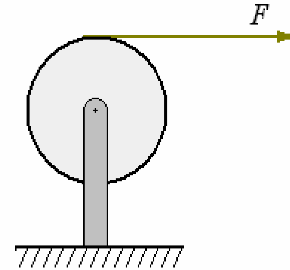
$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{hmg\operatorname{sen}\theta}{\left(2mr^2/5 + mh^2\right)} = \frac{hg\operatorname{sen}\theta}{\left(2r^2/5 + h^2\right)}$$

la aceleración lineal será: $a = \alpha\, h$

$$a = \frac{h^2 g\operatorname{sen}\theta}{\left(2r^2/5 + h^2\right)} = \frac{g\operatorname{sen}\theta}{\left(2r^2/5h^2 + 1\right)}$$

$$= \frac{5\left(r^2 - b^2\right)gh^2\operatorname{sen}\theta}{\left(7r^2 - 5b^2\right)}$$

Ejemplo 5. Se tiene un disco de masa *M* y radio *R*, que pueda girar libremente alrededor de un eje que pasa por su centro. Se enrolla una cuerda alrededor del disco, se tira la cuerda con una fuerza *F*. Si el disco está inicialmente en reposos ¿Cuál es su velocidad al tiempo *t*?



Solución.

El momento de inercia del disco con respecto al eje es:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

La dirección de la cuerda siempre es tangente al disco por lo que el torque aplicado es:

$\tau = FR$

Como $\tau = I\alpha$

Tenemos $\alpha = \dfrac{\tau}{I}$

Reemplazando

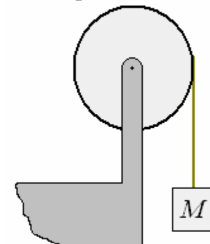
$$\alpha = \frac{FR}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2F}{MR}$$

Siendo α constante $\omega = \omega_0 + \alpha t$

Como $\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega = \alpha t = \dfrac{2F}{MR}t$

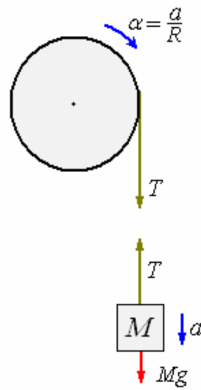
Ejemplo 6. Se sujeta una masa *M* a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de momento de inercia *I* y radio *R*.

Hallar La tensión de la cuerda, la aceleración y su velocidad después de haber descendido una distancia *h* desde el reposo.



Solución.

La figura siguiente muestra los diagramas de cuerpo libre.



Aplicando la segunda ley de Newton a la masa *M*

$Mg - T = Ma$ (1)

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación al disco

$TR = I\alpha$,

como $a = R\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{a}{R}$

$TR = I\dfrac{a}{R}$ o $TR^2 = Ia$ (2)

Resolviendo (1) y (2) obtenemos

$$a = \frac{M}{M + I/R^2} g ,$$

$$T = \frac{I/R^2}{M + I/R^2} Mg$$

Siendo un movimiento con aceleración constante

$v^2 = v_0^2 + 2as$

Conocemos: a , $v_0 = 0$, $s = h$:

$$v^2 = \frac{2Mg}{M + I/R^2} h$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mg}{M + I/R^2} h}$$

Ejemplo 7. Un anillo de 5 cm de radio, grosor despreciable y densidad 1,6 g/cm, se pone en rotación alrededor de un diámetro cuando se le comunica un momento angular de 7900 g cm^2/s.

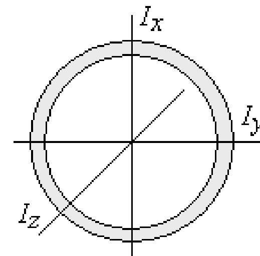
a) Hallar la expresión analítica y el valor numérico del momento de inercia respecto del eje de giro.

b) ¿Con qué velocidad angular empieza a girar?

c) Si el rozamiento con el aire y los pivotes origina un par de fuerzas cuyo torque es de 50 dina cm, ¿cuál será la ecuación del movimiento que efectúa el anillo?, ¿cuánto tiempo tarda en pararse?

(Nota 1 N = 10^5 dinas)

Solución.



a) Por el teorema de las figuras planas, tenemos que:

$I_z = I_x + I_y$;

Además por simetría

$I_x = I_y$,

Por tanto

$$I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{2}\rho L R^2 = \frac{1}{2}\rho(2\pi R)R^2 = \pi\rho R^3$$

$$= \pi(1,6.10^{-1})(0,05)^3 = 6,28\text{x}10^{-5} \text{ kg m}^2$$

b) Al comunicarle un momento angular

$L = 7,9 \text{ x}10^{-4}$ kg m^2/s,

$$\omega_0 = \frac{L}{I} = \frac{7,9\times 10^{-4}}{6,28\times 10^{-5}}$$

= 12,58 rad/s

c) τ = 50 dina cm = 50x10^{-5} Nx10^{-2} m

= 5x10^{-6} N m

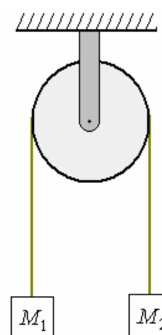
Por lo tanto la ecuación del movimiento en términos angulares será:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 12,6t - 0,0398t^2 \text{ , y}$$

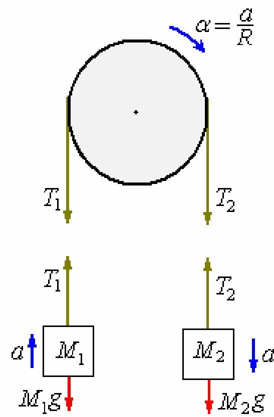
$$\omega = 12,6 - 0,079t$$

Siendo ω = 0 para t = 158 s.

Ejemplo 8. Maquina de atwood tomando en cuenta la polea.



La polea es un disco de masa *M* y radio *R*. La figura muestra los diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes de la máquina de atwood.



Aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las partes.

Masa M_1:

$$T_1 - M_1 g = M_1 a \qquad (1)$$

Masa M_2:

$$M_2 g - T_2 = M_2 a \qquad (2)$$

Polea:

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2}MRa \quad (3)$$

Resolviendo (1), (2) y (3), obtenemos:

$$T_1 = M_1(g + a),$$

$$T_2 = M_2(g - a) \text{ y}$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1 + M/2)} g$$

Ejemplo 9. Una polea homogénea de radio R, masa M y momento de inercia I, gira alrededor de su eje, debido a la acción de dos masas m_1 y m_2.

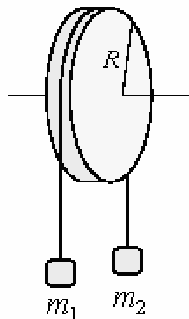
R = 0,3 m, m_1 =15 kg, m_2 = 10 kg, M = 20 kg, I =18 kg m^2.

Calcular:

a) La aceleración angular de la polea.

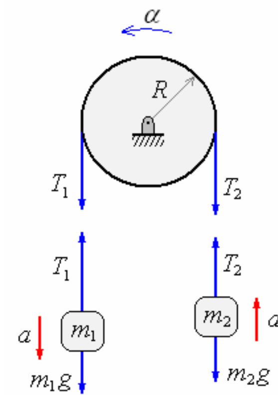
b) Las tensiones de las cuerdas.

c) La tensión del soporte que fija el sistema al techo



Solución.

a) Vamos a suponer que el sistema acelera hacia el lado de la masa mayor M.



Planteando la segunda ley de Newton para cada masa:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a,$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

Para la polea:

$$\sum \tau = T_1 R - T_2 R = I\alpha = I\frac{a}{R}$$

Como el hilo no desliza,

$$a = \alpha R$$

Por lo tanto tenemos tres ecuaciones:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a,$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a,$$

$$T_1 - T_2 = I\frac{a}{R^2}$$

Que sumadas dan lugar a:

$(m_1 - m_2)\, g = a(m_1 + m_2 + I/R^2)$.

Por lo tanto a vale:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g = \frac{5}{25 + \frac{18}{0{,}3^2}} 9{,}8$$

$$= 0{,}22 \text{ m/s}^2$$

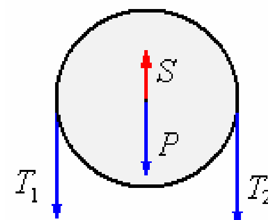
$$\text{y} \quad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{0{,}22}{0{,}3} = 0{,}73 \text{ rad/s}^2$$

b) De las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$T_1 = m_1 g - m_1 a = 15(g - a) = 143{,}7 \text{ N}.$$

$$T_2 = m_2(g + a) = 100{,}2 \text{ N}.$$

c) Considerando todas las fuerzas que actúan sobre la polea, que debe estar en equilibrio:



$$\sum \vec{F} = 0$$

$S = P + T_1 + T_2$ = 20 x 9,8 + 146,67 + 102,22

= 445 N

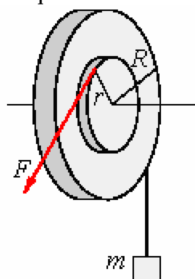
Ejemplo 10. La figura representa un cilindro macizo y homogéneo de radio R = 20 cm y masa M = 20 kg. A su periferia va arrollado un hilo ideal de cuyo extremo libre cuelga una masa m = 8 kg. Por una hendidura muy fina se le arrolla otro hilo ideal a una distancia del eje horizontal r = 10 cm, a cuyo extremo libre se le aplica una fuerza constante F = 200 N. Calcular:

a) Momento de inercia del cilindro respecto a un eje que coincida con una generatriz.

b) Aceleración con que sube la masa m.

c) Aceleración angular del cilindro.

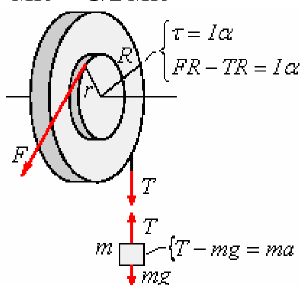
d) Tensión del hilo que sostiene la masa.



Solución.

a) Aplicando el teorema de Steiner,

$I = ½ MR^2 + MR^2 = 3/2\ MR^2$



b) Podemos plantear dos ecuaciones:

$T - mg = ma$ y

$$Fr - TR = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{1}{2}MRa$$

Que conducen a:

$$Fr - mgR = a\left(mR + \frac{1}{2}MR\right).$$

Por lo tanto la aceleración a vale:

$$a = \frac{Fr - mgR}{mR + \frac{1}{2}mR} = \frac{20 - 15{,}68}{1{,}6 + 2}$$

$= 1{,}2$ m / s^2

c) $\alpha = \dfrac{a}{R} = \dfrac{1{,}2}{0{,}2}$

$= 6$ rad/s^2.

d) $T = mg + ma$ = 8 (9,8 +1,2)

= 88 N.

Ejemplo 11. Dos poleas cuyos radios son 1 m y 0,3 m, están acopladas pegada una a la otra en un plano vertical, formando un bloque que gira alrededor de su eje de rotación común. De la garganta de la polea grande pende una masa de 20 kg y de la garganta de la polea pequeña pende otra masa de 100 kg que tiende a hacer girar a las poleas en sentido contrario al anterior. El momento de inercia del sistema formado por las dos poleas es de 10 kg m^2. Al dejar el sistema en libertad, se pone en movimiento espontáneamente. Se pide:

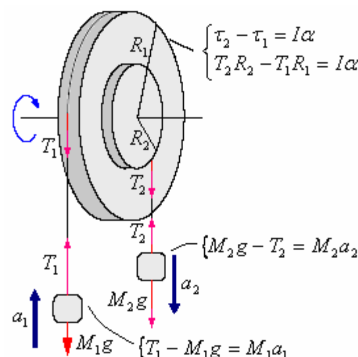
a) ¿En qué sentido se mueven las poleas?

b) Valor de la aceleración con que se mueve cada una.

c) Aceleración angular de las poleas.

d) Tensión de la cuerda que sostiene la masa de 100 kg cuando el sistema está en movimiento.

Solución.



a) Cuando las poleas están inicialmente en reposo, los pesos coinciden con las tensiones.

Por tanto T_1 = 200 N, y T_2 = 1000 N.

El momento que ejerce T_1 valdrá

$\tau_1 = T_1 R_1$ = 200 Nm

El que ejerce T_2 valdrá

$\tau_2 = T_2 R_2$ = 300 N m.

Por tanto, al ser el momento de la fuerza T_2 mayor, la polea girará de modo que la masa M_1suba.

b) y c) Planteando la ecuación fundamental de la dinámica a cada masa y a la polea, tendremos:

$T_1 - M_1 g = M_1 a_1$

$\Rightarrow\ T_1 - M_1 g = M_1 \alpha R_1$ (1)

$M_2 g - T_2 = M_2 a_2$

$\Rightarrow M_2 g - T_2 = M_2 \alpha R_2$ (2)

$\tau_2 - \tau_1 = I\alpha$

$\Rightarrow\ T_2 R_2 - T_1 R_1 = I\alpha$ (3)

De las tres ecuaciones obtenemos α :

$$\alpha = \frac{M_2 g R_2 - M_1 g R_1}{M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2 + I}$$

$$= \frac{30 - 20}{20 + 9 + 10} g = 2{,}51 \text{ rad / s}^2.$$

La aceleración de cada masa será:

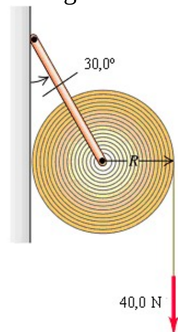
$a_1 = \alpha R_1$ = 2,51 m/s^2,

$a_2 = \alpha R_2$ = 0,75 m/s^2

d) $T_2 = M_2 g - M_2 \alpha R_2$ = 904,7 N

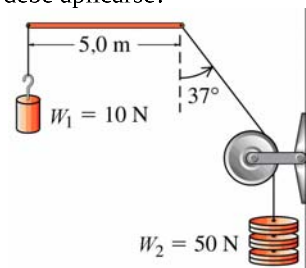
Ejemplo 12. Un rollo de 16,0 kg de papel con radio R = 18,0 cm descansa contra la pared

sostenido por un soporte unido a una varilla que pasa por el centro del rollo. La varilla gira sin fricción en el soporte, y el momento de inercia del papel y la varilla alrededor del eje es de 0,260 kg. m^2. El otro extremo del soporte está unido mediante una bisagra sin fricción a la pared de modo que el soporte forma un ángulo de 30,0° con la pared. El peso del soporte es despreciable. El coeficiente de fricción cinética entre el papel y la pared es $\mu_k = 0,25$. Se aplica una fuerza vertical constante F = 40,0 N al papel, que se desenrolla.
a) ¿Qué magnitud tiene la fuerza que la varilla ejerce sobre el rollo de papel al desenrollarse?
b) ¿Que aceleración angular tiene el rollo?



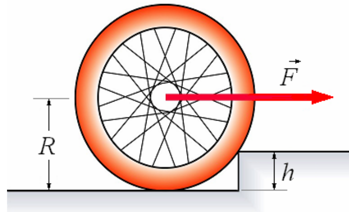
Solución.
En el punto de contacto, la pared ejerce una fuerza F_f de la fricción dirigida hacia abajo y una fuerza normal *N* dirigida a la derecha. Esto es una situación donde es cero la fuerza neta en el rodillo, pero el torque neto no es cero.
La suma de fuerzas verticales
$$F_{var}\cos\theta = F_f + W + F, \quad F_f = \mu_k N,$$
Las fuerzas horizontales
$$F_{var}\text{sen}\theta = N \ .$$
De aquí tenemos:
$$F_{var}\cos\theta = \mu_k N + F + W$$
$$F_{var}\text{sen}\theta = N.$$
a) Eliminando *N* y resolviendo para F_{var} da
$$F_{var} = \frac{W+F}{\cos\theta - \mu_k \sin\theta}$$
$$= \frac{40,0 + (16,0)(9,80)}{\cos 30° - (0,25)\text{sen}30°} = 266 \text{ N}$$
b) Con respecto al centro del rodillo, la barra y la fuerza normal ejercen el torque cero.
La magnitud del torque neto es
$(F - F_f)R$, y $F_f = \mu_k N$
Puede calcularse reemplazando el valor encontrado para F_{var} en cualquiera de las relaciones anteriores;
$$F_f = \mu_k F_{var}\text{sen}\theta = 33,2 \text{ N} .$$
Luego,
$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{(40,0-31,54)(18,0\times10^{-2})}{(0,260)}.$$
$$= 4,71 \text{ rad/s}^2$$

Ejemplo 13 Se debe aplicar una sola fuerza adicional a la barra de la figura para mantenerla en equilibrio en la posición mostrada. Puede despreciarse el peso de la barra.
a) Calcule las componentes vertical y horizontal de la fuerza requerida.
b) ¿Qué ángulo debe formar ésta fuerza con la barra?
c) ¿Qué magnitud debe tener?
d) ¿Dónde debe aplicarse?



Solución.
a) La tensión en el resorte es $W_2 = 50$ N, y la fuerza horizontal sobre la barra debe equilibrar la componente horizontal de la fuerza que el resorte ejerce sobre la barra, y es igual a $(50 \text{ N})\,\text{sen}\,37° = 30$ N, a la izquierda en la figura.
La fuerza vertical debe ser
$$50 \cos 37° + 10 = 50 \text{ N, arriba}$$
b)
$$\arctan\left(\frac{50 \text{ N}}{30 \text{ N}}\right) = 59°$$
c)
$$\sqrt{(30 \text{ N})^2 + (50 \text{ N})^2} = 58 \text{ N}.$$
d) Tomando torques alrededor (y midiendo la distancia de) del extremo izquierdo
$$50x = (40)(5,0)$$
$$\Rightarrow \ x = 4,0 \text{ m}$$
Donde solamente las componentes verticales de las fuerzas ejercen torques.

Ejemplo 14. Imagine que está tratando de subir una rueda de bicicleta de masa *m* y radio *R* a una acera de altura *h;* para ello, aplica una fuerza horizontal *F*. ¿Qué magnitud mínima de *F* logra subir la rueda si la fuerza se aplica
a) al centro de la rueda?
b) ¿En la parte superior de la rueda?
c) ¿En cuál caso se requiere menos fuerza?



Solución.
a) Tome los torques respecto a la esquina superior de la acera.

La fuerza $\vec{F}$ actúa a una distancia perpendicular $R-h$ y
el peso actúa en una distancia perpendicular

$\sqrt{R^2-(R-h)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$.

Igualando los torques para encontrar la fuerza necesaria mínima,

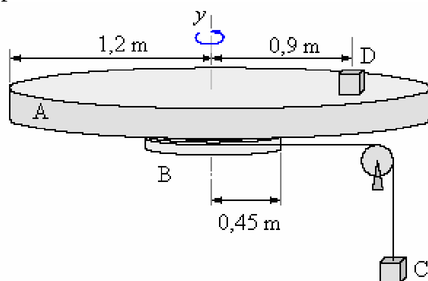
$$F = mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}.$$

b) El torque debido a la gravedad es el mismo, pero la fuerza $\vec{F}$ actúa a una distancia perpendicular $2R-h$, tal que la fuerza mínima es

$$F = mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{2R-h}.$$

c) Se requiere menos fuerza que cuando la fuerza se aplica en parte alta de la rueda.

Ejemplo 15. Un disco homogéneo A gira alrededor del eje *y* bajo la acción de la masa C unida a una cuerda que pasa por una polea sin peso ni rozamiento enrollada alrededor del tambor cilíndrico macizo B, solidaria del disco A. A éste está unida una masa puntual D, como indica la figura. Las masas A, B, C y D son respectivamente 65, 15, 8 y 4 kg. Se supone que la cuerda permanece siempre horizontal. Calcular:
a) Aceleración angular del disco.
b) Aceleración tangencial de D.
c) Aceleración normal de D, 4 s después de partir del reposo.



Solución.
a) Calculemos en primer lugar el momento de inercia del sistema A-B-D.

$$I = \frac{1}{2}m_A R_A^2 + \frac{1}{2}m_B R_B^2 + \frac{1}{2}m_D R_D^2$$
= 51,56 kg m^2

Aplicando la segunda ley de Newton en la masa C:

$m_C g - T = m_C a$

$8g - T = 8\,\alpha R_A$

Aplicando la segunda ley de Newton de la rotación en el conjunto giratorio:

$TR_B = I\alpha$

Resolviendo el sistema formado:

$$\left.\begin{matrix} 8gR_B - TR_B = 8\alpha R_B^2 \\ TR_B = I\alpha \end{matrix}\right\} \quad 8gR_B = 8aR_B^2 + I\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8gR_B}{8R_B^2+I} = \frac{35{,}28}{53{,}18} = 0{,}66 \text{ rad/s}^2$$

b) $a_0 = \alpha R_0$ = 0,6 m/s^2

c) $\omega_{(4s)} = \alpha\, t$ = 2,65 rad/s

$a_N = \omega^2 R_D$ = 6,34 m/s^2

EQUILIBRIO ESTÁTICO

En el capítulo 5 vimos que para que una partícula estuviera en equilibrio estático era suficiente que La fuerza resultante fuese cero.

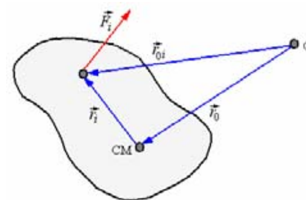
$$\sum \vec{F} = 0$$

Esta condición también, es necesaria para que un cuerpo rígido este en equilibrio, pero no es suficiente que solamente el centro de masa este en reposo, el cuerpo puede girar Es necesario que el momento de: fuerzas o torque con respecto al centro de masa sea nulo.

$$\sum \vec{\tau} = 0$$

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos de aplicación. En muchos de ellos la fuerza de la gravedad ejercida sobre las diversas partes de un cuerpo puede sustituirse por una sola fuerza, el peso total actuando en el centro de gravedad.
Si la aceleración de la gravedad no varía a lo largo del cuerpo, el centro de gravedad coincide con el centro de masa.

Ejemplo 16. Demostrar que cuando un cuerpo está en equilibrio y el torque con respecto al centro de masa es cero, el torque con respecto a cualquier punto también es cero.
Solución.



En la figura
$\vec{r}_O$ es el vector del centro de masa a O

$\vec{r}_i$ es el vector del centro de masa al punto donde actúa $\vec{F}_i$.

$\vec{r}_{Oi}$ es el vector del punto O al punto donde actúa $\vec{F}_i$.

De la figura vemos:

$\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{r}_{Oi}$

El torque total alrededor de O es

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_O\right) \times \vec{F}_i =$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum_i \vec{r}_O \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_{CM} - \sum_i \vec{r}_O \times \vec{F}_i$$

Como $\vec{r}_O$ es constante

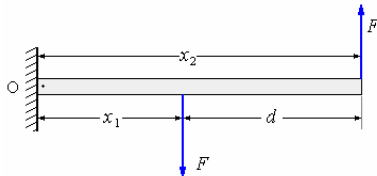
$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{CM} - \sum_i \vec{r}_O \times \vec{F}_i$$

Para un cuerpo en equilibrio $\sum \vec{F}_i = 0$

tal que $\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{CM}$

Si $\vec{\tau}_{CM} = 0$, el torque alrededor de cualquier punto debe ser cero y viceversa.

Ejemplo 17. Par de fuerzas. Dos fuerzas iguales y opuestas que actúan en la figura siguiente se denominan par de fuerzas, Según se indica



F es el valor de cualquiera de las fuerzas y

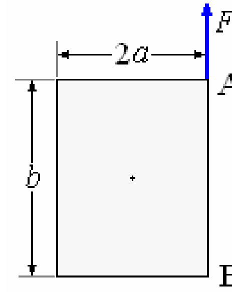
$d = (x_2 - x_1)$ es la distancia entre ellas.

El momento o torque producido por estas fuerzas con respecto a O es:

$$\tau_O = Fx_2 - Fx_1 = F(x_2 - x_1) = Fd$$

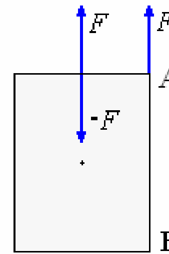
Este resultado no depende de la selección del punto O, el momento producido por un par es el mismo respecto a cualquier punto del espacio.

Ejemplo 18. Una fuerza vertical F que actúa en A. en el sólido rectangular mostrado en la figura, queremos sustituirla por otra cuya línea de acción pasa por el centro de masa más un par de fuerzas que actúen horizontalmente aplicados en A y B.

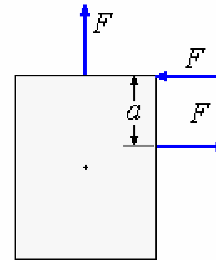


Solución.

a) Sustituir la fuerza vertical dada por otra igual paralela cuya línea de acción pase por el centro de masa.

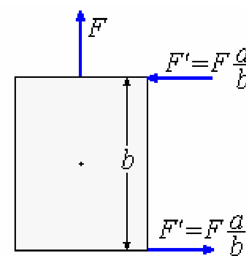


b) Hacer girar el plano del par, hasta desplazarlo hasta la línea A B.



c) Se cambian los módulos de las fuerzas a F' de tal modo que:

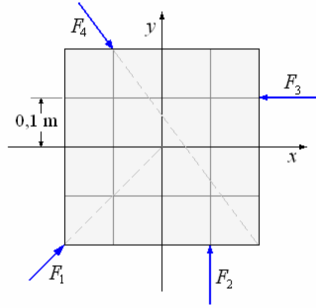
$$F'b = Fa \Rightarrow F' = F\frac{a}{b}$$



Ejemplo 19. Sobre una placa sólida actúan cuatro fuerzas de módulos

F_1 = 28,3 N, F_2 = 60 N, F_3 = 20 N y F_4 = 50 N.

Como se indican en la figura. Hallar la tuerza resultante sobre la placa y determinar su línea de acción.



Solución.
Utilizando el cuadriculado obtenemos:

$\vec{r}_1 = -0{,}2\hat{i} - 0{,}2\hat{j}$,

$\vec{F}_1 = 28{,}3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{i} + 28{,}3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{j} = 20\hat{i} + 20\hat{j}$

$\vec{r}_2 = 0{,}1\hat{i} - 0{,}2\hat{j}$, $\vec{F}_2 = 60\hat{j}$

$\vec{r}_3 = 0{,}2\hat{i} + 0{,}1\hat{j}$, $\vec{F}_3 = -20\hat{i}$

$\vec{r}_4 = -0{,}1\hat{i} + 0{,}2\hat{j}$, $\vec{F}_4 = 50\left(\frac{3}{4}\right)\hat{i} - 50\left(\frac{3}{4}\right)\hat{j}$

$= 30\hat{i} - 40\hat{j}$

La fuerza resultante es

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

$= (20 - 20 + 30)\hat{i} + (20 + 50 - 40)\hat{j}$

$= \left(30\hat{i} + 40\hat{j}\right)N$

El torque resultante respecto al centro de masa es la suma de los torques individuales.

$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4$

Siendo:

$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$

$= \left(-0{,}2\hat{i} - 0{,}2\hat{j}\right)\times\left(20\hat{i} + 30\hat{j}\right) = 0$

$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$

$= \left(0{,}1\hat{i} - 0{,}2\hat{j}\right)\times\left(60\hat{j}\right) = 6\hat{k}$

$\vec{\tau}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$

$= \left(0{,}2\hat{i} + 0{,}1\hat{j}\right)\times\left(-20\hat{j}\right) = 2\hat{k}$

$\vec{\tau}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$

$= \left(-0{,}1\hat{i} + 0{,}2\hat{j}\right)\times\left(20\hat{i} - 40\hat{j}\right) = -2\hat{k}$

Reemplazando:

$\vec{\tau} = 6\hat{k}$ Nm

Para determinar la línea de acción de la tuerza, consideremos que el punto de aplicación de la fuerza resultante es:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

Tal que

$\vec{\tau} = 6\hat{k} = \vec{r}\times\vec{F} = \left(x\hat{i} + y\hat{j}\right)\times\left(30\hat{i} + 40\hat{j}\right)$

$= (40x - 30y)\hat{k}$

De aquí:

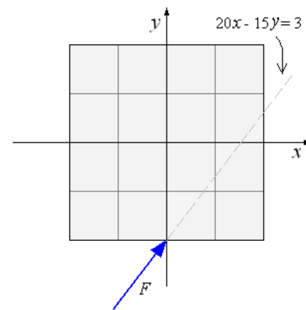
$(40x - 30y) = 6$

$\Rightarrow\ 20x - 15y = 3$

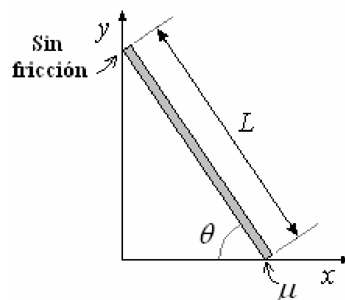
Esta es la ecuación de la línea de acción de la fuerza; si esta tuerza a de situarse en algún punto del borde inferior de la placa, y = - 0,2 m..
Obtenemos

$x = \frac{3 + 15y}{20} = \frac{3 + 15(-0{,}2)}{20} = 0$

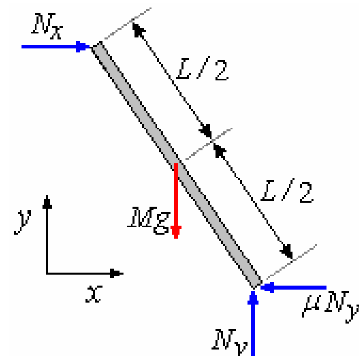
La figura siguiente muestra la fuerza resultante:



Ejemplo 20. Se tiene una escalera dé masa M y largo L apoyada contra la pared .No hay fricción en la pared y el coeficiente de fricción del piso es μ .
¿Cuál es el mínimo ángulo de inclinación para que no comience a resbalar?



Solución.
La figura siguiente muestra el diagrama del cuerpo libre de la escalera.



Condición para que el centro de masa no acelere:

$\sum F_x = 0 = N_x - \mu N_y$,
$\sum F_y = 0 = Mg - N_y$
De aquí obtenemos:
$N_y = Mg$, $N_x = \mu N_y = \mu Mg$
Condición de no rotación:
La suma de momentos de fuerza con respecto al centro de masa es cero.

$$N_y \frac{L}{2}\cos\theta - \mu N_y \frac{L}{2}\text{sen}\theta - N_x \frac{L}{2}\text{sen}\theta = 0$$

Reemplazando las fuerzas:

$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta - \mu Mg\frac{L}{2}\text{sen}\theta - \mu Mg\frac{L}{2}\text{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2\mu\text{sen}\theta = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)$$

Otra forma:
En lugar de tomar el centro de masa como origen tomemos extremo inferior de la escalera.
Tomando momentos con respecto a este punto.

$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta - N_x L\text{sen}\theta = 0$$

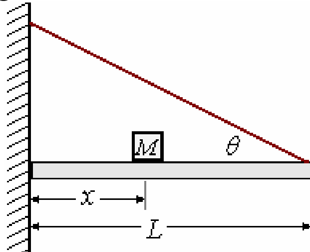
Reemplazando el valor de N_x:

$$Mg\frac{L}{2}\cos\theta - \mu MgL\text{sen}\theta = 0$$

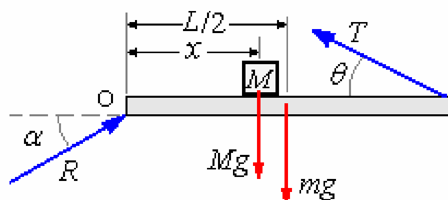
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)$$

Obtenemos la misma respuesta porque no importa con respecto a que eje tomemos el torque.

Ejemplo 21. Una viga de masa m se empotra a la pared como se muestra en la figura y se sujeta por medio de un alambre. Si la tensión en el alambre excede T_m el alambre se rompe. ¿Para qué valor de x, el alambre se romperá por una masa M colocada sobre la viga?



Solución.
La figura muestra el diagrama del cuerpo libre del sistema viga-masa.



R es a reacción de la pared.
Como el sistema está en equilibrio

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x = R\cos\alpha - T\cos\theta = 0 \\ \sum F_y = R\text{sen}\alpha - T\text{sen}\theta - Mg - mg = 0 \end{cases}$$

Con $\sum \vec{\tau} = 0$ alrededor de cualquier punto.
Tomamos momentos con respecto a O.

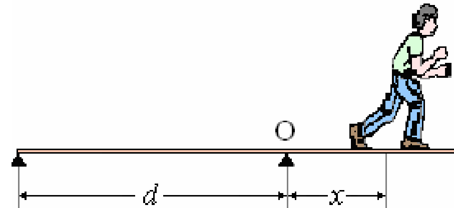
$$TL\text{sen}\theta - mg\frac{L}{2} - Mgx = 0$$

De esta última ecuación obtenemos

$$x = \frac{TL\text{sen}\theta - mg\frac{L}{2}}{Mg}$$

Si $T = T_m$ obtenemos el valor máximo de x.
Si estuviéramos interesados en conocer R, sería mejor tomar momentos con respecto al otro extremo.

Ejemplo 22. Un albañil de 75 kg camina sobre un tablón de 3 m de largo y 80 kg apoyado sobre dos vigas distantes 2 m, tal como indica la figura. ¿Cuál es la máxima distancia x que puede recorrer, sin que caiga?



Solución.
Para que el tablón gire, el torque del peso del albañil respecto del punto O, más el torque del peso de la parte de tablón que sobresale, debe ser mayor o igual que el torque del peso de la parte de tablón apoyada entre las vigas:
Llamando λ a la densidad lineal del tablón:
$\lambda = \frac{M}{L}$, haciendo d = 2 m, L = longitud del tablón, M = masa tablón, m = masa albañil tendremos:

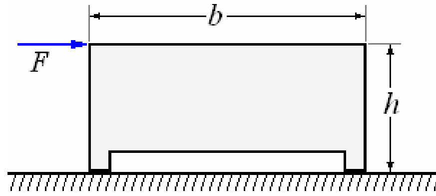
$$mgx + \lambda(L-d)g\frac{(L-d)}{2} = \lambda dg\frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow mx + \lambda\left[d^2 - (L-d)^2\right] = \frac{M}{2L}\left(2Ld - L^2\right),$$

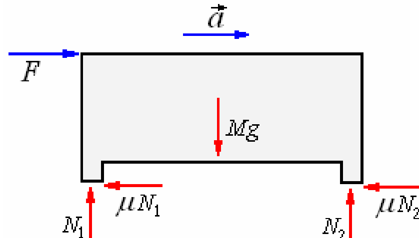
$$\Rightarrow x = \frac{M}{2m}(2d - L) = 0{,}53 \text{ m}$$

Ejemplo 23. Un baúl de masa M se empuja sobre un suelo con coeficiente de rozamiento
a) Qué fuerza F se ejerce si el baúl se mueve con aceleración constante a?
b) ¿Si el baúl se mueve con velocidad constante?

c) ¿Qué fuerza se necesita para inclinar el baúl?



Solución.
La figura siguiente muestra el diagrama del cuerpo libre del baúl.



a) Aplicando la segunda ley de Newton.

$$\sum F_x = F - \mu_k (N_1 + N_2) Ma ,$$

$$\sum F_y = N_1 + N_2 - Mg = 0$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$F = M(a + \mu_k g)$$

b) En el caso que el baúl va con velocidad constante

$$a = 0 \text{ y } F = M\mu_k g$$

c) Para analizar la inclinación del baúl tenemos que escribir la ecuación de momentos con respecto al borde delantero, sin rotación $\alpha = 0$, luego

$$\sum \tau = -bN_1 - hF + \frac{b}{2} Mg = 0$$

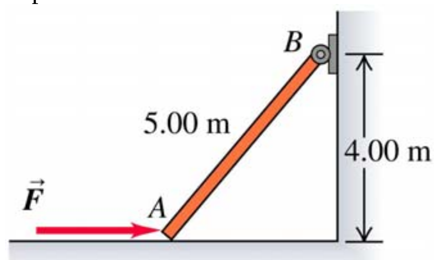
Cuando el baúl empiece a inclinarse, empezará a rotar en el sentido horario y $N_1 = 0$, de aquí:

$$F = \frac{bMg}{2h}$$

y la aceleración:

$$a = \frac{F}{M} - \mu_k g = \left(\frac{b}{2h} - \mu_k\right) g$$

Ejemplo 24. El extremo *A* de la barra *AB* de la figura descansa en una superficie horizontal sin fricción, y el extremo *B* tiene una articulación. Se ejerce en *A* una fuerza horizontal *F* de magnitud 120 N. Desprecie el peso de la barra. Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la barra sobre la articulación en *B*.

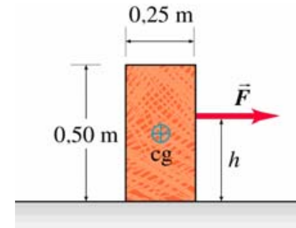


Solución.
La componente horizontal de la fuerza ejercida en la barra por la bisagra debe equilibrar la fuerza $\vec{F}$ aplicada, y así tiene magnitud 120,0 N y es hacia la izquierda.
Tomando torques alrededor del punto *A*

$$(120{,}0 \text{ N})(4{,}00 \text{ m}) + F_V (3{,}00 \text{ m})$$

La componente vertical es – 160 N, el signo menos indica una componente hacia abajo, ejerciendo un torque en una dirección opuesta a la de la componente horizontal.
La fuerza ejercida por la barra en la bisagra es igual en magnitud y contrario en la dirección a la fuerza ejercida por la bisagra en la barra

Ejemplo 25. La caja es arrastrada sobre una superficie horizontal con rapidez constante por una fuerza. El coeficiente de fricción cinética es de 0,35.
a) Calcule la magnitud de *F*.
b) Determine el valor de *h* con el cual la caja comience a volcarse.



Solución.

a) $F = F_f = \mu_k N = \mu_k mg$

$$= (0{,}35)(30{,}0 \text{ kg})(9{,}80 \text{ m/s}^2)$$

$= 103$ N

b) Con respecto al borde delantero de la caja.
El brazo de palanca del peso es

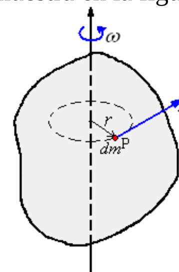
$$\frac{0{,}250}{2} = 0{,}125 \text{ m}$$

El brazo de palanca *h* de la fuerza aplicada es entonces

$$h = (0{,}125)\frac{mg}{F} = (0{,}125)\frac{1}{\mu_k}$$

$$= \frac{0{,}125}{0{,}35} = 0{,}36 \text{ m}.$$

TRABAJO Y ENERGIA EN ROTACIÓN.
Consideremos un cuerpo que gira alrededor de un eje tal como se muestra en la figura



La energía cinética de un elemento de masa *dm* que gira a una distancia *r* del eje de rotación es:

$dK = \frac{1}{2}dmv^2$, $v = \omega r$

$\Rightarrow dK = \frac{1}{2}dm\omega^2 r^2$

Integrando.

$K = \int dK = \int_M \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm$

como ω es constante.

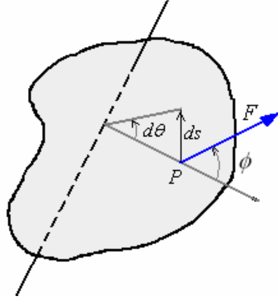
$K = \int dK = \frac{1}{2}\omega^2 \int_M r^2 dm$

El término integral es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación

$K = \frac{1}{2}I\omega^2$

Para relacionar la energía cinética, al trabajo efectuado sobre el cuerpo por un torque τ.

Supongamos que se aplica una fuerza externa única *F*, que actúa en el punto P del cuerpo.



El trabajo realizado por $\vec{F}$ a medida que el cuerpo gira recorriendo una distancia infinitesimal $ds = rd\theta$ en un tiempo *dt* es:

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\text{sen}\phi r d\theta$

Como $F\text{sen}\phi r$ es el torque de la fuerza *F* alrededor del origen se puede escribir el trabajo realizado para la rotación infinitesimal como:

$dW = \tau d\theta$

Cuando el cuerpo gira en torno a un eje fijo bajo la acción de un torque. El cambio de su energía cinética durante el intervalo *dt* se puede expresar como:

$$dK = \frac{dK}{dt}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)dt$$

$$= I\omega\frac{d\omega}{dt}dt = I\omega\alpha dt = I\alpha\,\omega dt$$

Como

$\tau = I\alpha$ y $d\theta = \omega dt$

Obtenemos:

$dK = \tau\, d\theta = dW$

Si se íntegra esta expresión se obtiene el trabajo total

$$W_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega$$

$$= \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$= K_2 - K_1 = \Delta K$$

“E1 trabajo neto realizado por las fuerzas externas al hacer girar un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo es igual al cambio en la energía cinética de rotación”.

Por la analogía que existe entre las expresiones para el movimiento lineal y el movimiento angular, podemos decir que un torque será conservativo a condición que exista una función potencial $U = U_{(\theta)}$ de tal modo que el trabajo efectuado por $\vec{\tau}$, cuando el cuerpo sufre un desplazamiento angular $(\theta_2 - \theta_1)$ es la diferencia $\left(U_{(\theta_1)} - U_{(\theta_2)}\right)$.

Así pues se deduce que:

$U_{(\theta_1)} - U_{(\theta_2)} = K_2 - K_1$

ó $K_1 + U_{(\theta_1)} = K_2 + U_{(\theta_2)} = \text{constante}$

Cuando el sistema no es conservativo

$W_{\text{NO CONSERVATIVO}} = \left(K_1 + U_{(\theta_1)}\right) - \left(K_2 + U_{(\theta_2)}\right)$

POTENCIA

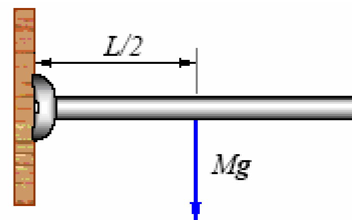
La rapidez con que se realiza este trabajo es:

$$\frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

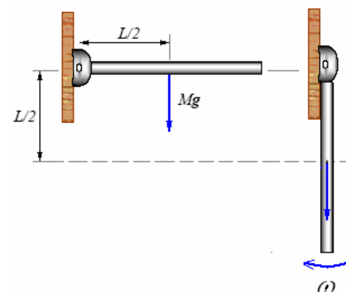
Expresión que corresponde a la **potencia** instantánea.

$P = \tau\omega$

Ejemplo 26. Para la barra giratoria, calcular su rapidez angular y la rapidez lineal de su centro de masa y del punto mas bajo de la barra cuando está vertical.



Solución.



Usando el principio de conservación de la energía, considerando que la energía potencial se calcula

respecto al centro de masa y la energía cinética es de rotación:

$$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_{gi} = K_f + U_{gf}$$

Cuando la barra esta inicialmente horizontal no tiene *Ki* y cuando esta vertical tiene solo K_f, entonces:

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Para calcular la rapidez del centro de masa, se usa:

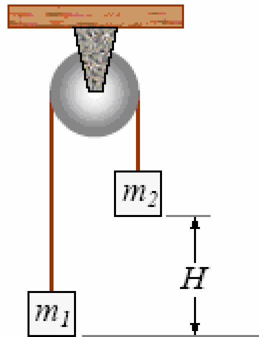
$$v_{cm} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

En el punto mas bajo la rapidez es

$$v = 2v_{cm} = \sqrt{3gL}$$

Ejemplo 27. Para el sistema de la figura, las masas tiene momento de inercia *I* en torno a su eje de rotación, la cuerda no resbala en la polea y el sistema se suelta desde el reposo.

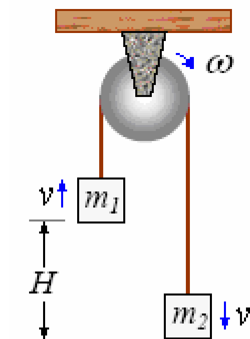
Calcular la rapidez lineal de las masas después que una ha descendido *H* y la rapidez angular de la polea.



Solución.

Como no hay roce en la polea, se conserva la energía, que aplicada a cada masa m_1 y m_2, suponiendo que m_2 se encuentra inicialmente en la parte superior del sistema, es:

$$E_i = E_f$$



$$\Rightarrow K_{1i} + K_{2i} + U_{1i} + U_{2i}$$

$$= K_{1f} + K_{2f} + K_p + U_{1f} + U_{2f}$$

$$\Rightarrow 0 + m_2 gH$$

$$= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + m_1gH$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2 = (m_2 - m_1)gH$$

Donde se ha usado la relación $v = R\,\omega$, despejando v se obtiene:

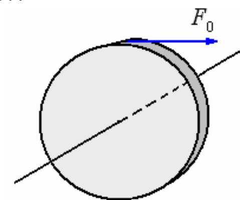
$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gH}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}$$

Ejemplo 28. Sobre un cilindro homogéneo de radio *R* y masa *M*. tiene El cual tiene libertad de girar sin fricción sobre un eje, como se muestra en la figura. Si se le aplica en su borde una fuerza tangencial de magnitud *F*.

a) ¿Cuál es la aceleración angular α del cilindro?

b) ¿Cual es la velocidad angular y la energía cinética del cilindro al tiempo *t*?

c) ¿qué cantidad de trabajo aplica la fuerza durante este intervalo *t*?.



Solución.

El momento de inercia del cilindro en torno a su eje es:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

a) Con $\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I}$, $\tau = F_0R$

tenemos $\alpha = \dfrac{F_0R}{\frac{1}{2}MR^2} = \dfrac{2F_0}{MR}$

b) Siendo α constante

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Si $\omega_0 = 0$, $\omega = \alpha t$, $\omega = \dfrac{2F_0}{MR}t$

La energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{2F_0}{MR}t\right)^2$$

$$= \frac{F_0^2}{M}t^2$$

c) El trabajo realizado

$$W = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{F_0^2}{M}t^2 - 0$$

$$= \frac{F_0^2}{M}t^2$$

Otra forma de calcular es:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta, \quad \tau = F_0 R \text{ (constante)}$$

$$W = F_0 R(\theta_2 - \theta_1) = F_0 R \Delta\theta$$

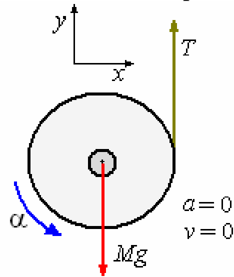
Con $\alpha = \dfrac{2F_0}{MR}$, $\omega_0 = 0$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2F_0}{MR}\right)t^2 = \frac{F_0}{MR}t^2$$

Finalmente

$$W = F_0 R\left(\frac{F_0}{MR}t^2\right) = \frac{F_0^2}{M}t^2$$

Ejemplo 29. Un carrete de hilo delgado tiene radio *R* y masa *M*. Si se jala el hilo de tal modo que el centro de masa del carrete permanezca suspendido en el mismo lugar.
a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre el carrete?
b) ¿Cuánto trabajo se habrá realizado cuando el carrete gira con velocidad angular ω?
Solución.
La figura muestra al carrete suspendido.



El carrete solo tiene movimiento circular ya que está en equilibrio vertical
Aplicando las leyes de Newton:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T - Mg = 0$$

$$\sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR = I\alpha$$

Como $I = \dfrac{1}{2}MR^2$, obtenemos:

$$MgR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

y $\alpha = \dfrac{2g}{R}$

a) La fuerza que se ejerce sobre el carrete es
$T = Mg$

b) Como el trabajo realizado es:
$W = \tau\,\Delta\theta$, donde $\tau = TR = MgR^2$

Siendo α constante $\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

Si $\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 2\alpha\Delta\theta$ y

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha} = \frac{\omega^2 R}{4g}$$

Luego $W = MgR\dfrac{\omega^2 R}{4g} = \dfrac{1}{4}M\omega^2 R^2$

Otra forma de evaluar el trabajo es por la conservación de la energía.

$$W = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}M\omega^2 R^2$$

Ejemplo 30. Una plataforma cilíndrica uniforme de 180 kg de masa y 4,5 m de radio se frena de 3,2 rev/s al reposo en 18 s cuando se desconecta el. motor. Calcular la potencia de salida del motor (hp) para mantener una velocidad constante de 3,2 rev/s.
Solución.
Como primer paso debemos conocer cuál es el torque de frenado que tenemos que vencer para mantener la velocidad constante, ese torque lo calcularemos de la siguiente manera:

$$\tau_{\text{frenado}} = I\alpha_{\text{frenado}}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

$$\alpha_{\text{frenado}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = -\frac{\omega}{t}$$

$$\tau_{\text{frenado}} = \frac{1}{2}MR^2\frac{\omega}{t} = \frac{MR^2\omega}{2t}$$

La potencia es:

$$P = \tau\,\omega = \frac{MR^2\omega^2}{2t}$$

Siendo
M =180 kg, R = 4,5 m,

$$\omega = 3{,}2\,\frac{\text{rev}}{\text{s}}\,\frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}} = 6{,}4\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

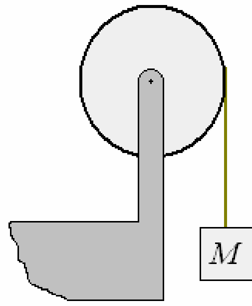
t = 18 s.

$$P = \frac{(180)(4{,}5)^2(6{,}4\pi)^2}{2(18)} = 40889{,}73 \text{ W}$$

Como 1 hp = 735,5 W

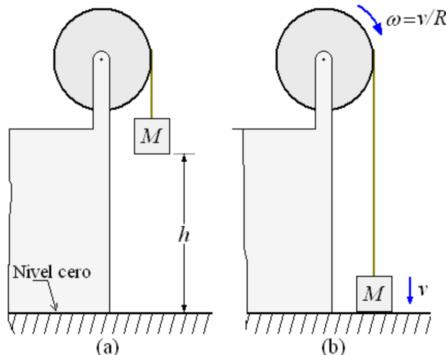
P = 55,6 hp

Ejemplo 31. Se sujeta una masa *M* a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de momento de inercia *I* y radio *R*. Hallar La tensión de la cuerda, la aceleración y su velocidad después de haber descendido una distancia *h* desde el reposo. Resolver desde el punto de vista de energía.



Solución.
Por el principio de conservación de la energía E_{total} = constante
Al inicio del movimiento toda la energía es potencial, si consideramos como nivel cero el indicado en la figura (a).

$$E_i = Mgh$$



La energía final es pura energía cinética, de la nasa M con velocidad v antes de chocar y el disco con momento de Inercia I con velocidad angular $\omega = v/R$, figura (b).

$$E_f = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{1}{R^2}\right)$$

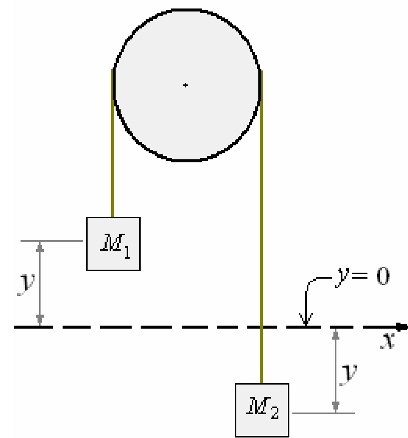
Como $E_i = E_f$

$$Mgh = \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{1}{R^2}\right)$$

y $v^2 = \dfrac{2M}{M + 1/R^2}gh$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2M}{M + 1/R^2}gh}$$

Ejemplo 32. Resolver la máquina le Atwood utilizando Conceptos de trabajo y energía,
Solución.



Las masas M_1 y M_2 inicialmente están en reposo en la posición $y = 0$, después de soltarlas una sube y la otra baja como muestra la figura.
Las masas estarán moviéndose con velocidad v la Polea tendrá una velocidad angular ω.
Como no hay rozamiento por la conservación de la energía

$$E_1 = E_2$$

$$0 = +\frac{1}{2}M_1v^2 + \frac{1}{2}M_2v^2 +$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + M_1gy - M_2gy$$

Siendo $\omega = \dfrac{v}{R}$, $I = \dfrac{1}{2}MR^2$, tenemos:

$$\frac{1}{2}\left(M_1 + M_2 + \frac{M}{2}\right)v^2 = (M_1 - M_2)gy$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2(M_1 - M_2)}{\left(M_1 + M_2 + \dfrac{M}{2}\right)}gy$$

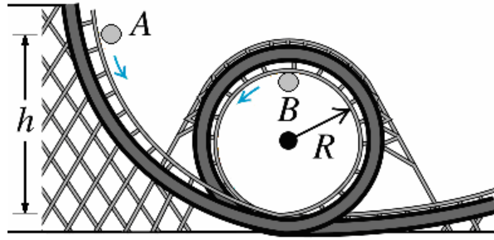
Para un movimiento uniformemente acelerado

$$v^2 = 2ay$$

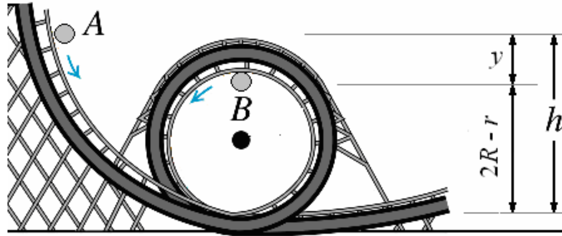
Comparando:

$$a = \frac{(M_2 - M_1)}{(M_2 + M_1 + M/2)}g$$

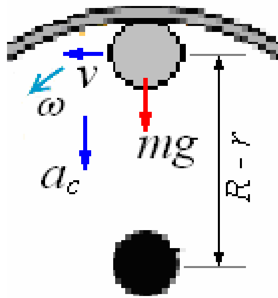
Ejemplo 33. Una canica sólida uniforme de radio r parte del reposo con su centro de masa a una altura h sobre el punto más bajo de una pista con un rizo de radio R. La canica rueda sin resbalar. La fricción de rodamiento y la resistencia del aire son despreciables.
a) ¿Qué valor mínimo debe tener h para que la canica no se salga de la pista en la parte superior del rizo? (Nota: r no es despreciable en comparación con R.)
b) ¿Qué valor debe tener h si la pista está bien lubricada, haciendo despreciable la fricción?



Solución.
a) De a a B, la distancia que la canica ha caído es
$y = h - (2R - r) = h + r - 2R.$



El radio de la trayectoria del centro de masa de la canica es $R - r$, .



La condición para que la canica permanezca en la pista es

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow -mg = -m\frac{v^2}{(R-r)} \Rightarrow$$

$v^2 = g(R - r).$

La velocidad se determina del teorema del trabajo - energía,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Se tiene:

$$y = h - (2R - r)$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Se sabe que para una esfera

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

Reemplazando estos valores en la ecución de la energía:

$$mg(h - 2R + r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$g(h - 2R + r) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 = \frac{7}{10}v^2 \Rightarrow$$

$$g(h - 2R + r) = \frac{7}{10}v^2$$

Reemplazando el valor de v^2:

$$g(h - 2R + r) = \frac{7}{10}g(R - r) \Rightarrow$$

$$h - 2R + r = \frac{7}{10}(R - r) \Rightarrow$$

$$h = 2R - r + \frac{7}{10}(R - r)$$

$$= 2R - r + \frac{7}{10}(R - r)$$

$$= \frac{27}{10}R - \frac{17}{10}r$$

$$= 2{,}7R - 1{,}7r$$

b) En ausencia de fricción no habrá rotación. Luego:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

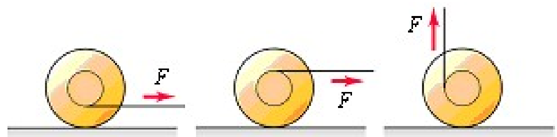
Sustituyendo las expresiones para y y v^2 en términos de los otros parámetros da

$$h - 2R + r = \frac{1}{2}(R - r)$$

Resolviendo obtenemos

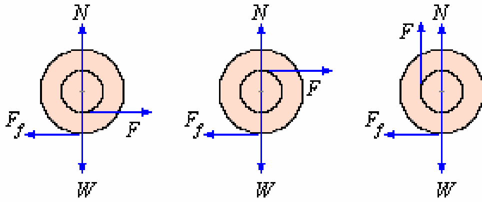
$$h = \frac{5}{2}R - \frac{3}{2}r.$$

Ejemplo 34. La figura muestra tres yoyos idénticos que inicialmente están en reposo en una superficie horizontal. Se tira del cordel de cada uno en la dirección indicada. Siempre hay suficiente fricción para que el yoyo ruede sin resbalar. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada yoyo. ¿En qué dirección girará cada uno? Explica tus respuestas

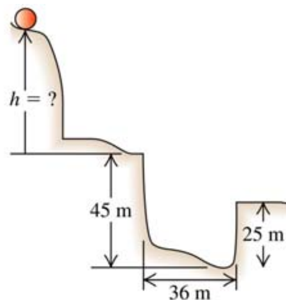


Solución. En el primer caso, $\vec{F}$ y la fuerza de la fricción actúan en direcciones opuestas, y la fuerza de fricción tiene el torque mayor que hace rotar el yo-yo a la derecha. La fuerza neta a la derecha es la diferencia $F - F_f$, tal que la fuerza neta es a la derecha mientras que el torque neto causa una rotación a la derecha.

Para el segundo caso, el torque y la fuerza de fricción tienden a dar vuelta al yoyo a la derecha, y el yo-yo se mueve a la derecha.
En el tercer caso, la fricción tiende a mover al yo-yo a la derecha, y puesto que la fuerza aplicada es vertical, el yoyo se mueve a la derecha.



Ejemplo 35.
Una canica uniforme baja rodando sin resbalar por el trayecto de la figura, partiendo del reposo.
a) Calcule la altura mínima h que evita que la canica caiga en el foso.
b) El momento de inercia de la canica depende de su radio. Explique por qué la respuesta a la parte (a) no depende del radio de la canica.
c) Resuelva la parte (a) para un bloque que se desliza sin fricción en vez de una canica que rueda. Compare la h mínima en este caso con la respuesta a la parte (a).



Solución.
a) Encuentre la velocidad v que necesita la canica en el borde del hoyo para hacerlo llegar a la tierra plana en el otro lado.
La canica debe viajar 36 m horizontalmente mientras cae verticalmente 20 m.
Use el movimiento vertical para encontrar el tiempo.
Tome + y hacia abajo.

$$v_{0y} = 0,\ a_y = 9{,}80\ \text{m/s}^2,\ y - y_0 = 20\ \text{m},\ t = ?$$

$$y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow t = 2{,}02\ \text{s}$$

Luego $x - x_0 = v_{0x}t \Rightarrow v_{0x} = 17{,}82\ \text{m/s}$.

Utilice la conservación de la energía, donde el punto 1 está en el punto de partida y el punto 2 está en el borde del hoyo, donde $v = 17{,}82\ \text{m/s}$.

Haga $y = 0$ en el punto 2, tal que

$y_2 = 0$ e $y_1 = h$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Rodar sin resbalar significa

$$\omega = \frac{v}{r}\ ,\ I = \frac{2}{5}mr^2$$

Tal que $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{5}mv^2$

$$mgh = \frac{7}{10}mv^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{7v^2}{10g} = \frac{7(17{,}82\ \text{m/s})}{10(9{,}80\ \text{m/s}^2)}$$

= 23 m

b) $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{5}mv^2$, Independiente de r.

c) Todo es igual, excepto que no hay el término de energía rotacional cinética en K:

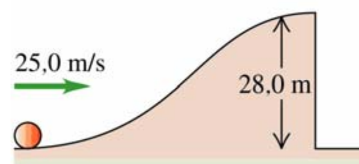
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = 16\ \text{m}.$$

Comparado con la altura de la parte (a), 16 /23 = 0,7, es el 70 %.

Ejemplo 36. Una esfera sólida uniforme rueda sin resbalar subiendo una colina, como se muestra en la figura. En la cima, se está moviendo horizontalmente y después se cae por un acantilado vertical.
a) ¿A qué distancia del pie del acantilado cae la esfera y con qué rapidez se está moviendo justo antes de tocar el suelo?
b) Observe que, al tocar tierra la esfera, tiene mayor rapidez de traslación que cuando estaba en la base de la colina. ¿Implica esto que la esfera obtuvo energía de algún lado? Explique.



Solución.
a) Use la conservación de la energía para encontrar la velocidad v_2 de la bola momentos antes que salga de la parte alta del acantilado. Sea el punto 1 en la base de la colina y el punto 2 en la cima de la colina.

Tome $y = 0$ en la base de la colina, tal que

$y_1 = 0$ e $y_2 = 28{,}0\ \text{m}$.

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

Rodar sin resbalar significa $\omega = v/r$ y

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}mr^2\right)(v/r)^2 = \frac{1}{5}mv^2$$

$$\frac{7}{10}mv_1^2 = mgy_2 + \frac{7}{10}mv_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{10}{7}gy_2} = 15{,}26\ \text{m/s}$$

Considere el movimiento de proyectil de la bola, después de salir de la cima del acantilado hasta justo antes de tocar tierra. Tome $+y$ hacia abajo.

Utilice el movimiento vertical para encontrar el tiempo en el aire:

$v_{0y} = 0$, $a_y = 9{,}80\ \text{m/s}^2$

$y - y_0 = 28{,}0\text{m}$, $t = ?$

$$y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow t = 2{,}39\ \text{s}$$

Durante este tiempo la bola viaja horizontalmente

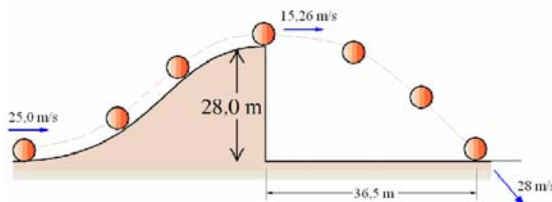
$x - x_0 = v_{0x}t = (15{,}26\ \text{m/s})(2{,}39\ \text{s}) = 36{,}5\ \text{m}.$

Justo antes de tocar tierra,

$v_y = v_{0y} + gt = 23{,}4\ \text{m/s}$ y

$v_x = v_{0x} = 15{,}26\ \text{m/s}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 28{,}0\ \text{m/s}$



b) En la base de la colina,

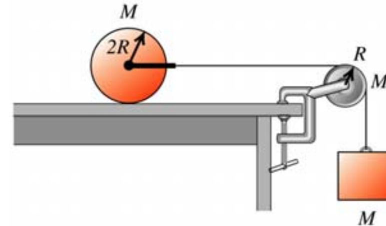
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{25{,}0\ \text{m/s}}{r}$$

La razón de la rotación no cambia mientras la bola está en el aire, después de dejar la parte alta del acantilado, tal que momentos antes de tocar tierra

$$\omega = \frac{15{,}3\ \text{m/s}}{r}$$

La energía cinética total es igual en la base de la colina y momentos antes de tocar tierra, pero momentos antes de tocar tierra poco de esta energía es energía cinética rotatoria, así que la energía cinética de traslación es mayor.

Ejemplo 37. Un cilindro sólido uniforme de masa *M* y radio 2*R* descansa en una mesa horizontal. Se ata un hilo mediante un yugo a un eje sin fricción que pasa por el centro del cilindro de modo que éste puede girar sobre el eje. El hilo pasa por una polea con forma de disco de masa *M* y radio *R* montada en un eje sin fricción que pasa por su centro. Un bloque de masa *M* se suspende del extremo libre del hilo. El hilo no resbala en la polea, y el cilindro rueda sin resbalar sobre la mesa. Si el sistema se libera del reposo, ¿qué aceleración hacia abajo tendrá el bloque?



Solución.

Hacer este problema usando la cinemática implica cuatro incógnitas (seis, contando las dos aceleraciones angulares), mientras que usando consideraciones de la energía se simplifican los cálculos.

Si el bloque y el cilindro ambos tienen velocidad *v*, la polea tiene velocidad angular *v/R* y el cilindro tiene velocidad angular *v*/2*R*, la energía cinética total es

$$K = \frac{1}{2}\left[Mv^2 + \frac{M(2R)^2}{2}(v/2R)^2 + \frac{MR^2}{2}(v/R)^2 + Mv^2\right]$$

$$= \frac{3}{2}Mv^2. \quad (1)$$

Esta energía cinética debe ser el trabajo hecho por la gravedad; si la masa que cuelga desciende una distancia *y*,

$K = Mgy. \quad (2)$

De (1) y (2):

$$v^2 = \frac{2}{3}gy$$

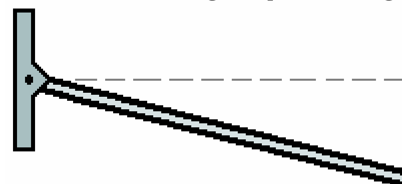
Para aceleración constante

$v^2 = 2ay,$

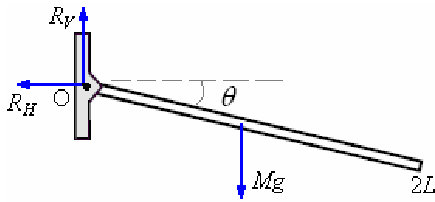
Por comparación de las dos expresiones obtenemos:

$$a = \frac{g}{3}$$

Ejemplo 38. Una barra de largo 2*L* y masa *M* está articulada en un extremo a un punto fijo O, inicialmente en reposo y horizontal. Si ella se suelta, comienza a rotar respecto a la articulación bajo el efecto del peso de la barra. Determine la reacción en la articulación y la velocidad angular de la barra en función del ángulo que ella ha girado.



Solución.



Por conservación de energía tenemos que

$$\frac{11}{23}M(2L)^2\dot{\theta}^2 - Mg\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Luego la velocidad angular de la barra es:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\,\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\,\theta}$$

Además $-R_H = M\frac{d^2}{dt^2}L\cos\theta$,

$$R_V - Mg = M\frac{d^2}{dt^2}(-L\,\text{sen}\,\theta)$$

Entonces

$$R_H = ML\frac{1}{2\,\text{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\right)^2$$

$$= ML\frac{1}{2\,\text{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}^2\theta\frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\,\theta\right)$$

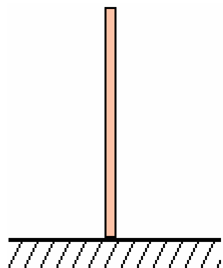
$$= \frac{9}{4}ML\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$R_V = Mg - M\frac{d^2}{dt^2}(-L\,\text{sen}\,\theta)$$

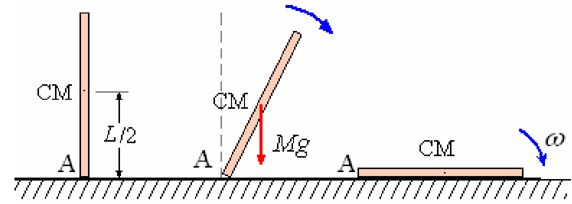
$$= Mg - ML\frac{1}{2\cos\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\cos^2\theta\frac{3}{2}\frac{g}{L}\text{sen}\,\theta\right)$$

$$= \frac{5}{2}Mg - \frac{9}{4}Mg\cos^2\theta$$

Ejemplo 39. Una barra de longitud L y masa M se coloca verticalmente sobre un plano horizontal liso, en reposo. Si ella es perturbada levemente comienza a caer. Determine:
a) La velocidad del centro de masa de la barra justo cuando ella se coloca horizontal.
b) La aceleración angular en dicho instante.



Solución.



a) Momento de inercia de la barra con respecto a un extremo

$$I_A = \frac{1}{3}ML^2$$

Por conservación de energía.

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \Rightarrow$$

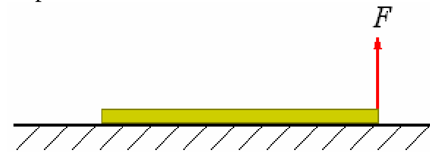
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$v_{CM} = \omega\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

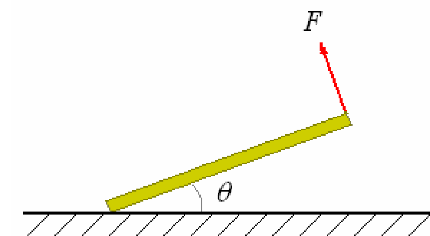
b) La aceleración angular en dicho instante.

$$\alpha = \frac{\tau_A}{I_A} = \frac{Mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Ejemplo 40. Una barra de longitud $2L$ y masa M se coloca sobre un plano horizontal liso. Si la barra es tirada por una fuerza constante F, inicialmente perpendicular a la barra y aplicada en un extremo, la barra comienza a moverse sobre el plano. La fuerza se mantiene aplicada a ese mismo extremo manteniendo su dirección original. Determine una ecuación para el ángulo que gira la barra en función del tiempo.



Solución.



El torque respecto al centro de masa conduce a

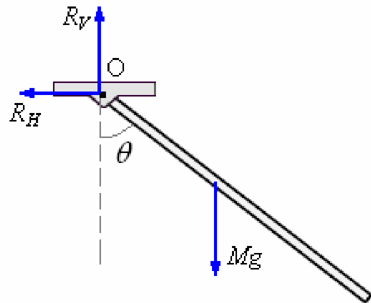
$$FL\,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{3F}{L}\text{sen}\,\theta$$

Ejemplo 41. Una barra de longitud L y masa M puede oscilar libremente en torno a uno de sus

extremos que se mantiene fijo, bajo la acción de su peso. Escriba la ecuación diferencial para el ángulo que ella gira.

Solución.



Por conservación de energía

$$E = \frac{11}{23}ML^2\dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

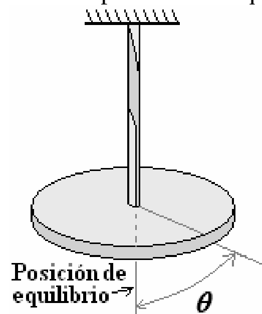
Derivando respecto al tiempo

$$\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Finalmente

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\text{sen}\,\theta = 0$$

Ejemplo 42. Un péndulo de torsión consiste en un disco uniforme de masa *M* y radio *R* suspendido de una barra delgada y vertical de masa despreciable y que puede torcerse al dar vuelta al disco alrededor de su eje, como se indica en la figura. La barra tiene una Constante de elasticidad torsional k. inicialmente se hace girar el disco un ángulo θ respecto del equilibrio y luego se le suelta desde el reposo. Determinar su velocidad de rotación cuando llega nuevamente a la posición de equilibrio.



Solución.

Con la ley de Hooke para rotación,

$\tau = -k\theta$

El trabajo para torcer un ángulo θ es:

$$W = -\int_0^\theta \tau\, d\theta = -\int_0^\theta (-k\theta)d\theta = \frac{1}{2}k\theta^2$$

Este trabajo queda como energía potencial.

$$U_{(\theta)} = \frac{1}{2}k\theta^2$$

Al liberarse esta se convierte en energía cinética. Al pasar por el punto de equilibrio la energía es puramente energía cinética.

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega^2$$

Por conservación de energía.

$$\frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k\theta^2}{MR^2}$$

Finalmente $\omega = \sqrt{\dfrac{2k\theta^2}{MR^2}}$

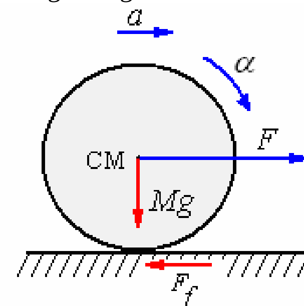
TRASLACIONES Y ROTACIONES COMBINADAS

Hasta ahora solo hemos tomado en consideración la rotación del cuerpo en torno a un eje fijo en el espacio.

La finalidad de esta sección es estudiar el caso en que el eje de rotación si acelera también vamos a presentar tres métodos analíticos de resolver este caso.

Primer método

Aplicamos la segunda ley de Newton para traslación relativa ejes no rotantes a través del centro de masa. Para ilustrar este método y los otros también, consideremos un cuerpo de radio *R*, masa *M* y momento de inercia respecto a su entro masa *I*, al que se le obliga a rodar sin deslizamiento a lo largo de una superficie horizontal por medio de una fuerza *F* que actúa en su centro de masa, La tuerza de fricción F_f y la reacción *N* actúan tal como se muestra en la figura siguiente.



EL cuerpo se mueve con una aceleración horizontal a que es la que corresponde a su centro de masa, y a su vez rota con aceleración angular α .

Como rueda sin deslizamiento la relación entre el desplazamiento lineal y el desplazamiento angular es $x = R\theta$.

La velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = R\omega$$

La aceleración es

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = R\alpha$$

Aplicando la segunda ley de Newton para traslación

$$F - F_f = Ma$$

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación alrededor del centro de masa

$$-RF_f = -I_{CM}\alpha$$

Eliminando F_f y α, obtenemos:

$$\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)a = F$$

La aceleración

$$a = \frac{F}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Si para t = 0:

$x_0 = 0$, $v_0 = 0$,

Siendo a = constante

La velocidad es:

$$v = v_0 + at$$

$$v = \frac{F}{\left(M + I_{CM}/R^2\right)}t$$

El desplazamiento es:

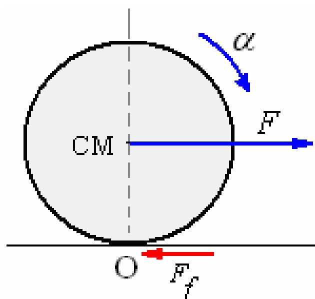
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{\left(M + I_{CM}/R^2\right)}t^2$$

Segundo método

En este método escribimos la ecuación para traslación igual que en el anterior método, pero para la rotación se aplica la segunda ley de Newton con respecto al eje de rotación que pasa a través del punto de reposo instantáneo (punto de apoyo en el movimiento) si tal punto no existe no puede usarse este método

Como ilustración veamos el ejemplo anterior. El punto contacto es el punto fijo instantáneo O, consideremos que este no desliza y todos los otros puntos de eje momentáneamente rotan alrededor de el.



En este caso como la aceleración del centro masa es a, la aceleración angular del cuerpo alrededor de O es $\alpha = a/R$.

Aplicando la segunda ley de Newton para traslación:

$$F - F_f = Ma$$

Aplicando la segunda ley de Newton para rotación a alrededor de O:

$$-FR = -I_O\alpha$$

Como $\alpha = a/R$ y $I_O + I_{CM} + MR^2$:

con la segunda ecuación,

$$\left(I_{CM} + MR^2\right)\frac{a}{R} = FR \Rightarrow a = \frac{F}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Tercer método

Este método Consiste en usar las ecuaciones de la energía directamente.

Es un Sistema Conservativo

$$K + U = \text{Constante}$$

Resolveremos por este método el ejemplo anterior. Puesto que no hay deslizamiento la tuerza de fricción sobre el cuerpo no trabaja sobre el mientras rueda. Siendo un sistema conservativo la fuerza F se puede deducir de una función Potencial U = - Fx donde x es la coordenada horizontal del centro de nasa.

La energía E del cuerpo es:

$$E = K + U$$

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2,\ U = -Fx$$

Luego: $E = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 - Fx$

Siendo $\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fx$$

De aquí podemos evaluar la velocidad considerando que para el instante inicial x = 0, y v = 0, por consiguiente E = 0.

$\frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fx = 0$ y

$$\frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) = Fx$$

$$v = \sqrt{\frac{2Fx}{\frac{I_{CM}}{R^2} + M}}$$

Siendo un movimiento con aceleración constante

$v = \sqrt{2ax}$

De esto

$$a = \frac{F}{\frac{I_{CM}}{R^2} + M}$$

Otra forma de calcular la aceleración.

Considerando que

$$E = \text{Constante} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \left[\frac{1}{2}v^2\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fx\right] = 0$$

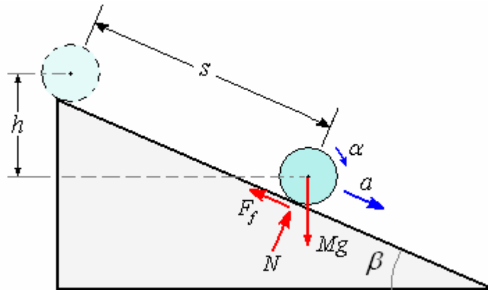
$$\Rightarrow v\frac{dv}{dt}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - F\frac{dx}{dt} = 0$$

Como $\frac{dv}{dt} = a$ y $\frac{dx}{dt} = v$

$$va\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) - Fv = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{F}{\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)}$$

Ejemplo 43. Analizar el movimiento de un cuerpo de radio *R*, momento de inercia respecto a su centro de masa *I* que rueda sin deslizar hacia abajo en plano inclinado de ángulo θ.



Solución.

Como se muestra en la figura hay dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo, *Mg* actúa en el centro de gravedad y la fuerza de contacto que se descompone en la reacción normal *N* y la fuerza de fricción F_f.

Vamos a resolver por el primer método.

Traslación:

$$Mg\text{sen}\beta - F_f = Ma$$

Rotación:

$$RF_f = I_{CM}\alpha$$

Por la condición de no deslizamiento:

$$\alpha = a/R$$

Eliminando α y F_f obtenemos:

$$a = \frac{Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}$$

Considerando que para $t = 0$: $s = 0$, y $v = 0$.

$$v = \left(\frac{Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}\right)t,$$

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}\right)t^2$$

Para un anillo:

$$I_{CM} = MR^2,\ s = \frac{1}{4}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Para un disco:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2,\ s = \frac{1}{3}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Para una esfera:

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2,\ s = \frac{5}{14}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Para un plano sin fricción (sin rodadura)

$$s = \frac{1}{2}g\text{sen}\beta\, t^2$$

Por la ecuación de energía

Si para $t = 0$: $K_0 = 0$ y $U_0 = 0$

$$E = K_0 + U_0 = 0$$

Llamando h a la caída del centro de masa desde la posición de reposo, tenemos:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2,$$

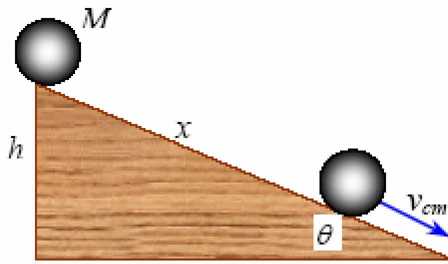
$$U = -Mgh = -Mgs\,\text{sen}\beta = 0,$$

$$\omega = v/R$$

$$\frac{1}{2}v^2\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right) - Mgs\,\text{sen}\beta$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Mg\text{sen}\beta}{M + I_{CM}/R^2}s}$$

Ejemplo 44. Usar la conservación de la energía para describir el movimiento de rodadura de un cuerpo rígido de masa *M* que rueda por un plano inclinado θ y rugoso.



Solución.
Se supone que el cuerpo rígido parte del reposo desde una altura h y que rueda por el plano sin resbalar la conservación de energía da:

$$E = \text{cte} \;\Rightarrow\; K + U_g = \text{cte} \;\Rightarrow$$

$$K_i + U_{gi} = K_f + U_{gf}$$

Pero

$Ki = 0$ *y* $Ugf = 0$, entonces

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

Como

$v_{cm} = R\,\omega \Rightarrow \omega = v_{cm}/R$, se reemplaza en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2} I_{cm}\frac{v_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = Mgh$$

Despejando v_{cm} se obtiene:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{I + I_{cm}/MR^2}}$$

Por ejemplo, para una esfera sólida uniforme de momento de inercia $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$, se puede calcular su v_{cm} en el punto más bajo del plano y su aceleración lineal.

$$v_{cm}^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{(2/5)MR^2}{MR^2}} = \frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{10}{7}gh$$

$$\Rightarrow\; v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

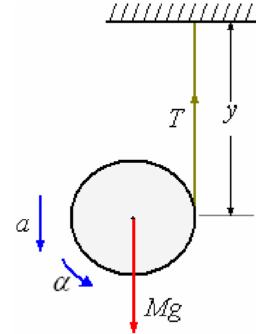
La aceleración lineal se puede calcular con la ecuación

$$v_{cm}^2 = v_{cmi}^2 + 2a_{cm}x \;\Rightarrow\; a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2x}$$

De la geometría de la figura, se tiene: $h = x \operatorname{sen}\theta$, donde x es la longitud del plano, reemplazando en a_{cm}:

$$a_{cm} = \frac{\frac{5}{7}gx\operatorname{sen}\theta}{2x} = \frac{5}{7}g\operatorname{sen}\theta$$

Ejemplo 45. Un disco homogéneo de radio R y masa M tiene una cuerda enrollada alrededor, según vemos en a figura. Sujetando el extremo libre de la cuerda a un soporte fijo, se deja caer el disco. Estudiar el movimiento.



Solución.
Vamos a resolver primero por las ecuaciones del movimiento de Newton.
Traslación.:

$$Mg - T = Ma$$

Rotación.:

$$RT = I_{CM}\alpha$$

Como:

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2,\; \alpha = \frac{a}{R}:$$

$$RT = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{1}{2}MRa$$

De aquí se obtenemos:

$$T = \frac{1}{2}Ma \text{ y } a = \frac{2}{3}g$$

El yo-yo funciona según este principio, está proyectado para que a sea mucho menor que g.

Resolviendo por conservación de la energía

$$E = K + U =$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 - Mgy$$

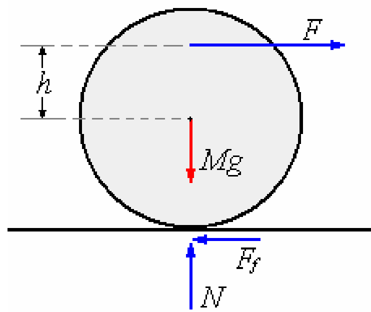
Como $E = \text{constante} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

También $v = \frac{dy}{dt}$ y $a = \frac{dv}{dt}$

Con esto encontramos que

$$a = \frac{2}{3}g$$

Ejemplo 46. Estudiar el movimiento de un disco homogéneo de radio R y masa M, sobre el que actúa una fuerza horizontal F aplicada un punto variable a lo largo de una línea vertical que pasa por el centro, según se indica en la figura. Supóngase el movimiento sobre un plano horizontal.



Solución.
En la figura vemos que la fuerza *F* se aplica a una distancia *h* sobre el centro.
Suponiendo que F_f actúa hacia la izquierda.
Aplicando las leyes de Newton del movimiento:
Traslación

$$F - F_f = Ma \qquad (1)$$

$$N - Mg = 0 \qquad (2)$$

Rotación alrededor del centro de masa

$$Fh + F_f R = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha \qquad (3)$$

Considerando $\alpha = \frac{a}{R}$

$$2F\frac{h}{R} + 2F_f = Ma \qquad (3a)$$

Igualando (1) y (3a)

$$F - F_f = 2F\frac{h}{R} + 2F_f$$

$$3F_f = F\left(1 - 2\frac{h}{R}\right)$$

Discusión:

a) $F_f = 0$, cuando $1 - 2\frac{h}{R} = 0 \Rightarrow h = \frac{R}{2}$

Esto quiere decir si *F* se aplica a *R*/2 del centro, la fuerza de rozamiento es cero.

b) Si $h = R$

$$3F_f = F\left(1 - 2\frac{R}{R}\right) = -F \Rightarrow F_f = -\frac{F}{3}$$

el rozamiento es en sentido contrario al indicado y la ecuación (3) se convierte en:

$$F(R) - \left(\frac{F}{3}\right)R = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}F = \frac{1}{2}MR\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4F}{3MR}$$

Esto indica que el cilindro rueda hacia la derecha.

c) Si disminuye *h* hasta que *h* = 0.

$$3F_f = F\left[1 - 2\frac{(0)}{R}\right] = F \Rightarrow F_f = \frac{F}{3}$$

En la ecuación (3)

$$F(0) + \left(\frac{F}{3}\right)R = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

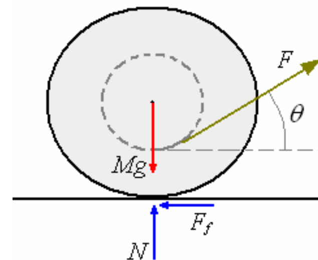
$$\frac{F}{3}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{2F}{3MR}$$

El cilindro rueda hacia la derecha.

d) Si *F* se hace muy grande tal que F_f tiende a aumentar, tan pronto como sobrepase el valor máximo posible de la tuerza de rozamiento (μN), el disco deslizará.
Se debe hacer una nueva hipótesis, esta vez se tienen también las ecuaciones (1), (2) y (3) pero $\alpha \neq a/R$.

Ejemplo 47. Un carrete de radio interior R_1 y radio exterior R_2 se halla sobre un suelo áspero. Se tira de él con una tuerza *F* mediante un hilo arrollado en torno a su cilindro interior. Se mantiene un ángulo θ con la horizontal. Se observa que hay un ángulo Crítico θ_0 , tal que $\theta < \theta_o$, el carrete rueda sin deslizar en el sentido del cual se tira de él, y para $\theta > \theta_o$ el carrete rueda sin deslizar en sentido contrario, ¿Cuál es el valor del ángulo critico.



Solución.
Aplicando las leyes de Newton del movimiento;
Traslación:

$$F\cos\theta - F_f = Ma = M\alpha R_2 \qquad (1)$$

$$F\text{sen}\theta - Mg + N = 0$$

Rotación:

$$-F_f R_2 + FR_1 = I_{CM}\alpha \Rightarrow$$

$$F_f R_2 = FR_1 - I_{CM}\alpha \Rightarrow$$

$$F_f = F\frac{R_1}{R_2}R_1 - \frac{I_{CM}}{R_2}\alpha \qquad (2)$$

Eliminando la fuerza F_f ., reemplazando (2) en (1):

$$F\cos\theta - \left(F\frac{R_1}{R_2}R_1 - \frac{I_{CM}}{R_2}\alpha\right) = Ma$$

$$\Rightarrow \; F\cos\theta - F\frac{R_1}{R_2}R_1 + \frac{I_{CM}}{R_2}\alpha = M\alpha R_2$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{R_2\cos\theta - R_1}{R_2}\right) = \left(\frac{MR_2^2 - I_{CM}}{R_2}\right)\alpha$$

$$\Rightarrow \; \alpha = F\frac{(R_2\cos\theta - R_1)}{(MR_2^2 - I_{CM})} = \frac{d\omega}{dt}$$

La rotación hará que el movimiento del carrete será hacia adelante cuando $\frac{d\omega}{dt} > 0$

$$R_2\cos\theta - R_1 > 0$$

$$\Rightarrow \; \cos\theta > \frac{R_1}{R_2}$$

El movimiento será hacia atrás cuando $\frac{d\omega}{dt} < 0$

$$R_2\cos\theta - R_1 < 0$$

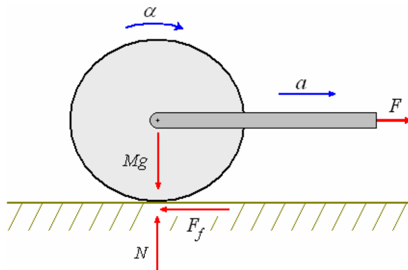
$$\Rightarrow \; \cos\theta < \frac{R_1}{R_2}$$

El ángulo crítico es cuando $\frac{d\omega}{dt} = 0$

$$R_2\cos\theta - R_1 = 0$$

$$\Rightarrow \; \cos\theta = \frac{R_1}{R_2}$$

Ejemplo 48. Un disco de masa *M* y radio *R* se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. Si se tira del centro del disco con una fuerza horizontal constante *F*, determine:
a) La aceleración del centro de masa del disco.
b) La aceleración angular del disco.
c) La fuerza de roce.
Solución.



Aquí

$$F - F_f = Ma\,, \quad N - Mg = 0\,,$$

$$F_f R = \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MRa$$

Entonces

$$F_f = \frac{1}{2}Ma$$

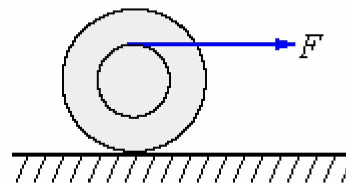
Que sustituida en la primera da:

a) $a = \frac{2F}{3M}$,

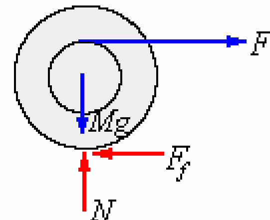
b) $\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2F}{3MR}$,

c) $F_f = \frac{1}{2}Ma = \frac{F}{3}$

Ejemplo 49. Un disco de masa *M* y radio 2*R* se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. El disco tiene un resalto de radio *R* como se indica en la figura, en el cual se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante *F*, determine:
a) La aceleración del centro de masa del disco.
b) La aceleración angular del disco.
c) La fuerza de roce.



Solución.



Ahora $F - F_f = Ma$, $N - Mg = 0$

$$F_f 2R + FR = \frac{1}{2}M(2R)^2\alpha$$

$$= 2MR^2\left(\frac{a}{2R}\right) = MRa$$

Simplificando:

$$2F_f + F = Ma = F - F_f$$

$$\Rightarrow F_f = 0$$

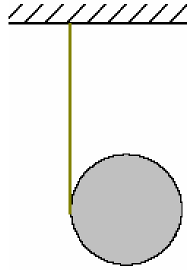
De donde resulta:

a) $a = \frac{F}{m}$

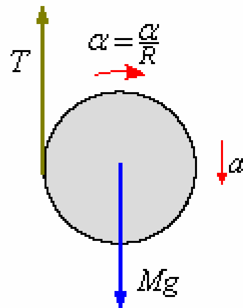
b) $\alpha = \frac{F}{2MR}$

c) $F_f = 0$

Ejemplo 50. Un disco de masa *M* y radio *R* tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determine:
a) La aceleración de bajada del disco.
b) La tensión de la cuerda.



Solución.



Aquí $Mg - T = Ma$,

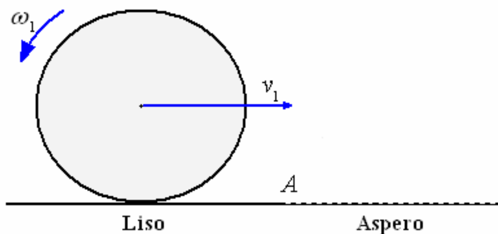
$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MRa$$

De donde $Mg - \frac{1}{2}Ma = Ma$

a) $a = \frac{2}{3}g$

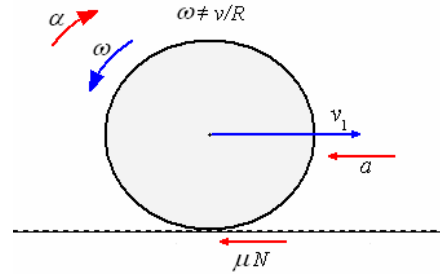
b) $T = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{3}Mg$

Ejemplo 51. Se da a un cilindro homogéneo de radio *R* y masa *M* con una velocidad horizontal v_1 y una velocidad angular ω_1 en sentido opuesto a las agujas del reloj $\omega_1 = v_1/R$ en la parte sin rozamiento de la superficie horizontal. Más allá del punto A, cambia la superficie de manera que a la derecha de A el coeficiente de rozamiento es μ.



Solución.
En la parte lisa el cuerpo se mueve con velocidad horizontal constante v_1 hacia la derecha, rotando con velocidad angular ω_1 en el sentido antihorario.

A partir del punto A en que el piso es áspero deslizará primeramente sobre el plano áspero, pero acabará rodando sin deslizar.
En la parte intermedia habrá una aceleración a que disminuye a la velocidad de v_1 a v_2 y una aceleración angular α que disminuye a ω_1, la hace igual a cero y cambia su rotación hasta que llega la velocidad angular a un valor tal que $\omega_2 = v_2/R$.
Aplicando las leyes de Newton en la figura siguiente.



Traslación: $\mu N = Ma$, $N - Mg = 0$

Rotación: $-R\mu N = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$

De esto obtenemos: $a = -\mu g$, $\alpha = -\frac{2\mu g}{R}$

La velocidad es: $v = v_1 + at = v_1 - \mu gt$
La velocidad angular es:

$$\omega = \omega_1 - \alpha\, t = \frac{v_1}{R} - \frac{2\mu g}{R}t$$

Parta encontrar el tiempo en que el disco deja de resbalar, debe cumplirse: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

$$v\hat{i} = \omega\hat{k} \times R\hat{j} = -\omega R\hat{i}$$

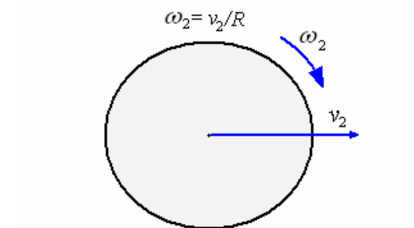
$$(v_1 - \mu gt) = -\left(\frac{v_1}{R} - \frac{2\mu g}{R}t\right)R$$

$$2v_1 = 3\mu gt \Rightarrow t = \frac{2}{3}\frac{v_1}{\mu g}$$

con este valor de t

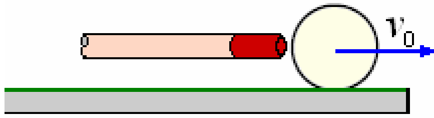
$$v_2 = v_1 - \mu g\left(\frac{2}{3}\frac{v_1}{\mu g}\right) = \frac{v_1}{3}$$

La velocidad final es un tercio de la inicial



Ejemplo 52. Se lanza una bola de billar con una velocidad inicial v_0 sobre una mesa horizontal,

existiendo entre la bola y la mesa un coeficiente de rozamiento μ. Calcular la distancia que recorrerá hasta que empiece a rodar sin deslizamiento.
¿Qué velocidad tendrá en ese instante?
Aplicar para el caso v_0 = 7 m/s, μ = 0,2.



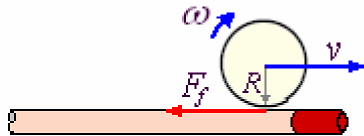
Solución.
La fuerza de rozamiento $\mu N = \mu mg$ se opone al movimiento, siendo además la fuerza resultante, por lo que:

$$-\mu mg = ma\ ,\ a = -\mu g$$

La velocidad de la bola comenzará a disminuir de tal modo que:

$$v = v_0 - at = v_0 - \mu gt\ .$$

Al mismo tiempo, sobre la bola que inicialmente no rueda, (ω_0 = 0) actúa un momento de fuerza:



$$\tau = F_f R = \mu mgR$$

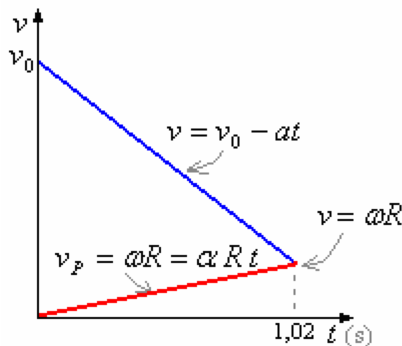
que producirá una aceleración angular $\alpha = \dfrac{\tau}{I}$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\mu mgR}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5\mu g}{2R}$$

Por lo que la velocidad angular irá aumentando:

$$\omega = \alpha t = \frac{5\mu gt}{2R}$$

La velocidad de un punto de la periferia de la esfera vale $v_P = \omega R$, que irá aumentando con el tiempo, porque ω aumenta con el tiempo.



Por tanto, observamos que la velocidad de la bola disminuye, y la velocidad de la periferia de la bola aumenta. En el momento en que la velocidad de la periferia se iguale a la velocidad de traslación, se conseguirá la rodadura, es decir el no deslizamiento.

$$v = v_P \quad v = \omega R$$

$$v_0 - \mu gt = \frac{5\mu gt}{2} \Rightarrow t = \frac{2v_0}{7\mu g}$$

la velocidad en ese instante es

$$v = \frac{5}{7}v_0$$ = 5 m/s, t = 1,02 s

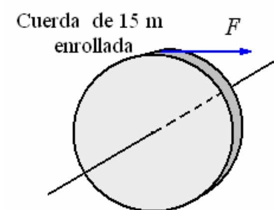
La distancia recorrida

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}\mu gt^2$$

$$= \frac{2v_0^2}{7\mu g} - \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{2v_0}{7\mu g}\right)^2 = \frac{12v_0^2}{49\mu g}$$

= 6,12 m.

Ejemplo 53. Un tambor tiene un radio de 0,40 m y un momento de la inercia de 5,0 kg m^2. El torque producido por la fuerza de fricción de los cojinetes de anillo del tambor es 3,0 Nm. Un anillo en un extremo de una cuerda se desliza en una clavija corta en el borde del tambor, y una cuerda de 15 m de longitud se enrolla sobre el tambor. El tambor está inicialmente en reposo. Una fuerza constante se aplica al extremo libre de la cuerda hasta que la cuerda se desenrolla y se desliza totalmente de la clavija. En ese instante, la velocidad angular del tambor es de 12 rad/s. El tambor después decelera y se detiene.



a) ¿Cuál es la fuerza constante aplicada a la cuerda?
b) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del tambor en el instante en que la cuerda deja el tambor?
c) ¿Cuál es el trabajo negativo realizado por la fricción?
d) ¿Qué tiempo el tambor estuvo en movimiento?
Movimiento con la cuerda?
Solución.
a)
Trabajo de la fuerza F + trabajo de la fricción
= Energía cinética ganada al terminarse la cuerda

$$F\Delta s + \tau_f \Delta\theta = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

$$\Rightarrow F(15) - 3{,}0\left(\frac{15}{0{,}4}\right) = \frac{1}{2}(5{,}0)(12)^2$$

$\Rightarrow F$ = 31,5 N

b)

$$L = I_O\omega = (5)(12)$$

= 60 kg.m^2/s

c)
Movimiento con la cuerda

$$W_{f1} = -\tau_f \Delta\theta = -3\left(\frac{15}{0,4}\right) = -\ 112,5\ \text{J}$$

Movimiento sin la cuerda

$$W_{f2} = -\frac{1}{2} I_O \omega_O^2 = -\frac{1}{2}(5,0)(12)^2 = -360$$

Trabajo total

$$W_f = W_{f1} + W_{f2} = -482,5 J$$

d)

$$\sum \tau_O = I_O \alpha$$

$$FR - \tau_f I_O \alpha \Rightarrow 31,5(0,4) - 3,0 = 5,0\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{31,5(0,4) - 3,0}{5,0} = 1,92 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Por otra parte

$$\omega_o = \alpha_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0}{\alpha_1} = \frac{12}{1,92} = 6,25\ \text{s}$$

Movimiento sin la cuerda

$$\sum \tau_O = I_O \alpha \Rightarrow -3 = 5\alpha_2$$

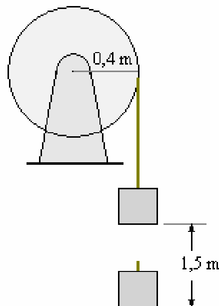
$$\Rightarrow \alpha_2 == -\frac{3}{5} = -0,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$0 = \omega_0 + \alpha_2 t_2$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{-\omega_0}{\alpha_2} = \frac{-12}{-0,6} = 20\text{s}$$

El tiempo total es 26,25 s

Ejemplo 54. Una rueda tiene un radio de 0,40 m y se monta en cojinetes sin fricción. Un bloque se suspende de una cuerda que se enrolla en la rueda. La rueda se libera de reposo y el bloque desciende 1,5 m en 2,00 segundos. La tensión en la cuerda durante el descenso del bloque es 20 N.
a) ¿Cuál es la masa del bloque?
b) ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda?



Solución.

a)

$$h = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2(1,5)}{(2)^2}$$

$$= 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$mg - T = ma$$

$$\Rightarrow m = \frac{T}{g-a} = \frac{20}{9,8 - 0,75}$$

$$= 2,21\ \text{kg}$$

b)

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{0,75}{0,4}$$

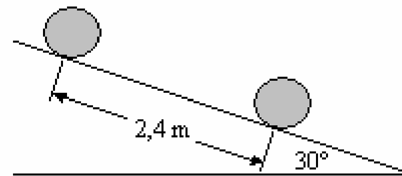
$$= 1,875 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\sum \tau_O = I_O \alpha \Rightarrow TR = I_O \alpha$$

$$\Rightarrow I_O = \frac{TR}{\alpha} = \frac{20(0,4)}{1,875}$$

$$= 4,27\ \text{kg m}^2$$

Ejemplo 55. El radio de una rueda de 3,0 kilogramos es 6,0 centímetros. La rueda se suelta del reposo en el punto A en un plano inclinado 30°. La rueda gira sin deslizar y se mueve 2,4 m al punto B en 1,20s.
a) ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda?
b) ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda?



Solución.

a) $$I_O = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2}(3\text{kg})(0,06\text{m})^2$$

$$= 0,0054\ \text{kg m}^2$$

b)

$$mg\text{sen}30^\text{o} - F_f = ma \quad F_f R = I_O \alpha$$

$$\Rightarrow F_f = \left(\frac{I_O}{R}\right)\alpha$$

$$mg\text{sen}30^\text{o} - \left(\frac{I_O}{R}\right)\alpha = mR\alpha$$

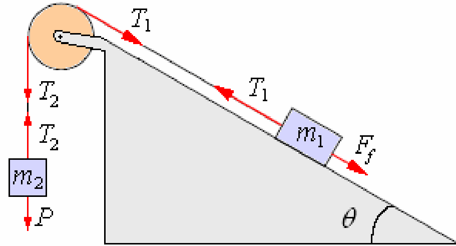
$$\Rightarrow \alpha = \frac{mg\text{sen}30^\text{o}}{\left(\frac{I_O}{R}\right) + mR} = \frac{3(9,8)(0,5)}{\frac{0,0054}{0,06} + 3(0,06)}$$

$$= \frac{14,7}{0,27} = 54,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 56. Una masa de 20 kg se halla sobre un plano inclinado 30º, con el que tiene un rozamiento cuyo coeficiente vale 0,3, unida a una cuerda sin masa e inextensible que pasa por una polea de M_P = 160 kg, cuyo radio geométrico es de 20 cm y radio

de giro r_g = 15 cm. De dicha cuerda pende una masa de 40 kg que es abandonada libremente.
Calcular:
a) Aceleración con que se mueve el sistema.
b) Tensiones en la cuerda.
c) ¿En qué rango de valores de la masa que pende, el sistema estará en equilibrio?
Momento de inercia de la polea $I_P = Mr_g^2$.

Solución.
a) Partiendo de la suposición de que la masa colgante acelera hacia abajo, plantearemos las tres ecuaciones correspondientes al movimiento de las tres masas:
$m_2g - T_2 = m_2a$



$$T_1 - m_1g\text{sen}\theta + \mu m_1 g\cos\theta = m_1a,$$

$$T_2R - T_1R = I\alpha = M_P r_g^2 \frac{a}{R}$$

Sumando las tres ecuaciones siguientes

$$m_0g - T_2 = m_2a,$$

$$T_1 - m_1g\text{sen}\theta + \mu m_1 g\cos\theta = m_1a$$

$$T_2 - T_1 M_P\left(\frac{r_g}{R}\right)^2 a$$

Obtenemos:

$$m_2g - m_1g\text{sen}\theta + \mu m_1 g\cos\theta$$

$$= a\left[m_1 + m_2 + M_P\left(\frac{r_g}{R}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1\text{sen}\theta + \mu m_1\cos\theta}{m_1 + m_2 + M_P\left(\frac{r_g}{R}\right)^2} g$$

$$= \frac{40 - 10 - 5{,}2}{60 + 160\left(\frac{15}{20}\right)^2} g$$

= 1,62 m/s^2

b)

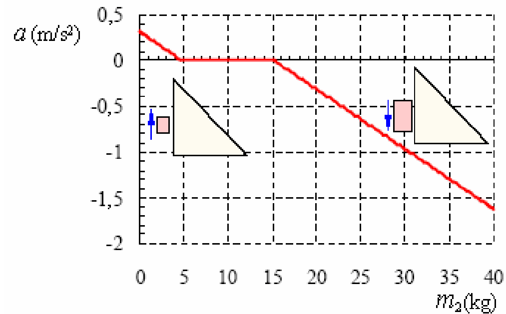
$$T_2 = m_2(g - a) = 327 \text{ N},$$

$$T_1 = T_2\left(\frac{r_g}{R}\right)^2 a = 181 \text{ N}.$$

c) El valor mínimo que hace que la masa m_2 acelere hacia abajo se produce cuando a = 0, es decir:

$$m_2 = m_1\text{sen}\theta + \mu m_1\cos\theta$$

= 10 + 5,2 = 15,2 kg.



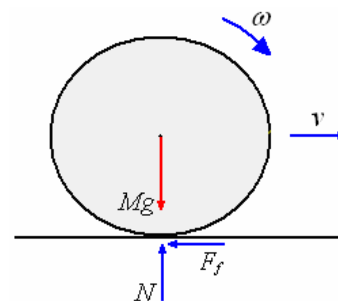
Si la masa m_2 se hace aún menor, llegará un momento en que será arrastrada por m_1. Esto produciría una inversión en el sentido de la fuerza de rozamiento. El valor máximo de m_2 deberá cumplir ahora:

$$m_2 = m_1\text{sen}\theta + \mu m_1\cos\theta$$

= 10 – 5,2 = 4,8 kg.

Por tanto, entre 0 y 4,8 kg el sistema acelerará de modo que m_2 suba; entre 4,8 y 15,2 kg, permanecerá en equilibrio; y para más de 15,2 kg m_2 acelerará hacia abajo.

Ejemplo 57. ¿Porqué una esfera que rueda se detiene? En esta parte vamos a tratar de explicar la resistencia al rodamiento.
La figura siguiente muestra una esfera de masa M y radio R la cual está rodando con una velocidad angular ω y avanza con una velocidad $v = \omega R$.



Solución.
La fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso Mg la reacción del piso N y la fuerza de fricción F_f. Si aplicamos la segunda ley de Newton a la traslación.

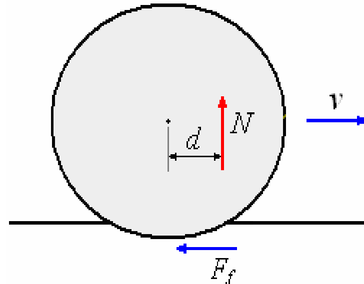
$$\vec{F}_f = M\vec{g}$$

debe haber una aceleración $\vec{a}$ y $\vec{v}$ decrecería. Si aplicamos segunda ley de Newton a la rotación.

$$RF_f = I_{CM}\alpha$$

la aceleración angular α depende de F_f. por consiguiente F_f actúa incrementando ω.
En resumen: en traslación F_f. acelera, en rotación F_f. desacelera, esto aparentemente es una contradicción.
Por otra parte Mg y N están en la línea vertical que por el centro de masa y no causan efecto en el

movimiento horizontal.
Si la esfera y el plano son rígidos, de modo que la esfera esté en contacto solo en un punto, tampoco originan alrededor del centro de masa. .porque actúan a través de él
Para resolver la Contradicción suprimamos la idealización de que todos los cuerpos son rígidos, la esfera se aplana un poco y el nivel de La superficie se hunde Ligeramente (ver la figura a continuación)



La reacción N actúa delante del centro de masa, produciendo un torque $\tau_N = dN$ de resistencia al rodamiento.

$$\tau_N - RF_f = I_{CM}\alpha$$

Como $N = Mg$, $F_f = Ma$, $\alpha = \dfrac{a}{R}$:

$$\tau_N - RMa = I_{CM}\frac{a}{R}$$

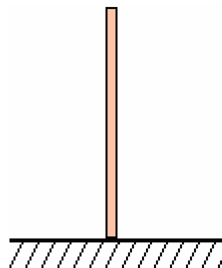
$$\Rightarrow \tau_N = a\left(\frac{I_{CM}}{R} + RM\right)$$

Para una esfera: $I_{CM} = \dfrac{2}{5}MR^2$

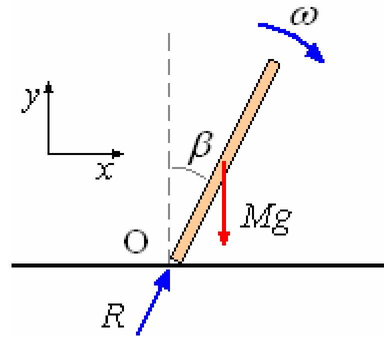
Luego: $\tau_N = \dfrac{7}{5}MRa$, como $N = Mg$

$$d = \frac{\tau_N}{Mg} = \frac{7R}{5g}a$$

Ejemplo 58. La figura muestra una varilla homogénea de masa M y longitud L en posición vertical. La cual se deja caer desde el reposo.
a) ¿A que ángulo θ entre la varilla y la vertical, la varilla ya no presionará al piso?
b) ¿Con qué coeficiente de fricción el extremo de La varilla no resbalará hasta este momento?



Solución.
a) La figura siguiente muestra .la varilla cuando forma un ángulo θ con la vertical.



Sobre la varilla actúa el peso Mg y la reacción R.
La velocidad angular ω en este instante se puede encontrar aplicando la ecuación de la energía.

$$Mg\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

Como $I_O = \dfrac{1}{3}ML^2$

$$Mg\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L}(1 - \cos\beta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{L}}\text{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{3g}{L}\left(2\text{sen}^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{6g}{L}\text{sen}^2\frac{\beta}{2}$$

Aplicando la segunda Ley de Newton para traslación a lo largo de la varilla.

$$\sum F = ma_c \Rightarrow R - Mg\cos\beta = -M\omega^2\frac{L}{2}$$

Cuando La varilla deja de presionar $R = 0$, y:

$$-Mg\cos\beta = -M\omega^2\frac{L}{2}$$

reemplazando el valor de ω^2 encontrado

$$Mg\cos\beta = M\left(\frac{6g}{L}\text{sen}^2\frac{\beta}{2}\right)\frac{L}{2}$$

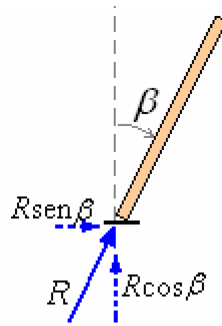
Simplificando

$$\cos\beta = 6\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\beta}{2} = 5\,\text{sen}^2\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

De aquí: $\beta = 48{,}2^\circ$
b) Para que la varilla no resbale tenemos en la figura siguiente.
Las componentes de R son:

$$\vec{R} = R\text{sen}\beta\,\hat{i} + R\cos\beta\hat{j}$$



La condición para que la varilla no resbale es:

$F_f \geq R\text{sen}\beta$

Con $F_f = \mu N$ y $N = R\cos\beta$

$\mu R\cos\beta \geq R\text{sen}\beta$

$\mu \geq \tan\beta$

El coeficiente de rozamiento del piso debe ser cuando menos igual a $\tan\beta$ para que llegue sin deslizar hasta el ángulo β.

Para $\beta = 48{,}2^{\circ} \Rightarrow \mu \geq 1{,}12$

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR.

Anteriormente hemos visto que:

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ y también $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

y mostramos que para un cuerpo rígido.

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{total}}{dt}$$

Si no hay torque externo con respecto a algún eje la cantidad de movimiento angular será constante con respecto a ese eje.

$$\vec{L}_{\text{total}} = \text{Constante}$$

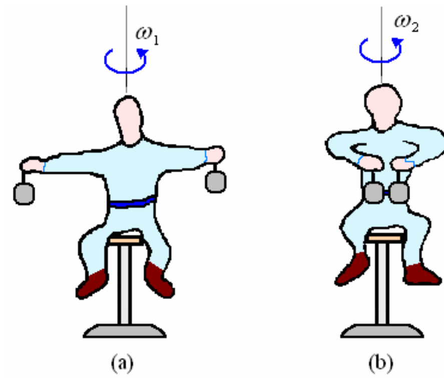
o expresado en función del momento de inercia apropiado.

$$I\vec{\omega} = \text{Constante}$$

Esta relación nos va a ser muy útil como veremos a continuación.

Ejemplo 59. Un estudiante está sentado sobre un banco giratorio montado sobre cojinetes sin fricción que puede girar libremente alrededor de un eje vertical como se muestra en la figura (a). El estudiante sostiene en las manos extendidas dos pesas. Su momento de inercia en esta posición es I_1 y su velocidad angular ω_1. No actúan sobre él torques no equilibrados y en consecuencia su cantidad de movimiento angular tiene que conservarse.

Cuando el estudiante acerca las manos al cuerpo, su momento de inercia varía, figura (b) ahora es I_2 y su velocidad angular será ω_2



Por la conservación de la cantidad de movimiento angular.

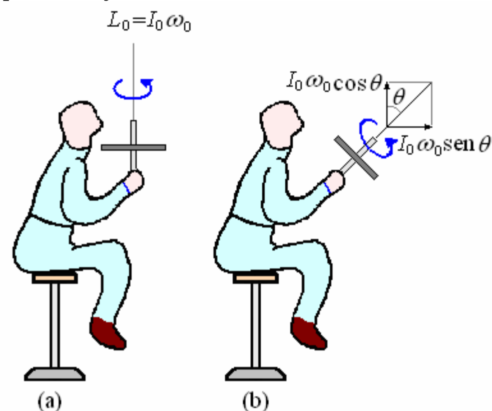
$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$$

Siendo $I_2 < I_1$, resulta $\omega_2 > \omega_1$

Su velocidad aumenta.

Ejemplo 60. Esta vez el mismo estudiante sentado sobre el mismo banco, sostiene en sus manos en posición vertical al eje de rotación de una rueda de bicicleta, la rueda gira alrededor de ese eje vertical con velocidad angular ω_0, el estudiante y el banco están en reposo (a).

El estudiante gira el eje de la rueda en ángulo θ con la vertical (b), como no hay torque respecto al eje vertical, la cantidad de movimiento angular con respecto al eje vertical debe conservarse.



Inicialmente se tiene

$$\vec{L} = I_0\omega_0\hat{k}$$

Cuando se inclina la rueda (respecto al eje vertical)

$$\vec{L}' = \vec{L}_{estudiante+banco} + \vec{L}_{rueda}$$

$$= I_e\vec{\omega}_e + I_0\omega_0\cos\theta\,\hat{k}$$

Siendo I_e el momento de inercia del estudiante y banco respecto al eje vertical, ω_e su velocidad angular con respecto a ese eje.

Como $\vec{L} = \vec{L}'$

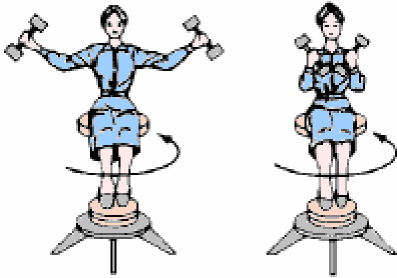
$$I_e\vec{\omega}_e + I_0\omega_0\cos\theta\,\hat{k} = I_0\omega_0\hat{k}$$

$$\vec{\omega}_e = \frac{I_0}{I_e}\omega_0\left(1-\cos\theta\right)\hat{k}$$

Es la velocidad angular del estudiante con el sentido de giro inicial de la rueda.
Cuando la rueda se invierte se invierte totalmente $\theta = \pi/2$, y:

$$\vec{\omega}_e = \frac{2I_0}{I_e}\omega_0\ \hat{k}$$

Ejemplo 61. Una persona está sentada en una silla giratoria manteniendo los brazos extendidos con una pesa en cada mano. Gira con una frecuencia de 2 Hz. El momento de inercia de la persona con los pesos es de 5 kg m$^{2.}$ Hallar:
a) la nueva frecuencia cuando encoja los brazos y disminuya el momento de inercia a 2 kg m^2.
b) La variación de energía cinética del sistema.
c) ¿De dónde procede este incremento de energía cinética?



Solución.
a) Al encoger los brazos, están actuando fuerzas y torques de fuerzas internas, por lo que podemos admitir que se conserva la cantidad de movimiento angular.

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_2, \Rightarrow\ 2\pi\ f_2 = \frac{I_1}{I_2}2\pi\ f_1,$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{I_1}{I_2}f_1 = \frac{5}{2}2 = 5\text{ Hz}$$

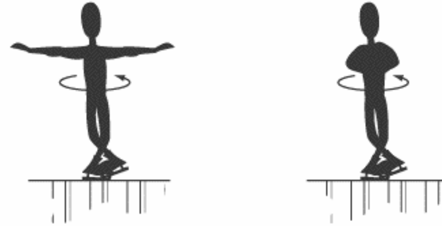
b) $$\Delta K = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{L^2}{2I_2} - \frac{L^2}{2I_1}$$

$$L = I_1\omega_1 = 5(2\pi 2) = 20\pi \text{kg m}^2\text{s};$$

$$\Delta K = 200\pi^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = 60\pi^2\ \text{J}.$$

El signo positivo nos indica que hay un aumento de energía cinética.
c) Este incremento de energía cinética procede de la energía química almacenada en los músculos del brazo.

Ejemplo 62. Un patinador, con los brazos extendidos y las piernas abiertas y con un momento de inercia respecto a su eje vertical de 7 kg.m^2 , inicia un giro sobre si mismo con una aceleración de 2 rad/s^2 durante 6 segundos, momento en el cual encoge los brazos y acerca sus piernas al eje hasta tener un momento de inercia de 4 kg.m^2 . Determinar su velocidad de giro final.



Solución.

Después de un tiempo t de iniciar el giro, su velocidad angular será:

$$\omega_{(t)} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(2)(6)^2 = 36\text{ rad/s}$$

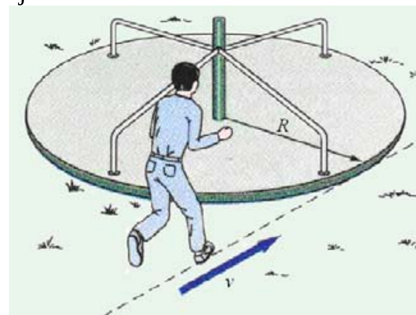
al acercar brazos y piernas al eje, el torque de las fuerzas sigue siendo nulo, por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular, $I\omega$

$$(I\omega)_{\text{Antes}} = (I\omega)_{\text{Después}} \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{Después}} = \frac{I_{\text{Antes}}}{I_{\text{Después}}}\omega_{\text{Antes}}$$

$$= \frac{7}{4}36 = 63\text{ rad/s}$$

Ejemplo 63. Un muchacho de 25 kg corre con velocidad de 2,5 m/s hacia un tiovivo en reposo de radio 2 m cuyo, momento de inercia vale 500 kg m^2. Hallar la velocidad angular y frecuencia del conjunto después de que el muchacho suba al tiovivo justo en el borde.



Solución.
La cantidad de movimiento angular del muchacho respecto al centro del tiovivo es:

$$L_1 = mvR = (25)(2,5)(2) = 125\text{ kg m}^2\text{/s}$$

El momento de inercia del conjunto tiovivo-muchacho es
$I = I_m + I_T = 25\text{x}2^2 + 500$
$= 600$ kg m²

Planteando la igualdad entre la cantidad de movimiento angular inicial y final, tendremos:

$$L_1 = L_2,\; mvR = (I_m + I_T)\omega$$

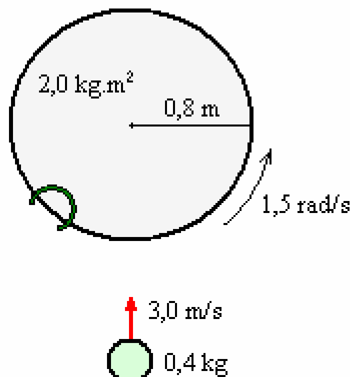
$$\omega = \frac{mvR}{(I_m + I_T)} = \frac{125}{600}$$

= 0,208 rad/s

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}033 \text{ Hz}$$

= 1,99 r.p.m.

Ejemplo 64. Una tornamesa con radio de 8,0 m y momento de inercia de 2,0 kg.m². La placa tornamesa rota con una velocidad angular de 1,5 rad/s sobre un eje vertical que pasa a través de su centro en cojinetes sin fricción. Una bola de 0,40 kg se lanza horizontalmente hacia el eje de la tornamesa con una velocidad de 3,0 m/s. La bola es cogida por un mecanismo con forma de tazón en el borde de la tornamesa.
a) ¿Cuál es cantidad de movimiento angular de la bola alrededor del eje de la tornamesa?
b) ¿Qué fracción de energía cinética se pierde durante la captura de la bola?



Solución.
a) La cantidad de movimiento angular de la bola alrededor del eje de la tornamesa es cero
b)

$$\text{Energía antes} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}4)(3{,}0)^2 + \frac{1}{2}(2{,}0)(1{,}5)^2$$

= 4,05 J

$$\text{Energía después} = \frac{1}{2}I'_O\,\omega'^2$$

Para calcular esta energía necesitamos conocer I_0 y ω'.

$$I'_O = I_O + mR^2 = 2{,}0 + (0{,}4)(0{,}8)^2$$

= 2,256 kg/ m²

$$L_{antes} = L_{después} \Rightarrow I_O\omega = I'_O\,\omega'$$

$$\omega' = \left(\frac{I_O}{I'_O}\right)\omega = \left(\frac{2{,}0}{2{,}256}\right)1{,}5$$

$$= 1{,}33\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Reemplazando:

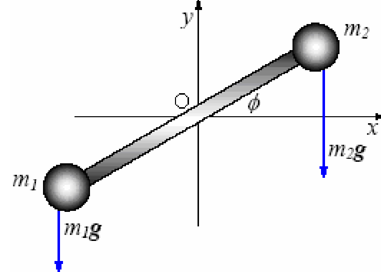
$$\text{Energía después} = \frac{1}{2}I'_O\,\omega'^2 = \frac{1}{2}(2{,}256)(1{,}33)^2$$

= 2 J

Se pierde 4,05 -2 = 2,05

$$\text{fracción de energía} = \frac{2{,}05}{4{,}05} = 0{,}5$$

Ejemplo 65. Una barra rígida de masa M y largo L gira en un plano vertical alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro. En los extremos de la barra se unen dos cuerpos de masas m_1 y m_2. Calcular la magnitud del momento angular del sistema cuando su rapidez angular es ω y la aceleración angular cuando la barra forma un ángulo ϕ con la horizontal.



Solución.
El momento de inercia por el eje de rotación del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de los tres componentes, con los valores de la tabla se obtiene:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{L^2}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)$$

Como el sistema gira con rapidez angular ω, la magnitud del momento angular es:

$$L = I\omega = \frac{L^2}{4}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)\omega$$

Para calcular la aceleración angular usamos la relación

$\tau_t = I\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{\tau_t}{I}$, al calcular el torque total en torno el eje de rotación, se obtiene:

$$\tau_t = m_1 g\frac{L}{2}\cos\phi - m_2 g\frac{L}{2}\cos\phi$$

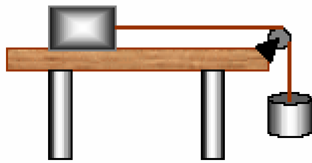
$$= \frac{1}{2}(m_1 - m_2)gL\cos\phi$$

Reemplazando en α los valores de I y de τ_t, se obtiene la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\tau_t}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g\cos\phi}{L(m_1 + m_2 + M/3)}$$

Ejemplo 66. En la figura las masas m_1 y m_2 se conectan por una cuerda ideal que pasa por una polea de radio R y momento de inercia I alrededor de su eje. La mesa no tiene roce, calcular la aceleración del sistema.

Solución. Primero se calcula en momento angular del sistema de las dos masas más la polea:



$$L = m_1 vR + m_2 vR + I\frac{v}{R}$$

Luego se calcula el torque externo sobre el sistema, la única fuerza externa que contribuye al torque total es $m_1 g$, entonces el torque es

$\tau = m_1 gR$.

Entonces se tiene:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow$$

$$m_1 gR = \frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)vR + I\frac{v}{R}\right]$$

$$m_1 gR = (m_1 + m_2)R\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R}\frac{dv}{dt}$$

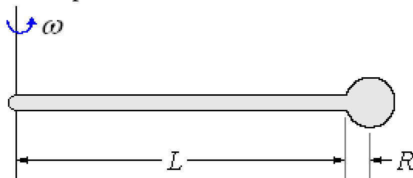
$$\Rightarrow m_1 gR = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)Ra$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

Ejemplo 67. Una varilla de 500 g y 75 cm de longitud, lleva soldada en un extremo una esfera de 10 cm de radio y 250 g de masa. Calcular:

a) El momento de inercia cuando gira, alrededor de un eje perpendicular a la varilla que pasa por el extremo libre.

b) La cantidad de movimiento angular del conjunto si gira a 12 rpm.



Solución.

a) El momento de inercia será la suma del momento de inercia de una varilla, más el de la esfera. Como la esfera está a $L+R$ del eje, aplicamos Steiner:

$$I_e = \frac{2}{5}m_e R^2 + m_e(L+R)^2,\ I_V = \frac{1}{3}m_V L^2$$

$$I = I_e + I_V$$

$$= \frac{2}{5}m_e R^2 + m_e(L+R)^2 + \frac{1}{3}m_V L^2$$

$$I = \frac{2}{5}(0{,}25)(0{,}1)^2 + (0{,}25)(0{,}85)^2 + \frac{1}{3}(0{,}5)(0{,}75)^2$$

$= 0{,}27$ kg.m^2

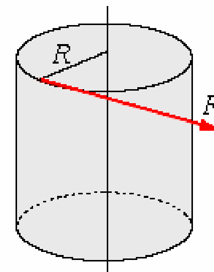
b) $L = I\omega = 0{,}27\frac{2\pi}{T} = 0{,}27(2\pi f)$

$= 0{,}54\pi\frac{12}{60} = 0{,}345$ kgm^2 / s

Ejemplo 68. Un cilindro de 50 kg y 20 cm de radio, gira respecto de un eje vertical que coincide con su eje de simetría, debido a una fuerza constante, aplicada a su periferia que, después de 40 s de iniciado el movimiento, alcanza 200 r.p.m.

Calcular:

El valor de la fuerza y el torque de la fuerza aplicada.



Solución.

La frecuencia de rotación adquirida vale:

$$f = \frac{200}{60}\text{Hz}$$

La velocidad angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{200}{60} = \frac{20}{3}\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\pi}{6}\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Por otra parte el momento de inercia del cilindro vale:

$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(50)(0{,}2)^2 = 1$ kgm^2.

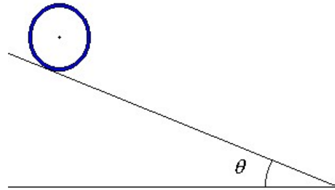
Luego el torque de la fuerza aplicada

$\tau = FR = I\alpha = (1)\frac{\pi}{6} = 0{,}52$ Nm.

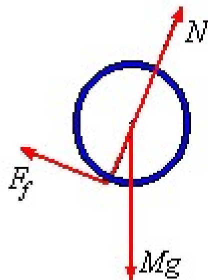
La fuerza tangencial:

$F = \frac{\tau}{R} = \frac{0{,}52}{0{,}2} = 2{,}6$ N

Ejemplo 69. Un anillo de masa M y radio R ($I_{CM} = MR^2$), cae en rodadura pura sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal.
a) Hacer el DCL. del anillo.
b) Hallar la aceleración del centro de masa del anillo.
c) Encontrar el valor de la fricción entre el plano inclinado y el anillo.
d) ¿Cuál debe ser el mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el anillo para que este se encuentre en rodadura pura?



Solución.
a) El DCL. del anillo.



b) Segunda ley de Newton para la traslación

$$Mgsen\theta - F_f = Ma$$

Segunda ley de Newton para la rotación

$$I\alpha = F_f R \Rightarrow MR^2 \frac{a}{R} = F_f R \Rightarrow$$

$$F_f = Ma$$

Reemplazando el valor de F_f en la primera ecuación.

$$Mgsen\theta - Ma = Ma \Rightarrow Mg\text{sen}\theta = 2Ma$$

Finalmente $a = \frac{1}{2} g\text{sen}\theta$

c) El valor de la fuerza de fricción entre el plano inclinado y el anillo.

$$F_f = Ma = \frac{1}{2} Mg\text{sen}\theta$$

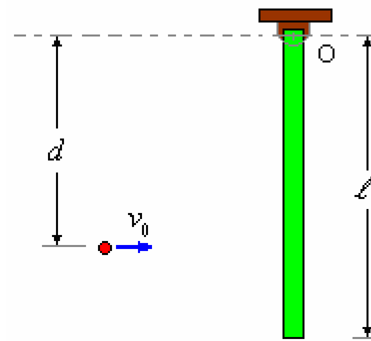
d) El mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el anillo para que este se encuentre en rodadura pura debe de cumplir

$$F_f = \mu_k N = \frac{1}{2} Mg\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{Mg\text{sen}\theta}{2Mg\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

Ejemplo 70. Una barra uniforme AB de masa M y longitud ℓ $\left(I_{CM} = \frac{1}{12} M\ell^2\right)$ se sostiene de un extremo mediante un pivote sin fricción. La barra se encuentra inicialmente en reposo en forma vertical cuando un proyectil de masa m impacta sobre ella y queda incrustado instantáneamente. La velocidad inicial del proyectil es v_0. Hallar:
a) La cantidad de movimiento angular del sistema respecto del pivote justo antes de la colisión.

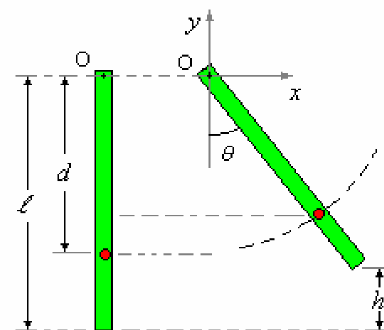
b) La velocidad angular de giro del sistema después que el proyectil se incrusta en la barra.
c) La altura máxima que alcanzará el CM de la barra.
d) El trabajo del proyectil cuando se incrusta contra la barra.



Solución.
a) La cantidad de movimiento angular del sistema respecto del pivote justo antes de la colisión.

$$L_{antes} = mv_0 d$$

b) La velocidad angular de giro del sistema después que el proyectil se incrusta en la barra.



$$L_{antes} = L_{después}$$

$$mv_0 d = \frac{1}{3} M\ell^2\omega + (\omega d)d$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{mv_0 d}{\left(\frac{1}{3} M\ell^2 + md^2\right)}$$

c) La altura máxima que alcanzará el CM de la barra.
Energía justo después del choque

$$= \frac{1}{2}I_O\omega^2 - \left(Mg\frac{\ell}{2}+mgd\right)$$

$$= I_O = \left(\frac{1}{3}M\ell^2 + md^2\right)$$

Energía cuando alcanza el punto más alto

$$= -\left(Mg\frac{\ell}{2}+mgd\right)(1-\cos\theta)$$

Por conservación de energía:
Energía justo después del choque = energía cuando alcanza el punto más alto.

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 - \left(Mg\frac{\ell}{2}+mgd\right) = -\left(Mg\frac{\ell}{2}+mgd\right)(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \left(Mg\frac{\ell}{2}+mgd\right)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}I_O\omega^2}{\left(Mg\frac{\ell}{2}+mgd\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M\ell^2+md^2\right)\frac{(mv_0d)^2}{\left(\frac{1}{3}M\ell^2+md^2\right)^2}}{\left(Mg\frac{\ell}{2}+mgd\right)}$$

$$= \frac{m^2v_0^2d^2}{2\left(M\frac{\ell}{2}+md\right)\left(\frac{1}{3}M\ell^2+md^2\right)g}$$

$$\Rightarrow h_{máx} = \ell(1-\cos\theta)$$

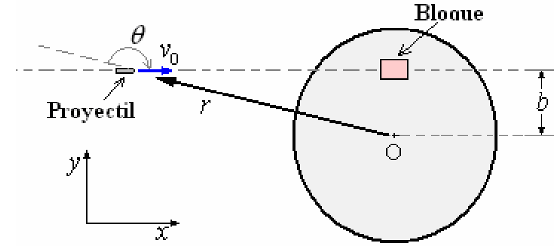
d) El trabajo del proyectil cuando se incrusta contra la barra.

$$W = \Delta E = \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - Mg\frac{\ell}{2} - mgd\right)$$

$$- \left[\frac{1}{2}I_O\omega^2 + \left(-Mg\frac{\ell}{2} - mgd\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

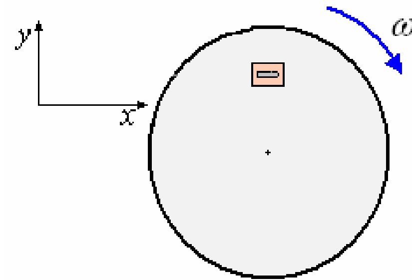
Ejemplo 71. Un bloque de masa M se pega a una plataforma circular, a una distancia b de su centro. La plataforma puede rotar, sin fricción, alrededor de un eje vertical alrededor de su centro. Siendo I_p su momento de inercia con respecto a ésta. Si un proyectil de masa m que se mueve con una velocidad horizontal v_0, como se muestra en la figura, incide y queda en el bloque. Encontrar la velocidad angular del bloque después del choque.



Solución.
Cantidad de movimiento angular antes del choque con respecto al eje O.

$$\vec{L}_{antes} = \vec{r}\times\vec{p} = -rmv_0\operatorname{sen}\theta\,\hat{k} = -mbv_0\hat{k}$$

Para encontrar la cantidad de movimiento angular después del choque, según la figura siguiente.



$$\vec{L}_{después} = \left[I_p + (m+M)b^2\right]\vec{\omega}$$

Por conservación de la cantidad de movimiento angular

$$\vec{L}_{antes} = \vec{L}_{después}$$

$$\Rightarrow -rmv_0\operatorname{sen}\theta\,\hat{k} = \left[I_p + (m+M)b^2\right]\vec{\omega}$$

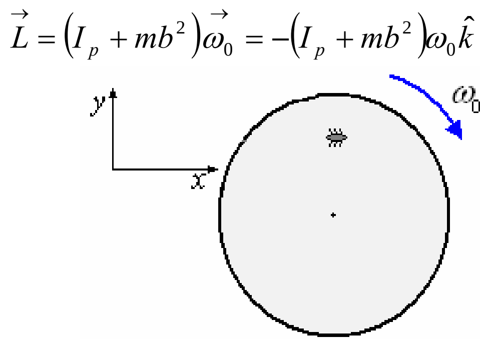
$$\Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{rmv_0\operatorname{sen}\theta}{\left[I_p + (m+M)b^2\right]}\hat{k}$$

Ejemplo 72. Se tiene una plataforma circular que puede rotar sin fricción alrededor de un eje perpendicular al centro. E1 momento de inercia de la plataforma con respecto al eje es I_p. Un insecto de masa m se coloca sobre la plataforma a una distancia b del eje. El sistema se hace girar con una velocidad angular ω_0 en el sentido horario. El insecto empieza a correr en una circunferencia de radio b alrededor del eje con una velocidad de magnitud constante v_0, medida relativa a tierra.

a) ¿Cual es la cantidad de movimiento angular total si el insecto corre con la plataforma?
b) ¿Cuál será si corre en oposición a la rotación de la plataforma?
c) ¿Es posible que el pequeño insecto pueda detener la gran plataforma? ¿Cómo?

Solución.
La cantidad de movimiento angular del sistema antes que el insecto comience a correr es:

$$\vec{L} = (I_p + mb^2)\vec{\omega}_0 = -(I_p + mb^2)\omega_0\hat{k}$$

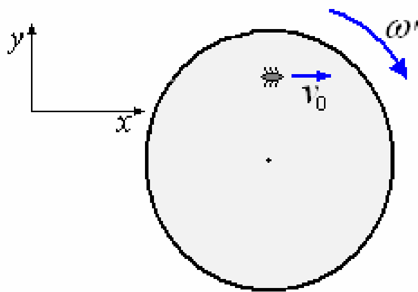


a) Cuando el insecto corre en el mismo sentido del giro con módulo de velocidad v_0 su cantidad de movimiento angular es:

$$\vec{L}' = (I_p + mb^2)\vec{\omega}' - mbv_o\hat{k}$$

Pero como la cantidad de movimiento angular es constante. La cantidad de movimiento angular total es:

$$\vec{L}' = \vec{L} = -(I_p + mb^2)\omega_0\hat{k}$$



b) En este caso, como en el caso anterior

$$\vec{L}' = \vec{L}$$

$$\overleftarrow{L}' = -(I_p + mb^2)\omega_0\hat{k}$$

c) Si es posible, tomando el caso a)

$$\vec{L}' = (I_p + mb^2)\vec{\omega}' - mbv_o\hat{k}$$

$$= -(I_p + mb^2)\omega_0\hat{k}$$

La plataforma se detiene cuando $\omega' = 0$, es decir:

$$-mbv_0\hat{k} = -(I_p + mb^2)\omega_0\hat{k}$$

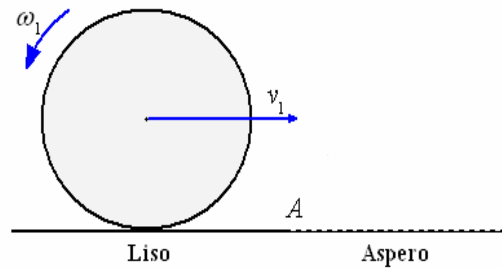
Esto sucede cuando

$$v_0 = \frac{(I_p + mb^2)}{mb}\omega_0$$

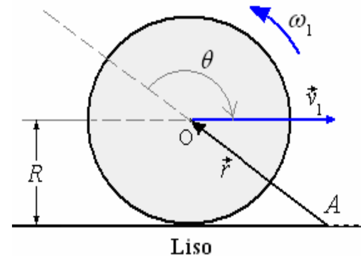
En el sentido indicado en el caso a).

Ejemplo 73. Se da a un cilindro homogéneo de radio R y masa M con una velocidad horizontal v_1 y una velocidad angular ω_1 en sentido opuesto a las agujas del reloj $\omega_1 = v_1/R$ en la parte sin rozamiento de la superficie horizontal. Más allá del punto A, cambia la superficie de manera que a la derecha de A el coeficiente de rozamiento es μ.

Resolver usando la conservación de la cantidad de movimiento angular.



Solución.
En la parte lisa no hay fuerza de fricción, en la parte áspera aparece la tuerza de fricción, cuya línea de acción está en el plano. Por tanto, la cantidad de movimiento angular del disco respecto a un punto de referencia en el plano permanecerá Constante durante todo el movimiento (por ejemplo A).
La cantidad de movimiento antes de llegar a A.



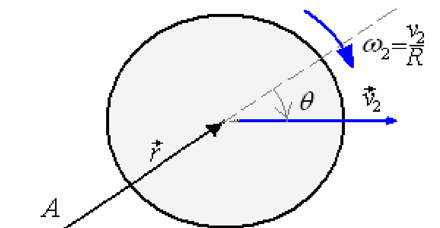
$$\vec{L} = \vec{r} \times M\vec{v}_1 = I_0\vec{\omega}_1$$

Como $\vec{r} \times \vec{v}_1 = -rv_1 \operatorname{sen}\theta\,\hat{k} = -Rv_1\hat{k}$,

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2,\ \vec{\omega}_1 = \omega_1\hat{k} = \frac{v_1}{R}\hat{k}$$

$$\vec{L} = -MRv_1\hat{k} + \frac{1}{2}MRv_1\hat{k} = -\frac{1}{2}MRv_1\hat{k}$$

La cantidad de movimiento angular después de pasar A y haber 1legado a rodar sin deslizar. Se traslada con velocidad v_2 tal que $\omega_2 = \dfrac{v_2}{R}$.



$$\vec{L}' = \vec{r} \times M\vec{v}_2 = I_0\vec{\omega}_2$$

Como $\vec{r} \times \vec{v}_2 = -rv_2 \operatorname{sen}\theta\,\hat{k} = -Rv_2\hat{k}$,

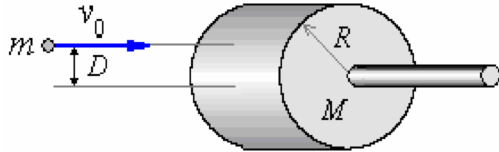
$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2,\ \vec{\omega}_2 = -\omega_2\hat{k} = \frac{v_2}{R}\hat{k}$$

$$\vec{L}' = -MRv_2\hat{k} - \frac{1}{2}MRv_2\hat{k} = -\frac{3}{2}MRv_2\hat{k}$$

Igualando $\vec{L}' = \vec{L}$, tenemos:

$$-\frac{3}{2}MRv_2\hat{k} = -\frac{1}{2}MRv_1\hat{k} \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{3}$$

Ejemplo 74. Un proyectil de masa *m* y velocidad v_0 se dispara contra un cilindro sólido de masa *M* y radio *R*. El cilindro está inicialmente en reposo montado sobre un eje horizontal fijo que pasa por su centro de masa. El proyectil se mueve perpendicular al eje y se encuentra a una distancia *D* < *R* sobre el eje. Calcular la rapidez angular del sistema después que el proyectil golpea al cilindro y queda adherido a su superficie.



Solución.
El momento angular del sistema se conserva, entonces

$$L_i = L_f$$

$$mv_0 D = I\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{mv_0 D}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}$$

Ejemplo 75. Un disco de masa *M* y radio *R* gira en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin roce. Un gato de masa *m* camina desde el borde del disco hacia el centro. Si la rapidez angular del sistema es ω_0 cuando el gato está en el borde del disco, calcular:
a) la rapidez angular cuando el gato ha llegado a un punto a *R*/4 del centro,
b) la energía rotacional inicial y final del sistema.
Solución.
Llamando I_d al momento de inercia del disco e I_g al momento de inercia del gato, el momento de inercia total inicial y final del sistema es:

$$I_i = I_d + I_g = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$$

$$I_f = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2$$

a) Como no hay torques externos sobre el sistema en torno al eje de rotación, se puede aplicar la conservación de la cantidad de movimiento angular

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\left[I_f = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right]\omega_0$$

$$= \left[I_f = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{16}}\omega_0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{M}{2} + m}{\frac{M}{2} + \frac{m}{16}}\right)\omega_0$$

b)

$$K_i = \frac{1}{2}I_i\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{4}(M + 2m)R^2\omega_0^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\omega_f^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]\left(\frac{M/2 + m}{M/2 + m/16}\right)^2\omega_0^2$$

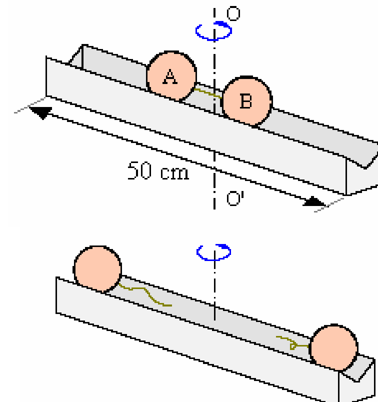
$$= \frac{1}{4}\left(M + \frac{m}{8}\right)\left(\frac{M + 2m}{M + m/8}\right)^2 R^2\omega_0^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{M + 2m}{M + m/8}\right)(M + 2m)R^2\omega_0^2$$

Como $\left(\frac{M + 2m}{M + m/8}\right) > 1$

La energía rotacional aumenta.

Ejemplo 76. La barra horizontal de la figura tiene un momento de inercia respecto al eje de rotación de 5x10^{-3} kg m^2, y cada una de las bolas que pueden deslizar sobre ella pesan 50 g y se consideran de dimensiones despreciables. El conjunto está girando libremente alrededor del eje O-O' con las bolas dispuestas simétricamente respecto al eje y sujetas por un hilo AB de 20 cm. Si se rompe el hilo cuando el conjunto gira a 20 rad/s, determinar la nueva velocidad angular cuando las bolas lleguen a los topes del extremo de la barra.



Solución.

Empecemos calculando el momento de inercia del conjunto, cuando las bolas están separadas 20 cm.

$I_1 = I_{barra} + I_{bolas} = I_{barra} + 2\, m\, r_1^2 = 5\text{x}10^{-3}$ kg m^2 + $0{,}1\text{x}0{,}1^2 = 6\text{x}10^{-3}$ kg m^2

Cuando se alejen hasta los topes:

$I_2 = I_{barra} + I_{bolas} = I_{barra} + 2\, m\, r_2^2$

$= 5\text{x}10^{-3}$ kg m^2 + $0{,}1\text{x}0{,}25^2$

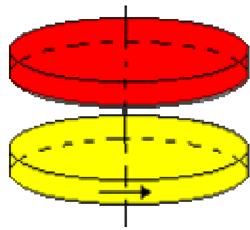
$= 11{,}25\text{x}10^{-3}$ kg m^2

La rotura del hilo libera fuerzas exclusivamente internas, por lo que se conservará la cantidad de movimiento angular del sistema:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = L_2\omega_2 \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{6}{11{,}25}20 = 10{,}67 \text{ rad / s}$$

Ejemplo 77. Un disco de 2 kg de masa y 10 cm de radio gira alrededor de su eje a 180 r.p.m.. Encima, pero sin que exista contacto, se encuentra otro disco de 1 kg de masa, del mismo radio y en reposo. Cuando el disco superior se deja caer, ambos se mueven solidariamente. Calcular la velocidad angular final.



Solución.

Cuando el disco superior se posa sobre el inferior, el torque de las fuerzas sigue siendo nulo por lo que se conserva la cantidad de movimiento angular, $I\omega$.

$$(I\omega)_{\text{Antes}} = (I\omega)_{\text{Después}}$$

$$I_1\omega_i = (I_1 + I_2)\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

Como el Momento de inercia de un disco es ½.m.R^2 se obtiene:

$$\omega_f = \frac{\frac{1}{2}m_1R^2}{\left(\frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\right)}\omega_i = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\omega_i$$

En este caso particular:

$$\omega_f = \frac{2}{(2+1)}180 = 120 \text{ rpm.}$$

GIROSCOPOS Y TROMPOS - MOVIMIENTO DE PRECESION

El giróscopo es una rueda montada en rodamientos sin fricción, en tal forma que la rueda tiene libertad de rotar en cualquier dirección con respecto al marco que lo sujeta.

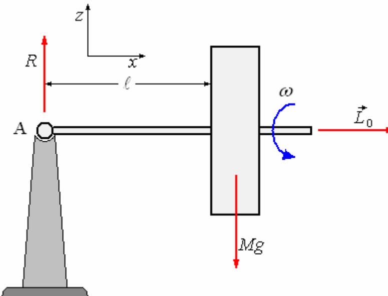
Para lograr esto se necesitan tres gímbalos (correspondientes a los tres espacios dimensionales). Como los rodamientos no tienen fricción no se ejercen torques sobre la rueda. Esto significa que una vez iniciado el giro, el eje de rotación permanecerá fijo no importando que movimiento se de al mareo exterior. La dirección en el espacio del eje no variará.

Hasta ahora vimos el movimiento rotacional en que el eje de rotación está fijo, o tiene movimiento de traslación sin cambio en su dirección. La mayoría de los movimientos rotacionales quedan en estas categorías, pero en el caso de un trompo o giróscopo en rotación no se cumple lo anterior. Si se hace girar rápidamente el rotor de este aparato y luego se coloca un extremo libre del eje de rotación sobre un soporte fijo, como se muestra en la figura. El giróscopo no caerá del soporte sino que se mantiene en posición casi horizontal mientras que el eje de su rotor gira lentamente en un plano horizontal, esta rotación lenta del eje se conoce como PRECESION.



Veamos como se origina la precesión.

Consideremos un giróscopo simplificado mostrado en la figura siguiente, un disco cilíndrico muy macizo de masa M y radio a que tiene libertad para girar sin fricción en torno a una varilla muy ligera y delgada, a lo largo de su eje.



Un extremo de la varilla se apoya en A. que está a una distancia ℓ del disco. Si se mantiene la varilla

horizontal, y se hace girar al disco con una velocidad angular ω en torno a su eje y luego, se suelta.
Como actúan dos únicas fuerzas el peso *Mg* y la reacción del apoyo *R*, podría pensarse que el disco caería. Si $\vec{L}_0$ fuera cero sucedería esto, pero el torque que produce *Mg* es:

$$\vec{\tau} = \left(\ell\hat{i}\right)\times\left(-Mg\hat{k}\right) = Mg\ell\hat{j}$$

este torque produce un cambio en la cantidad de movimiento angular

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt = \left(Mg\ell\hat{j}\right)dt$$

la magnitud. de este cambio es:

$$dL = Mg\ell dt$$

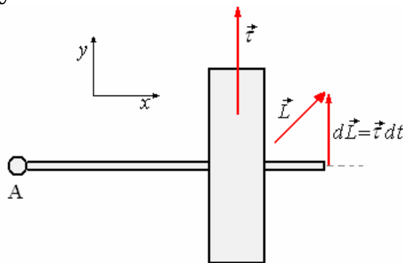
Por otra parte: $dL = L_0 d\theta$

De aquí $Mg\ell dt = L_0 d\theta$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{Mg\ell}{L_0}$

Como $L_0 = L_0\omega = \dfrac{1}{2}Ma^2\omega$;

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{Mg\ell}{\frac{1}{2}Ma^2\omega} = \frac{2g\ell}{a^2\omega}$$

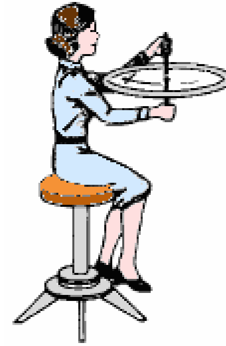
Por consiguiente el disco no caerá, en lugar de ello girará en el plano horizontal *xy* (ver la figura siguiente) en torno al eje vertical a través del punto de apoyo A.



La velocidad angular de esta precesión es:

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\tau}{I\omega} = \frac{2g\ell}{\omega a^2}$$

Ejemplo 78. Una profesora de física se encuentra sentada en una silla giratoria manteniendo en sus manos una rueda de bicicleta como se indica en la figura. El momento de inercia de la rueda respecto a su eje es de 0,2 kg m^2, y el momento de inercia de la profesora más la rueda respecto del eje de la silla es de 2,7 kg m^2. La velocidad angular inicial de la rueda es de 55 rad/s en sentido antihorario. En un momento dado la profesora gira 180º el eje de la rueda pasando a girar con -55 rad/s en sentido contrario al anterior. Calcular:
a) La velocidad angular adquirida por la silla y el sentido de giro.
b) El trabajo realizado por la profesora.



Solución.
a) Dado que no hay momentos externos sobre la silla giratoria podemos considerar que el momento angular no varía.

$$L_1 = I_{\text{RUEDA}}\omega_1,$$

$$L_2 = I_{\text{RUEDA}}\left(-\omega_1\right) + I_{\text{SILLA}}\omega_2$$

$$I_{\text{RUEDA}}\omega_1 = I_{\text{RUEDA}}\left(-\omega_1\right) + I_{\text{SILLA}}\omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{2I_{\text{RUEDA}}}{I_{\text{SILLA}}}\omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{2(0,02)}{2,7}55 = 8,15 \text{ rad/s}$$

(Positivo, por tanto en el sentido de rotación inicial de la rueda)
b)

$$W = \Delta E = E_2 - E_1$$

$$= \frac{1}{2}I_{\text{SILLA}}\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_{\text{RUEDA}}\left(-\omega_1\right)^2 - \frac{1}{2}I_{\text{RUEDA}}\omega_1^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2}I_{\text{SILLA}}\omega_2^2 = 89,6 \text{ J}$$

El trabajo es por tanto la energía adquirida por la silla, ya que la energía de la rueda no varía.

Dicho trabajo, positivo, es producido por la fuerza muscular (interna) de la profesora.

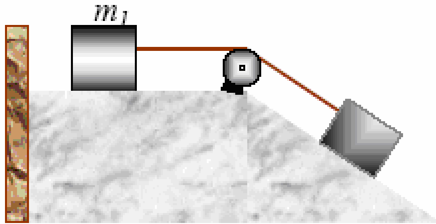
PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. El centro de masa de una pelota de radio *R*, se mueve a una rapidez *v*. La pelota gira en torno a un eje que pasa por su centro de masa con una rapidez angular ω. Calcule la razón entre la energía rotacional y la energía cinética de traslación. Considere la pelota una esfera uniforme.

2. Un volante en la forma de un cilindro sólido de radio *R* = 0,6 m y masa *M* = 15 kg puede llevarse

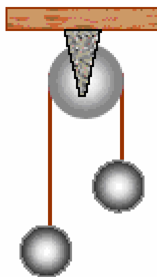
hasta una velocidad angular de 12 rad/s en 0,6 s por medio de un motor que ejerce un torque constante. Después de que el motor se apaga, el volante efectúa 20 rev antes de detenerse por causa de la fricción (supuesta constante). ¿Qué porcentaje de la potencia generada por el motor se emplea para vencer la fricción?
Respuesta. 2.8%.

3. Un bloque de masa m_1 y uno de masa m_2 se conectan por medio de una cuerda sin masa que pasa por una polea en forma de disco de radio R**,** momento de inercia I y masa M. Así mismo, se deja que los bloques se muevan sobre una superficie en forma de cuña con un ángulo θ como muestra la figura. El coeficiente de fricción cinético es μ para ambos bloques. Determine
a) la aceleración de los dos bloques y
b) la tensión en cada cuerda.

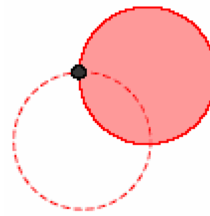


Respuesta.
a) $(m_2\text{sen }\theta - \mu)(m_1 + m_2\cos\theta)g/(m_1 + m_2 + M)$,
b) $T_1 = \mu m_2 g + m_1 a$, $T_2 = T_1 + ½Ma$.

4. Una masa m_1 y una masa m_2 están suspendidas por una polea que tiene un radio R y una masa m_3. La cuerda tiene un masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizar y sin fricción. Las masas empiezan a moverse desde el reposo cuando están separadas por una distancia D. Trate a la polea como un disco uniforme, y determine las velocidades de las dos masas cuando pasan una frente a la otra.



5. Un disco sólido uniforme de radio R y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto sobre su borde.
Si el disco se libera desde el reposo en la posición mostrada por el círculo.
a) ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco alcanza la posición indicada en el círculo punteado?
b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo sobre el disco en la posición de la circunferencia punteada?
c) Repetir para un aro uniforme

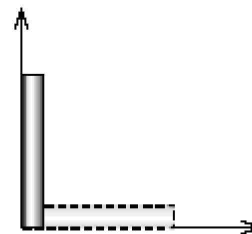


Respuesta. a) $2(Rg/3)^{½}$, b) $4(Rg/3)^{½}$, c) $(Rg)^{½}$.

6. Un peso de 50 N se une al extremo libre de una cuerda ligera enrollada alrededor de una pelota de 0,25 m de radio y 3 kg de masa. La polea puede girar libremente en un plano vertical en torno al eje horizontal que pasa por su centro. El peso se libera 6 m sobre el piso.
a) calcular la tensión de la cuerda, la aceleración de la masa y la velocidad con la cual el peso golpea el piso.
b) Calcular la rapidez con el principio de la conservación de la energía.
Respuesta. a) 11,4N, 7,6 m/s^2, 9,5 m/s, b) 9,5 m/s.

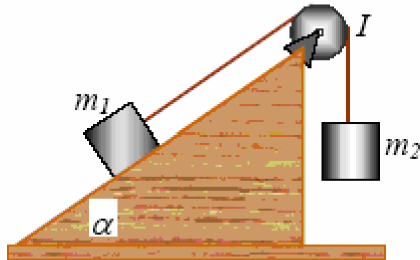
7. Una ligera cuerda de nylon de 4 m está enrollada en un carrete cilíndrico uniforme de 0,5 m de radio y 1 kg de masa. El carrete está montado sobre un eje sin fricción y se encuentra inicialmente en reposo. La cuerda se tira del carrete con una aceleración constante de 2,5 m/s^2. a) ¿Cuánto trabajo se ha efectuado sobre el carrete cuando éste alcanza una velocidad angular de 8 rad/s?
b) Suponiendo que no hay la suficiente cuerda sobre el carrete, ¿Cuánto tarda éste en alcanzar esta velocidad angular?
c) ¿Hay suficiente cuerda sobre el carrete?
Respuesta. a) 4 J, 1,6 s, c) sí.

8. Una barra uniforme de longitud L y masa M gira alrededor de un eje horizontal sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La barra se suelta desde el reposo en una posición vertical. En el instante en que está horizontal, encuentre
a) su rapidez angular,
b) la magnitud de su aceleración angular,
c) las componentes x e y de la aceleración de su centro de masa, y
d) las componentes de la fuerza de reacción en el eje.
Respuesta. a) $(3g/L)^{½}$, b) $3g/2L$,
c) $-(3/2\hat{\imath} + ¾\hat{\jmath})g$, d) $(-3/2\hat{\imath} + ¼\hat{\jmath})Mg$.



9. Los bloques mostrados en la figura están unidos entre si por una polea de radio R y momento de inercia I. El bloque sobre la pendiente sin fricción

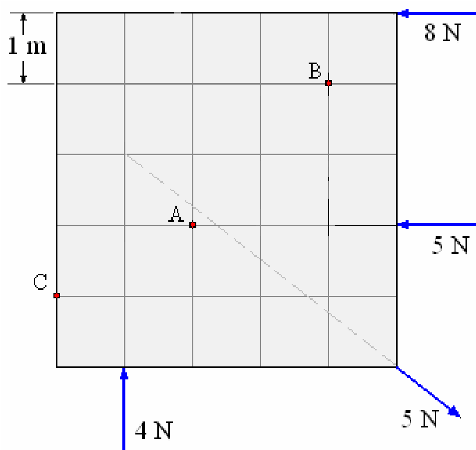
se mueve hacia arriba con una aceleración constante de magnitud a.
a) Determine las tensiones en las dos partes de la cuerda,
b) encuentre el momento de inercia de polea.



Respuesta. a) $T_1 = m_1(a + g\text{sen}\theta)$, $T_2 = m_2(g - a)$

b) $m_2R^2\dfrac{g}{a} - m_1R^2 - m_2R^2 - m_1R^2\dfrac{g}{a}\text{sen}\theta$

10. Un cuerpo plano está sometido a cuatro fuerzas como se indica en la figura.
a) Hallar el módulo y dirección del torque actuante respecto a un eje perpendicular al plano y que pasa por el punto A.
b) Respecto a un eje que pasa por el punto B.
e) Respecto a un eje que pasa por el punto C.
d) Determinar la fuerza equivalente y su línea de acción.
e) Sustituir esta fuerza por otra que esté aplicada en A y un par de fuerzas o cupla aplicadas en los puntos B y C y hallar el valor mínimo de estas fuerzas.

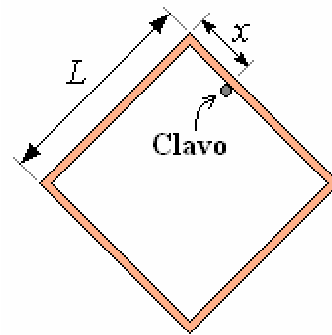


Respuesta.
a) τ = 23 Nm, b) τ = 23 Nm, c) τ = 24 Nm,

d) $\vec{F} = \hat{i} + \hat{j}$, $y = x - 23$,

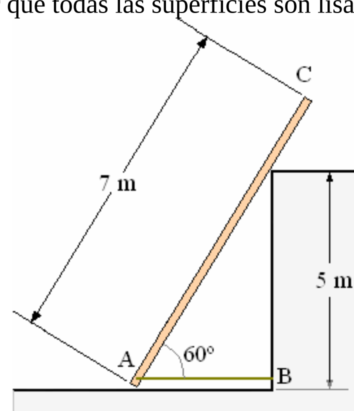
e) $\vec{F}_B = \dfrac{23}{25}\left(-3\hat{i} + 4\hat{j}\right) = -\vec{F}_C$

11. Un marco cuadrado de lado L. Se cuelga de un clavo rugoso de coeficiente de rozamiento estático μ_s. ¿A qué distancia del vértice está clavado si el marco está a punto de deslizar?



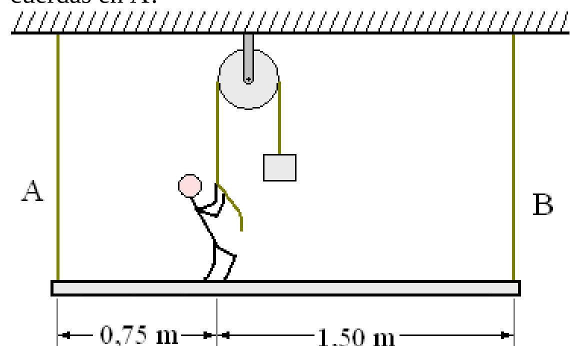
Respuesta. $x = \dfrac{L}{2}(1 - \mu_s)$

12. Determinar la tensión en el cable AB que Impide que el poste BC deslice. En la figura se ven los datos esenciales. La masa del poste es de 18 kg. Suponer que todas las superficies son lisas.



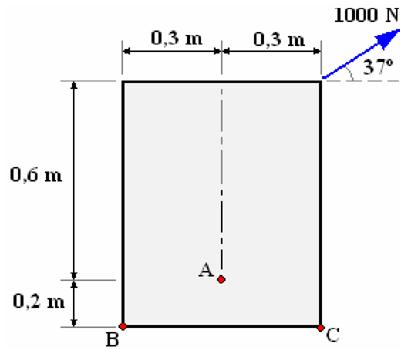
Respuesta. T = 46,2 N

13. Un hombre de 70 kg, sostiene un objeto de 31,9 kg. Como se indica en la figura. La polea carece de rozamiento. La plataforma sobre la que está situado el hombre está colgada mediante dos cuerdas en A y otras dos en B. ¿Cuál e tensión de una de las cuerdas en A?



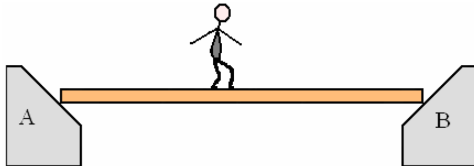
Respuesta. 124,5 N

14. Reemplace la fuerza de 1000 N de la figura por una fuerza que pasa por A y una cupla cuyas fuerzas actúan verticalmente a través de B C.



Respuesta. $\vec{F}_A = 800\hat{i} + 600\hat{j}$, $\vec{F}_B = 467\hat{j}$, $\vec{F}_C = -467\hat{j}$

15. Un hombre de 60 kg que camina a 2 m/s atraviesa un tabla de 30 kg y 10 m de largó
a) ¿Cuál es la fuerza sobre el soporte B en función d tiempo?
b) Si la máxima fuerza que puede resistir B es 490 ¿Cuándo y dónde caerá al río el hombre?
Considerar que el peso del hombre siempre actúa en dirección de la vertical que pasa por su centro de masa.



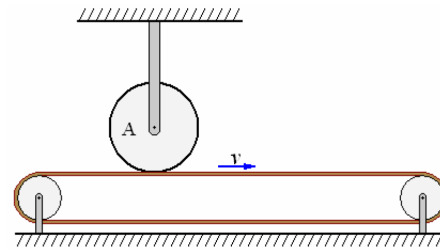
Respuesta: a) $F_B = (12t + 15)9,8$ N, b) t = 2,92 s, x = 5,83 m de A.

16. Un hombre de masa m quiere subir por una escalera. La escalera tiene masa M, largo L y forma un ángulo θ con e piso. El coeficiente de fricción entre la escalera y e peso es μ, mientras que la pared no tiene fricción.
a)¿A qué altura de la escalera puede llegar antes que comience a resbalar?
b) ¿Si el ángulo θ es el mayor sin que la escalera sola puede estar sin resbalar, cuál es la altura a la que puede llegar el hombre?
Respuesta. a)

$$\left[(m+M)\mu L \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}ML\cos\theta\right]\mu M\cos\theta$$

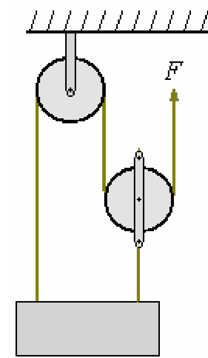
b) $L/2\mu$

17. El disco A tiene una masa de 2 kg y un radio de 7,5 cm, se coloca en contacto con una correa que se mueve con una velocidad v = 15 m/s. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el disco y la correa es 0,2, calcular tiempo necesario para que el disco alcance una velocidad angular constante.



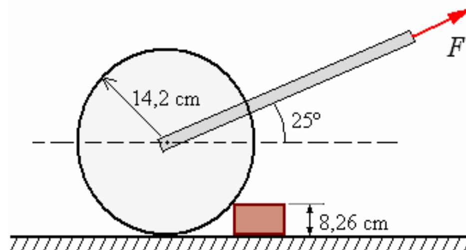
Respuesta. 3,82 s

18. Si se aplica La fuerza F a una cuerda ligera atada a un bloque con el sistema de poleas mostrado en la figura. ¿Cuál es el máximo peso que puede levantar?



Respuesta. 3F

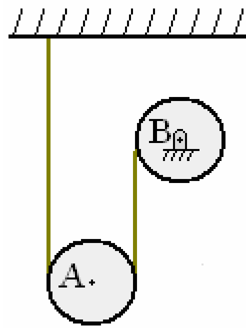
19. El rodillo que se ve en la figura tiene una masa de 339 kg ¿Que fuerza F es necesaria para subir el rodillo sobre el bloque?



Respuesta. F =3949,4 N

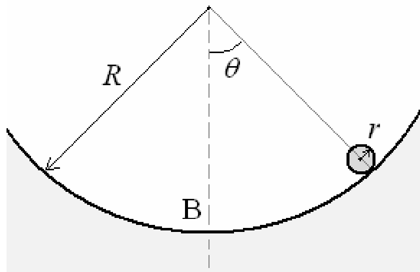
20. La línea de acción de una fuerza de 1N está en el plano xz y corta el eje z en un punto que dista 0,6 m del origen.
a) ¿Cuál es el torque respecto al eje y si el ángulo comprendido entre la dirección de la fuerza y el eje z es 60º?
b) ¿Si el ángulo e l80º?
c) ¿Si el ángu1o es 330º?
Respuesta. a) τ = 0,52 N m , b) τ = 0
c) τ = - 0,3 N m

21. Dos discos de masa 10 kg y radio R = 0,3 m cada uno están conectados mediante una cuerda. En el instante mostrado en la figura, la velocidad angular del disco B es de 20 rad/s en sentido horario. Calcular cuánto sube el disco A cuando la velocidad angular del disco B sea de 4 rad/s.



Respuesta. 1,54 m

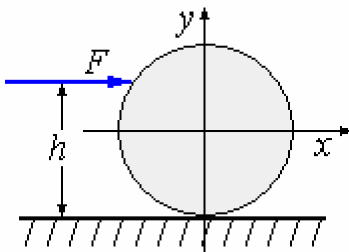
22. Un cilindro de masa ni y radio r rueda sin deslizar sobre la cara interior de una superficie cilíndrica de radio *R*. Sabiendo que la esfera parte del raposo en la posición indicada en la figura, obtener:
a) La velocidad de la esfera al paso por B.
b) El módulo de la reacción normal en cada instante.



Respuesta. a) $\sqrt{\frac{4}{3}g(R-r)(1-\cos\theta)}$,

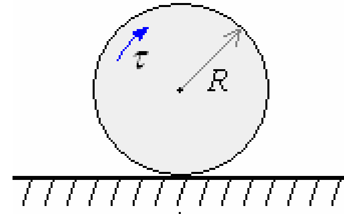
b) $\frac{mg}{3}(7-4\cos\theta)$

23. ¿A que altura sobre la mesa debe golpearse una bola de billar con un taco mantenido horizontalmente para que la bola comience su movimiento sin rozamiento entre ella y la mesa?



Respuesta. 7/5*R*

24. Un cilindro homogéneo de masa m y radio R descansa sobre un plano horizontal. Se aplica un torque, según se indica en la figura. Hallar el valor del coeficiente de rozamiento entre la rueda y el plano para que aparezca rodadura pura.



Respuesta. $\mu \geq \frac{2\tau}{3mgR}$

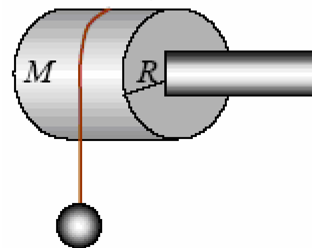
25. Una esfera de l00 kg de masa y 0,6 m de diámetro baja rodando, partiendo del reposo, por un plano inclinado 25º. recorriendo 30 m..
a) ¿Cuál es su energía cinética al cabo de los 30 m?
b) ¿Cuál es la velocidad de su centro de masa?
Respuesta. a) 1268 kg m, b) 13,3 m/s

26. Un pasajero viaja de pie en un ómnibus. El ómnibus se mueve con una velocidad de 50 km/h cuando el conductor aplica los frenos. El ómnibus desacelera de modo uniforme durante una distancia de 15 ni hasta detenerse. ¿Qué ángulo respecto a la vertical deberá inclinarse el pasajero para evitar su caída?
Respuesta. 33,27 hacia atrás.

27. a) ¿Cómo podría distinguirse una esfera de oro de otra de plata si ambas tuviesen el mismo peso, el mismo radio y las dos estuvieron pintadas del mismo color?
b) ¿Cómo podría distinguir un huevo duro de uno fresco si estuvieran juntos?

28. Un carrete cilíndrico hueco y uniforme tiene radio interior *R/2*, radio exterior *R* y masa *M* . Está montado de manera que gira sobre un eje horizontal fijo. Una masa *m* se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. La masa *m* desciende a partir del reposo una distancia *y* durante un tiempo *t*. Demuestre que el torque debido a la fuerza de roce entre el carrete y el eje es:

$$\tau = R\left[m\left(g-2\frac{y}{t^2}\right)-\frac{5}{4}M\frac{y}{t^2}\right]$$



29. Un cilindro de 10 kg de masa rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal.
En el instante en que se su centro de masa tiene una rapidez de 10 m/s, determine:
a) la energía cinética traslacional de su centro de masa,

b) la energía rotacional de su centro de masa, y c) su energía total.
Respuesta. a) 500 J, b) 250 J, c) 750 J.

30. Una esfera sólida tiene un radio de 0,2 m y una masa de 150 kg. ¿Cuánto trabajo se necesita para lograr que la esfera ruede con una rapidez angular de 50 rad/s sobre una superficie horizontal? (Suponga que la esfera parte del reposo y rueda sin deslizar).

31. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan uno frente al otro en la parte superior de una pendiente de altura *h*. Si se sueltan ambos desde el reposo y ruedan sin deslizar, determine sus rapideces cuando alcanzan el pie de la pendiente ¿Qué objeto llega primero a la parte inferior?

32. Una bola de boliche tiene una masa *M*, radio *R* y un momento de inercia de $(2/5)MR^2$. Si rueda por la pista sin deslizar a una rapidez lineal *v*, ¿Cuál es su energía total de función de *M* y *v*?
Respuesta. $0,7Mv^2$.

33. Un anillo de 2,4 kg de masa de radio interior de 6 cm y radio exterior de 8 cm sube rodando (sin deslizar) por un plano inclinado que forma un ángulo de θ = 37° con la horizontal. En el momento en que el anillo ha recorrido una distancia de 2 m al ascender por el plano su rapidez es de 2,8 m/s.
El anillo continua ascendiendo por el plano cierta distancia adicional y después rueda hacia abajo. Suponiendo que el plano es lo suficientemente largo de manera que el anillo no ruede fuera en la parte superior, ¿qué tan arriba puede llegar?

34. Una barra rígida ligera de longitud *D* gira en el plano *xy* alrededor de un pivote que pasa por el centro de la barra. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se conectan a sus extremos. Determine la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del centro de la barra en el instante en que la rapidez de cada partícula es *v*.
Respuesta. $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)vD$.

35. Un péndulo cónico consta de masa *M* que se mueve en una trayectoria circular en un plano horizontal. Durante el movimiento la cuerda de longitud *L* mantiene un ángulo constante con la θ vertical. Muestre que la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la masa respecto del punto de soporte es:

$$L = \sqrt{\frac{gM^2L^3\text{sen}^4\theta}{\cos\theta}}$$

36. Una partícula de masa *m* se dispara con una rapidez *vo* formando un ángulo θ con la horizontal. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto del origen cuando ésta se encuentra en:
a) el origen,
b) el punto más alto de su trayectoria,
c) justo antes de chocar con el suelo.
Respuesta. a) 0, b) $-\frac{mv_0^3}{2g}\text{sen}^2\theta\cos\theta$,
c) $-\frac{2mv_0^3}{g}\text{sen}^2\theta\cos\theta$

37. Un disco sólido uniforme de masa *M* y radio *R* gira alrededor de un eje fijo perpendicular su cara. Si la rapidez angular es ω, calcular la cantidad de movimiento angular del disco cuando el eje de rotación
a) pasa por su centro de masa, y
b) pasa por un punto a la mitad entre el centro y el borde.

38. Una partícula de 0,4 kg de masa se une a la marca de 100 cm de una regla de 0,1 kg de masa. La regla gira sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad angular de 4 rad/s. Calcular la cantidad de movimiento angular del sistema cuando la regla se articula en torno de un eje,
a) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 50 cm,
b) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 0 cm.
Respuesta. a) 0,43 kgm^2/s, b) 1,7 kgm^2/s.

39. Una mujer de 60 kg que está parada en el borde de una mesa giratoria horizontal que tiene un momento de inercia de 500 kg·m2 y un radio de 2 m. La mesa giratoria al principio está en reposo y tiene libertad de girar alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer empieza a caminar alrededor de la orilla en sentido horario (cuando se observa desde arriba del sistema) a una rapidez constante de 1,5 m/s en relación con la Tierra.
a) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular gira la mesa giratoria
b) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para poner en movimiento la mesa giratoria?
Respuesta. a) 0,36 rad/s, antihorario.

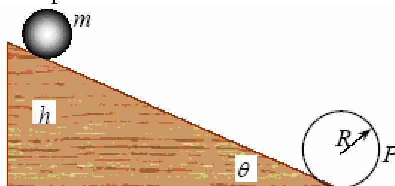
40. Una barra uniforme de masa *M* y longitud *d* gira en un plano horizontal en torno de un eje vertical fijo sin fricción que pasa por su centro. Dos pequeñas cuentas, cada una de masa *m*, se montan sobre la barra de manera tal que pueden deslizar sin fricción a lo largo de su longitud. Al principio las cuentas se fijan por medio de retenes ubicados en las posiciones *x* (donde $x < d/2$) a cada lado del centro, tiempo durante el cual el sistema gira una rapidez angular ω. Repentinamente, los retenes se quitan y las pequeñas cuentas se deslizan saliendo de la barra. Encuentre,
a) la rapidez angular del sistema en el instante en que las cuentas alcanzan los extremos de la barra, y

b) la rapidez angular de la barra después de que las cuentan han salido de ella.

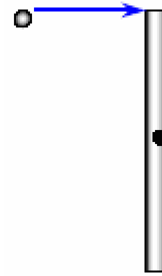
41. Un bloque de madera de masa *M* que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unido a una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable. La barra gira alrededor de un pivote en el otro extremo. Una bala de masa *m* que se desplaza paralela a la superficie horizontal y normal a la barra con rapidez *v* golpea el bloque y queda incrustada en él.
a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema bala-bloque?
b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde en la colisión?
Respuesta. a) $mv\ell$, b) *M/(M+m)*.

42. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio *R* y masa *M*. El disco se suelta desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a un soporte fijo. A medida que el disco desciende, demuestre que
a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco.
b) La magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$, y
c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{½}$.
Verifique su respuesta a la pregunta c) utilizando métodos de energía.

43. Una pequeña esfera sólida de masa *m* y de radio *r* rueda sin deslizar a lo largo de la pista mostrada en la figura. Si parte del reposo en la parte superior de la pista a una altura *h*, donde *h* es grande comparada con *r*
a) Cuál es el valor mínimo de *h* (en función de *R)* de modo que la esfera complete la trayectoria?
b) ¿Cuáles son las componentes de fuerza de la esfera en el punto *P* si $h = 3R$?

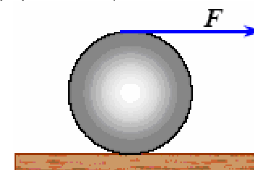


44. Un proyectil de masa *m* se mueve a la derecha con rapidez v_0. El proyectil golpea y queda fijo en extremo de una barra estacionaria de masa *M* y longitud *D* que está articulada alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro.
a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo después de la colisión.
b) Determine la pérdida fraccionaria de energía mecánica debida a la colisión.

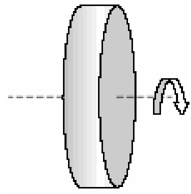


45. A una bola de boliche se le da una rapidez inicial v_o en una canal de manera tal que inicialmente se desliza sin rodar. El coeficiente de fricción entre la bola y la canal es μ. Demuestre que durante el tiempo en que ocurre el movimiento de rodamiento puro,
a) la rapidez del centro de masa de la bola es $5v_o/7$, y
b) la distancia que recorre es $12\ v_o^2/49\ \mu g$.
(Sugerencia: Cuando ocurre el movimiento de rodamiento puro, $v_{cm} = R\omega$. Puesto que la fuerza de fricción proporciona la desaceleración, a partir de la segunda ley de Newton se concluye que $a_{cm} = \mu g$.)

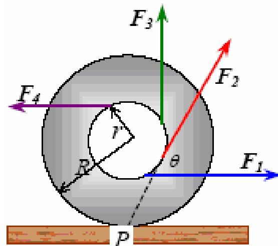
46. El alambre de un carrete de masa *M* y radio *R* se desenrolla con una fuerza constante *F*. Suponiendo que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no desliza, muestre que, a) la aceleración del centro de masa es $4F/3M$, y
b) la fuerza de fricción es hacia la derecha y su magnitud es igual a $F/3$.
c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizar, ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa después que ha rodado una distancia *D*?
Respuesta. c) $(8FD/3M)^{½}$.



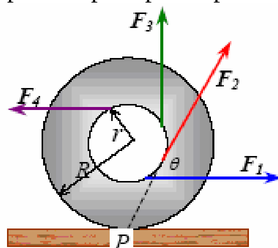
47. Suponga un disco sólido de radio *R* al cual se le da una rapidez angular ω_o alrededor de un eje que pasa por su centro y después se baja hasta una superficie horizontal y se suelta, como en la. Suponga también que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es μ.
a) Calcular la rapidez angular del disco una vez que ocurre el rodamiento puro.
b) Calcular la pérdida fraccionaria de energía cinética desde el momento en que el disco se suelta hasta que ocurre el rodamiento puro
c) Muestre que el tiempo que tarda en ocurrir el movimiento de rodamiento puro es $R\ \omega_o/3\ \mu\ g$.
d) Muestre que el tiempo que recorre el disco antes de que ocurra el rodamiento puro es $R^2\ \omega_o^{\ 2}/18\ \mu\ g$.



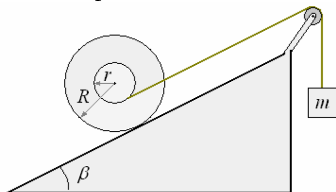
48. La figura muestra un carrete de alambre que descansa sobre una superficie horizontal. Cuando se tira, no se desliza en el punto de contacto P. El carrete se tira en las direcciones indicadas por medio de los vectores F_1, F_2, F_3 y F_4. Para cada fuerza determine la dirección en que rueda el carrete. Advierta que la línea de acción de F_2 pasa por P.



49. El carrete mostrado en la figura tiene un radio interior r y un radio externo R. El ángulo θ entre la fuerza aplicada y la horizontal puede variar. Demuestre que el ángulo crítico para el cual el carrete no rueda y permanece estacionario está dado por $\cos\theta = r/R$.
(Sugerencia: En el ángulo crítico la línea de acción de la fuerza aplicada pasa por el punto de contacto.)

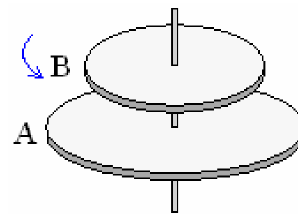


50. Se tiene un carrete sobre un plano inclinado, el cual tiene enrollado un hilo delgado y su extremo libre sujeta una masa m por medio de una polea sin fricción y masa despreciables. Se asume que la masa del carrete M está distribuida uniformemente en un círculo de radio R. Determinar el ángulo de inclinación β al cuál el centro de gravedad del carrete estará en reposo.



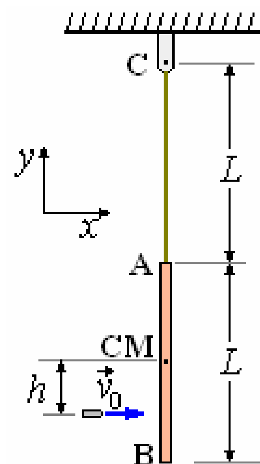
Respuesta. $\beta = \text{sen}^{-1}\dfrac{1}{\left(\dfrac{M}{m}+\dfrac{r^2}{R^2}\right)}$. Estará en reposo solo si $\left(\dfrac{M}{m}+\dfrac{r^2}{R^2}\right) \geq 1$

51. Los discos A y B son del mismo material y tienen el mismo espesor, pudiendo girar 1ibemente alrededor de un eje vertical. El disco B se encuentra en reposo cuando se deja caer sobre el disco A. el está girando con una velocidad angular de 400 rpm. Sabiendo que la masa del disco A es de 4 kg, calcular:
a) La velocidad angular final de los discos.
b) La variación de la energía cinética experimentada por el sistema.
$R_A = 0{,}1$ m, $R_B = 0{,}15$ m,



Respuesta. a) 334 rpm, .b).- 6,51 J

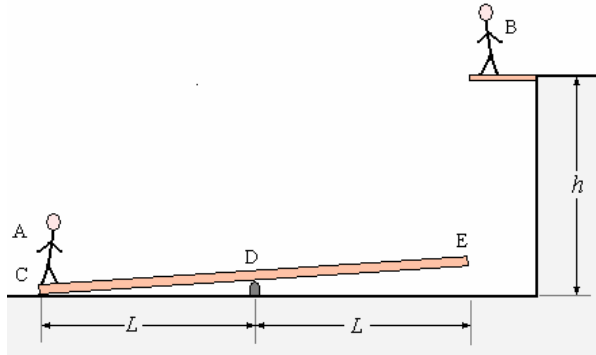
52. Una bala de 3g se dispara, con una velocidad horizontal de 550 m/s, contra. Una varilla de madera AB de longitud L = 0,750 m. La varilla que inicialmente está en reposo, se encuentra suspendida de una cuerda de longitud L = 0,750 m. Sabiendo que h = 0,150 m, calcular las velocidades de cada uno de los extremos de la varilla inmediatamente después de que la bala se haya incrustado.



Respuesta. $\vec{v}_A = -0{,}566\hat{i}$, $\vec{v}_B = 6{,}22\hat{i}$

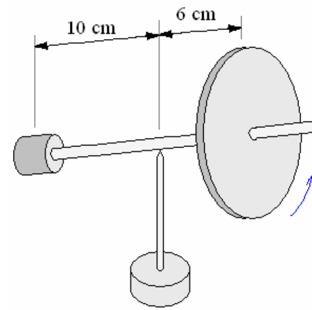
53. Un tablón masa M se apoya sobre un pequeño pivote D. Un gimnasta A de masa m está de pie sobre el extremo C del tablón, un segundo gimnasta B de la misma masa m salta desde la altura h y cae

sobre el tablón en E. Suponiendo que este choque es perfectamente inelástico, determinar la altura que alcanzará el gimnasta A. (El gimnasta A permanece de pie completamente rígido).



Respuesta. $\dfrac{m^2 h}{(2m + M/3)^2}$

54. Un disco macizo de 1,2 kg de masa y 10 cm de diámetro está montado en un extremo de un eje de masa despreciable que está pivotado alrededor de un punto a 6 cm del, centro del disco en el otro extremo del eje, a una distancia de 10 cm del pivote, se cuelga un objeto de 0,96 kg de masa. Si la velocidad angular de giro del disco es 37,37 rad/s. ¿Cuál es la velocidad de precesión?



Respuesta. Ω = 2,1 rad/s

55. Una rueda de bicicleta de 82 cm de diámetro tiene una platina de acero enrollada en su parte exterior de modo que la masa resultante del sistema puede suponerse que está situada toda ella en la periferia de la rueda, siendo M = 7,3 kg sosteniendo los dos extremos del eje con las manos en la posición horizontal. El eje sobresale 15,2 cm a cada lado de la rueda. Mientras la rueda está girando con una velocidad angular de 25,12 rad/s se hace girar el eje con las manos en un plano horizontal alrededor de su centro. Calcular el valor y dirección de la fuerza que deberá ejercer en cada mano para producir una velocidad angular de precesión de 0,628 rad/s alrededor del centro.
Respuesta. un par de fuerzas de 64,6 N aplicadas en cada extremo del eje.

FISICA 2



Autor: Hugo Medina Guzmán
Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú
Agosto 2009

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. Elasticidad

Esfuerzo y deformación. Régimen elástico y plástico, Módulos de elasticidad y tipos de esfuerzo y deformación: Deformación por tracción o compresión longitudinal, Módulo de Young, ley de Hooke, aplicaciones: deformación por peso, aceleración y área variable. Deformación lateral, módulo de Poisson Deformación por cizalladura o corte módulo de cizalladura Deformación volumétrica módulo de compresibilidad. Fuerza elástica y Energía elástica.

CAPÍTULO 2. Movimiento oscilatorio

Movimiento oscilatorio: definición y características Ecuación y ley del movimiento oscilatorio: Movimiento armónico simple lineal y angular. Movimiento armónico simple. Movimiento armónico amortiguado: subamortiguado, sobreamortiguado y crítico. Movimiento armónico amortiguado forzado. Resonancia, aplicaciones.

CAPÍTULO 3. Movimiento ondulatorio y ondas

Movimiento ondulatorio, definición, características, y tipos de ondas: por la naturaleza de la perturbación, por la dirección de la perturbación, por la dirección de la propagación. Descripción matemática de la propagación de una onda unidimensional. Función de onda: onda viajera, ecuación de onda y velocidad de propagación: ondas en una cuerda, ondas transversales y longitudinales en una barra, ondas sonoras en un tubo con aire. Fenómenos ondulatorios: reflexión de ondas. Principio de superposición de ondas: 1.-ondas iguales viajando en la misma dirección, superposición constructiva o destructiva. 2.-ondas iguales viajando en sentidos opuestos, ondas estacionarias: en una cuerda finita y en un tubo o caja acústica finita. Modos de vibración y armónicos. 3.-ondas de diferente frecuencia viajando en el mismo espacio, pulsaciones. Interferencia de ondas (sonoras y electromagnéticas). Interferencia entre dos fuentes separadas en el espacio con la misma fase, diferencia de camino. Sonido: intensidad, efecto Doppler, ondas de choque.

CAPÍTULO 4. Mecánica de fluidos

Concepto, tipos de fluido, características. Densidad, peso específico y presión. Hidrostática: Variación de la presión con la profundidad en un fluido en reposo. Principios de Pascal. Empuje y flotación: Principio de Arquímedes. Barómetro y manómetro simple. Aplicaciones: superficies planas y translación de fluidos. Tensión superficial. Dinámica de Fluidos: Flujo de fluido ideal Ecuación de continuidad, caudal o gasto. Ecuación de Bernoulli. Aplicaciones: medidor de Venturi y tubo de Pitot. Viscocidad y ley de Stokes.

CAPÍTULO 5. Termodinámica

Sistemas Termodinámicos: Variables termodinámica macroscópicas. Ley cero de la Termodinámica y equilibrio Térmico. Temperatura y escalas Dilatación térmica: Dilatación Lineal, superficial y volumétrica. Fatiga térmica. Calor y trabajo: Definición de Calor, Equivalente mecánico del calor, calor específico. Fases de la materia: cambios de estado. Procesos de Transferencia de calor: por conducción por convección, por radiación**.** Teoría Cinética de gases Ideales: Definición de un gas Ideal. Ecuación de estado de un gas ideal, curvas Isotérmicas. Energía Interna de un Gas Ideal: Trabajo realizado por un gas. Primera Ley de La Termodinámica. Procesos Termodinámicos: isocórico, isobárico, isotérmico y adiabático. Calor específico de un gas a volumen constante y a presión constante. Procesos reversibles e irreversibles. Ciclos termodinámicos. Máquinas termodinámicas. Eficiencia y segunda ley de la termodinámica. Ciclo de Carnot.

CAPÍTULO 1

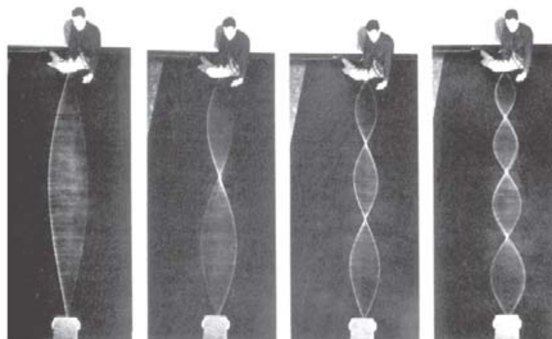
Elasticidad





CAPÍTULO 2

MOVIMIENTO OSCILATORIO

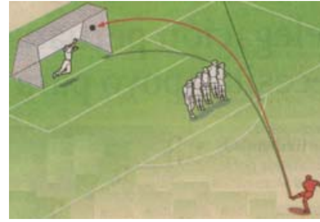


CAPÍTULO 3

Movimiento ondulatorio y ondas

CAPÍTULO 4

Mecánica de fluidos



CAPÍTULO 5

Termodinámica

BIBLIOGRAFÍA

THEORETICAL PHYSICS, Mechanics of particles, rigid and elastic bodies, fluids and heat flow. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)
THEORETICAL PHYSICS,Thermodinamics, electromagnetism,waves, and particles. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)
The Feynman LECTURES ON PHYSICS. Volumenes I, II y III. Richard P.Feynman, Robert B. Leighton. California Institute of Technology, Matthew Sands, Stanford University. Addison – Wesley Publishing Company (1964)
CORRIENTES, CAMPOS Y PARTÍCULAS. Francis Bitter. Massachussets Institute of Technology. Editorial Reverté S. A. (1964).
INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA MECÁNICA, MATERIA Y ONDAS. Uno Ingard, William L. Kraushaar. Editorial Reverté. (1966).
FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Arthur F. Kip. University of California. Mc Graw – Hill Book Company (1967)
CIENCIA FÍSICA Orígenes y principios Robert T. Langeman, Universidad Vanderbilt. UTEHA, (1968)
PROBLEMS IN ELEMENTARY PHYSICS. B. Bukhotsev, V: Krivchenkov, G. Myakishev, V.Shalnov. Mir Publishers. Moscow (1971)
PROBLEMES DE PHYSIQUE COMMENTES. Tomos I y II Hubert Lumbroso. Mason et Cie, París. (1971)
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. Luis L. Cantú. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Editorial Limusa Mexico (1973)
FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y LA SALUD. Simon G. G. MacDonald / Desmond M. Burns University of Dundee. Fondo educativo interamericano. (1975)
MECÁNICA NEWTONIANA, MIT Physics course. A. P. French. Editorial Reverté. (1974).
FÍSICA I y II. Solomon Gartenhaus. Purdue University. INTERAMERICANA. (1977)
TEACHING TIPS. A guidebook for the beginning College Teacher. Wilbert J. McKeachie (University of Michigan). Seventh edition D. C. Heath and Company (1978)
FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA. Alan H. Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (1978)
GENERAL PHYSICS WITH BIOSCIENCE ESSAYS. Jerry B. Marion. University of Maryland. John Wiley & Sons Inc. (1979)
Física general II: Teoría Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. QC 21 M19 (Biblioteca PUCP) (1979)
Física general II: Problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 111 M364 (Biblioteca PUCP) (1979)
Física general I: problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 104 M364 (Biblioteca PUCP) (1981)
FÍSICA PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. 1 y 2. John P. McKelvey, Clemson University – Howard Grotch, Pennsilvania State University. HARLA. Mexico. (1981)
Física 3: electricidad y magnetismo para estudiantes de ciencias e ingeniería Hugo Medina Guzmán, FIS 141 M36 (Biblioteca PUCP) (1982)
EXPLORING PHYSICS Concepts and applications. Roger W. Redding North Texas State University, Stuart Kenter, Wadsworth Publishing Company (1984)
PROBLEMAS DE FISICA. J. Aguilar Peris, Universidad Complutense de Madrid - J. Casanova Colas, Facultad de Ciencias de Valladolid. Alambra (1985)
PROBLEMAS DE FISICA. dirigido por S. Kósel. Editorial Mir Moscú. (1986)
PROBLEMAS DE FISICA Y COMO RESOLVERLOS. Clarence E. Benett Maine University. CECSA (1986)
PHYSICS for Engineering and Science. Michael E. Browne, Ph. D. (professor of Physics University of Idaho. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1988)
FÍSICA: VOLUMEN 1. Mecánica, ondas y termodinámica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).
FÍSICA: VOLUMEN 2. Electricidad, magnetismo y óptica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).
PROBLEMAS DE FISICA. dirigido por O. Ya. Sávchenko. Editorial Mir Moscú. (1989)
MECÁNICA. Berkeley physics course – volumen 1. Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman. Editorial Reverté SA. (1992).
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Berkeley physics course – volumen 2. Edward M.Purcell. Editorial Reverté SA. (1992).

FÍSICA. Tomos I y II Tercera edición revisada (Segunda edición en español), Raymond S: Serway, James Madison University, Mcgraw-Hill, (1993)

PROBLEMAS DE FISICA Santiago Burbano de Ercilla, Enrique Burbano de Ercilla, Carlos Gracia Muñoz, XXVI edición, Zaragoza, MIRA editores (1994)

ONDAS. Berkeley physics course – volumen 3. Frank S. Crawford, Jr. Editorial Reverté SA. (1994).

FÍSICA Para las ciencias de la vida, David Jou Mirabent Universidad autónoma de Barcelona, Joseph Enric Llebot Rabagliati, Universidad de Girona, Carlos Pérez garcía, Universidad de Navarra. Mcgraw-Hill, (1994)

Física uno Hugo Medina Guzmán, FIS 104 M365 (Biblioteca PUCP) (1995)

APPLIED PHYSICS. Arthur Beiser, Ph. D. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1995)

TEACHING INTRODUCTORY PHTSICS A Sourcebook. Clifford E: Swartz (State University of New York, Stony Brook) and Thomas Miner (Associate Editor The Physics Teacher 1972 – 1988). ATP Press – Springer. (1996)

TEACHING INTRODUCTORY PHYSICS Arnold Arons University of Washington JOHN WILEY & SONS, INC. (1997)

FÍSICA John Cutnell / Kenneth W. Johnson. Southern Illinois University. LIMUSA (1998)

FÍSICA EN LA CIENCIA Y EN LA INDUSTRIA. A . Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (2000)

FÍSICA CONTEMPORANEA Edwin Jones.– Richard Childers, University of South Carolina. Mcgraw-Hill, (2001)

PROBLEMAS Y CUESTIONES DE FISICA. Atanasio Lleó, Begoña Betete, Javier Galeano, Lourdes Lleó, Ildefonso Ruiz – Tapiador. Universidad Politécnica de Madrid. Ediciones Mundi – prensa (2002)

The PHYSICS of every day phenomena. A conceptual introduction to Physics. W. Thomas Griffith, Pacific University. Mcgraw-Hill, (2004)

FÍSICA UNIVERSITARIA. Francis W.Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young (Carnegie Mellon University) y Roger A. Freedman (University of California. Santa Barbara) Volumen 1, Volumen 2. Undecima edición. Pearson - Addison Wesley (2004)

FIVE EASY LESSONS Strategies for successful Physics teaching. Randall D. Knight California Polytechnic State University, San Luis Obispo. Addison Wesley (2004)

FUNDAMENTALS OF PHYSICS. David Halliday (Univ. of Pittsburgh), Robert Resnick (Rensselaer Polytechnic Institute), Jearl Walker (Cleveland State Univ.). 7th Edition (2005)

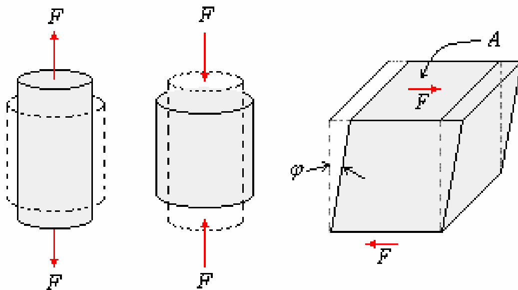
CAPÍTULO 1. Elasticidad

INTRODUCCIÓN

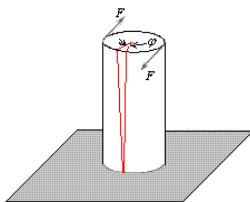
Hasta ahora en nuestro estudio de mecánica hemos asumido que los cuerpos son indeformables; esto no es cierto, aunque se justifica cuando los efectos de las deformaciones carecen de importancia.
En este capítulo trataremos sobre los cambios de forma producidos en un cuerpo cuando está bajo la acción de una fuerza, esto es, en el sentido del comportamiento de los materiales bajo la acción de diversos esfuerzos, iniciándonos en la técnica del diseño.

PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

Muchos materiales cuando están en servicio están sujetos a fuerzas o cargas. En tales condiciones es necesario conocer las características del material para diseñar el instrumento donde va a usarse de tal forma que los esfuerzos a los que vaya a estar sometido no sean excesivos y el material no se fracture. El comportamiento mecánico de un material es el reflejo de la relación entre su respuesta o deformación ante una fuerza o carga aplicada.
Hay tres formas principales en las cuales podemos aplicar cargas: Tensión, Compresión y Cizalladura.



Además en ingeniería muchas cargas son torsionales en lugar de sólo cizalladura.

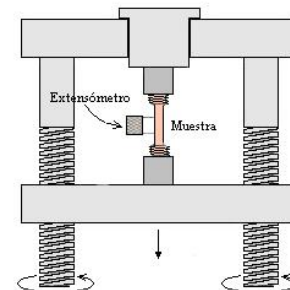


ENSAYO DE TENSIÓN Y DIAGRAMA DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN. El ensayo de tensión se utiliza para evaluar varias propiedades mecánicas de los materiales que son importantes en el diseño, dentro de las cuales se destaca la resistencia, en particular, de metales y aleaciones.
En este ensayo la muestra se deforma usualmente hasta la fractura incrementando gradualmente una tensión que se aplica uniaxialmente a lo largo del eje longitudinal de la muestra. Las muestras normalmente tienen sección transversal circular, aunque también se usan especimenes rectangulares.



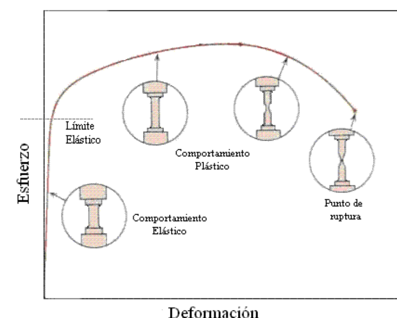
Muestra típica de sección circular para el ensayo de tensión - deformación

Durante la tensión, la deformación se concentra en la región central más estrecha, la cual tiene una sección transversal uniforme a lo largo de su longitud. La muestra se sostiene por sus extremos en la máquina por medio de soportes o mordazas que a su vez someten la muestra a tensión a una velocidad constante. La máquina al mismo tiempo mide la carga aplicada instantáneamente y la elongación resultante (usando un extensómetro). Un ensayo de tensión normalmente dura pocos minutos y es un ensayo destructivo, ya que la muestra es deformada permanentemente y usualmente fracturada.



Ensayo tensión – deformación

Sobre un papel de registro, se consignan los datos de la fuerza (carga) aplicada a la muestra que está siendo ensayada así como la deformación que se puede obtener a partir de la señal de un extensómetro. Los datos de la fuerza pueden convertirse en datos de esfuerzo y así construirse una gráfica tensión – deformación.



Gráfica típica tensión vs deformación

DEFORMACIÓN ELÁSTICA Y PLÁSTICA

Cuando una pieza se somete a una fuerza de tensión uniaxial, se produce una deformación del material. Si el material vuelve a sus dimensiones originales cuando la fuerza cesa se dice que el material ha sufrido una DEFORMACIÓN ELASTICA. El número de deformaciones elásticas en un material es limitado ya que aquí los átomos del material son desplazados de su posición original, pero no hasta el extremo de que tomen nuevas posiciones fijas. Así cuando la fuerza cesa, los átomos vuelven a sus posiciones originales y el material adquiere su forma original.
Si el material es deformado hasta el punto que los átomos no pueden recuperar sus posiciones originales, se dice que ha experimentado una DEFORMACIÓN PLASTICA.

DIFERENCIA ENTRE LOS CUERPOS ELASTICOS Y LOS INELASTICOS. Los cuerpos elásticos son los cuerpos que después de aplicarles una fuerza vuelven a su forma normal mientras que los inelásticos tienen su grado de elasticidad muy bajo y si los deforman no vuelven a su forma original.

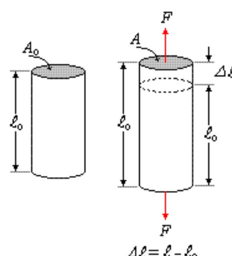
LEY DE HOOKE.
En la parte de comportamiento elástico se cumple la Ley de Hooke. Robert Hooke fue el primero en enunciar esta relación con su invento de un volante de resorte para un reloj. En términos generales, encontró que una fuerza que actúa sobre un resorte produce un alargamiento o elongación que es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza.

$$F = -k\Delta\ell$$

El signo menos es porque la fuerza es en oposición a la deformación.
La constante de la proporcionalidad k varía mucho de acuerdo al tipo de material y recibe el nombre de constante del resorte o coeficiente de rigidez.

$k = \dfrac{F}{\Delta\ell}$, sus unidades son $\dfrac{\text{N}}{\text{m}}$.

ESFUERZO Y DEFORMACIÓN UNITARIA.
Esfuerzo. Consideremos una varilla cilíndrica de longitud ℓ_0 y una sección transversal de área A_0 sometida a una fuerza de tensión uniaxial F que alarga la barra de longitud ℓ_0 a ℓ, como se muestra en la figura.



Por definición, El esfuerzo S en la barra es igual al cociente entre la fuerza de tensión uniaxial media F y la sección transversal original A_0 de la barra.

$S = \dfrac{F}{A_0}$, sus unidades son $\dfrac{N}{m}$.

Deformación unitaria: Por definición, la deformación unitaria originada por la acción de una fuerza de tensión uniaxial sobre una muestra metálica, es el cociente entre el cambio de longitud de la muestra en la dirección de la fuerza y la longitud original.

$\delta = \dfrac{\ell - \ell_0}{\ell} = \dfrac{\Delta\ell}{\ell}$, la deformación unitaria es una magnitud adimensional
En la práctica, es común convertir la deformación unitaria en un porcentaje de deformación o porcentaje de elongación
% deformación = deformación x 100 % = % elongación

MODULO ELASTICO O DE ELASTICIDAD.
A la constante de proporcionalidad, podemos escribir la ley de Hooke en su forma general.

$$\text{Módulo Elástico} = \frac{esfuerzo}{deformación}$$

Para el caso de Deformación por tracción o compresión longitudinal

El esfuerzo es $S = \dfrac{F}{A}$, la deformación unitaria es $\delta = \dfrac{\Delta\ell}{\ell}$

El módulo elástico es conocido como el MODULO DE YOUNG.

$$Y = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell} = \frac{S}{\delta}$$

TABLA I
Módulo de elasticidad o módulo de Young.

Nombre	Módulo de elasticidad Y 10^{10} N/m^2
Aluminio	6,8
Cobre	10,8
Oro	7,6
Hierro, fundido	7,8
Plomo	1,7
Nickel	20,6
Platino	16,7
Plata	7,4
Latón	4,6
Acero	20,0

Ejemplo 1. Los ortodoncistas usan alambres de bajo módulo de Young y alto límite elástico para corregir

la posición de los dientes mediante arcos tensores. ¿Por qué?

Solución.

Bajo módulo de Young para que sea relativamente fácil deformarlo elásticamente para montar los arcos en los dientes. La tensión deberá ser menor que la tensión de fluencia del material, de ahí que el límite elástico tenga que ser alto, ya que si el arco se deforma plásticamente, su deformación es irreversible y por lo tanto, no estará tensionando los dientes para corregir su posición transversal se convierte en un paralelogramo.

Ejemplo 2. De un alambre de cobre de 1,5 m de longitud y 2 mm de diámetro se cuelga un peso de 8 kg. Se pregunta:

a) ¿Hemos rebasado el límite de elasticidad?

b) ¿Se romperá el alambre?

c) En caso de ser negativas las preguntas anteriores, ¿cuál es su alargamiento?

Módulo de Young = $12\text{x}10^{10}$ N/m^2

Límite de elasticidad de $3\text{x}10^7$ a $12\text{x}10^7$ N/m^2

Límite de ruptura de $20\text{x}10^7$ a $50\text{x}10^7$ N/m^2

Solución.

a) y b) La sección del alambre es:

$A = \pi r^2$ = 3,14 mm^2 = $3,14\text{x}10^{-6}$ m^2

La fuerza que corresponde a cada m^2 de sección es:

$$\frac{F}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{8\times 9,8}{3,14\times 10^{-6}}$$

$$= 2,49\times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

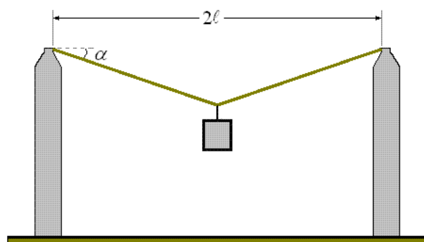
Que no llega ni al límite inferior de elasticidad ni al de ruptura.

$$\text{c) } \Delta l = \frac{Fl}{YA} = \frac{8\times 9,8\times 1,5}{12\times 10^{10}\times 3,14\times 10^{-6}}$$

$$= 0,0003\,\text{m}$$

$$= 0,3 \text{ mm}$$

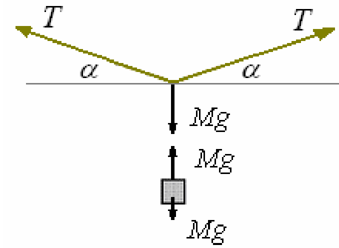
Ejemplo 3. Entre dos columnas fue tendido un alambre de longitud 2 ℓ . En el alambre, exactamente en el centro, fue colgado un farol de masa M. El área de la sección transversal del alambre es A, el módulo de elasticidad es Y. Determinar el Angulo α, de pandeo del alambre, considerándolo pequeño.



Solución.

Para encontrar la tensión del hilo.

Por condición de equilibrio:



Suma de fuerzas verticales:

$$\sum F_y = 0$$

$$2T\text{sen}\alpha - Mg = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{Mg}{2\text{sen}\alpha}.$$

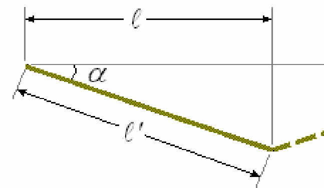
Por la ley de Hooke deducimos que

$$T = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)YA$$

Igualando:

$$\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)YA = \frac{Mg}{2\text{sen}\alpha}$$

De la figura siguiente:



$$\ell' = \frac{\ell}{\cos\alpha} \text{ y } \ell' = \ell + \Delta\ell$$

De aquí:

$$\frac{\ell}{\cos\alpha} = \ell + \Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \ell\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1$$

Luego

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)YA = \frac{Mg}{2\text{sen}\alpha}$$

Para ángulos pequeños tenemos que

$\text{sen}\alpha \approx \alpha$ y

$$\cos\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\left(\alpha/2\right) \approx 1 - \alpha^2/2 .$$

Reemplazando obtenemos

$$\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{2}} - 1\right)YA = \frac{Mg}{2\alpha}$$

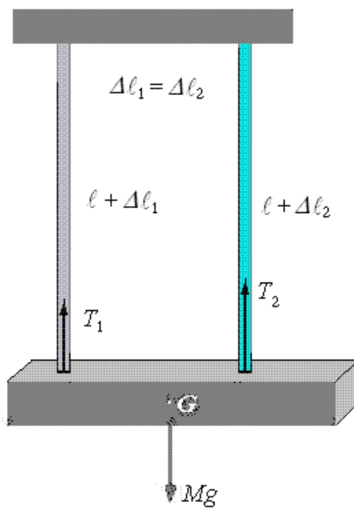
$$\Rightarrow \left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)-1\right]YA = \frac{Mg}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{2}YA = \frac{Mg}{2\alpha} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{Mg}{YA}$$

Finalmente

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Mg}{YA}}$$

Ejemplo 4. Se cuelga una viga de 2000 kg de dos cables de la misma sección, uno de aluminio y otro de acero. Al suspenderla, ambos cables se estiran lo mismo. Calcular la tensión que soporta cada uno. Módulos de Young: acero = 20×10^{10} N/m^2, aluminio =7×10^{10} N/m^2



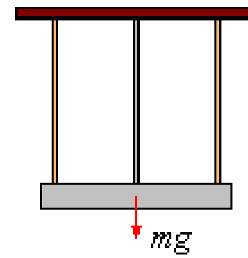
Solución.
Si los cables inicialmente tienen igual longitud y la viga finalmente está horizontal, ambos cables han experimentado el mismo alargamiento:

Como $\Delta\ell = \frac{F\ell}{YA}$, $\frac{\ell T_1}{Y_1 A} = \frac{\ell T_2}{Y_2 A}$ de aquí

$$\frac{T_1}{7} = \frac{T_2}{20}$$

Donde el subíndice 1 se refiere al aluminio y el 2 al acero.
Por estar el sistema en equilibrio:
$T_1 + T_2 = Mg$ = 2 000 x 9,8 N
De ambas
T_1 = 5 081,5 N T_2 = 14 517,5 N

Ejemplo 5. Una barra homogénea, de masa m = 100 kg, está suspendida de tres alambres verticales de la misma longitud situados simétricamente.
Determinar la tensión de los alambres, si el alambre del medio es de acero y los otros dos son de cobre. El área de la sección transversal de todos los alambres es igual.
El módulo de Young del acero es dos veces mayor que el del cobre.



Solución.
Partiendo de los conceptos de simetría, es evidente que el alargamiento de los hilos será igual.
Designemos este alargamiento por $\Delta\ell$.
De acuerdo con la ley de Hooke, la tensión del hilo de acero es

$F_a = \frac{AY_a}{\ell}\Delta\ell$ y la del hilo de cobre, es

$$F_c = \frac{AY_c}{\ell}\Delta\ell$$

De donde concluimos que la relación de las tensiones es igual a la relación de los módulos de elasticidad correspondientes:

$$\frac{F_c}{F_a} = \frac{Y_c}{Y_a} = \frac{1}{2}.$$

En equilibrio
$2F_c + F_a = mg$.
Por consiguiente,

$F_c = \frac{mg}{4}$ = 250 N y $F_a = 2F_c$ = 500 N.

Ejemplo 6. Una columna de hormigón armado se comprime con una fuerza P. Considerando que el módulo do Young del hormigón Y_{ha}, es 1/10 del de hierro Y_h y que el área de la sección transversal del hierro es 1/20 de la del hormigón armado, encontrar qué parte de la carga recae sobre el hormigón.

Solución.
Basándonos en la ley de Hooke, escribimos

$$F_{ha} = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)A_{ha}Y_{ha} \text{ y}$$

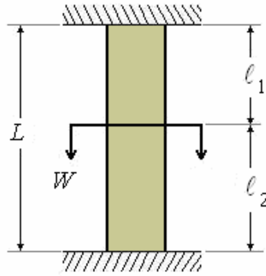
$$F_h = \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)A_h Y_h == \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\frac{A_{ha}}{20}10Y_{ha}$$

De allí deducimos que $\frac{F_{ha}}{F_h} = 2$.

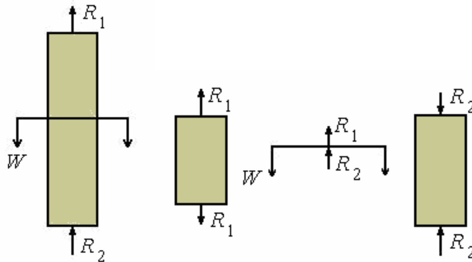
De este modo, 2/3 del peso recae sobre el hormigón armado y 1/3, sobre el hierro.

Ejemplo 7. Un peso W se encuentra sujeto entre dos barras de peso despreciable, de las mismas características pero de diferente longitud y como se muestra en la figura. Los extremos de las barras

están ligados al peso y a los apoyos, los cuales son indeformables.
Encontrar las reacciones que se producen en los apoyos.



Solución.
Diagramas del cuerpo libre del conjunto y de las partes:



Por equilibrio estático, $\sum F_y = 0$:

$R_1 + R_2 - W = 0$ (1)

Geométricamente, tiene que cumplirse que los alargamientos sean iguales:

$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2$

Por elasticidad

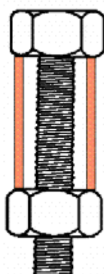
$$\frac{R_1\ell_1}{AY} = \frac{R_2\ell_2}{AY} \Rightarrow$$

$R_1\ell_1 = R_2\ell_2$ (2)

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$R_1 = \frac{\ell_2}{L}W \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{\ell_1}{L}W$$

Ejemplo 8. Un perno de acero se enrosca en un tubo de cobre como muestra la figura. Encontrar las fuerzas que surgen en el perno y en el tubo debido al hacer la tuerca una vuelta, si la longitud del tubo es ℓ, el paso de rosca del perno es h y las áreas de la sección transversal del perno y del tubo son iguales a A_a, y A_c respectivamente

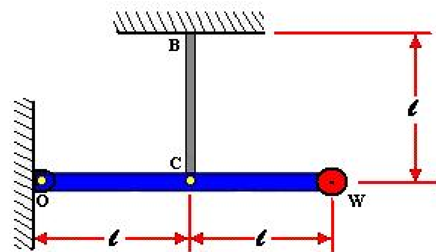


Solución.
Bajo la acción de la fuerza de compresión F, el tubo disminuye en $F\ell / AY$. y bajo la acción de la fuerza de extensión *F*, el perno se alarga en el valor $F\ell / A_aY_a$. La suma $F\ell / A_aY_a + F\ell / A_cY_c$ es igual al desplazamiento de la tuerca a lo largo del perno:

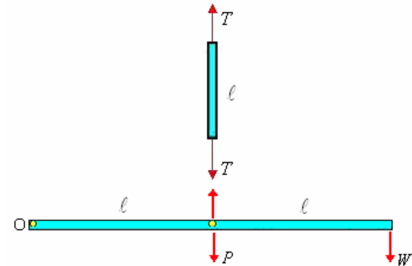
$F\ell / A_aY_a + F\ell / A_cY_c = h$, de donde:

$$F = \frac{h}{\ell}\left(\frac{A_aY_aA_cY_c}{A_aY_a + A_cY_c}\right).$$

Ejemplo 9. Viga horizontal sostenida mediante un tirante. En el sistema mostrado en la figura, ¿cuánto bajará el peso *W* respecto a la posición en la cual el tensor no estaba deformado?



La barra es indeformable y de peso *P*.
El tensor BC es de peso despreciable, área *A* y módulo de elasticidad *Y*.
Solución.

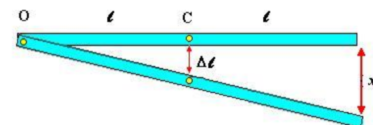


Por equilibrio estático, $\sum \tau_o = 0$

$T\ell - P\ell - W2\ell = 0$

$T - P - 2W = 0$

$T = P + 2W$ (1)



Geométricamente, considerando que el giro que se produce es pequeño, podemos escribir:

$x = 2\Delta\ell$

Por elasticidad, el estiramiento $\Delta\ell$ del tensor es:

$$\Delta\ell = \frac{T\ell}{AY}$$

Luego,

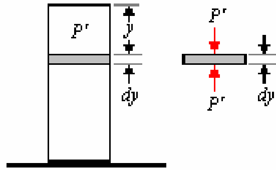
$$x = \frac{2T\ell}{AY} \qquad (2)$$

Reemplazando la expresión (1) en (2):

$$x = \frac{2(P+2W)\ell}{AY}$$

Ejemplo 10. Deformaciones no uniformes por peso propio.
Determinar la deformación producida en una barra debido a su peso propio de una barra del largo *L*, sección *A*, módulo de elasticidad *Y* y densidad ρ.

Solución.
El elemento diferencial dy soporta el peso P' de la porción de barra de longitud y que está sobre él.



$$P' = m'g = \rho V'g = \rho Ayg$$

Siendo la longitud de la barra *L*, su deformación será ΔL, la deformación del elemento diferencial dy debido al peso P', será $d(\Delta L)$.

$$d(\Delta L) = \frac{P'dy}{YA} = \frac{\rho Ag}{YA}ydy$$

$$= \frac{\rho g}{Y}ydy$$

Luego

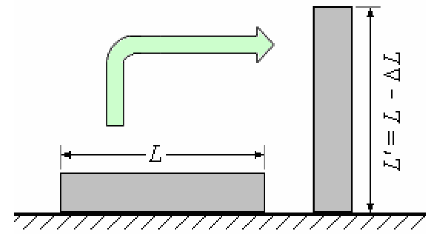
$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \frac{\rho g}{Y}\int_0^L ydy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\rho g L^2}{Y} = \frac{1}{2}\frac{(\rho gAL)L}{AY}$$

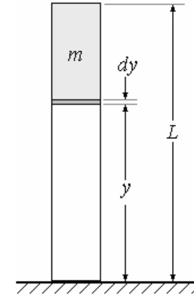
o $\Delta L = \dfrac{1}{2}\dfrac{(\text{Peso Total})\times L}{AY}$

Observamos que esta deformación es igual a la mitad de la deformación que se produciría, como sí, el peso estuviera concentrado en el extremo superior.

Ejemplo 11. Una barra de masa *M*, módulo *Y*, sección A y altura *L* está sobre el piso. Determine la deformación que sufre la atura de la barra por peso propio. Considere que la densidad lineal de la barra varía según $\rho_\ell = \kappa y$, (κ es constante e *y* la altura medida desde el piso).
Datos: *M*, *Y*, *A*, *L* y κ.



Solución.



El elemento de columna *dy* es deformado por el peso de la masa *m*.

$$d(\Delta L) = \frac{mg\,dy}{YA}$$

Cálculo de *m*.

$$dm = \rho_\ell dy = \kappa y dy \Rightarrow$$

$$m = \int_y^L \kappa y dy = \kappa \left.\frac{y^2}{2}\right|_y^L$$

$$= \frac{\kappa}{2}\left(L^2 - y^2\right)$$

Luego:

$$d(\Delta L) = \frac{\kappa g}{2YA}\left(L^2 - y^2\right)dy$$

Integrando

$$\Delta L = \int_0^L d(\Delta L) = \frac{\kappa g}{2YA}\int_0^L \left(L^2 - y^2\right)dy$$

$$\Delta L = \frac{\kappa g}{2YA}\left(L^2 y - \frac{y^3}{3}\right)_0^L$$

$$= \frac{\kappa g}{2YA}\left(L^3 - \frac{L^3}{3}\right) = \frac{\kappa g L^3}{3YA}$$

Como la masa total es

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \kappa y dy = \kappa \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^L$$

$$= \kappa\frac{L^2}{2}$$

$$\Delta L = \frac{2M}{\kappa L^2}\frac{\kappa g L^3}{3YA} = \frac{2MgL}{3YA}$$

Ejemplo 12. Hállese la longitud que ha de tener un hilo de alambre, de densidad 8,93 y módulo de rotura 1020,4 kg/cm^2 para que se rompa por su propio peso.

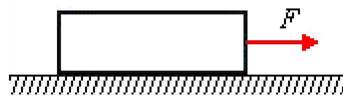
Solución.
1020,4 kg/cm^2 = 1 020,4x9,8 N/cm^2 =10^8 N/m^2;
ρ = 8930 kg/m^3.
Para que el hilo se rompa, su peso ha de ser por lo menos de 10^8A N, siendo A la sección.
O sea:

$$P = mg = A\ell\rho g = 10^8 A$$

Es decir:

$$\ell = \frac{10^8 A}{A\rho g} = \frac{10^8}{8930x9,8} = 1143,6 \text{ m}$$

Ejemplo 13. Deformaciones por aceleración
Una barra uniforme de acero (Longitud L, área de sección recta A densidad ρ, módulo de young Y) se halla sobre un plano horizontal exento de rozamiento y se tira de ella con una fuerza constante F.
¿Cuál es el alargamiento total de la barra a consecuencia de la aceleración?

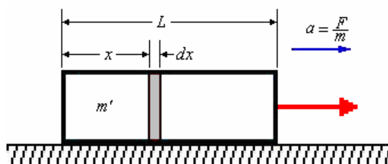


Solución.
a) Sea m la masa total de la barra

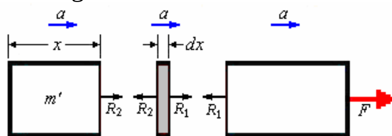
$$m = \rho AL$$

Tomemos un elemento diferencial dx, cuya masa es dm

$$dm = \rho Adx$$



Hagamos los diagramas del cuerpo libre de los tres sectores.
La fuerza sobre cada uno de los tres sectores se indica en las figura a continuación



El elemento diferencial dm se mueve con aceleración a debido a la fuerza (R_1 –R_2)
Y la fuerza que lo estira es R_2. Por lo tanto su deformación será un diferencial de ΔL esto es $d(\Delta L)$:

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dx}{YA} \text{ y } \Delta L = \int_0^L d(\Delta L)$$

Como $R_2 = m'a$, $m' = \rho Ax$ y

$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho AL}$, tenemos:

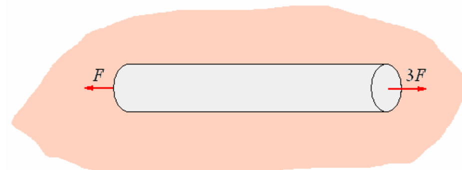
$$R_2 = (\rho Ax)\left(\frac{F}{\rho AL}\right) = F\frac{x}{L}$$

$$d(\Delta L) = \frac{F}{YAL}xdx \text{, y}$$

$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \int_{x=0}^{x=L} \frac{F}{YAL}xdx$$

De donde $\Delta L = \frac{1}{2}\frac{FL}{YA}$

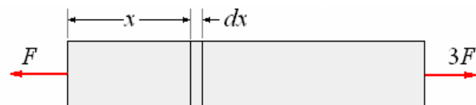
Ejemplo 14. Se tiene una columna de largo L, sección transversal A, densidad ρ, módulo de elasticidad Y. Se jala cobre un piso liso de la manera como se muestra en la figura. Calcule cuanto estira el cuerpo.



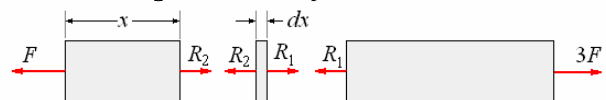
Solución.
Primer método.
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

$$3F - F = ma \Rightarrow a = \frac{2F}{m} = \frac{2F}{\rho AL}$$



Haciendo el diagrama del cuerpo libre



El elemento diferencial es estirado por la fuerza R_2.

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dx}{AY}$$

Cálculo de R_2:

$$R_2 - F = m'a$$

$$\Rightarrow R_2 = F + m'a = F + \rho Ax\frac{2F}{\rho AL}$$

$$= F + 2F\frac{x}{L}$$

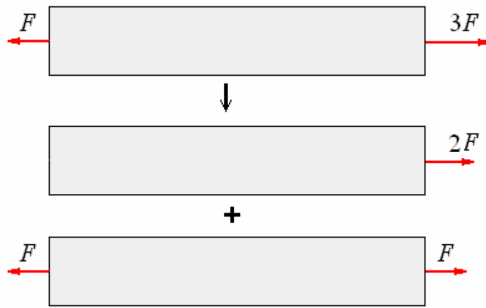
$$d(\Delta L) = \frac{F}{AY}\left(1 + \frac{2x}{L}\right)dx$$

$$\Delta L = \frac{F}{AY}\int_0^L \left(1 + \frac{2x}{L}\right)dx = \frac{F}{AY}\left(x + \frac{x^2}{L}\right)\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{2FL}{AY}$$

Segundo método.
El sistema de fuerzas puede ser desdoblado en dos partes cuyas deformaciones parciales sumadas hacen

el efecto total, tal como se muestra en la figura siguiente:



La primera parte es la deformación de un cuerpo jalado por la fuerza 2F:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2}\frac{(2F)L}{YA} = \frac{FL}{YA}$$

La segunda parte es la deformación de un cuerpo sujeto a la tensión F:

$$\Delta L_2 = \frac{FL}{YA}$$

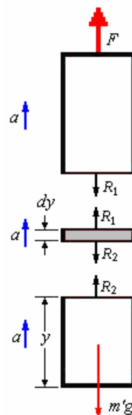
La deformación total es la suma de las deformaciones parciales:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{FL}{YA} + \frac{FL}{YA}$$

$$= \frac{2FL}{AY}$$

Ejemplo 15. Si la barra se jala hacia arriba con una fuerza F ($F > mg$). ¿Cuál es el alargamiento total de la barra?

Solución.



El elemento diferencial dm se mueve con aceleración a debido a la fuerza ($R_1 - R_2$)

Y la fuerza que lo estira es R_2. Por lo tanto su deformación será un diferencial de ΔL esto es $d(\Delta L)$:

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dy}{YA} \text{ y } \Delta L = \int_0^L d(\Delta L)$$

Como

$$R_2 - m'g = m'a \Rightarrow R_2 = m'(g + a),$$

$$m' = \rho Ay \text{ y } a = \frac{F - mg}{m} = \left(\frac{F}{\rho AL} - g\right),$$

Tenemos:

$$R_2 = (\rho Ay)\left(\frac{F}{\rho AL}\right) = F\frac{y}{L}$$

$$d(\Delta L) = \frac{F}{YAL} ydy \text{, y}$$

$$\Delta L = \int d(\Delta L) = \frac{F}{YAL}\int_0^L ydy$$

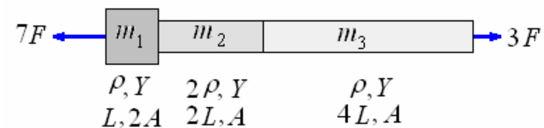
De donde

$$\Delta L = \frac{1}{2}\frac{FL}{YA}$$

Ejemplo 16. Para la barra compuesta mostrada determine:

a) Su aceleración.

b) La deformación de cada una de sus tres partes y su deformación total.



Solución.

a) $m_1 = 2\rho LA$, $m_2 = 4\rho LA$ y $m_3 = 2\rho LA$

Aplicando la segunda ley de Newton:

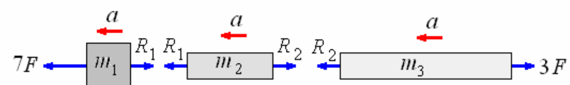
$$\sum F = ma \Rightarrow 3F - 7F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$\Rightarrow -4F = 10\rho LAa$$

$$\Rightarrow a = -\frac{0{,}4F}{\rho LA}$$

El conjunto se mueve hacia la izquierda.

b) La figura siguiente muestra los diagramas del cuerpo libre de cada uno de los elementos del conjunto.



Tomando como positivo hacia la izquierda.

Cálculo de R_2:

$$R_2 - 3F = m_3 a \Rightarrow$$

$$R_2 = 3F + m_3 a$$

$$= 3F + (4\rho LA)\left(\frac{0{,}4F}{\rho LA}\right)$$

$$= 4{,}6F$$

Cálculo de R_1:

$$R_1 - R_2 = m_2 a \Rightarrow$$

$$R_1 = R_2 + m_2 a$$

$$= 4{,}6F + (4\rho LA)\left(\frac{0{,}4F}{\rho LA}\right)$$

$= 5{,}2F$

Deformación de 3.

La deformación por fuerza es debido a $3F$:

$$\Delta L_3 = \frac{3F4L}{YA} = 12\frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza $R_2 - 3F = 1{,}6\ F$

$$\Delta L'_3 = \frac{1{,}6F4L}{2YA} = 3{,}2\frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 3:

$$\Delta L_{3Total} = 12\frac{FL}{YA} + 3{,}2\frac{FL}{YA} = 15{,}2\frac{FL}{YA}$$

Deformación de 2.

La deformación por fuerza es debido a R_2:

$$\Delta L_2 = \frac{R_2 2L}{YA} = 9{,}2\frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza

R_1 - R_2 = $5{,}2\ F - 4{,}6\ F = 0{,}6\ F$

$$\Delta L'_2 = \frac{0{,}6F2L}{2YA} = 0{,}6\frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 2:

$$\Delta L_{2Total} = 9{,}2\frac{FL}{YA} + 0{,}6\frac{FL}{YA}$$

$$= 9{,}8\frac{FL}{YA}$$

Deformación de 1.

La deformación por fuerza es debido a R_1:

$$\Delta L_1 = \frac{R_1 L}{Y2A} = 2{,}6\frac{FL}{YA}$$

La deformación por desplazamiento es debido a ser jalado por la fuerza $7F$- R_1 = $1{,}8\ F$

$$\Delta L'_1 = \frac{1{,}8FL}{2Y2A} = 0{,}45\frac{FL}{YA}$$

Deformación total de 1:

$$\Delta L_{1Total} = 2{,}6\frac{FL}{YA} + 0{,}45\frac{FL}{YA}$$

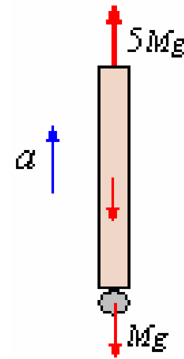
$$= 3{,}05\frac{FL}{YA}$$

Deformación total del conjunto.

$$\Delta L_{Total} = 15{,}2\frac{FL}{YA} + 9{,}8\frac{FL}{YA} + 3{,}05\frac{FL}{YA}$$

$$= 28{,}05\frac{FL}{YA}$$

Ejemplo 17. Una barra vertical de longitud L, masa M, sección transversal A y módulo de Young Y, tiene soldada en su extremo inferior una masa puntual M. Si la barra se eleva verticalmente mediante una fuerza vertical $5Mg$ (g = gravedad), aplicada en el extremo superior de la barra. Hallar la deformación longitudinal de la barra.

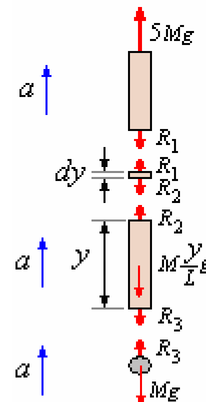


Solución.

Para calcular la aceleración de la barra aplicamos:

$$\sum F_y = ma_y$$

$$5Mg - Mg - Mg = 2Ma \Rightarrow a = \frac{3}{2}g$$



Tomemos un elemento diferencial de la barra dy

Aplicando la segunda ley de Newton al elemento de longitud x:

$$R_2 - R_3 - \left(M\frac{y}{L}\right)g = \left(M\frac{y}{L}\right)a$$

$$R_2 - R_3 = M\frac{y}{L}(g + a)$$

$$R_2 - R_3 = M\frac{y}{L}\left(g + \frac{3}{2}g\right) = \frac{5Mg}{2L}y \qquad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la masa puntual:

$$R_3 - Mg = Ma = M\frac{3}{2}g \Rightarrow$$

$$R_3 = Mg + M\frac{3}{2}g = \frac{5}{2}Mg \qquad (2)$$

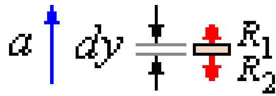
Reemplazando (2) en (1):

$$R_2 - \frac{5Mg}{2} = \frac{5Mg}{2L}y$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{5}{2}Mg\left(1 + \frac{y}{L}\right)$$

Primer método.

Comenzando con la deformación del elemento diferencial y luego integrar para toda la longitud.



El elemento diferencial se deforma $d(\Delta L)$ debido a la reacción R_2, $(R_1 - R_2)$ le da la aceleración $a = \frac{3}{2}g$, luego:

$$d(\Delta L) = \frac{R_2 dy}{YA} = \frac{\frac{5}{2}Mg\left(1+\frac{y}{L}\right)dy}{YA}$$

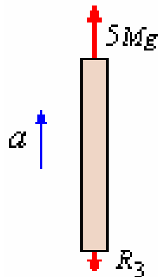
$$= \frac{5Mg}{2YA}\left(1+\frac{y}{L}\right)dy$$

Integrando:

$$\Delta L = \frac{5Mg}{2YA}\int_0^L\left(1+\frac{y}{L}\right)dy = \frac{5Mg}{2YA}\left(L+\frac{L^2}{2L}\right)$$

$$= \frac{15MgL}{4YA}$$

Segundo método.
Comenzando con la deformación la los efectos de las fuerzas en los extremos de la barra.
Nota: En R_3 ya está considerado el peso de la masa puntual M colocada en el extremo inferior de la barra.



Deformación de la barra por $5Mg$:

$$\Delta L_1 = \frac{1}{2}\frac{5MgL}{YA} = \frac{5MgL}{2YA}$$

Deformación de la barra por R_3:

$$\Delta L_2 = \frac{1}{2}\frac{5MgL}{2YA} = \frac{5MgL}{4YA}$$

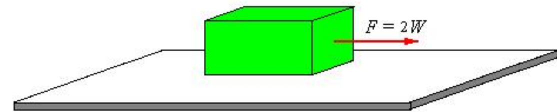
Deformación total: $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$

$$\Delta L = \frac{5MgL}{2YA} + \frac{5MgL}{4YA}$$

$$= \frac{15MgL}{4YA}$$

Aquí no se considera el efecto del peso propio por separado, porque en el cálculo de R_2 ya está considerado.

Ejemplo 18. Un cubo como se muestra en la figura de peso "W" arista "L" módulo de Young "Y" es arrastrado sobre un plano liso, con una fuerza $F = 2W$.
a) Hallar la deformación longitudinal unitaria cuando el plano es horizontal.
b) Hallar la deformación de la dimensión paralela al plano, cuando el bloque sube sobre el plano que esta inclinado 37º.



Solución.
a)

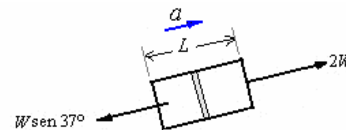
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}\frac{2W}{YL^2} = \frac{W}{YL^2}$$

b)
Resuelto por integración.
Calculo de la aceleración.

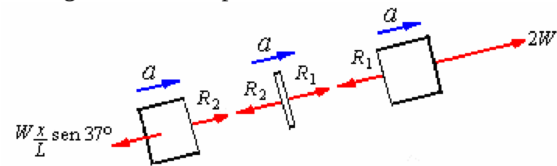
$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$2W - W\text{sen}37^\circ = \frac{W}{g}a \Rightarrow 2W - 0{,}6W = \frac{W}{g}a$$

$$\Rightarrow a = 1{,}4g$$



El diagrama del cuerpo libre



Cálculo de R_2:

$$R_2 - W\frac{x}{L}\text{sen}37^\circ = \frac{W}{g}\frac{x}{L}a \Rightarrow$$

$$R_2 = W\frac{0{,}6x}{L} + \frac{W}{g}\frac{x}{L}1{,}4g = 2W\frac{x}{L}$$

El elemento diferencial se deforma $d\Delta L$:

$$d\Delta L = \frac{R_2 dx}{YL^2} = \frac{2W}{YL^3}xdx$$

Para hallar ΔL integramos desde $x = 0$ hasta $x = L$.

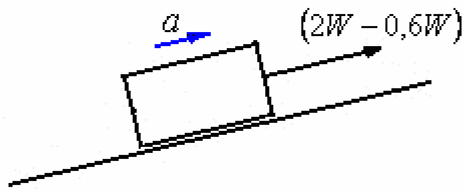
$$\Delta L = \int d\Delta L = \frac{2W}{YL^3}\int_0^L xdx = \frac{W}{YL}$$

La deformación es:

$$\Delta L = \frac{W}{YL}$$

Resuelto directamente usando resultados conocidos.

Estiramiento debido a la aceleración:



Calculo de la aceleración.

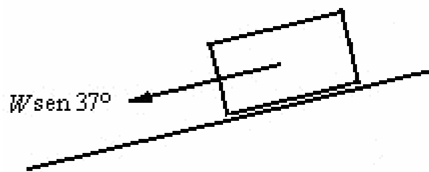
$$\sum F = ma \Rightarrow$$

$$2W - W\text{sen}37^{\circ} = \frac{W}{g}a \Rightarrow 2W - 0{,}6W = \frac{W}{g}a$$

$$\Rightarrow a = 1{,}4g$$

$$\Delta L_a = \frac{1}{2}\frac{(2W - 0{,}6W)L}{YL^2} = \frac{0{,}7W}{YL}$$

Estiramiento debido al peso:

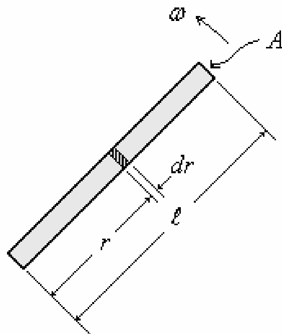


$$\Delta L_p = \frac{1}{2}\frac{0{,}6WL}{YL^2} = \frac{0{,}3W}{YL}$$

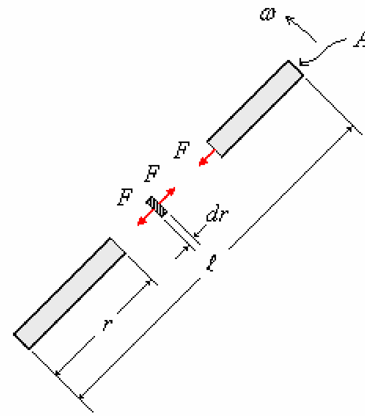
Estiramiento total:

$$\Delta L = \frac{0{,}7}{YL} + \frac{0{,}3W}{YL} = \frac{W}{YL}$$

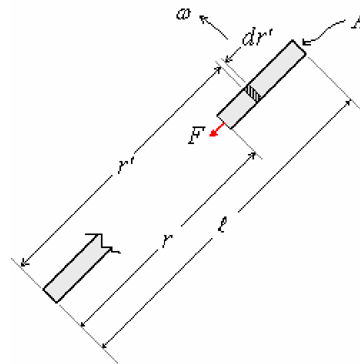
Ejemplo 19. **Deformación debido a la rotación**
Una barra de longitud ℓ, área A, densidad ρ y módulo de Young Y gira con velocidad angular ω constante sobre una mesa horizontal sin fricción y pivotado en uno de sus extremos. Determinar el alargamiento producido. ¿Cuál será el esfuerzo máximo?



Solución.
El elemento diferencial se alarga $d(\Delta\ell)$, debido a la fuerza centrípeta producida por la masa restante hacia el extremo opuesto al pivote.



Parte 1: Cálculo de la fuerza total sobre una sección transversal a la distancia r del pivote.



Debido a la aceleración centrípeta se tiene una fuerza:

$$dF = (dm)a_c = (dm)\omega^2 r$$

$$dm = \rho A dr'$$

$$dF = (\rho A dr')\omega^2 r' = \rho A\omega^2 r' dr'$$

Integrando:

$$F = \int_r^{\ell} \rho A\omega^2 r' dr' = \rho A\omega^2 \int_r^{\ell} r dr$$

$$F = \frac{1}{2}\rho A\omega^2\left(\ell^2 - r^2\right)$$

Parte 2: Cálculo del alargamiento
El alargamiento del elemento dr es:

$$d(\Delta\ell) = \frac{Fdr}{YA}$$

Y el alargamiento total será:

$$\Delta\ell = \int_r^{\ell}\frac{Fdr}{YA} = \frac{\rho A\omega^2}{2YA}\int_r^{\ell}\left(\ell^2 - r^2\right)dr$$

$$\Delta\ell = \frac{\rho\omega^2}{2Y}\left(\ell^3 - \frac{\ell^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\rho\omega^2\ell^3}{Y}$$

Ejemplo 20. Una barra de hierro de 100 mm^2 de sección y 50 cm de longitud gira alrededor de uno de sus extremos con una velocidad angular uniforme de ω radianes por segundo. Se pide cuál debe ser esta velocidad para que la barra se rompa por la tracción que origina la fuerza centrífuga, sabiendo que el material de que está hecha se rompe por tracción cuando se le carga con 30 kg por mm^2.

Solución.

Se romperá cuando

F_c = (30x9,8) x100 = 29400 N.

Llamando dm a un elemento de masa situado a la distancia x del eje de giro, será:

$$dF_c = dm\omega^2 x = \rho dV\omega^2 x = \rho\omega^2 Axdx$$

Integrando:

$$F_c = \int_0^{0,5} \rho\omega^2 Axdx = \frac{1}{2}\rho\omega^2 Ax^2$$

$$= \frac{1}{2}(7800)\omega^2\left(100\times10^{-6}\right)\left(0,5^2\right)$$

Luego:

$$\frac{1}{2}(7800)\omega^2\left(100\times10^{-6}\right)\left(0,5^2\right) = 29400$$

Por tanto:

$$\omega^2 = \frac{2\times 29400}{1950\times10^{-4}} = 301538, \text{ o sea}$$

$$\omega = \sqrt{301538} = 549 \text{ rad/s}.$$

Ejemplo 21. Determinar el máximo valor admisible de la velocidad lineal de rotación de un anillo fino de plomo, si la resistencia del plomo tiene el límite de rotura P =2000 N/cm^2 y la densidad ρ = 11,3 g/cm^3.

Solución.

Durante la rotación del anillo, en éste surge una tensión $T = mv^2/2\pi r$ .Para el anillo fino $m = 2\pi rS\rho$, donde S es la sección transversal del anillo. Por lo tanto, $T/S = \rho v^2$.

De allí el valor de la velocidad máxima es

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \approx 41 \text{ m/s}.$$

Ejemplo 22. Una barra homogénea de cobre de 1 m de longitud gira uniformemente alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos.

¿A qué velocidad de rotación se romperá la barra?

Densidad del cobre $\rho = 8600\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, Esfuerzo de rotura del cobre $S_r = 2,45\times10^8\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

Solución.

La fuerza centrífuga que actúa sobre la barra en este caso es

$$F = \int_0^{\ell} r\omega^2 dm$$

Donde ℓ es la longitud de]a barra, ω es la velocidad angular de la rotación; r, la distancia que hay desde el elemento de masa dm hasta el eje de rotación. Para una barra homogénea $dm = \rho Adr$, siendo ρ la densidad de la sustancia que forma la barra y A, su sección. Integrando, obtenemos

$$F = \frac{\rho A\omega^2\ell^2}{2}$$

De donde el número límite de revoluciones por segundo será

$$S_r = \frac{F}{A} = \frac{\rho\omega^2\ell^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2S_r}{\rho\ell^2}},$$

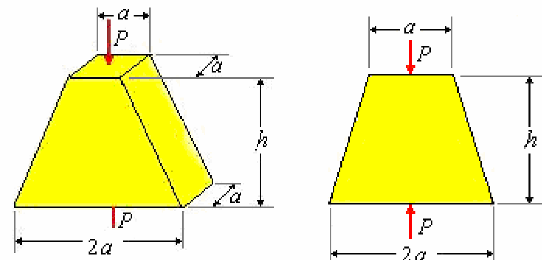
reemplazando valores;

$$\omega = \sqrt{\frac{2\left(2,45.10^8\right)}{(8600)(1)^2}} = 239\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

o $\dfrac{239}{2\pi} = 38 \text{ rev/s}$

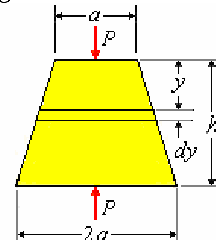
Deformaciones no uniformes por área variable.

Ejemplo 23. Calcular cuánto se comprime el bloque mostrado en la figura, cuando se le aplica una fuerza P. Módulo de elasticidad Y.



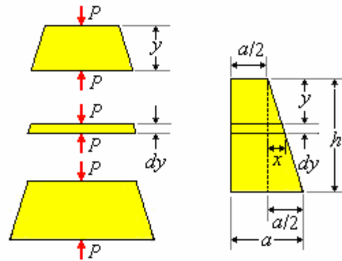
Solución.

Tomemos un elemento diferencial dy tal como se muestra en la figura.



Según muestra el diagrama del cuerpo libre del elemento diferencial, es comprimido por la fuerza P. Este elemento disminuye su longitud $d(\Delta h)$, siendo Δh la disminución de longitud de h debido a la fuerza P.

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{YA}$$



Usando las figuras anteriores

$A = a(a+2x)$ y $x = \dfrac{a}{2h}y$ reemplazando

obtenemos;

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{Ya(a + \frac{a}{h}y)} \quad \text{o} \quad d(\Delta h) = \frac{Phdy}{Ya^2(h+y)}$$

Luego, como

$$\Delta h = \int_0^h d(\Delta h) = \int_0^h \frac{Phdy}{Ya^2(h+y)}$$

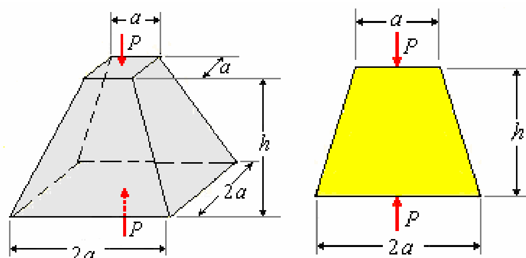
Integrando

$$\Delta h = \frac{Ph}{Ya^2}\ln(h+y)\Big|_0^h = \frac{Ph}{Ya^2}\ln 2$$

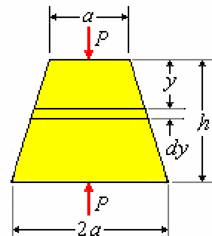
El bloque se comprime $\Delta h = 0{,}692\dfrac{Ph}{Ya^2}$

Ejemplo 24. Una pirámide truncada de bases cuadradas de lados ”*a*” y “2*a*” respectivamente de altura *h* y modulo elástico *Y* se somete en la dirección axial a una fuerza de compresión *P*, Determine la deformación que sufre la altura por acción de la fuerza *P*.

Solución.

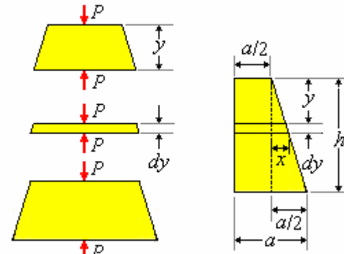


Tomemos un elemento diferencial *dy* tal como se muestra en la figura.



Según muestra el diagrama del cuerpo libre del elemento diferencial, es comprimido por la fuerza *P*. Este elemento disminuye su longitud *d*(Δ*h*), siendo Δ*h* la disminución de longitud de *h* debido a la fuerza *P*.

$$d(\Delta h) = \frac{Pdy}{YA}$$



Usando las figuras anteriores

$A = (a+2x)^2$ y $x = \dfrac{a}{2h}y$ reemplazando

obtenemos;

$$d(\Delta h) = \frac{Ph^2 dy}{Ya^2(h+y)^2}$$

Luego, como

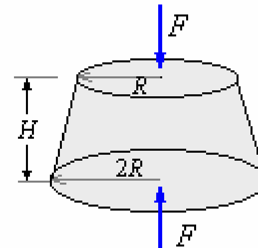
$$\Delta h = \int_0^h d(\Delta h) = \int_0^h \frac{Ph^2dy}{Ya^2(h+y)^2}$$

Integrando

$$\Delta h = \frac{Ph}{2Ya^2}$$

El bloque se comprime $\Delta h = \dfrac{1}{2}\dfrac{Ph}{Ya^2}$

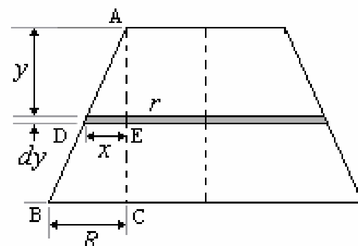
Ejemplo 25. Determine la deformación debido a la fuerza *F*, sin considerar el peso. El sólido mostrado de modulo elástico *Y* tiene altura *H* y bases circulares de radios *R* y 2*R*



Solución.

$$d(\Delta H) = \frac{Fdy}{Y\pi r^2}, \quad r = R + x$$

En los triángulos ABC y ADE:



$$\frac{y}{R} = \frac{x}{H} \Rightarrow x = \frac{R}{H}x$$

$$d(\Delta H) = \frac{Fdy}{Y\pi(R+x)^2} = \frac{F}{\pi Y}\frac{dy}{\left(R+\frac{R}{H}x\right)^2}$$

$$= \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}(H+x)^{-2}dy$$

$$\Delta H = \int \Delta H = \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}\int_0^H (H+x)^{-2}dy$$

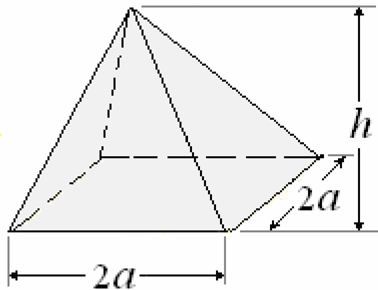
$$= \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}\left[\frac{(H+x)^{-1}}{-1}\right]_0^H$$

$$\Delta H = \frac{FH^2}{\pi R^2 Y}\left[\frac{1}{2H}\right] = \frac{FH}{2\pi R^2 Y}$$

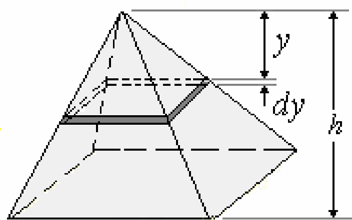
Deformaciones no uniformes por peso propio y área variable.

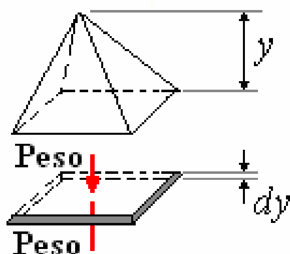
Ejemplo 26. Determine la deformación que sufre la altura de la Gran pirámide de Keops en Egipto debido a su propio peso, sabiendo que posee una altura de 147 m, su base es cuadrada de lado 230 m y que fue construida con bloques de piedra caliza y granito con módulo de Young = 35 x 10^9 N/m^2 y densidad = 2400 kg / m^3.

Solución.

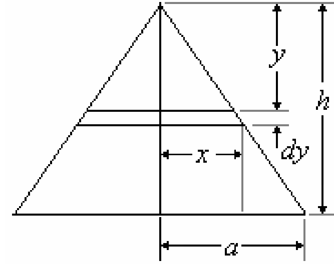


Tomemos un elemento diferencial dy, tal como de indica en la figura





Este elemento sufre una acortamiento $d(\Delta h)$, debido al peso de la porción de pirámide que soporta (de altura y, radio base de lado $2x$).



El peso que soporta es: $\text{Peso} = \rho g(\frac{1}{3}4x^2 y)$ el

área de su base es: $A_x = 4x^2$

$$d(\Delta h) = \frac{\rho g 4x^2 ydy}{3Y4x^2} = \frac{\rho g}{3Y}ydy$$

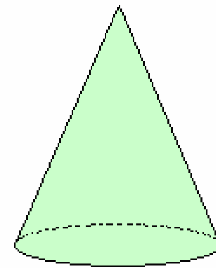
Integrando desde $y = 0$ hasta $y = h$

$$\Delta h = \int_0^h \frac{\rho g}{3Y}ydy = \frac{\rho g}{3Y}\frac{y^2}{2}\bigg|_0^h = \frac{1}{2}\frac{\rho g h^2}{3Y}$$

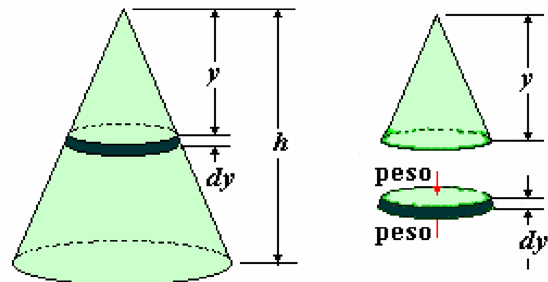
Como el Peso total es $\frac{\rho g A h}{3}$, obtenemos:

$$\Delta h = \frac{1}{2}\frac{(\text{Peso total})h}{Y(\text{Area base})}$$

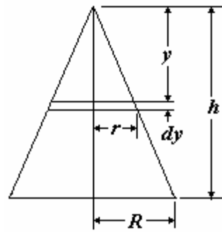
Ejemplo 27. Encontrar cuanto se comprime el cono de altura h y base de área A debido a su propio peso. El cono esta hecho de un material de densidad ρ y módulo de elasticidad Y.



Solución.
Tomemos un elemento diferencial dy, tal como de indica en la figura



Este elemento sufre una acortamiento $d(\Delta h)$, debido al peso de la porción de cono que soporta (de altura y, radio de la base r).



El peso que soporta es: $peso = \rho g(\frac{1}{3}\pi r^2 y)$ el área de su base es: $A = \pi r^2$

$$d(\Delta h) = \frac{\rho g \pi r^2 y dy}{3Y\pi r^2} = \frac{\rho g}{3Y} y dy$$

Integrando desde $y = 0$ hasta $y = h$

$$\Delta h = \int_0^h \frac{\rho g}{3Y} y dy = \frac{\rho g}{3Y} \frac{y^2}{2}\bigg|_0^h = \frac{1}{2}\frac{\rho g h^2}{3Y}$$

Como el Peso total es $\rho g Ah/3$, obtenemos:

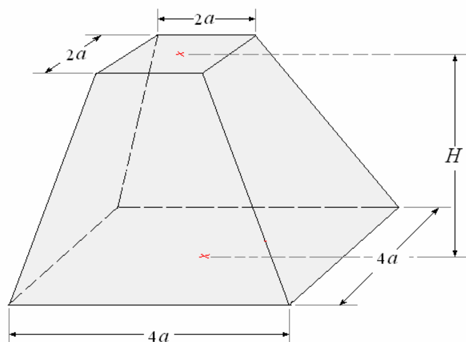
$$\Delta h = \frac{1}{2}\frac{(\text{Peso total})h}{Y(\text{Area base})}$$

Ejemplo 28. En la figura se muestra un tronco recto de pirámide regular de base cuadrada. Determinar cuánto se comprime el sólido homogéneo debido a su peso propio.

Datos: Densidad = ρ, gravedad = g, módulo de Young = Y

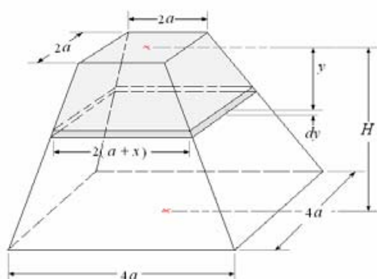
Lado de la base menor = $2a$; lado de la base mayor = $4a$

Altura del tronco de pirámide regular = H



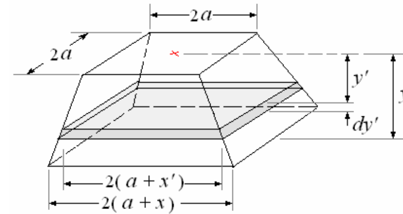
Solución.

Para determinar cuánto se comprime el sólido tomamos un elemento diferencial dy y vemos cuanto se comprime por efecto del peso de la parte tronco de pirámide que está sobre él (la parte de altura y en el dibujo).



Cálculo del peso de la de la parte tronco de pirámide que está sobre el elemento diferencial.

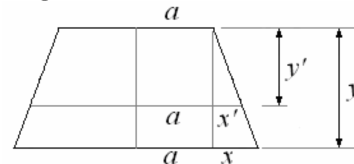
Para esto tomamos un elemento diferencial de altura dy' y lo integramos desde $x = 0$ hasta $x = x'$.



El peso del elemento diferencial es:

$$dP = \rho g dV = \rho g 4(a + x')^2 dy'$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$$y' = \frac{y}{x}x' \text{ y } dy' = \frac{y}{x}dx' :$$

$$dP = 4\rho g \frac{y}{x}(a + x')^2 dx'$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = x'$:

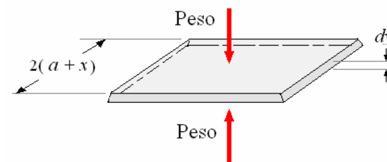
$$P = \int dP = 4\rho g \frac{y}{x}\int_0^{x'}(a + x')^2 dx'$$

$$= 4\rho g \frac{y}{x}\frac{(a + x')^3}{3}\bigg|_0^x$$

$$= \frac{4\rho g y}{3x}\left[(a + x)^3 - a^3\right]$$

El elemento diferencial se comprime:

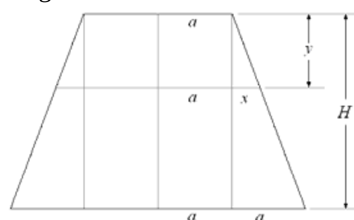
$$d(\Delta H) = \frac{Pdy}{YA}, \quad A = (2a + 2x)^2 = 4(a + x)^2$$



Reemplazando:

$$d(\Delta H) = \frac{4\rho g y}{3Yx}\frac{\left[(a + x)^3 - a^3\right]}{4(a + x)^2}dy$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$$y = \frac{H}{a}x \text{ , } dy = \frac{H}{a}dx :$$

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\frac{\left[(a+x)^3 - a^3\right]}{(a+x)^2}dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\left[a + x - a^3(a+x)^{-2}\right]dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = a$:

$$\Delta H = \int d(\Delta H)$$

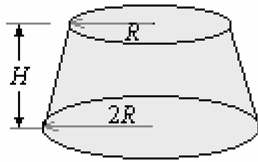
$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\int_0^a\left[a + x - a^3(a+x)^{-2}\right]dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\left[ax + \frac{x^2}{2} + \frac{a^3}{(a+x)}\right]_0^a$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{a^2}\left(a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - a^2\right)$$

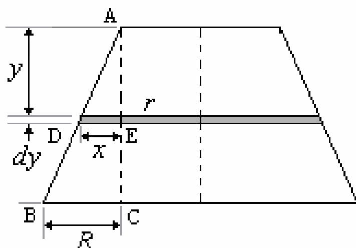
$$= \frac{1}{3}\frac{\rho g H^2}{Y}$$

Ejemplo 29. Determine la deformación que sufre la altura debido al peso propio
El sólido mostrado tiene peso F, modulo elástico Y, altura H y bases circulares de radios R y $2R$

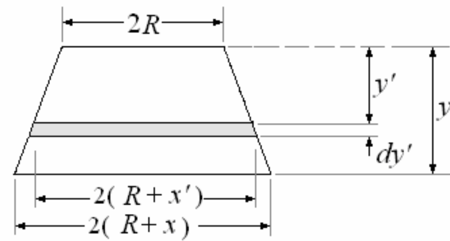


Solución.

Para determinar cuánto se comprime el sólido tomamos un elemento diferencial dy y vemos cuanto se comprime por efecto del peso de la parte tronco de cono que está sobre él (la parte de altura y en el dibujo).



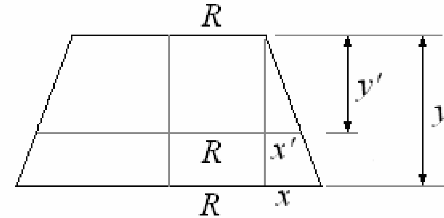
Cálculo del peso P de la de la parte tronco de cono que está sobre el elemento diferencial.
Para esto tomamos un elemento diferencial de altura dy' y lo integramos desde $x = 0$ hasta $x = x'$.



El peso del elemento diferencial es:

$$dP = \rho g dV = \rho g \pi (R + x')^2 dy'$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$$y' = \frac{y}{x}x' \text{ y } dy' = \frac{y}{x}dx' :$$

$$dP = \rho g \pi \frac{y}{x}(R + x')^2 dx'$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = x'$:

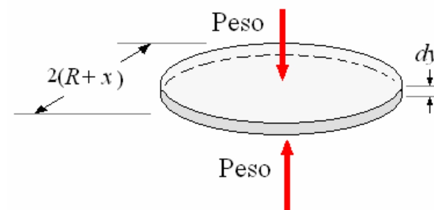
$$P = \int dP = \rho g \pi \frac{y}{x}\int_0^{x'}(R + x')^2 dx'$$

$$= \rho g \pi \frac{y}{x}\frac{(R + x')^3}{3}\bigg|_0^x$$

$$= \frac{\rho g \pi y}{3x}\left[(R + x)^3 - R^3\right]$$

El elemento diferencial se comprime:

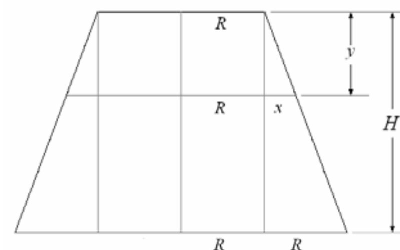
$$d(\Delta H) = \frac{Pdy}{YA} \text{ , } A = \pi(R + x)^2$$



Reemplazando:

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g \pi y}{3Yx}\frac{\left[(R + x)^3 - R^3\right]}{\pi(R + x)^2}dy$$

Del dibujo siguiente:



Obtenemos:

$y = \frac{H}{R}x$, $dy = \frac{H}{R}dx$:

$$d(\Delta H) = \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\frac{\left[(R+x)^3 - R^3\right]}{(R+x)^2}dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\left[R + x - R^3(R+x)^{-2}\right]dx$$

Integrando desde x = 0 hasta x = R:

$$\Delta H = \int d(\Delta H)$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\int_0^R \left[R + x - R^3(R+x)^{-2}\right]dx$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\left[Rx + \frac{x^2}{2} + \frac{R^3}{(a+x)}\right]_0^R$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\frac{H^2}{R^2}\left(R^2 + \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} - R^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\rho g H^2}{Y}$$

El peso del tronco de cono es:

$$F = \frac{1}{3}\pi(2R)^2(2H)\rho g - \frac{1}{3}\pi(R)^2(H)\rho g$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 H\rho g(8-1) = \frac{7}{3}\pi R^2 H\rho g$$

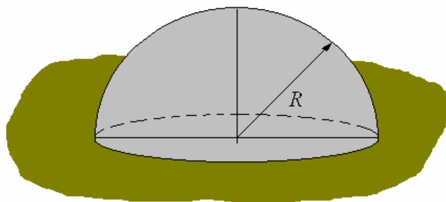
Luego

$$\Delta H = \frac{F}{\frac{7}{3}\pi R^2 H\rho g}\frac{1}{3}\frac{\rho g H^2}{Y}$$

$$= \frac{FH}{7\pi R^2 Y}$$

Ejemplo 30. Un hemisferio (mitad de una esfera sólida) de densidad ρ , radio R y modulo de Young Y esta sobre el piso descansando sobre su base circular determine cuanto se deforma por acción de su propio peso.

Sugerencia: Calcule la deformación de una porción diferencial del hemisferio formada por un disco delgado paralelo al piso.



Solución.

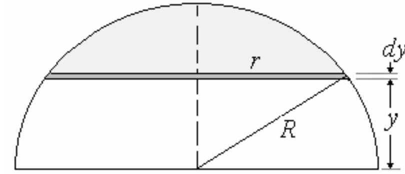
Vamos a considerar un elemento diferencial de área $A = \pi r^2$, altura dy

Donde $r^2 = (R^2 - y^2)$

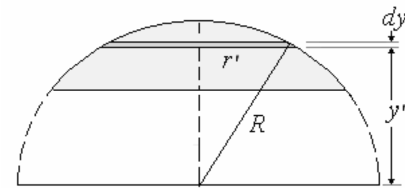
El elemento diferencial soporta el peso P de la parte de hemisferio que está sobre él.

De tal manera que se deforma:

$$d(\Delta R) = \frac{P_{(y)}dy}{YA}$$



Cálculo de $P_{(y)}$



Peso del elemento diferencial

$$dP_{(y)} = \rho\pi g\left(R^2 - y'^2\right)dy'$$

El peso $P_{(y)}$ de la porción de hemisferio es:

$$P_{(y)} = \rho\pi g\int_y^R (R^2 - y'^2)dy' =$$

$$\rho g\pi\left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3}\right)$$

Ahora la deformación total Integrando

$$d(\Delta R) = \frac{P_{(y)}dy}{YA} :$$

$$d(\Delta R) = \frac{g\pi\left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3}\right)dy}{Y\pi\left(R^2 - y^2\right)}$$

$$\Delta R = \rho g\pi\frac{1}{Y}\int_0^R\left(\frac{2R^3}{3} - R^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\frac{dy}{(R^2 - y^2)}$$

$$= \frac{\rho g}{Y}\int_0^R \frac{\left(\frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3}R^2 y\right) + \left(-\frac{1}{3}R^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)}{\left(R^2 - y^2\right)}dy$$

$$= \frac{\rho g}{Y}\int_0^R \frac{\frac{2R^2}{3}(R-y) - \frac{y}{3}\left(R^2 - y^2\right)}{(R-y)(R+y)}dy$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\int_0^R \left[\frac{2R^2}{(R+y)} - y\right]dy$$

$$= \frac{\rho g}{3Y}\left[2R^2 \ln(R+y) - \frac{y^2}{2}\right]_0^R$$

$$= \frac{\rho g R^2}{3Y}\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{0{,}30\rho g R^2}{Y}$$

La altura del hemisferio disminuye

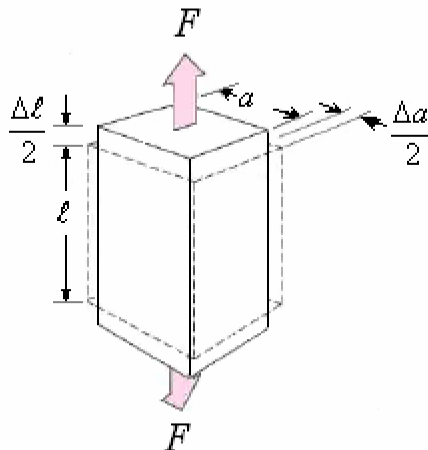
$$\Delta R = \frac{0{,}30\rho g R^2}{Y}$$ Debido al peso propio

DEFORMACION LATERAL MODULO DE POISSON

Adicionalmente, cuando estiramos un bloque en una dirección éste se contrae en las dimensiones perpendiculares al estiramiento, la contracción de las caras laterales es en la misma proporción para el ancho (*a*) y el alto (*h*). Por ejemplo, la contracción Δa en el ancho es proporcional al ancho a y también a $\frac{\Delta \ell}{\ell}$, lo que resumimos en la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

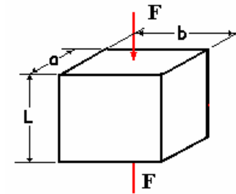
Donde σ es otra constante del material conocida como **el módulo de Poisson.**



Como valores aproximados para algunos materiales se puede tomar:
0,28 para hierro y acero, 0,5 para caucho y 0,25 para vidrio.
Las dos constantes *Y* y σ especifican completamente las propiedades de un material homogéneo isotrópico.

Nombre	Módulo de Poisson σ Sin dimensiones
Aluminio	0,34
Acero	0,28
Cobre	0,35
Oro	0,41
Hierro, fundido	0,28
Plomo	0,33
Nickel	0,30
Platino	0,38
Plata	0,37
Latón	0,33

Ejemplo 31. El paralelepípedo de la figura está hecho de un material con módulo de Young *Y*, y constante poisson σ. ¿Cuál es el valor de $\Delta V/V$?



Solución.
Debido a la compresión ocasionada por la fuerza F:

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{F}{YA} \text{ y como } \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\sigma\frac{\Delta L}{L}$$

Obtenemos: $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \sigma\frac{F}{YA}$

Como $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

Reemplazando

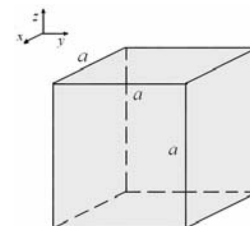
$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{F}{YA} + \sigma\frac{F}{YA} + \sigma\frac{F}{YA}$$

Finalmente:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{F}{YA}(1-2\sigma)$$

Ejemplo 32. Al cubo de la figura de lado 50cm se le aplica dos pares de fuerzas F_x=100 N y F_y=50 N obteniendo como resultado que la longitud en el eje *x* aumenta en 0,01% y la longitud en el eje *y* disminuye en 0,006%.

a) Determine si el esfuerzo en *x,y* es de tracción o compresión.
b) Determine el módulo de Young y la constante de Poisson.



Solución.

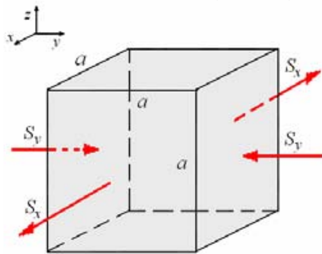
a) $S_x = \frac{100}{(0{,}5)^2}$ = 400 N/m², $S_y = \frac{50}{(0{,}5)^2}$ = 200 N/m²

$$\frac{\Delta a_x}{a} = \frac{0{,}01}{100} = 1\times10^{-4},$$

$$\frac{\Delta a_y}{a} = -\frac{0{,}006}{100} = -6\times10^{-5}$$

Haciendo un análisis de los cambios de longitudes:
El esfuerzo en x es mayor y la longitud en x aumenta mientras que en y disminuye, siendo el esfuerzo en y menor, se puede concluir que el esfuerzo en x es de tracción y el esfuerzo en y es de compresión.

b) El paralelepípedo esta sujeto a esfuerzo por cuatro caras, como se muestra en la figura siguiente:



Sea S el esfuerzo sobre cada una de las caras laterales.

La deformación del lado horizontal a_x es:

$$\frac{\Delta a_x}{a} = \frac{400}{Y} + \sigma\frac{200}{Y} = 1\times10^{-4} \qquad (1)$$

La deformación del lado horizontal a_y es:

$$\frac{\Delta a_y}{a} = -\frac{200}{Y} - \sigma\frac{400}{Y} = -0{,}6\times10^{-4} \qquad (2)$$

Restando (1) + (2)/2, obtenemos:

$$\frac{400}{Y} - \frac{100}{Y} = 0{,}7\times10^{-4} \Rightarrow \frac{300}{Y} = 0{,}7\times10^{-4}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{300}{0{,}7\times10^{-4}} = 4{,}28 \text{ x } 10^6 \text{ N/m}^2$$

Reemplazando el valor de Y en (1):

$$\frac{400}{4{,}28\times10^6} + \sigma\frac{200}{4{,}28\times10^6} = 1\times10^{-4} \Rightarrow$$

$$4 + 2\sigma = 4{,}28$$

$$\Rightarrow \sigma = 0{,}14$$

Ejemplo 33. a) Calcule la deformación volumétrica durante la extensión elástica de una barra cilíndrica sometida a tracción axial. El material es isótropo y la deformación se supone pequeña.
b) ¿Para qué valor del módulo de Poisson, el alargamiento ocurre sin cambio de volumen?
c) El módulo de Poisson de la mayoría de metales es aprox. 0,3. El del corcho, aprox. 0,0 y el del caucho cercano a 0,5. ¿Cuáles son las deformaciones volumétricas de esos materiales al someterlos a una compresión elástica $\varepsilon < 0$?

Solución.

a) Para la altura $\frac{\Delta h}{h} = \frac{S}{Y}$, para el diámetro

$$\frac{\Delta D}{D} = -\sigma\frac{\Delta h}{h} = -\sigma\frac{S}{Y}$$

El cambio de volumen es $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta D}{D} =$

$\frac{S}{Y} - 2\sigma\frac{S}{Y} = \frac{S}{Y}(1-2\sigma)$, por lo tanto

$$\Delta V = \frac{S}{Y}(1-2\sigma)V = \frac{S}{Y}(1-2\sigma)\frac{\pi D^2 h}{4}$$

b) ΔV es igual a cero cuando $(1-2\sigma) = 0 \Rightarrow$

$\sigma = 0{,}5$

c) Para la mayoría de metales con un valor de σ aproximado a 0,3:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1-2(0{,}3)] = 0{,}4\frac{S}{Y}$$

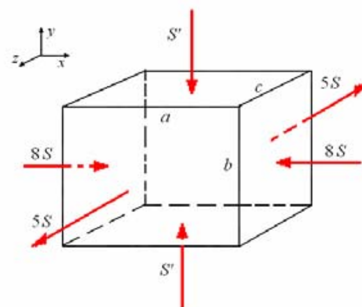
Para el corcho, con un valor de σ aproximado a 0,0:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1-2(0{,}0)] = \frac{S}{Y}$$

Para el caucho, con un valor de σ aproximado a 0,5:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S}{Y}[1-2(0{,}5)] = 0{,}0$$

Ejemplo 34. El sólido de la figura está sometido a los esfuerzos de compresión y tracción mostrados en las direcciones x y z, respectivamente. Determine cual será el esfuerzo (S') en la dirección y, tal que la deformación unitaria en esa dirección sea nula.
Datos: S = esfuerzo, Y = módulo de Young, σ = módulo de Poisson.



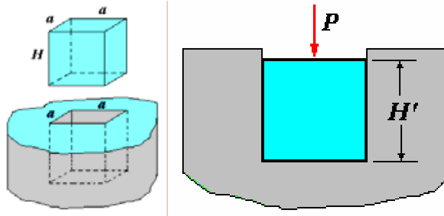
Solución.

	$\frac{\Delta a}{a}$	$\frac{\Delta b}{b}$	$\frac{\Delta c}{c}$
Por $-8S$ en el eje x	$\frac{-8S}{Y}$	$\frac{\sigma 8S}{Y}$	$\frac{\sigma 8S}{Y}$
por - S' en el eje y	$\frac{\sigma S'}{Y}$	$\frac{-S'}{Y}$	$\frac{\sigma S'}{Y}$
Por $-5S$ en el eje z	$-\frac{\sigma 5S}{Y}$	$-\frac{\sigma 5S}{Y}$	$\frac{5S}{Y}$
Deformación total		$\frac{1}{Y}(3\sigma S - S')$	

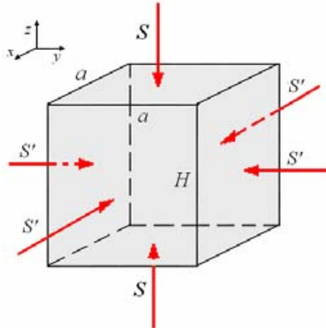
Para que la deformación unitaria en la dirección y sea nula, se debe cumplir:

$$\frac{1}{Y}\left(3\sigma S - S'\right) = 0 \;\Rightarrow\; 3\sigma S - S' = 0 \;\Rightarrow$$
$$S' = 3\sigma S$$

Ejemplo 35. Se tiene el paralelepípedo mostrado en la figura que encaja perfectamente en una caja rígida. Luego de encajo el paralelepípedo se coloca un peso *P* sobre éste, tal que lo aplasta uniformemente, la caja impide las expansiones laterales.
a) ¿Cuál es el esfuerzo sobre las paredes laterales?
b) ¿Cuál es el cambio en la altura $\Delta H = H - H'$ del paralelepípedo?



Solución.
El paralelepípedo esta sujeto a esfuerzo por sus seis caras, como se muestra en la figura siguiente:



Sea *S* el esfuerzo sobre la cara superior e inferior y *S'* el esfuerzo sobre cada una de las caras laterales.
La deformación del lado *a* es:

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S}{Y} \quad (1)$$

La deformación del lado *H* es:

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + 2\sigma\frac{S'}{Y} \quad (2)$$

a) Como la longitud *a* no cambia, $\Delta a = 0$.
De la ecuación (1):

$$-\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S'}{Y} + \sigma\frac{S}{Y} = 0 \;\Rightarrow\; S' = \frac{\sigma}{(1-\sigma)}S$$

Siendo $S = \frac{P}{a^2}$

$$\Rightarrow\; S' = \frac{\sigma P}{(1-\sigma)a^2}$$

b) De la ecuación (2):

$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + 2\sigma\frac{S'}{Y} \;\Rightarrow$$
$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y} + \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)}\frac{S}{Y} \;\Rightarrow$$
$$\frac{\Delta H}{H} = -\frac{S}{Y}\left[1 - \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)}\right] \;\Rightarrow$$
$$\Delta H = -\frac{P}{Ya^2}\left[1 - \frac{2\sigma^2}{(1-\sigma)}\right]H$$

Ejemplo 36. Hallar el valor del módulo de Poisson para el cual el volumen de un alambre no varía al alargarse.
Solución.

$\frac{\Delta r}{r} = \sigma\frac{\Delta \ell}{\ell}$, de aquí el módulo de Poisson

$\sigma = \dfrac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}}$, siendo *r* el radio del alambre y ℓ su longitud. El volumen de dicho alambre antes de estirarlo es $V_1 = \pi r^2 \ell$ y su volumen después de estirado es $V_2 = \pi(r - \Delta r)^2(\ell + \Delta\ell)$
Si el volumen no varió con el alargamiento, tendremos que $\pi r^2 \ell = \pi(r - \Delta r)^2(\ell + \Delta \ell)$. Y abriendo los paréntesis y despreciando las magnitudes Δr y $\Delta \ell$ al cuadrado, hallamos que

$\pi r^2 \ell = 2\pi r \Delta r \ell$, de donde $\dfrac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, luego

σ = 0,5.

Ejemplo 37. Hallar la variación relativa de la densidad de una barra de cobre cilíndrica al ser comprimida por una presión p = 9810 Pa. Para el cobre tómese un módulo de Poisson σ = 0,34.
Solución.

La densidad de la barra antes de ser comprimida es

$\rho_1 = \frac{m}{V_1}$ donde $V_1 = \pi r^2 \ell$. La densidad de la barra después de comprimida será $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$,

siendo $V_2 = \pi(r + \Delta r)^2(\ell - \Delta\ell)$. Por consiguiente la variación de la densidad será

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = m\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{m\Delta V}{V_2 V_1}$$

Como .la compresión no es muy grande, aproximadamente se puede tomar $V_2 V_1 = V_1^2$

Se puede considerar que $\Delta\rho = \dfrac{m\Delta V}{V_1^2}$.

Entonces la variación elativa de la densidad $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1}$. Hallemos pues la variación de volumen $\Delta V = \pi r^2 \ell - \pi(r + \Delta r)^2(\ell - \Delta\ell)$.

Abriendo los paréntesis y despreciando los cuadrados de las magnitudes Δr y $\Delta\ell$, obtenemos que $\Delta V = V_1\left(\dfrac{\Delta\ell}{\ell}\right)(1-2\sigma)$, .donde σ es el módulo de Poisson. Por lo tanto

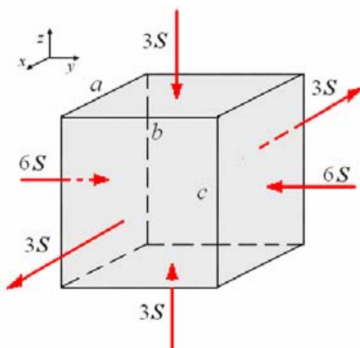
$\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1} = \dfrac{\Delta\ell}{\ell}(1-2\sigma)$. Pero como por la ley de Hooke $\dfrac{\Delta\ell}{\ell} = \dfrac{p_n}{Y}$, tendremos que en definitiva

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{p_n}{Y}(1-2\sigma).$$

En nuestro caso $p_n = 9{,}81\times 10^3 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$,

$Y = 1{,}18\times 10^{11}\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$ y σ = 0,34. Poniendo estos datos obtenemos que $\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1} = \dfrac{\Delta V}{V_1} = 0{,}027\,\%$..

Ejemplo 38. El sólido de la figura (lados *a*, *b* y *c*) está sometido a los esfuerzos de compresión y tensión mostrados.
Determine la deformación volumétrica unitaria, $\Delta V / V$.
Datos:
S = esfuerzo, *Y* = módulo de Young, σ = módulo de Poisson.



Solución.
Deformación de cada uno de los lados:

	Deformación de a
Por $3S$ en el eje x	$\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{3S}{Y}$
Por $-6S$ en el eje y	$\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$
Por $-3S$ en el eje y	$\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\dfrac{\Delta a}{a}\right) total = \dfrac{3S}{Y}(1+3\sigma)$

	Deformación de b
Por $3S$ en el eje x	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$
Por $-6S$ en el eje y	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\dfrac{6S}{Y}$
Por $-3S$ en el eje y	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\dfrac{\Delta b}{b}\right) total = -\dfrac{6S}{Y}$

	Deformación de c
Por $3S$ en el eje x	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$
Por $-6S$ en el eje y	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$
Por $-3S$ en el eje y	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\dfrac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\dfrac{\Delta c}{c}\right) total = \dfrac{3S}{Y}(-1+\sigma)$

Consolidado

	Deformación de a	Deformación de b	Deformación de c
Por $3S$ en el eje x	$\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{3S}{Y}$	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{3S}{Y}$
Por $-6S$ en el eje y	$\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\dfrac{6S}{Y}$	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\sigma\dfrac{\Delta b}{b} = \sigma\dfrac{6S}{Y}$
Por $-3S$ en el eje y	$\dfrac{\Delta a}{a} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$	$\dfrac{\Delta b}{b} = -\sigma\dfrac{\Delta c}{c} = \sigma\dfrac{3S}{Y}$	$\dfrac{\Delta c}{c} = -\dfrac{3S}{Y}$
Deformación total	$\left(\dfrac{\Delta a}{a}\right) total = \dfrac{3S}{Y}(1+3\sigma)$	$\left(\dfrac{\Delta b}{b}\right) total = -\dfrac{6S}{Y}$	$\left(\dfrac{\Delta c}{c}\right) total = \dfrac{3S}{Y}(-1+\sigma)$

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\frac{\Delta a}{a}\right) total + \left(\frac{\Delta b}{b}\right) total + \left(\frac{\Delta c}{c}\right) total$$

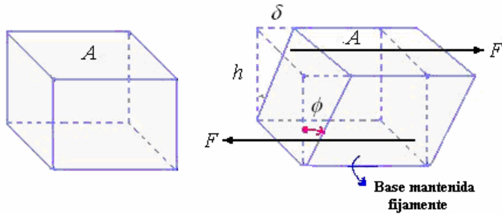
$$= \frac{3S}{Y}(4\sigma) - \frac{6S}{Y} = \frac{6S}{Y}(2\sigma - 1)$$

DEFORMACIÓN POR CIZALLADURA O CORTE. MODULO DE CIZALLADURA O RIGIDEZ.

Deformación por cizalladura

Ya hemos estudiado el módulo de elasticidad Y de un material, es decir, la respuesta del material

cuando sobre él actúa una fuerza que cambia su volumen (aumentando su longitud). Ahora, examinaremos la deformación por cizalladura en el que no hay cambio de volumen pero si de forma. Definimos el esfuerzo como *F*/*A* la razón entre la fuerza tangencial al área *A* de la cara sobre la que se aplica. La deformación por cizalla, se define como la razón $\Delta x/h$, donde Δx es la distancia horizontal que se desplaza la cara sobre la que se aplica la fuerza y *h* la altura del cuerpo, tal como vemos en la figura.



Cuando la fuerza *F* que actúa sobre el cuerpo es paralela a una de las caras mientras que la otra cara permanece fija, se presenta otro tipo de deformación denominada de cizalladura en el que no hay cambio de volumen pero si de forma. Si originalmente el cuerpo tiene forma rectangular, bajo un esfuerzo cortante la sección transversal se convierte en un paralelogramo.

El módulo de cizalladura o de rigidez G es una propiedad mecánica de cada material

Siendo pequeños los ángulos de desplazamiento podemos escribir

$$Deformación = \frac{\delta}{h} = \tan\phi \approx \phi$$

$$G = \frac{esfuerzo}{deformación} = \frac{F/A}{\delta/h} = \frac{S_t}{\phi}$$

La ley de Hooke para la deformación por cizalladura se puede escribirla de modo siguiente:

$S_t = G\phi$

El módulo de cizalladura G es característico de cada material

Nombre	Módulo de rigidez *G* 10^{10} N/m^2
Aluminio	2,5
Cobre	4,3
Oro	3,5
Hierro, fundido	3,2
Plomo	0,6
Nickel	7,4
Acero	7,5
Latón	1,7

Ejemplo 39. Un cubo de gelatina de 30 cm de arista tiene una cara sujeta mientras que a la cara opuesta se le aplica una fuerza tangencial de 1 N. La superficie a la que se aplica la fuerza se desplaza 1 cm.
a) ¿Cuál es el esfuerzo de corte?
b) ¿Cuál es la deformación de corte?
c) ¿Cuál es el módulo de corte?

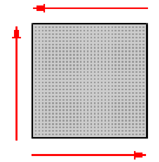
Solución.

a) $S_t = \frac{F}{A} = \frac{1}{(0,30)^2} = 11{,}11\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

b) $\delta = \frac{\Delta x}{h} = \frac{1}{30} = 0{,}033$

c) $G = \frac{S_t}{\delta} = \frac{11{,}11}{0{,}033} = 333{,}33$

Ejemplo 40. Un cubo de acero de 5 cm de arista se halla sometido a 4 fuerzas cortantes, de 1200 kg, cada una, aplicadas en sentidos opuestos sobre caras opuestas. Calcule la deformación por cizalladura.



Solución.

$G_{\text{Acero al carbono}}$ = 8 x10^9 N/m^2

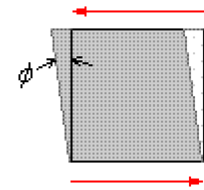
$$G = \frac{esfuerzo}{deformación} = \frac{F/A}{\delta/h} = \frac{S_t}{\phi}$$

$$S_t = \frac{F}{A} = \frac{(1200(9{,}8))}{(0{,}05)^2} = 4{,}704 \text{ x}10^6 \text{ N/m}^2$$

Consideremos solamente las fuerzas horizontales, estas producen una deformación ϕ, como se muestra en la figura

$$\phi = \frac{S_t}{G} = \frac{4{,}704\times10^6}{8\times10^9} = 0{,}588 \text{ x}10^{-3}$$

radianes

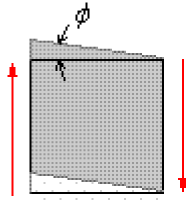


La cara que se muestra queda como un rombo con ángulos $\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$

Consideremos ahora solamente las fuerzas verticales, estas producen una deformación también ϕ, como se muestra en la figura

$$\phi = \frac{S_t}{G} = \frac{4{,}704\times10^6}{8\times10^9} = 0{,}588 \text{ x}10^{-3}$$

radianes



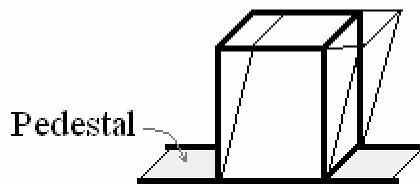
El cubo se deforma en el plano del papel y toma la forma de un rombo con ángulos

$$\left(\frac{\pi}{2}-2\phi\right) \text{ y } \left(\frac{\pi}{2}+2\phi\right)$$

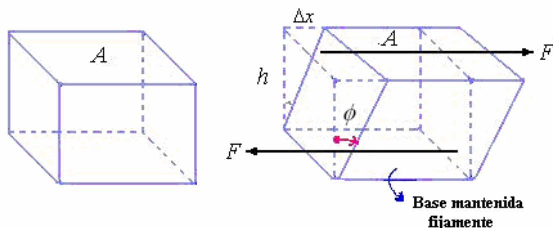
Ejemplo 41. Una estatua se encuentra soldada a un pedestal de latón, que se muestra en la figura. Al producirse un movimiento sísmico se observa un desplazamiento lateral de la cara superior del pedestal de 0,25mm.

Calcular:

a) El esfuerzo de corte.
b) La magnitud de la fuerza producida por el movimiento sísmico.
El pedestal de latón tiene una altura de 1m y una sección cuadrada de 0,5m de lado.
El módulo de Young del latón es 3,5x10^{10} Pa
Módulo de rigidez G del latón es 1,7 x10^{10} N/m^2



Solución.
Desplazamiento lateral de la cara superior del pedestal de 0,25mm.



a) El esfuerzo de corte.

$$\delta = \frac{\Delta x}{h} = \frac{0,25\times 10^{-3}}{1,00} = 0,25\times 10^{-3}$$

$$G = \frac{S_t}{\delta} \Rightarrow$$

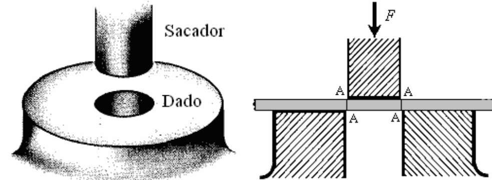
$S_t = G\delta$ = (1,7 x 10^{10})(0,25 x10^{-3})
= 0,425 x 10^7 N/m^2

b) La magnitud de la fuerza producida por el movimiento sísmico.

$$S_t = \frac{F}{A} \Rightarrow$$

$F = S_t A$ = (0,425 x 10^7)(0,5^2)
= 2,65 x 10^5 N

Ejemplo 42. El acero promedio requiere, típicamente, un esfuerzo de 3,45 x 10^8 N/m^2 para la ruptura por cizalladura. Determine la fuerza requerida para perforar un agujero del diámetro 2,5 cm en una placa de acero de ¼ de pulgada (6,25 mm) de espesor.

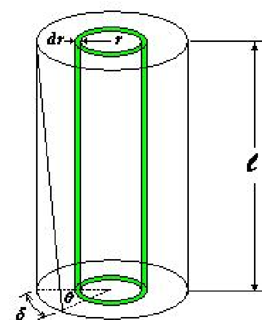


Solución.
La circunferencia de un círculo del diámetro D = 2,5 cm es $C = \pi D = 7,85 x 10^{-2}\,\text{m}$, El área del borde del disco cortado AAAA es el producto de la circunferencia C por el espesor del material, esto es $\left(6,25\times 10^{-3}\right)\left(7,85\times 10^{-2}\right) = 49,06\times 10^{-5}\,\text{m}^2$.
Una fuerza de la magnitud F se ejerce en el sacador, el esfuerzo de corte (fuerza por unidad de área) a través del borde es $S = \frac{F}{A} \Rightarrow$

$F = S.A = \left(3,45\times 10^{8}\right)\left(49,06\times 10^{-5}\right)$
= 1,69 x 10^5 N. La hoja de acero se corta por cizalladura cuando el esfuerzo llega a ser igual 3,45 x 10^8 N/m^2, es decir, cuando F = 1,69 x 10^5 N.
Esta es la fuerza de 1,69 x 10^5 N, equivalente a 17,3 toneladas es requerida para perforar el agujero de 2,5 cm de diámetro El sacador y los dados son operados por una máquina conocida como prensa; en este caso uno tendría que utilizar una prensa con una capacidad de 20 toneladas o más.

Ejemplo 43. Calcular el módulo de rigidez del material en función a las características geométricas de un alambre (longitud ℓ y radio R) y del torque aplicado.

Manteniendo el extremo superior fijo aplicamos un torque τ que gira al extremo inferior un ánguloθ. Consideremos una capa diferencial cilíndrica de material concéntrica con el eje, de radio interior r y de espesor dr, como se muestra en la figura.



La deformación es

$$\phi = \frac{\delta}{\ell} = \frac{r\theta}{\ell}$$

El esfuerzo cortante es

$$S_t = G\phi = \frac{Gr\theta}{\ell}$$

Como el esfuerzo cortante es la fuerza tangencial por unidad de área, multiplicándolo por el área de la sección transversal de la Capa, 2π *rdr*, nos dará la fuerza tangencial *dF* sobre la base de la Capa

$$dF = S_t dA = \left(\frac{Gr\theta}{\ell}\right)(2\pi r dr) = 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^2 dr$$

El torque sobre la base de la Capa cilíndrica es

$$d\tau = rdF = r\left(2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^2 dr\right) = 2\pi G \frac{\theta}{\ell} r^3 dr$$

Integrando de 0 a R, el torque total sobre la base del cilindro es

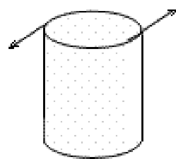
$$\tau = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell}\theta$$

De aquí

$$G = \frac{2\tau\ell}{\pi R^4 \theta}$$

O sea, para determinar C bastará con medir el ángulo θ que se produce al aplicar el torque M.

Ejemplo 44. Una varilla de cobre de 40 cm de longitud y de 1 cm de diámetro está fija en su base y sometida a un par de 0,049 Nm en torno a su eje longitudinal. ¿Cuántos grados gira la cara superior respecto de la inferior?



Solución.

Cobre estirado en frío G = 48,0x10^9 N/m^2

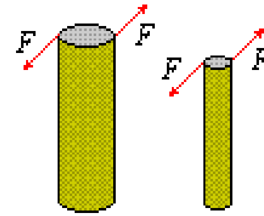
$$\tau = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell}\theta \quad \theta = \frac{2\ell\tau}{\pi G R^4}$$

$$\theta = \frac{2(0,4)(0,049)}{\pi(48,0\times10^9)(0,5\times10^{-2})} = 2,08 \text{ x}10^{-4}$$

radianes

Ejemplo 45. Una varilla que tiene 100 cm de longitud y 1 cm de diámetro está sujeta rígidamente por un extremo y se le somete a torsión por el otro hasta un ángulo de lº. Si se aplica la misma fuerza a la circunferencia de una varilla del mismo material pero que tiene una longitud de 80 cm y un diámetro de 2 cm, ¿cuál es el ángulo de torsión resultante?

Solución.



$$\tau = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{\ell}\theta \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{32} G \frac{D^4}{\ell}\theta,$$

Como $\tau = FD \Rightarrow FD = \frac{\pi}{32} G \frac{D^4}{\ell}\theta$, de aquí

$$\theta = \left(\frac{32F}{\pi G}\right)\left(\frac{\ell}{D^3}\right)$$

Para la varilla de 100 cm y de 80 cm respectivamente son:

$$\theta_1 = \left(\frac{32F}{\pi G}\right)\left(\frac{\ell_1}{D_1^3}\right) \text{ Y } \theta_2 = \left(\frac{32F}{\pi G}\right)\left(\frac{\ell_2}{D_2^3}\right)$$

De estas últimas obtenemos:

$$\theta_2 = \left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 \theta_1 = \left(\frac{80}{100}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 1^o$$

$= 0,1^o$

DEFORMACION VOLUMETRICA. MODULO DE ELASTICIDAD VOLUMETRICO.

Módulo de elasticidad volumétrico.

Consideramos ahora un volumen de material V sujeto a un esfuerzo unitario p_0 (por ejemplo la presión atmosférica) sobre toda la superficie. Cuando el esfuerzo a presión se incrementa a $p = p_0 + \Delta p$ y el volumen sufre una disminución ΔV, la deformación unitaria es $\delta = -\Delta V / V$

El esfuerzo es $\frac{F}{A} = \Delta p$.

La razón del esfuerzo de compresión uniforme a la deformación por compresión uniforme recibe es el módulo de elástico que en este caso se conoce como **módulo de compresibilidad volumétrica o volumétrico (*B*).**

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$$

Donde la constante de proporcionalidad B, depende solamente del material. El módulo volumétrico tiene las dimensiones de la presión, esto es, fuerza/área y es aplicable tanto para sólidos como líquidos. Pero, los gases tienen un comportamiento diferente que será considerado posteriormente.

Nombre	Módulo volumétrico B 10^{10} N/m^2
Aluminio	7,5
Cobre	14

Hierro	16
Plomo	17
Níckel	4,1
Vidrio óptico	5,0
Latón	6,0
Acero	16
Agua	0,21
Mercurio	2,8

Ejemplo 46. ¿Qué incremento de presión se requiere para disminuir el volumen de un metro cúbico de agua en un 0,005 por ciento?
Solución.
Por elasticidad volumétrica tenemos:

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}$$

El módulo de compresibilidad del agua es
2,1 x 10^9 N/m ^{2}

$$\Delta p = -2,1\times 10^9\left(\frac{-0,00005V}{V}\right)$$

$= 1,05 \text{ x}10^5$ N/m ^{2}

Ejemplo 47. Calcule densidad del agua del océano a una profundidad en que la presión es de 3430 N/cm^2. La densidad en la superficie es 1024 kg/m^3.
El módulo de compresibilidad del agua es 2,1 x 10^9 N/m ^{2}
Solución.
p = 3430 N/cm^2 = 3,430 x10^7 N/m^2,
Δp = 3,430 x10^7– 1,013 x10^5 $\approx$ 3,430 x10^7 N/m^2

En la superficie $\rho = \frac{m}{V} = 1024\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Cuando cambia el volumen a $V' = (V + \Delta V)$, tenemos:

$$\rho' = \frac{m}{V'} = \frac{m}{V+\Delta V} = \frac{m}{V\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)}$$

$$= \frac{\rho}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)}$$

Como $B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{B}$

De aquí:

$$\rho' = \frac{\rho}{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)} = \frac{\rho}{\left(1-\frac{\Delta p}{B}\right)}$$

$$= \frac{1024}{\left(1-\frac{3,430\times 10^7}{2,1\times 10^9}\right)} = 1041 \text{ kg/m}^3$$

Ejemplo 48. Si con aluminio se fabrica un cubo de 10 cm de lado, se quiere saber las deformaciones que experimentará en una compresión uniforme, perpendicular a cada una de sus caras, de una tonelada, y cuándo esta misma fuerza actúa tangencialmente a la superficie de una de sus caras, estando el cubo só1idamente sujeto por la cara opuesta.
Solución.
La presión que soporta, cada cara, en el primer caso, será:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{(100)(9,8)}{0,1^2} = 9,8\times 10 \text{ Pa}$$

Como el módulo volumétrico del aluminio es
B = 3,5x 10^{10} N/m^2:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{B} = -\frac{9,8\times 10^5}{3,5\times 10^{10}} = -2,8\times 10^{-5}$$

De donde:
ΔV = - 2,8x 10^{-5} V = - 2,8x 10^{-5}x 10^{-3} = - 2,8x 10^{-8} m^3.
En cuanto a la deformación, se obtiene a partir de la expresión de la deformación de cizalla, que es:

$$\tan\varphi \approx \varphi = \frac{1}{G}\frac{F}{A} = \frac{1}{3\times 10^{11} x 10^{-1}}\frac{(10^3)(9,8)}{10^{-2}}$$

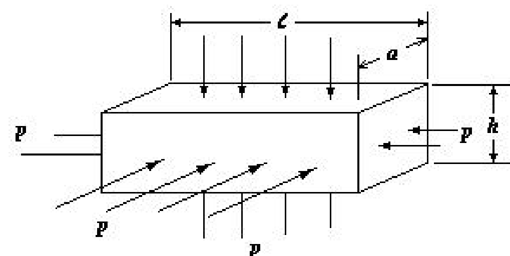
= 3,27x10^{-5} rad

RELACION ENTRE CONSTANTES ELASTICAS.

Relación entre B, Y y σ

Muestra sometida a una presión uniforme.

La figura siguiente muestra un bloque bajo presión uniforme en toda su superficie exterior

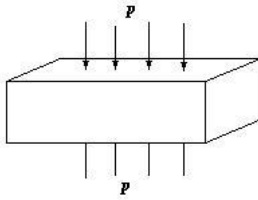


Como la presión es uniforme, el esfuerzo unitario en cada cara es el mismo.
Y las deformaciones de cada una de las dimensiones son:
Dimensión ℓ:



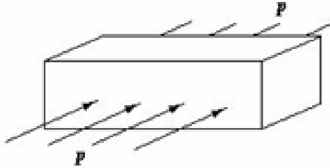
$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = -\frac{p}{Y}$$

Dimensión *a*:



$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{p}{Y}$$

Dimensión *b*:



$$\frac{\Delta b}{b} = -\frac{p}{Y}$$

Pero, como la deformación de una dimensión lleva a la deformación de las otras dimensiones, tenemos.

Deformación de ℓ:

- Propia:

$$\frac{\Delta \ell_1}{\ell} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *a*:

$$\frac{\Delta \ell_2}{\ell} = -\sigma\frac{\Delta a}{a} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *b*:

$$\frac{\Delta \ell_3}{\ell} = -\sigma\frac{\Delta b}{b} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma\frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta \ell_1}{\ell} + \frac{\Delta \ell_2}{\ell} + \frac{\Delta \ell_3}{\ell}$$

$$= -\frac{p}{Y}(1-2\sigma)$$

Deformación de *a*:

- Propia:

$$\frac{\Delta a_1}{a} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de ℓ:

$$\frac{\Delta a_2}{a} = -\sigma\frac{\Delta \ell}{\ell} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *b*:

$$\frac{\Delta a_3}{a} = -\sigma\frac{\Delta b}{b} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma\frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a_1}{a} + \frac{\Delta a_2}{a} + \frac{\Delta a_3}{a}$$

$$= -\frac{p}{Y}(1-2\sigma)$$

Deformación de *b*:

- Propia:

$$\frac{\Delta b_1}{b} = -\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de *a*:

$$\frac{\Delta b_2}{b} = -\sigma\frac{\Delta a}{a} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma\frac{p}{Y}$$

- Debido a la deformación de ℓ:

$$\frac{\Delta b_3}{b} = -\sigma\frac{\Delta \ell}{\ell} = -\sigma\left(-\frac{p}{Y}\right) = \sigma\frac{p}{Y}$$

Deformación total

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta b_1}{b} + \frac{\Delta b_2}{b} + \frac{\Delta b_3}{b}$$

$$= -\frac{p}{Y}(1-2\sigma)$$

El cambio de volumen es:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$= -\frac{3p}{Y}(1-2\sigma)$$

Sabemos nosotros que el módulo de compresibilidad es

$$B = -\frac{p}{\Delta V/V}$$

Luego:

$$B = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$$

Expresión que nos relaciona el módulo de Compresibilidad, el módulo de Young y la relación de Poisson

Ejemplo 49. Se somete a una muestra de cobre de forma cúbica con 10 cm de arista a una compresión uniforme, aplicando Un esfuerzo de 10^6 N/m^2 perpendicularmente a cada una de sus caras. La variación relativa de volumen que se observa es de $7,25\times10^{-6}$.

a) Determinar el módulo de compresibilidad (*B*) del Cu en el sistema internacional.

b) Determinar el módulo de Poisson sabiendo que el módulo de Young del cobre es 120×10^9 Pa.

Solución.

a) Como:

$$\Delta p = 10^4\ \text{N/m}^2,\ \frac{\Delta V}{V} = -7,25\times10^{-6}\ \text{y}$$

$$B = -\frac{\Delta p}{\dfrac{\Delta V}{V}} \Rightarrow$$

$$B = -\frac{10^6}{-7,25\times10^{-6}} = 137,7 \text{ x } 10^9 \text{ N/m}^2$$

b)

$$B = \frac{Y}{3(1-2\sigma)} \quad \Rightarrow (1-2\sigma) = \frac{Y}{3B}$$

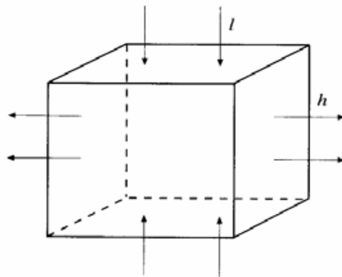
$$\Rightarrow \sigma = \frac{1-\frac{Y}{3B}}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1-\frac{120\times 10^9}{3(137{,}7\times 10^9)}}{2} = 0{,}35$$

Relación entre G, Y y σ

Muestra sometida a esfuerzo cortante. Determinación de la relación entre el módulo de rigidez, el módulo de Young y el módulo de Poisson.

Pretendemos analizar la relación entre los esfuerzos cortantes y los esfuerzos de compresión y de tracción. Para ello consideremos primero el caso del bloque de la Figura que está sometido, por una parte, a un esfuerzo de compresión y en la otra dirección a un esfuerzo de tracción. Sea 1 su longitud en la dirección horizontal y h su altura.



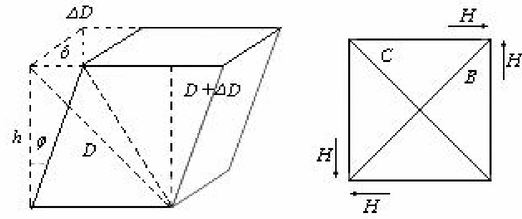
La deformación en la dirección horizontal tiene dos términos: el primero corresponde a la deformación producido por el esfuerzo de tracción, mientras que el segundo corresponde a la dilatación producida por la compresión en la dirección vertical. Por tanto, nos queda,

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{YA} + \sigma\frac{F}{YA} = (1+\sigma)\frac{F}{YA}$$

Por otra parte, la deformación en la dirección vertical corresponde a las deformaciones causadas por un lado por la fuerza de compresión en la dirección vertical y por otro por la tracción en la dirección horizontal. Por tanto,

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{F}{YA} - \sigma\frac{F}{YA} = -(1+\sigma)\frac{F}{YA}$$

Ahora bien, en la Figura abajo representamos la deformación de un bloque sometido a un esfuerzo tangencial detallando lo que le ocurre a las diagonales de sus caras. Si observamos la figura, vemos que los resultados de los esfuerzos tangenciales equivalen a los producidos por las fuerzas H que producen, por una parte, un esfuerzo de tracción sobre el plano C y un esfuerzo de compresión sobre el plano B.



El esfuerzo de compresión sobre el plano B resulta ser

$$S_B = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2}A} = \frac{G}{A}$$

A e igualmente el esfuerzo de tracción sobre C

$$S_C = \frac{\sqrt{2}G}{\sqrt{2}A} = \frac{G}{A}$$

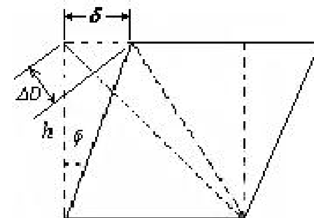
Las deformaciones de las diagonales B y C se escriben entonces

$$\frac{\Delta D_B}{D} = (1+\sigma)\frac{H}{YA}$$

y $\frac{\Delta D_C}{D} = (1+\sigma)\frac{H}{YA}$ (1)

Si expresamos el esfuerzo tangencial en términos del ángulo ϕ, ya que suponemos que la deformación es pequeña resulta

$$\tan\phi \approx \phi \Rightarrow \phi = \frac{\delta}{h} \approx \frac{\sqrt{2}\Delta D_C}{h} = 2\frac{\Delta D_C}{D}$$



Donde las dos últimas igualdades surgen a partir de analizar la geometría esbozada en la Figura arriba. En efecto, si el ángulo entre δ y ΔD es de *45* grados se cumple

$$\frac{\delta}{\Delta D_C} = \frac{1}{\text{sen}45^o} = \sqrt{2}$$

Y por tanto

$$\phi = \frac{\delta}{h} = \frac{\sqrt{2}\Delta D_C}{D_C\text{sen}45^o} = \frac{2\Delta D_C}{D_C}$$

En estas condiciones, sí sustituimos en (1) este último resultado nos queda

$$\phi = 2(1+\sigma)\frac{H}{YA}$$

Esta ecuación, si tenemos en cuenta que ϕ es la deformación tangencial y la comparamos con la ecuación $G = \frac{S}{\phi} = \frac{H/A}{\phi}$, nos permite obtener

$$G = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$$

Expresión que relaciona el módulo de rigidez con el módulo de Young y con el módulo de Poisson

FUERZA ELASTICA Y ENERGIA ELASTICA.

Energía de deformación.

La energía necesaria para estirar una cantidad x una muestra de material de constante de rigidez k es

Energía = $\int f dx = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2$ o en función de F

Energía $= \frac{1}{2}Fx$

Si la sección transversal de la muestra es A y su longitud ℓ entonces podemos escribir la ecuación como

$$\frac{\text{Energía}}{\text{A}\ell} = \frac{1}{2}\frac{Fx}{A\ell} \text{ o } \frac{\text{Energía}}{\text{A}\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{A}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)$$

Energía por unidad de volumen =

$\frac{1}{2}$(Esfuerzo)(Deformación unitaria)

Esta es la energía necesaria para estirar o comprimir la muestra, teniendo en cuenta el módulo de Young y la energía por unidad de volumen, puede expresarse como

$$\frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2}\frac{(\text{Esfuerzo})^2}{Y}$$

Ejemplo 50. Una carga de 100 kg está colgada de un alambre de acero de 1 m de longitud y 1 mm de radio. ¿A qué es igual el trabajo de tracción del alambre?

Solución.

Por *la* ley de Hooke

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{YA} \Rightarrow F = \frac{YA}{\ell}\Delta\ell \quad (1)$$

Pero para las fuerzas elásticas $F = k\Delta\ell$ (2)

Comparando (1) y (2) vemos que

$$k = \frac{AY}{\ell} \quad (3)$$

Entonces

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = \frac{AY(\Delta\ell)^2}{2\ell} \quad (4)$$

Calculando la magnitud $\Delta\ell$ por la fórmula (1) y poniendo todos los datos numéricos en la ecuación (4) obtenemos definitivamente que W = 0,706 J.

Ejemplo 51. Un alambre de acero de 2m de longitud cuelga de un soporte horizontal rígido.

a) ¿Cuánta energía almacena cuando se suspende en él una carga de 5 kg?

b) ¿Si la carga se aumenta 10 kg, en cuanto aumenta energía almacenada?

Y = 2 x 10^{11} N/m^2, A = área de la sección transversal = 10^{-6}m^2

Solución.

$\ell = 2$ m, $F_1 = 5\times 9{,}8$ N, $F_2 = 10\times 9{,}8$ N

$A = 10^{-6}$ m^2, $Y = 2\times 10^2$ N/m^2

W = trabajo realizado por la fuerza $F = kx$ en alargar el alambre una longitud x.

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \text{ , con } F = kx \Rightarrow x = \frac{F}{k}$$

$$W = \frac{1}{2}k\left(\frac{F}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$$

Para un alambre $k = \frac{YA}{\ell}$

Reemplazando:

$$W = \frac{1}{2}\frac{F^2}{YA/\ell}$$

$$= \frac{F^2\ell}{2AY}$$

a) $W_1 = \frac{F_1^2\ell}{2AY} = \frac{(5\times 9{,}8)^2(2)}{2(10^{-6})2\times 10^{11}}$ = 0,012 J

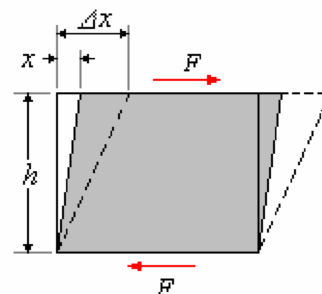
b) $W_2 = \frac{F_2^2\ell}{2AY} = \frac{(10\times 9{,}8)^2(2)}{2(10^{-6})2\times 10^{11}}$ = 0,048 J

El incremento en energía almacenada es:

$\Delta E = W_2 - W_1$ = 0,048 – 0,012 = 0,036 J.

Ejemplo 52. Demostrar que cuando se somete un cuerpo elástico a una tensión de corte pura que no supera el límite elástico de corte para el material, la densidad de energía elástica del cuerpo es igual a la mitad del producto de la tensión de corte por la deformación de corte.

Solución.



La fuerza que deforma por corte o cizalladura es $F = \frac{GA}{h}x$

El trabajo para deformar un dx es

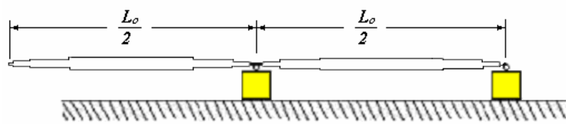
$$W = \int_{x=0}^{x=\Delta x}\frac{GA}{h}x dx$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{GA}{h}(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}F\Delta x$$

La densidad de energía es

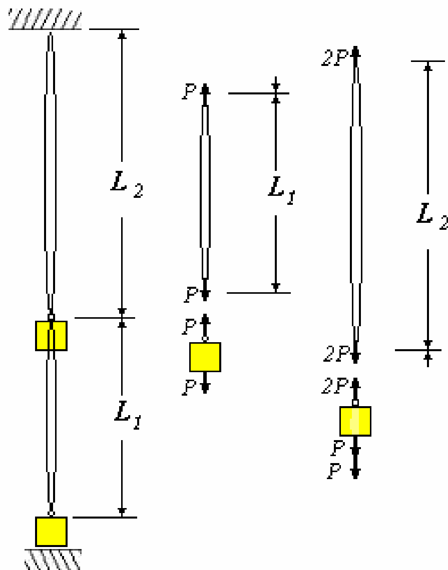
$$\frac{W}{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{A}\right)\Delta x = \frac{1}{2}S_t\Delta x$$

Ejemplo 53. La elasticidad de una banda de goma de longitud L_0 es tal que una fuerza F aplicada a cada extremo produce una deformación longitudinal de una unidad. Se sujetan dos pesos del mismo valor P, uno en un extremo y el otro en la mitad de la banda y a continuación se levanta la banda con los pesos por su extremo libre. ¿Cuál es la mínima cantidad de trabajo que hará elevar ambos pesos del suelo?



Solución.
Como cuando se aplicada a cada extremo una fuerza F se produce una deformación longitudinal de una unidad:

$$\Delta L = 1 = \frac{FL_0}{YA}$$, luego $YA = FL_0$



Usando los diagramas del cuerpo libre mostrados en las figuras tenemos:
Para la parte de la liga L_1: tenemos:

$$\Delta L_1 = \frac{PL_0/2}{YA} = \frac{PL_0/2}{FL_0} = \frac{P}{2F}$$

Para la parte de la liga L_2, tenemos:

$$\Delta L_2 = \frac{2PL_0/2}{YA} = \frac{2PL_0/2}{FL_0} = \frac{P}{F}$$

La mínima cantidad de trabajo que hará elevar ambos pesos del suelo es:
Trabajo = Energía para estirar ΔL_1 + Energía para estirar ΔL_2 + Energía para elevar un peso P la altura L_1, el peso inferior no se levanta, solamente se despega del piso.
Energía para estirar una banda elástica es

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

En este caso $k = \frac{YA}{L_0/2} = \frac{FL_0}{L_o/2} = 2F$, y $x = \Delta L_1$, o ΔL_2, según corresponda

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2}2F(\Delta L_1)^2 + \frac{1}{2}2F(\Delta L_2)^2 + PL_1$$

Como conocemos ΔL_1, ΔL_2 y

$$L_1 = \frac{L_0}{2} + \Delta L_1 = \frac{L_0}{2} + \frac{P}{2F}$$

Tenemos

$$\text{Trabajo} = \frac{1}{2}2F\left(\frac{P}{2F}\right)^2 + \frac{1}{2}2F\left(\frac{P}{F}\right)^2 + P\left(\frac{L_0}{2} + \frac{P}{2F}\right)$$

Finalmente

$$\text{Trabajo} = \frac{7}{4}\frac{P^2}{F} + \frac{1}{2}PL_0$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuál es el objeto del refuerzo de acero en una viga de concreto?
¿El concreto necesita mayor refuerzo bajo compresión o bajo tensión? ¿Por qué?

2. ¿Cuál es más elástico, caucho o acero? ¿Aire o agua?

3. ¿Qué clase de elasticidad se presenta en un puente colgante? ¿En un eje de dirección automotriz? ¿En un resorte? ¿En tacos de caucho?

4. Una mujer distribuye su peso de 500 N igualmente sobre los tacones altos de sus zapatos. Cada tacón tiene 1,25 cm^2 de área. a) ¿Qué presión ejerce cada tacón sobre el suelo?

b) Con la misma presión, ¿cuánto peso podrían soportar 2 sandalias planas cada una con un área de 200 cm^2?

5. ¿Cuál debe ser el diámetro mínimo de un cable de acero que se quiere emplear en una grúa diseñada para levantar un peso máximo de 10000 kg.?El esfuerzo de ruptura por tracción del acero es de 30×10^7 Pa. Igual pero si se quiere un coeficiente de seguridad de 0,6.

6. Dos alambres del mismo material, y misma longitud ℓ, cuyos diámetros guardan la relación n.
¿Qué diferencia de alargamientos tendrán bajo la misma carga?

7. Un ascensor es suspendido por un cable de acero. Si este cable es reemplazado por dos cables de acero cada uno con la misma longitud que el original pero con la mitad de su diámetro, compare el alargamiento de estos cables con el del cable original.

8. Una cierta fuerza se requiere para romper un alambre. ¿Que fuerza se requiere para romper un alambre del mismo material el cual es
a) del doble de longitud?
b) el doble en diámetro y dé la misma longitud?

9. Un hilo de 80 cm de largo y 0,3 cm de diámetro se estira 0,3 mm mediante una fuerza de 20 N. Si otro hilo del mismo material, temperatura e historia previa tiene una longitud de 180 cm y un diámetro de 0,25 cm. ¿qué fuerza se requerirá para alargarlo hasta una longitud de 180,1 cm?
Respuesta.
F = 211 N

10. a) Calcule el cambio de dimensiones de una columna de fundición gris (Y = 145 GPa) que tiene dos tramos de 1,5 m cada uno y diámetros de 0,1 m y 0,15 m, al soportar una carga de 500 kN. ¿Está bien dimensionada la columna si el límite elástico de la fundición gris es 260 MPa?
b) Si la columna fuera troncocónica de 3 m de altura, y los diámetros de sus bases variaran entre 0,1 m y 0,15 m.
Respuesta. a) L_f = 3,001 m. Sí está bien dimensionada.
b) L_f = 3,0009 m

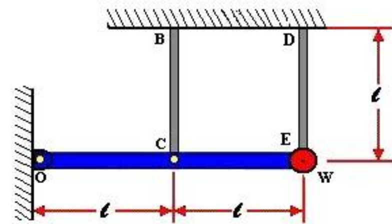
11. Un cable de acero de 2 m de largo tiene una sección transversal de 0,3 cm^2. Se cuelga un torno de 550 kg del cable. Determínese el esfuerzo, la deformación y el alargamiento del cable. Supóngase que el cable se comporta como una varilla con la misma área transversal. El módulo de Young del acero es 200×10^9 Pa.

12. Una varilla metálica de 4 m de largo y sección 0,5 cm^2 se estira 0,20 cm al someterse a una tensión de 5000 N. ¿Qué módulo de Young tiene el metal?

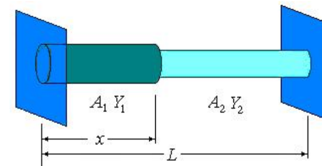
13. Una cuerda de Nylon se alarga 1,2 m sometida al peso de 80 kg de un andinista.
Si la cuerda tiene 50 m de largo y 7 mm de diámetro, ¿qué módulo de Young tiene el Nylon?

14. Para construir un móvil, un artista cuelga una esfera de aluminio de 5 kg de una alambre vertical de acero de 0,4 m de largo y sección 3×10^{-3} cm^2. En la parte inferior de la esfera sujeta un alambre similar del cual cuelga un cubo de latón de 10 kg. Para cada alambre calcular la deformación por tensión y el alargamiento.

15. En el sistema mostrado en la figura, la barra OE es indeformable y, de peso P; los tensores AC y DE son de peso despreciable, área A y módulo de elasticidad Y.
Determinar cuánto bajará el peso W respecto a la posición en la cual los tensores no estaban deformados.



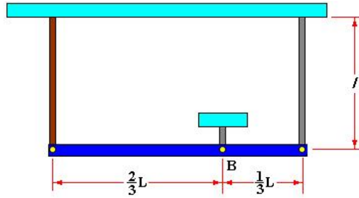
16. Dos barras de longitud $(\frac{\ell}{2}+\Delta\ell)$ cada una, áreas A_1 y A_2 y módulos de elasticidad Y_1 e Y_2 respectivamente, como se muestra en la figura, se comprimen hasta introducirlas entre dos paredes rígidas separadas una distancia ℓ. ¿Cuál será la posición x de la unión de ambas barras?



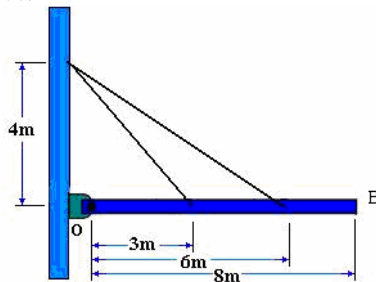
17. Una varilla de 1,05 m de largo y peso despreciable está sostenida en sus extremos por alambres A y B de igual longitud. El área transversal de A es de 1 mm^2 y la de B 4 mm^2. El módulo de Young de A es $2,4\times10^{11}$Pa y de B $1,2\times10^{11}$ Pa. ¿En que punto de la varilla debe colgarse un peso P a fin de producir
a) esfuerzos iguales en A y B? y b) ¿deformaciones iguales en A y B?

18. Una barra de longitud L y masa m se encuentra suspendida por un pivote B indeformable y por dos barras en sus extremos como se muestra en la figura

estas barras son iguales de área A, longitud ℓ y módulo de elasticidad Y.

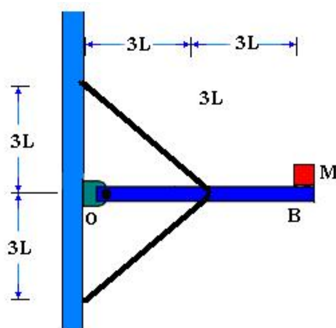


19. En el sistema mostrado en la figura, calcular cuánto desciende el extremo B de la barra indeformable y de peso despreciable, cuando se le coloca un peso de 10 Ton. en ese extremo.
Los tirantes son de acero y de 2cm^2 de área cada uno, suponga deformaciones pequeñas de tal manera que se puedan hacer las aproximaciones geométricas apropiadas.



Respuesta. Δy = 17,1 x 10^{-3} m

20. En el sistema mostrado en la figura, calcular cuanto desciende el extremo B de la barra horizontal rígida y de peso despreciable, cuando se le coloca una masa M en ese extremo.
Las barras inclinadas son iguales de área A y módulo de elasticidad Y.
Asuma pequeñas deformaciones, o sea, que se pueden hacer las aproximaciones geométricas usuales.



21. Un hilo delgado de longitud ℓ, módulo de Young Y y área de la sección recta A tiene unido a su extremo una masa pesada m. Si la masa está girando en una circunferencia horizontal de radio R con velocidad angular ω, ¿cuál es la deformación del hilo? (Suponer que es despreciable la masa del hilo).
Respuesta.

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{m\omega^2 R}{AY}$$

22. Un alambre de cobre de 31 cm de largo y 0,5 mm de diámetro está unido a un alambre de latón estirado de 108 cm de largo y 1 mm de diámetro. Si una determinada fuerza deformadora produce un alargamiento de 0,5 mm al conjunto total y un valor de Y = 12 x 10^{10} Pa, ¿cuál es el alargamiento de cada parte?
Respuesta.
$\Delta\ell$ = 0,27 mm para el latón.
$\Delta\ell$ = 0,23 mm para el cobre

23. Un alambre de acero dulce de 4 m de largo y 1 mm de diámetro se pasa sobre una polea ligera, uniendo a sus extremos unos pesos de 30 y 40 kg. Los pesos se encuentran sujetos, de modo que el conjunto se encuentra en equilibrio estático. Cuando se dejan en libertad, ¿en cuánto cambiará la longitud del alambre?
Respuesta.
$\Delta\ell$ = 1,0 mm

24. Un hilo está formado por un núcleo de acero dulce de 1,3 cm de diámetro, al cual se le ha fusionado una capa exterior de cobre (Y = 12 x 10^{10} Pa) de 0,26 cm de gruesa. En cada extremo del hilo compuesto se aplica una fuerza de tracción de 9000 N. Si la deformación resultante es la misma en el acero y en el cobre, ¿cuál es la fuerza que soporta el núcleo de acero?
Respuesta.
F = 5812 N

25. Un ascensor cargado con una masa total de 2000 kg esta de un cable de 3,5 cm^2 de sección. El material del cable tiene un límite elástico de 2,5 x 10^8 Pa y para este material Y = 2 x 10^{10} Pa. Se especifica que la tensión del cable nunca excederá 0,3 del límite elástico.
a) Hallar la tensión del cable cuando el ascensor está en reposo.
b) ¿Cuál es la mayor aceleración permisible hacia arriba?
c) ¿La distancia más corta de parada permisible cuando la velocidad del ascensor es hacia abajo?
Respuesta.
a) $\frac{F}{A}$ = 5,6 x 10^7 Pa, b) a = 0,33 m/s^2,
c) Δy = 33,8 m.

26. Volver a resolver el Problema anterior, teniendo en cuenta esta el peso del cable cuando tiene su longitud máxima de 150 m. La densidad del material del cable es 7,8 x 10^3 kg /m^3. Si se supera la carga máxima, ¿por dónde se romperá el cable: cerca de su punto más alto o próximo al ascensor?
Respuesta.
a) $\frac{F}{A}$ = 6,75 x 10^7 Pa, b) a = 1,32 m/s^2,

c) Δy = 85,3 m.

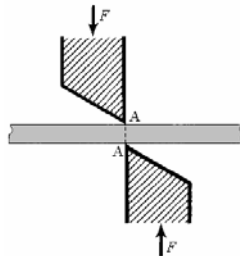
27. Un cable pesado de longitud inicial y área de sección recta A tiene una densidad uniforme ρ y un módulo de Young Y. El cable cuelga verticalmente y sostiene a una carga F_g en su extremo inferior. La fuerza tensora en un punto cualquiera del cable es evidentemente suma de la carga F_g y del peso de la parte del cable que está debajo de dicho punto. Suponiendo que la fuerza tensora media del cable actúa sobre la longitud total del cable ℓ_0, hallar el alargamiento resultante.

Respuesta.

$$\Delta\ell = \left(\frac{\ell_0}{Y}\right)\left(\frac{F_g}{A} + \frac{1}{2}\rho g \ell_0\right)$$

28. Demostrar que cuando se somete un cuerpo elástico a una tensión de corte pura que no supera el límite elástico de corte para el material, la densidad de energía elástica del cuerpo es igual a la mitad del producto de la tensión de corte por la deformación de corte.

29. El esfuerzo de la ruptura del cobre rolado para la cizalladura es típicamente 1,5 x 10^8.
¿Qué fuerzas F se deben aplicar a las cuchillas de metal mostradas en la figura para cortar una tira de una hoja de cobre de 5 cm de ancho y 1,27 mm de espesor?

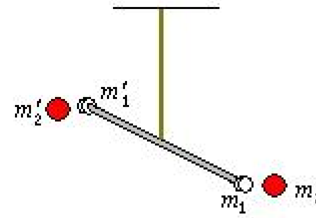


Respuesta. 9525 N

30. Una varilla que tiene 100 cm de longitud y 1 cm de diámetro está sujeta rígidamente por un extremo y se le somete a torsión por el otro hasta un ángulo de lº. Si se aplica la misma fuerza a la circunferencia de una varilla del mismo material pero que tiene una longitud de 80 cm y un diámetro de 2 cm, ¿cuál es el ángulo de torsión resultante?

Respuesta. $\theta = 0{,}1^{\circ}$

31. La balanza de torsión de la figura se compone de una barra de 40 cm con bolas de plomo de 2 cm en cada extremo. La barra está colgada por un hilo de plata de 100 cm que tiene un diámetro de 0,5 mm. Cuando se ponen muy de cerca de las bolas de plomo, pero en lados opuestos, dos bolas mayores de plomo de 30 cm de diámetro (ρ = 11,4 g/cm^3), sus atracciones gravitatorias tienden a hacer girar la barra en el mismo sentido. ¿Cuál será la torsión del hilo de plata?



Respuesta. θ = 0,00422º

32. a) Desarrollar una expresión para la constante de torsión de un cilindro hueco en función de su diámetro interno R_o, su radio externo R_1, su longitud ℓ y su módulo de corte G.
b) ¿Cuál deberá ser el radio de un cilindro macizo de la misma longitud y material y que posee la misma constante de torsión?
c) ¿Cuál deberá ser el ahorro de masa si se utilizase el cilindro hueco en un eje de una máquina en lugar de utilizar el cilindro macizo?

Respuesta.

a) $\tau_0 = \left(\frac{\pi G}{2\ell}\right)\left(R_1^4 - R_0^4\right)$, b) $R = \left(R_1^4 - R_0^4\right)^{\frac{1}{4}}$

c) Ahorro $= 100\left[1 - \sqrt{\frac{\left(R_1^2 - R_0^2\right)}{\left(R_1^2 + R_0^2\right)}}\right]\%$

33. *A* profundidades oceánicas de unos 10 km la presión se eleva a 1 kilobar, aproximadamente.
a) Si se hunde un trozo de acero dulce hasta esta profundidad, ¿en cuánto variará su densidad?
b) ¿Cuál es la densidad del agua del mar a esta profundidad si la densidad en la superficie vale 1,04 g/cm^3?
B_{acero} = 16 x 10^{10} N/m^2 , B_{agua} = 0,21 x 10^{10} N/m^2, 1bar = 10^5 Pa

Respuesta.
a) 0,062 %, b) ρ = 1,105 g/cm^3

34. Se somete a una muestra de cobre de forma cúbica con 10 cm de arista a una compresión uniforme, aplicando una tensión equivalente a una tonelada perpendicularmente a cada una de sus caras. La variación relativa de volumen que se observa es de 7,25×10^{-6} ($\Delta V/Vo$). Determinar el módulo de compresibilidad del Cu en el sistema internacional, sabiendo que el módulo de Young del cobre es 120×109 Pa. Obtener además el módulo de Poisson.

35. Un depósito de acero de 60 litros de capacidad contiene oxígeno a una presión manométrica de 140 Pa. ¿Qué volumen ocupará el oxígeno si se le permite que se expansione a temperatura constante hasta que su presión manométrica es nula? (La presión manométrica es la diferencia entre la presión real en el interior del depósito y la de la atmósfera exterior).

Respuesta. V = 889 litros.

36. En cada extremo de una barra horizontal de 1,5 m de larga, 1,6 cm de ancha y 1 cm de larga se aplica una fuerza de tracción de 2 800 N. El módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material de la barra son $Y = 2 \times 10^6$ Pa y $\sigma = 0,3$.
a) Hallar la deformación transversal barra.
b) ¿Cuáles son las variaciones relativas de la anchura y altura?
c) ¿Cuál es el aumento de volumen?
d) ¿Cuál es la energía potencial adquirida por la barra?
Respuesta.
a) $\dfrac{\Delta d}{d_0} == -2,625 \times 10^{-4}$,
b) $\Delta d = -4,2 \times 10^{-4}\, cm$
c) $\Delta h = -2,625 \times 10^{-4}\, cm$

37. a) Demostrar que el coeficiente de Poisson viene dado por

$$\sigma = \frac{3B. - 2S}{2(3B + S)}$$

b) Demostrar que a partir de esta ecuación se sigue que el coeficiente de Poisson debe estar comprendido entre -1 y $\dfrac{1}{2}$.
c) La experiencia demuestra que las barras sometidas a fuerzas de tracción (valores positivos siempre aumentan de volumen, mientras que si se someten a fuerzas de compresión (valores negativos de F), siempre disminuyen de volumen ¿Apoya esta afirmación el hecho de que no existe ningún material para el cual $\sigma \geq \dfrac{1}{2}$?

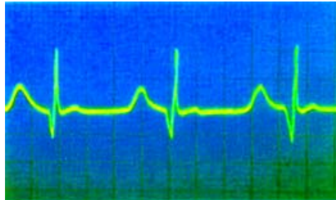
38. Un manual de materiales relaciona estos datos para el aluminio en hoja laminada
Módulo de Young, 7×10^{10} Pa
Límite elástico a la tracción, $7,2 \times 10^{7}$ Pa
Coeficiente de Poisson, 0,33
Tensión de tracción final, 14×10^{7} Pa
Tensión de tracción permisible, 0,4 de la tensión de tracción final
La tensión de tracción permisible es la máxima tensión que se considera segura cuando este material se utiliza en estructuras sometidas a de tracción conocidas y constantes. Una tira de este aluminio de 76 cm de larga, 2,5 cm de ancha y 0,8 mm de gruesa se estira gradualmente hasta que la tensión de tracción alcanza su límite permisible. Calcular
a) su variación de longitud,
b) su variación de volumen,
c) el trabajo realizado y
d) la ganancia en la densidad de energía elástica.
Respuesta.
a) $\Delta \ell$ = 0,688 mm, b) ΔV = 0,0041 cm^3,
c) W = 0,341 J, d) ΔU = 22400 J/m^3

CAPÍTULO 2. Movimiento oscilatorio

INTRODUCCION.

Las vibraciones u oscilaciones de los sistemas mecánicos constituyen uno de los campos de estudio más importantes de toda la física. Virtualmente todo sistema posee una capacidad de vibración y la mayoría de los sistemas pueden vibrar libremente de muchas maneras diferentes. En general, las vibraciones naturales predominantes de objetos pequeños suelen ser rápidas, mientras que las de objetos más grandes suelen ser lentas. Las alas de un mosquito, por ejemplo, vibran centenares de veces por segundo y producen una nota audible. La Tierra completa, después de haber sido sacudida por un terremoto, puede continuar vibrando a un ritmo del una oscilación por hora aproximadamente. El mismo cuerpo humano es un fabuloso recipiente de fenómenos vibratorios; nuestros corazones laten, nuestros pulmones oscilan, tiritamos cuando tenemos frío, a veces roncamos, podemos oír y hablar gracias a que vibran nuestros tímpanos y laringes. Las ondas luminosas que nos permiten ver son ocasionadas por vibraciones. Nos movemos porque hacemos oscilar las piernas. Ni siquiera podremos decir correctamente "vibración" sin que oscile la punta de nuestra lengua.. Incluso los átomos que componen nuestro cuerpo vibran.

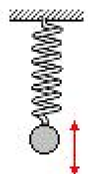
La traza de un electrocardiograma, mostrada en la figura, registra la actividad eléctrica rítmica que acompaña el latido de nuestros corazones.



MOVIMIENTO OSCILATORIO

Definición y características

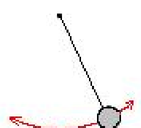
¿Qué es un movimiento oscilatorio? ¡Es un movimiento de vaivén! ¿Podemos hacer una descripción científica? Si estudiamos el movimiento de un número de objetos podemos quizás contestar a la pregunta. Si una masa se suspende a partir de un resorte, se tira hacia abajo y después se suelta, se producen las oscilaciones



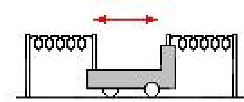
El balanceo de una bolita en una pista curvada, la bolita oscila hacia delante y atrás de su posición de reposo.



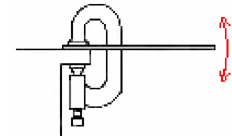
Una masa suspendida del extremo de una cuerda (un péndulo simple), cuando la masa se desplaza de su posición de reposo y se la suelta se producen las oscilaciones.



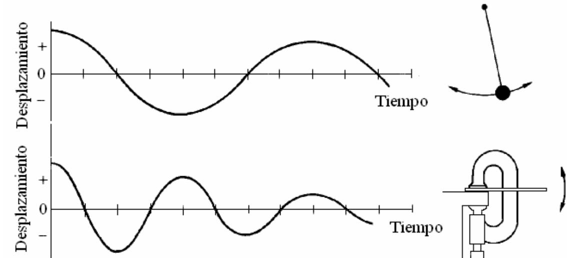
Un carrito atado entre dos soportes en un plano horizontal por medio de resortes oscilará cuando el carrito se desplaza de su posición de reposo y después se suelta.



Una regla afianzada con abrazadera en un extremo a un banco oscilará cuando se presiona y después se suelta el extremo libre.



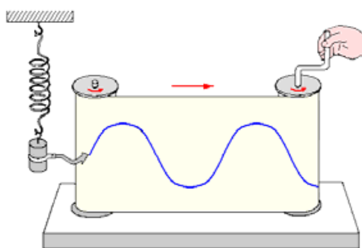
¿Qué hacemos en éstos y otros ejemplos, para conseguir las oscilaciones? Las masas se sacan de su posición de reposo y después se sueltan. Una fuerza restauradora tira de ellas y parecen ir más allá de la posición de reposo. Esta fuerza restauradora debe existir de otra manera ellas no se moverían cuando son soltadas. Porque hay una fuerza entonces debemos tener una aceleración. La fuerza de restauración se dirige siempre hacia la posición de equilibrio central -- la aceleración se dirige así siempre hacia la posición de equilibrio central.



Podemos determinar el gráfico distancia - tiempo para un objeto oscilante tomando una fotografía estroboscópica para un péndulo o usando el Sonic Ranger del laboratorio. Se obtiene su desplazamiento máximo a un lado y otro de la posición de reposo.

La figura arriba muestra los gráficos distancia – tiempo. Algunas oscilaciones parecen tener la misma característica a la tomada al mismo tiempo para cada oscilación completa. Tales osciladores se conocen como isócronas, y mantienen esta característica constante del tiempo sin importar los cambios de la amplitud debido al amortiguamiento.

Con un experimento simple como el mostrado en la figura a continuación, también se puede obtener el gráfico desplazamiento - tiempo para el movimiento oscilatorio de un sistema masa resorte, al que se le ha atado un plumón que deja una traza en un rollo de papel que se gira a velocidad constante. Esto produce una "hoja" que muestra que el movimiento de la masa tiene la forma sinusoidal.



Oscilaciones Sinusoidales

Concentraremos preferentemente nuestra atención sobre las oscilaciones sinusoidales. La razón física consiste en que realmente se presentan oscilaciones puramente sinusoidales en una gran variedad de sistemas mecánicos, siendo originadas por fuerzas restauradoras que son proporcionales a los desplazamientos respecto al equilibrio. Este tipo de movimiento es posible casi siempre si el desplazamiento es suficientemente pequeño. Si, por ejemplo, tenemos un cuerpo sujeto a un resorte, la fuerza ejercida sobre el mismo cuando el desplazamiento respecto al equilibrio es x puede describirse en la forma

$F(x) = -\left(k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + ...\right)$, donde k_1, k_2, k_3, etc., son una serie de constantes, y siempre podremos encontrar un margen de valores de x dentro del cual sea despreciable la suma de términos correspondientes a x^2, x^3, etc., de acuerdo con cierto criterio previo (por ejemplo, hasta 1 en 10^3 o 1 en 10^6) en comparación con el término - k_1x, a no ser que el mismo. k_1 sea nulo. Si el cuerpo tiene masa m y la masa del resorte es despreciable, la ecuación del movimiento del cuerpo se reduce entonces a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x \text{, o bien } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1}{m}x = 0$$

Si por definición hacemos $\omega_0^2 = \dfrac{k_1}{m}$, la ecuación anterior se transforma en:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$, que en notación corta es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solución a dicha ecuación diferencial puede expresarse en cualquiera de las formas:

$$x(t) = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi), \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi),$$

donde las fases iniciales , φ y ϕ difieren en $\pi/2$. Fácilmente se advierte que A representa el desplazamiento máximo, esto es la amplitud.

Las ecuaciones $x(t) = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$, describen el movimiento armónico simple. A es la **amplitud,** ω_0 es la **frecuencia angular**, en radianes por segundo, φ es la **constante de fase**. La cantidad en paréntesis $(\omega t + \varphi)$ es la fase de la oscilación. A y φ se determinan por las condiciones iniciales del problema.

También $\omega_0 = 2\pi f$, f es la **frecuencia** en oscilaciones por segundo. Una oscilación por segundo se llama 1 hertz (Hz).
Todos estos términos son muy importantes

Ejemplo 1. Demostrar que las ecuaciones

$$x(t) = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi), \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$$

satisfacen la ecuación $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Solución.

$$x = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t - \varphi),$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$$

Reemplazando x y $\ddot{x}$ en la ecuación:

$$-A\omega_0^2\text{sen}(\omega_0 t - \varphi) + \omega_0^2 A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi) = 0,$$

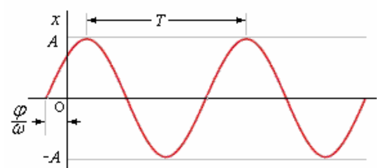
con lo que queda demostrado.

De igual manera sucede con

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi).$$

DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un movimiento del tipo descrito en la ecuación $x(t) = A\text{sen}(\omega_0 t - \varphi)$, es conocido como movimiento armónico simple (MAS), se representa en un gráfico x - t de la forma indicada en la figura. Destaquemos las características más importantes de esta perturbación sinusoidal:



Movimiento armónico simple de período T y amplitud A.

1. Está confinada dentro de los límites $x = \pm A$. La magnitud positiva A se denomina *amplitud* del movimiento.
2. El movimiento tiene un **período** T igual al tiempo transcurrido entre máximos sucesivos o más generalmente entre dos momentos sucesivos en se repitan tanto el desplazamiento x como la velocidad dx/dt.

T es la inversa de la frecuencia f,

$$T = \frac{1}{f}.$$

Dada la ecuación básica $x = A\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, el período debe corresponder a un aumento de 2π en el argumento de la función sinusoidal. Así pues, se tiene

$\omega(t+T)+\varphi_0 = (\omega t+\varphi_0)+2\pi$, de aquí se tiene

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

La situación en t = 0 (o en cualquier otro instante señalado) queda completamente especificada si se establecen los valores de x y dx/dt en dicho momento. En el instante particular t = 0, llamaremos a estas magnitudes x_0 y v_0, respectivamente. Entonces se tienen las identidades siguientes:

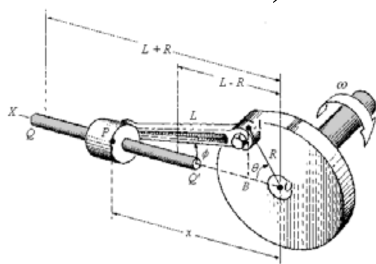
$x_0 = A\text{sen}\varphi_0$

Estas dos relaciones $v_0 = \omega A\cos\varphi_0$ pueden utilizarse para calcular la amplitud A y el ángulo φ_0 (ángulo de fase inicial del movimiento):

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\ ,\quad \varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

El valor de la frecuencia angular, ω del movimiento se supone conocido por otros medios.

Ejemplo 2. Determinar si P en el mecanismo ilustrado en la figura se mueve con MAS. En este mecanismo, QQ' es una barra sobre la cual puede deslizarse el cilindro P; está conectada por una varilla L al borde de una rueda de radio R que gira con velocidad angular constante (Este mecanismo, encontrado en muchas máquinas de vapor, transforma el movimiento oscilatorio del pistón en el movimiento rotacional de la rueda).



El movimiento de P *es oscilante pero no armónico simple.*

Solución.

De la figura podemos ver fácilmente que P oscila desde una posición a una distancia (L + R) a partir de O hasta una posición (L – R) a partir de O. Para determinar si el movimiento es armónico simple, debemos encontrar si el desplazamiento de P satisface la ecuación $x = A\text{sen}(\omega t+\varphi)$. De la geometría de la figura tenemos que $x = R\cos\theta + L\cos\phi$ y $L\text{sen}\phi = R\text{sen}\theta$, de modo que

$$\text{sen}\phi = \left(\frac{R}{L}\right)\text{sen}\theta$$

$$\cos\phi = \left(1-\text{sen}^2\phi\right)^{1/2} = \frac{1}{L}\left(L^2 - R^2\text{sen}^2\theta\right)^{1/2}.$$

Por consiguiente

$$x = R\cos\theta + \left(L^2 - R^2\text{sen}^2\theta\right)^{1/2},$$

Con $\theta = \omega t$ da

$$x = R\cos\omega t + \left(L^2 - R^2\text{sen}^2\theta\right)^{1/2}$$

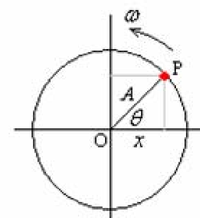
Esta expresión da el desplazamiento de P en función del tiempo. Cuando comparamos esta ecuación con la ecuación $x = A\text{sen}(\omega t+\varphi)$, vemos que el primer término, $R\cos\omega t$, corresponde al movimiento armónico simple con $\varphi = \pi/2$, pero el segundo no. Así, aunque el movimiento de P es oscilatorio, no es armónico simple

Un ingeniero mecánico al diseñar un mecanismo como el de la figura tiene que pensar cómo aplicar la fuerza correcta en P de modo que el desplazamiento x esté dado por la ecuación expresada líneas arriba, de modo que la rueda se mueve con movimiento circular uniforme. Cuando P está unido al pistón de una máquina de vapor, esto se lleva a cabo regulando la admisión de vapor.

EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE Y EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

La posición.

El movimiento armónico simple (MAS) se puede relacionar con el movimiento circular de la manera siguiente. Imagine una clavija P unida a una rueda orientada con su eje perpendicular al plano de la figura siguiente. La clavija está una distancia A del eje, y la rueda rota con velocidad angular constante ω. Se proyecta la clavija sobre el eje horizontal (el eje de x en la figura).



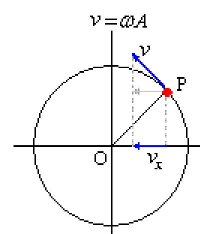
En t = 0, la clavija en toda la trayectoria está a la derecha y la proyección está en $x = A$.

La posición de la proyección es

$x = A\cos\theta = A\cos\omega t$.

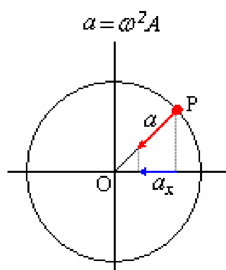
La velocidad.

La velocidad tangencial de la clavija tiene una magnitud $A\omega$, y su proyección en el eje x es $v = -A\omega\text{sen}\omega t$ como se muestra en la figura siguiente.



La aceleración.

La aceleración de la clavija (centrípeta) es $A\omega^2$ dirigida como se muestra en la figura siguiente.



La proyección de la aceleración en el eje de *x* es $a = -A\omega^2 \cos\omega t$. Así vemos que la posición en el eje *x* exhibe el movimiento armónico simple desde que las ecuaciones para *x*, *v*, y *a* son iguales a lo obtenido arriba. Si en vez de fijar *t* = 0 cuando la proyección estaba toda a la derecha, nosotros hubiésemos elegido otro punto de partida con $\omega t = 0$, nuestras ecuaciones habrían incluido el ángulo de la fase φ.
De la discusión anterior se puede ver porque se designa con la letra ω a la velocidad angular, así como también a la frecuencia angular.

Ejemplo 3. Un punto material de 2,5 kg experimenta un movimiento armónico simple de 3 Hz de frecuencia. Hallar:
a) Su frecuencia.
b) Su aceleración cuando la elongación es de 5 cm.
c) El valor de la fuerza recuperadora para esa elongación.
Solución.
La pulsación se relaciona con la frecuencia mediante la expresión:
a) $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ rad.
b) $a = \omega^2 \cdot s = (6\pi)^2 \cdot 0{,}05 = 17{,}8$ m/s.
c) F = m·s = 2,5 ·17,8 = 44,4 N. de prescinde del signo "-" en la expresión de la aceleración pues tal signo únicamente indica que el sentido de esta magnitud es contrario al de la elongación.

Ejemplo 4. La amplitud de un móvil que describe un MAS, viene dada, en función del tiempo, por la expresión: $y = 2\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (SI). Determinar:
a) Amplitud, frecuencia y periodo del movimiento.
b) Fase del movimiento en *t* = 2s.
c) Velocidad y aceleración del móvil en función del tiempo.
d) Posición, velocidad y aceleración del móvil en *t* = 1 s.
e) Velocidad y aceleración máximas del móvil.
f) Desplazamiento experimentado por el móvil entre *t* = 0 y *t* = 1 s.

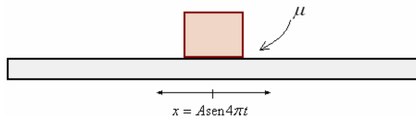
Solución.
a) Por comparación con la ecuación general $y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ se deduce que:
A = 2 m
$\omega = \pi$ y como $\omega = 2\pi f$; $\pi = 2\pi f$; $f = 0{,}5\ s^{-1}$
T = 1/*f* = 1/0,5 = 2s.
b) La fase viene dada, en este caso por
$\phi = \pi t + \pi/4$; $\phi = 2\pi + \pi/4 = 9\pi/4$ rad φ
c) Derivando la ecuación de la elongación respecto a la variable *t* tenemos la ecuación de la velocidad:
$$v = \frac{dy}{dt} = -2\pi \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (SI)}$$
d) Derivando de nuevo respecto a la variable *t* obtenemos la ecuación de la aceleración:
$$a = \frac{dv}{dt} = -2\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (SI)}$$
Sustituyendo en las ecuaciones correspondientes:
y = -1,4142 m. ; *v* = 4,44 m/s. ; *a* = 13,96 m/s²
e) La velocidad máxima se adquiere cuando el seno del ángulo vale 1;
$v_{máx} = \pm 6{,}29 \text{m/s}$
y la aceleración máxima cuando el coseno del ángulo vale 1;
$a_{máx} = \pm 19{,}72 \text{m/s}^2$
f) El desplazamiento Δy viene dado por la diferencia entre *y* para *t* = 1 e *y* para *t* = 0.
El valor de *y* para *t* = 1 es y_1 = - 1,4142 m,
y para *t* = 0 es y_0 = 2cos π/4 = 1,4142m ;
Δy = -1,4142 -1,4142 = -2,83 m

Ejemplo 5. Sostengo con la palma de la mano abierta una caja de fósforos. De repente comienzo a mover la mano verticalmente con un movimiento armónico simple de 5 cm amplitud y frecuencia progresivamente creciente. ¿Para qué frecuencia dejará la caja de fósforos de estar en contacto con la mano?



Solución.
Cuando baja la palma de la mano, la caja de fósforos, a partir de la posición de equilibrio, se encuentra sometida a la aceleración de la gravedad, *g*, constante en todo momento, y dirigida verticalmente hacia abajo, y a la aceleración correspondiente al movimiento armónico simple:
$\omega^2 y = 4\pi^2 f^2 y$, dirigida hacia arriba y que alcanza el valor máximo en el extremo de la trayectoria: $a_{máx} = 4\pi^2 f^2 A$ a_{max} .
Cuando esta última aceleración iguale o supere a la de la gravedad la caja de fósforos dejará de estar en contacto con la mano. Eso sucederá cuando:
$4\pi^2 f^2 A = g \Rightarrow f = 2{,}23\ s^{-1}$

Ejemplo 6. Un bloque descansa sobre una superficie horizontal.
a) Si la superficie se encuentra en movimiento armónico simple en dirección paralela al piso, realizando dos oscilaciones por segundo. El coeficiente estático de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,5. ¿Qué magnitud debe tener la amplitud de cada oscilación para que no haya deslizamiento entre el bloque y la superficie?
b) Si la plataforma horizontal vibra verticalmente con movimiento armónico simple de amplitud 25 mm. ¿Cuál es la frecuencia mínima para que el bloque deje de tener contacto con la plataforma?
Solución.



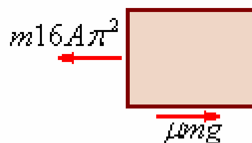
f = 2 c/s $\Rightarrow \omega = 2\pi f = 4\pi$

$x = A\text{sen}\,\omega t \quad x = A\text{sen}\,4\pi t$

Su aceleración es:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A16\pi^2\text{sen}\,\omega t \Rightarrow a_{máx} = 16A\pi^2$$

El bloque dejará de tener contacto con la superficie cuando la fuerza de fricción que la sostiene fija al piso sea menor que la fuerza de inercia, eso sucede cuando $ma_{máx} = F_f$

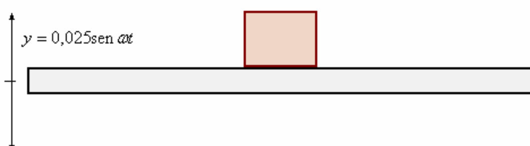


$$m16A\pi^2 = \mu mg \Rightarrow A = \frac{\mu g}{16\pi^2} =$$

$$A = \frac{(0,5)(9,8)}{16\pi^2} = 0,031 \text{ m}$$

A = 31 mm

b)



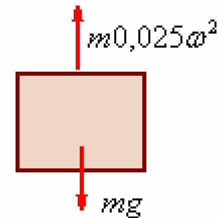
$$y = 0,025\text{sen}\,\omega t$$

Su aceleración es:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -0,025\omega^2\text{sen}\,\omega t$$

$$\Rightarrow a_{máx} = 0,025\omega^2$$

El bloque dejará de tener contacto con la superficie cuando la fuerza de fricción que la sostiene fija al piso sea mayor que el peso del objeto, eso sucede cuando $ma_{máx} = mg$



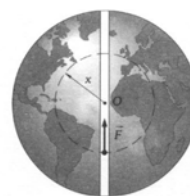
$$m0,025\omega^2 = mg \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{0,025}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{0,025}} = 19,8 \text{ rad/s}$$

f = 3,15 c/s

Ejemplo 7. Si la Tierra fuese homogénea y se hiciese un conducto recto de polo a polo, al dejar caer por él un cuerpo desde uno de los polos.
a) Demostrar que adquirirla un movimiento armónico simple (MAS).
b) Calcular el período de este movimiento.

Solución.



a) La ley de la gravitación universal nos dice:

$$\vec{F} = -G\frac{M'm}{r^2}\hat{r}$$

En módulo: $F = -G\dfrac{M'm}{x^2}$

el signo menos nos indica que F va dirigida hacia O.
En nuestro problema M' la masa encerrada dentro del círculo de puntos de la figura. Si llamamos ρ a la densidad de la Tierra, tendremos:

$$M' = V\rho = \frac{4}{3}\pi x^3\rho$$

Por la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$F = -G\frac{M'm}{x^2} = m\ddot{x}$$

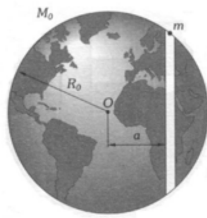
Luego: $F = -\frac{4\pi\rho Gm}{3}x = -kx$

De aquí $k = \frac{4\pi\rho Gm}{3}$

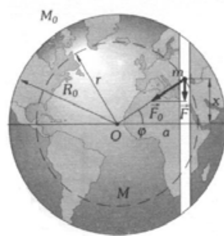
El movimiento es, por tanto, vibratorio armónico simple.
b) de período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}}$$

Ejemplo 8. Si la Tierra fuese homogénea y se hiciese en conducto recto como se indica en la figura, al dejar caer por él un cuerpo de masa m
a) demostrar que adquiriría un movimiento oscilatorio armónico simple.
b) Calcular el período de ese movimiento.
Suponer que no existen rozamientos entre el cuerpo y las paredes del conducto.



Solución.
a) Llamando *M* a la masa de Tierra encerrada en la esfera de radio *r*, obtenemos para valor del módulo de la fuerza F_0 que representamos en la figura:



$$F_0 = G\frac{Mm}{r^2}$$

Como: $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} = \frac{M_0}{V_0}$

$$M = \frac{r^3}{R_0^3}M_0$$

Sustituyendo, teniendo en cuenta que

$$G\frac{M_0 m}{R_0^2} = mg_0 \Rightarrow GM_0 = g_0 R_0^2,$$

Obtenemos: $F_0 = \frac{mg_0 r}{R_0}$

La fuerza responsable del movimiento es:

$$F = -\frac{mg_0 r}{R_0}\operatorname{sen}\varphi, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{x}{R}$$

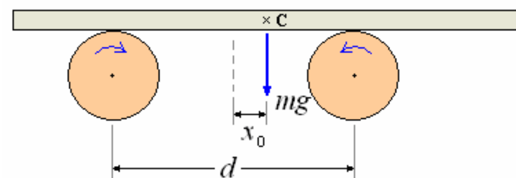
De aquí

$$F = -\frac{mg_0}{R_0}x = -kx$$

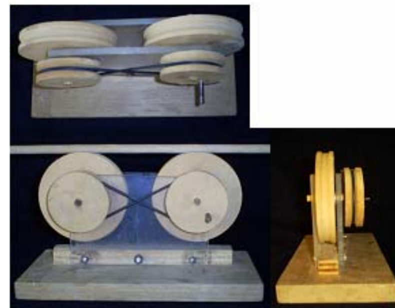
El signo menos nos indica que va dirigida hacia abajo.
El movimiento es oscilatorio armónico simple.
b) de período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g_0}} = 84 \text{ min}$$

Ejemplo 9. Una barra pesada uniforme de masa *m* reposa sobre dos discos iguales que son girados continuamente en sentidos opuestos, como se muestra. Los centros de los discos esta separados una distancia d. El coeficiente fricción entre las barras y la superficie de los discos es μ, constante independiente de la velocidad relativa de las superficies.
Inicialmente la barra se mantiene en reposo con su centro a una distancia x_0 del punto equidistante de los discos. Al tiempo $t = 0$ se suelta. Encontrar el movimiento subsiguiente de la barra.



Solución.
Aparato



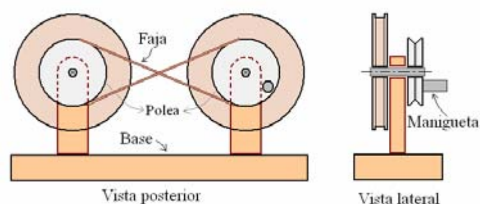
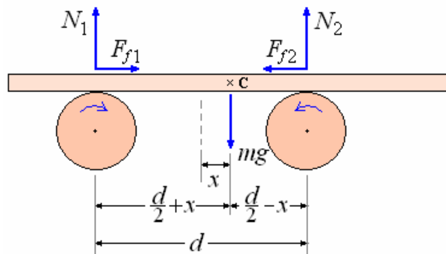


Diagrama de cuerpo libre de la barra
Las fuerzas actuantes sobre la viga se muestran en dibujo siguiente. Los centros de los discos están separados una distancia *d*. Las fuerzas de rozamiento son en sentidos opuestos.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$F_y=0$: $\quad N_1 + N_2 - mg = 0 \quad$ (1)

$\tau_C = 0: \quad -N_1\left(\frac{d}{2}+x\right) + N_2\left(\frac{d}{2}-x\right) = 0$

(2)

La ecuación de momentos (2) se escribe con respecto al centro de gravedad C de la barra, Despejando N_1 y N_2 de (1) y (2), obtenemos

$$N_1 = \frac{1}{2}mg\left(\frac{d}{2}-x\right), \quad N_2 = \frac{1}{2}mg\left(\frac{d}{2}+x\right)$$

Como $\sum F = ma$, para la barra, obtenemos:

$$F_{f1} - F_{f2} = m\ddot{x} \Rightarrow \mu N_1 - \mu N_2 = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu mg\left[\left(\frac{d}{2}-x\right)-\left(\frac{d}{2}+x\right)\right] = m\ddot{x}$$

Simplificando:

$$\ddot{x} + \left(\frac{2\mu g}{d}\right)x = 0 .$$

Ecuación correspondiente al movimiento armónico simple, cuya frecuencia natural es ω_o es

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2\mu g}{d}} \text{ rad/s}$$

La ecuación del movimiento de la barra.

$$x = x_0 \cos \omega_0 t$$

La barra se mantiene un moviendo oscilatorio armónico simple sobre los discos que giran en sentidos opuestos.

ENERGIA EN EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Como oscilador armónico simple es un sistema conservativo, la fuerza se puede derivar de la función energía potencial.

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Como $F = -kx$, tenemos: $\frac{dU}{dx} = kx$

$$U = \int dU = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

La energía potencial del oscilador armónico simple es $U = \frac{1}{2}kx^2$

Como hemos visto es la energía de deformación elástica del resorte.

Como

$x = A\text{sen}(\omega t - \varphi)$, y $x_{max} = A$

Se tiene

$$U_{max} = \frac{1}{2}kA^2$$

Por otra parte la energía cinética del oscilador armónico simple es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2$$

Como

$\dot{x} = A\cos(\omega t - \varphi)$,

Con

$\dot{x}_{max} = A\omega$, se tiene

$$K_{max} = \frac{1}{2}m\dot{x}_{max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

La Energía mecánica total es:

$$E = K + U$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos(\omega t - \varphi)$$

Como

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\text{sen}^2(\omega t - \varphi)$$

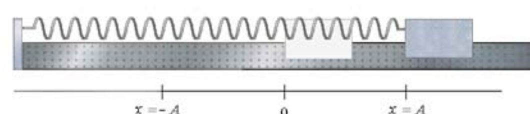
$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \text{Constante}$$

O sea que

$$E = K + U = K_{max} = U_{max}$$

PROBLEMA BASICO MASA – RESORTE
Resorte horizontal.

En nuestra primera referencia a este tipo de sistemas**,** considerábamos que estaba compuesto por un solo objeto de masa *m* sujeto a un resorte de constante *k* y longitud ℓ o a otro dispositivo equivalente, por ejemplo, un alambre delgado, que proporciona una fuerza restauradora igual al producto de cierta constante *k* por el desplazamiento respecto al equilibrio.

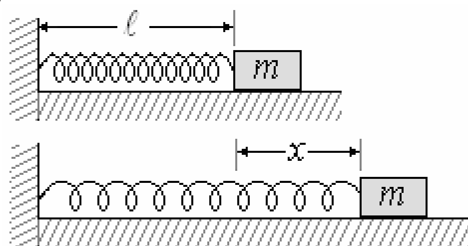


Esto sirve para identificar, en función de un sistema de un tipo particular sencillo, las dos características

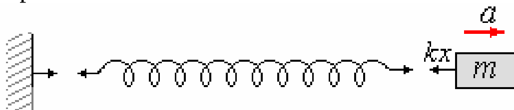
que son esenciales en el establecimiento de movimientos oscilantes:
1. Una componente inercial, capaz de transportar energía cinética.
2. Una componente elástica, capaz de almacenar energía potencial elástica.

Admitiendo que la ley de Hooke es válida, se obtiene una energía potencial proporcional al cuadrado del desplazamiento del cuerpo respecto al equilibrio igual a $\frac{1}{2}kx^2$. Admitiendo que toda la inercia del sistema está localizada en la masa al final del resorte, se obtiene una energía cinética que es precisamente igual $\frac{1}{2}mv^2$, siendo *v* la velocidad del objeto. Debe señalarse que ambas hipótesis particularizaciones de las condiciones generales 1 y 2 y que habrá muchos sistemas oscilantes en que no se apliquen estas condiciones especiales. Sin embargo, si un sistema *puede* considerarse compuesto efectivamente por una masa concentrada al final de un resorte lineal ("lineal" se refiere a su propiedad y no a su forma geométrica), entonces podemos escribir su ecuación del movimiento mediante uno de estos dos procedimientos:

1. Mediante la segunda ley de Newton *(F = ma),*
$$-kx = ma$$
2. Por conservación de la energía mecánica total *(E),*
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$
La segunda expresión es, naturalmente, el resultado de integrar la primera respecto al desplazamiento *x*, pero ambas son *ecuaciones diferenciales* del movimiento del sistema.
Vamos a aplicar la segunda ley de Newton (*F* = *ma*), en el instante en que el resorte se a estirado una longitud *x*



La figura a continuación muestra el diagrama del cuerpo libre de la masa.



Aplicando la segunda ley de Newton (*F* = *ma*),

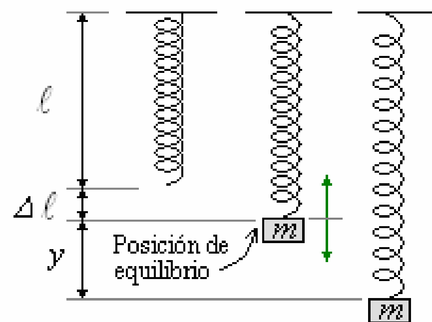
$$-kx = ma \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \text{ o } m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Cuando se vea una ecuación análoga a éstas se puede llegar a la conclusión de que el desplazamiento *x* es una función del tiempo de la forma

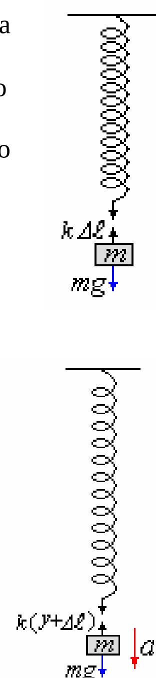
$x(t) = A\text{sen}(\omega t - \varphi)$, en donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ siendo k la constante del resorte y m la masa.
Esta solución seguirá siendo válida, aunque el sistema no sea un objeto aislado sujeto a un resorte carente de masa.
La ecuación contiene otras dos constantes, la amplitud *A* y la fase inicial φ, que proporcionan entre las dos una especificación completa del estado de movimiento del sistema para *t* = 0 (u otro tiempo señalado).

Resorte vertical.
Hasta este punto hemos considerado solamente resortes en posición horizontal, los que se encuentran sin estirar en su posición de equilibrio. En muchos casos, sin embargo, tenemos resortes en posición vertical.



El resorte tiene una longitud original ℓ, cuando se ata una masa *m* a un resorte en posición vertical, el sistema está en equilibrio cuando el resorte ejerce una fuerza hacia arriba igual al peso de la masa. Esto es, el resorte se estira una longitud $\Delta\ell$ dada por

$$k\Delta\ell = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = \frac{mg}{k}$$



Por consiguiente, una masa en un resorte vertical oscila alrededor de la posición de equilibrio.
Aplicando la segunda ley de Newton $(F = ma)$,
$$-k(y + \Delta\ell) + mg = ma$$
$$\Rightarrow -ky - k\Delta\ell + mg = ma$$
Como $k\Delta\ell = mg$:
$$-ky = ma$$
$$\Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \text{ o } m\ddot{y} + ky = 0$$

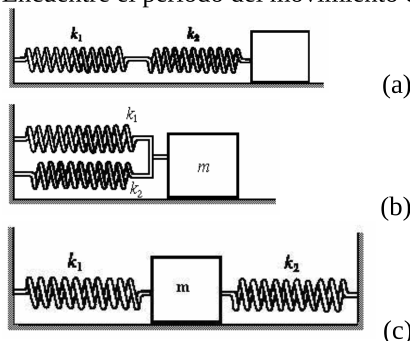
$$\ddot{y}+\frac{k}{m}y=0$$

En todos los otros aspectos las oscilaciones son iguales que para el resorte horizontal.

$$y(t)=A\text{sen}(\omega t-\varphi)$$

El moviendo es armónico simple y la frecuencia está dada por $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, siendo k la constante del resorte y m la masa.

Ejemplo 10. Una masa *m* se conecta a dos resortes de constantes fuerza k_1 y k_2 como en las figuras a , b y c. En cada caso, la masa se mueve sobre una superficie sin fricción al desplazarse del equilibrio y soltarse. Encuentre el periodo del movimiento en cada caso.



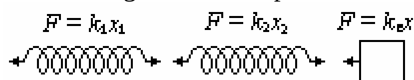
(a)

(b)

(c)

Solución.

a) Haciendo el diagrama de cuerpo libre.



Para cada uno de los resortes:

$$\sum F_x = ma_x,\ F=k_1x_1,\ F=k_2x_2$$

Visto en conjunto la masa oscila debido a un resorte equivalente: $F=k_ex$, donde $x=x_1+x_2$

Luego, podemos escribir.

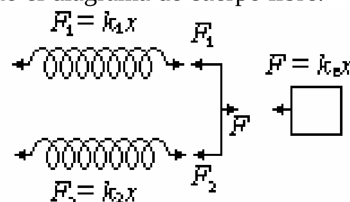
$$\frac{F}{k_e}=\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{k_e}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2},$$

y $k_e=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$,

Con esto $\omega=\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$ y

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$$

b) Haciendo el diagrama de cuerpo libre.



Para cada uno de los resortes:

$$\sum F_x = ma_x,\ F_1=k_1x,\ F_2=k_2x$$

Visto en conjunto la masa oscila debido a un resorte equivalente: $F=k_ex$, ahora $F=F_1+F_2$

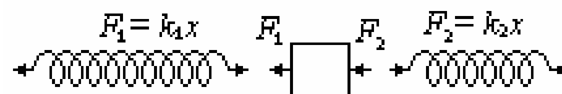
Luego, podemos escribir.

$$k_ex=k_1x+k_2x\ \Rightarrow\ k_e=k_1+k_2$$

,

Con esto $\omega=\sqrt{\frac{(k_1+k_2)}{m}}$ y $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{(k_1+k_2)}}$

c) Haciendo el diagrama de cuerpo libre.



Para cada uno de los resortes:

$$\sum F_x = ma_x,\ F_1=k_1x,\ F_2=k_2x$$

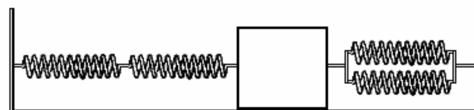
Visto en conjunto la masa oscila debido a un resorte equivalente: $F=k_ex$, ahora $F=F_1+F_2$

Luego, podemos escribir.

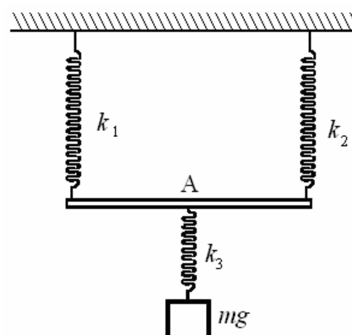
$$k_ex=k_1x+k_2x\ \Rightarrow\ k_e=k_1+k_2,$$

Con esto $\omega=\sqrt{\frac{(k_1+k_2)}{m}}$ y $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{(k_1+k_2)}}$

¿Cuál sería el periodo para el caso de la figura siguiente?

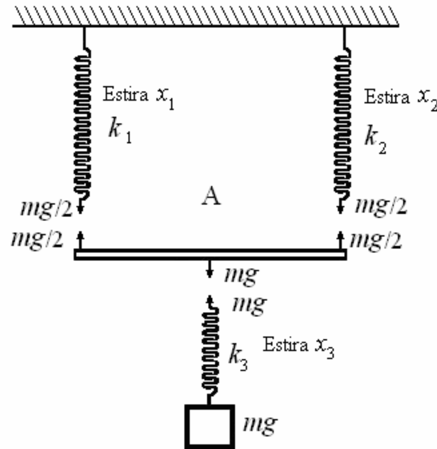


Ejemplo 11. Al suspender un cuerpo de masa *m* de un resorte de constante k_1, y separarlo ligeramente de su posición de equilibrio, el sistema oscila con una frecuencia f_1. Si ahora este resorte se monta como indica la figura, junto con otros dos, de constantes $k_2 = 2k_1$ y $k_3 = 4k_1$, utilizando una barra de peso despreciable, ¿cuál será la nueva frecuencia propia del sistema con relación a la anterior? A es el punto medio de la barra.



Solución.

Como k_1 es diferente k_2 , los estiramientos de los resortes no son iguales, por lo tanto no podemos considerar la suma de las constantes como la constante equivalente de la parte en paralelo.
En este caso vamos hallar directamente la constante equivalente del conjunto.



El estiramiento del resorte 1 es:

$$x_1 = \frac{mg/2}{k_1} = \frac{mg}{2k_1}$$

El estiramiento del resorte 2 es:

$$x_2 = \frac{mg/2}{k_2} = \frac{mg}{4k_1}$$

El estiramiento del resorte 3 es:

$$x_3 = \frac{mg}{k_3} = \frac{mg}{4k_1}$$

Con el peso mg el resorte se estira

$$x = \frac{x_2 + x_2}{2} + x_3$$

Siendo $x = \dfrac{mg}{k_{eq}}$

Reemplazando x, x_1, x_2 y x_3:

$$\frac{mg}{k_{eq}} = \frac{\dfrac{mg}{2k_1} + \dfrac{mg}{4k_1}}{2} + \frac{mg}{4k_1} = \frac{5mg}{8k_1} \Rightarrow$$

$$k_{eq} = \frac{8}{5} k_1$$

La frecuencia del conjunto es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{8k_1}{5m}} = 2\pi f$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8k_1}{5m}}$$

Como la frecuencia del resorte 1 es

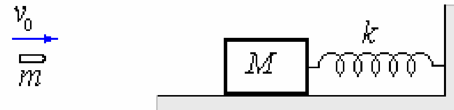
$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

Obtenemos:

$$\frac{f}{f_1} = \sqrt{\frac{8}{5}} = 1{,}26 .$$

Ejemplo 12. Un pequeño proyectil de masa 10 g que vuela horizontalmente a velocidad 20 m/s impacta plásticamente contra un bloque de madera de masa 190 g unido a un resorte ideal de constante 500 N/m que se halla en posición horizontal. Determine la amplitud y frecuencia de las oscilaciones producidas.

Solución.



Por conservación de cantidad de movimiento:

$$mv_0 = (m + M)v_1$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m}{(m+M)} v_0$$

$$= \frac{10}{(10+190)} 20 = 1\frac{m}{s}$$

Por conservación de energía:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(0{,}2kg)\left(1\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{2}\left(500\frac{N}{m}\right)A^2$$

De aquí: $A = 0{,}02m = 2cm$

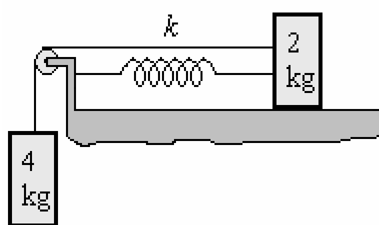
La frecuencia se obtiene de

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{(m+M)}} \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{(m+M)}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{500}{0{,}2}} = \frac{25}{\pi} = 7{,}96Hz$$

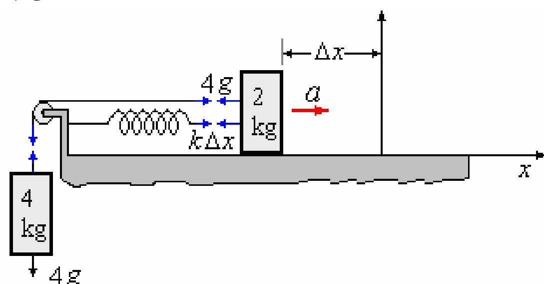
Ejemplo 13. En el diagrama de la figura el resorte tiene masa despreciable y una longitud de 20cm cuando está sin deformar. Un cuerpo de 2kg. Unido al resorte puede moverse sobre una superficie plana horizontal lisa. A dicho cuerpo se le ata un hilo que pasa por una polea sin rozamiento y del cual pende un cuerpo de 4kg. El sistema se halla inicialmente en reposo en la posición representada y la longitud del resorte comprimido es de 15cm. Se corta entonces el hilo y el cuerpo de 2 kg empieza a oscilar con movimiento armónico simple.



a) ¿Cuál es el valor de “k”?
b) Hallar la ecuación diferencial
c) Hallar la amplitud de oscilación y la frecuencia natural del MAS.
d) Hallar la energía mecánica del sistema.

Solución.

a) ¿Cuál es el valor de “k”?



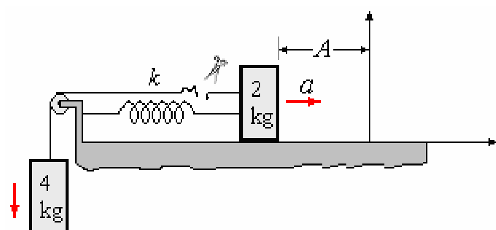
$\Delta x = 0{,}2 - 0{,}15$ = 0,05 m

$F = k\Delta x$

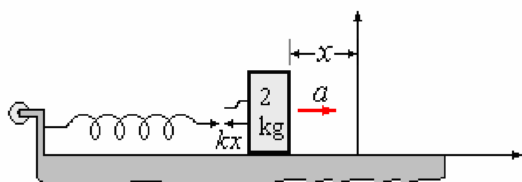
$\Rightarrow\ k = \dfrac{F}{\Delta x} = \dfrac{mg}{\Delta x} = \dfrac{4(9{,}8)}{0{,}05}$ = 784 N/m

b) Hallar la ecuación diferencial

Al cortar la cuerda



Vamos a aplicar la segunda ley de Newton ($F = ma$) al cuerpo de masa 2 kg en el instante en que el resorte está comprimido una longitud x



$-kx = ma \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ o $m\ddot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0 \ \Rightarrow\ \ddot{x} + \dfrac{784}{2}x = 0$

$\Rightarrow\ \ddot{x} + 392x = 0$

c) La amplitud del movimiento es A = 0,05 m, la frecuencia angular es $\omega = \sqrt{392}$ = 19,8 rad/s

La frecuencia es: $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{19{,}8}{2\pi}$ = 3,15 c/s

d) Hallar la energía mecánica del sistema.

$E = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}784(0{,}05)^2$ = 0,98 J

PÉNDULOS

Péndulo simple

Un ejemplo de movimiento armónico simple es el movimiento de un péndulo. Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida del punto O por una cuerda de longitud ℓ y de masa despreciable. Si la partícula se lleva a la posición B de modo que la cuerda haga un ángulo θ con la vertical OC, y luego se suelta, el péndulo oscilará entre B y la posición simétrica B’.

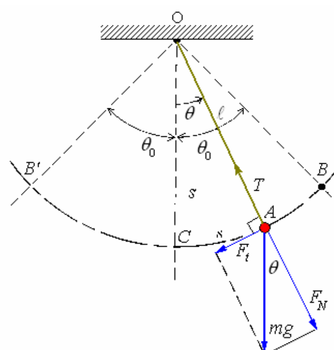
Para determinar la naturaleza de las oscilaciones, debemos escribir la ecuación de movimiento de la partícula. La partícula se mueve en un arco de circulo de radio ℓ = OA. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso mg y la tensión T a lo largo de la cuerda. De la figura, se ve que la componente tangencial de la fuerza es

$F_t = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta$, donde el signo menos se debe a que se opone al desplazamiento s = CA. La ecuación del movimiento tangencial es $F_t = ma_t$ y, como la partícula se mueve a lo largo de un círculo de radio ℓ, podemos usar la ecuación

$a_t = \dfrac{dv}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$ (reemplazando R por ℓ) para expresar la aceleración tangencial.

Esto es $a_t = \ell\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ell\ddot{\theta}$. La ecuación del movimiento tangencial es por consiguiente

$m\ell\ddot{\theta} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta$ o $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\mathrm{sen}\,\theta = 0$



Movimiento osci1atorio de un péndulo.

Esta ecuación no es del mismo tipo que la ecuación $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ debido a la presencia del $sen\theta$ Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, lo cual es cierto si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, podemos usar la aproximación $sen\theta \approx \theta$ y escribir para el movimiento del péndulo

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

Esta es la ecuación diferencial idéntica a la ecuación $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ si reemplazamos x por θ, esta vez refiriéndonos al movimiento angular y no al movimiento lineal. Por ello podemos llegar a la conclusión que, dentro de nuestra aproximación, el movimiento angular del péndulo es armónico simple con $\omega^2=\frac{g}{\ell}$. El ángulo θ puede así expresarse en la forma $\theta=\theta_0\cos(\omega t+\varphi)$, el período de oscilación está dado por la expresión

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Nótese que el período es independiente de la masa del péndulo. Para mayores amplitudes, la aproximación $\text{sen}\theta\approx\theta$ no es válida.

Ejemplo 14. Calcular la tensión en la cuerda de un péndulo en función del ángulo que hace la cuerda con la vertical.

Solución.

Para calcular la tensión *T*, primero obtenemos la fuerza centrípeta sobre la partícula,

$F_c=T-F_N=T-mg\cos\theta$,

ya que, de la figura del péndulo simple, F_N está dada por $mg\cos\theta$. Luego igualando esta expresión a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta mv^2/ℓ (nótese que ℓ es el radio), con esto obtenemos

$$T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{\ell}$$

Para conseguir la velocidad usamos la conservación de la energía considerando como nivel 0, el punto de suspensión del péndulo:

$$\frac{1}{2}mv^2-mg\ell\cos\theta=-mg\ell\cos\theta_0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2=mg\ell(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

Esto es, $v^2=2g\ell(\cos\theta-\cos\theta_0)$

y por lo tanto

$$T=mg(3\cos\theta-2\cos\theta_0)$$

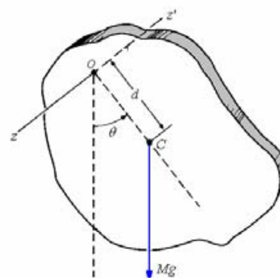
Péndulo compuesto

Un péndulo compuesto (o físico) es cualquier cuerpo rígido que puede oscilar libremente alrededor de un eje horizontal bajo la acción de la gravedad. Sea ZZ' el eje horizontal y C el centro de masa del cuerpo. Cuando la línea OC hace un ángulo θ con la vertical, el torque alrededor del eje *z* actuante sobre el cuerpo es $\tau_z=-Mgd\text{sen}\theta$, donde *d* es la distancia OC entre el eje *z* y el centro de masa C. Si I es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje *z*, y $\alpha=\ddot{\theta}$ es la aceleración angular.

Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación $\sum\tau=I\alpha$ obtenemos:

$-Mgd\text{sen}\theta=I\ddot{\theta}$. Suponiendo que las oscilaciones son de pequeña amplitud, podemos suponer que $sen\theta\approx\theta$, de modo que la ecuación del movimiento es

$$\ddot{\theta}=-\frac{Mgd}{T}\theta \quad \text{o} \quad \ddot{\theta}+\frac{Mgd}{T}\theta=0$$

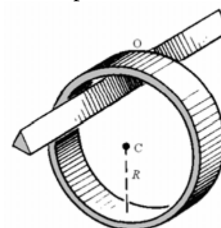


Péndulo compuesto.

Podemos comparar esta ecuación del movimiento comparar con la ecuación $\ddot{x}+\omega^2 x=0$, demostrando que el movimiento angular oscilatorio es armónico simple, con $\omega^2=\frac{Mgd}{I}$. Por consiguiente, el período de las oscilaciones es

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

Ejemplo 15. Un anillo de 0,10 m de radio está suspendido de una varilla, como se ilustra en la figura. Determinar su período de oscilación.



Solución.

Designando el radio del anillo por R, su momento de inercia con respecto a un eje que pasa a través de su centro de masa C es $I_C=mR^2$. Entonces, si aplicamos el teorema de Steiner $\left(I_O=I_C+Md^2\right)$,

en este caso $d = R$, el momento de inercia con respecto a un eje que pasa a través del punto de suspensión O es

$$I = I_C + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2,$$

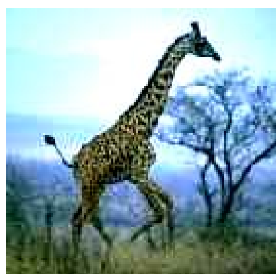
Para un péndulo físico o compuesto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$, luego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Lo cual indica que es equivalente a un péndulo simple de longitud $2R$, o sea el diámetro del anillo.
Al reemplazar los valores de R = 0,10 m y g = 9,8 m/s^2 obtenemos T = 0,88 s.

Ejemplo 16. En una caminata normal, las piernas del ser humano o del animal oscilan libremente más o menos como un péndulo físico. Esta observación ha permitido a los científicos estimar la velocidad a la cual las criaturas extintas tales como los dinosaurios viajaban. ¿Si una jirafa tiene una longitud de piernas de 1.8 m, y una longitud del paso de 1 m, qué estimaría usted para el período de la oscilación de la pierna? ¿Cuál sería su velocidad al caminar?



Solución.
Podemos modelar la pierna de la jirafa como un péndulo físico de longitud L que oscila alrededor de un extremo. Su momento de inercia alrededor del punto de oscilación es $I = \frac{1}{3}mL^2$

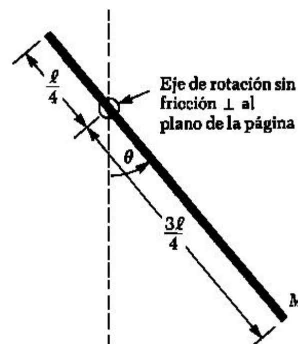
El periodo de un péndulo físico es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

= 2,2 s

$$v = \frac{\text{longitud del paso}}{\text{periodo}} = \frac{1\,\text{m}}{2,2\,\text{s}} = 0,46\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 17. Considere una barra delgada con masa M = 4 kg y de longitud L = 1,2 m pivotada en un eje horizontal libre de fricción en el punto L/4 desde un extremo, como se muestra en la figura.
a) Encuentre (a partir de la definición) la expresión para el momento de inercia de la barra respecto del pivote.
b) Obtenga una ecuación que dé la aceleración angular α de la barra como función de θ.
c) Determine el periodo para pequeñas amplitudes de oscilación respecto de la vertical.



Solución.
a)

$$I = \int r^2 dM = \int_0^{L/4}\frac{r^2 M}{L}dr = \int_0^{3L/4}\frac{r^2 M}{L}dr$$

$$= \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{4}\right)^3 + \left(\frac{3L}{4}\right)^3\right]$$

$$= \frac{M}{3L}\left(\frac{28L^3}{64}\right) = \frac{7ML^2}{48}$$

b) $r = \frac{-MgL}{4}\text{sen}\theta = I_0\alpha$

$$\alpha = \frac{MgL}{4I_0}\text{sen}\theta = -\frac{12g}{7L}\theta$$

Para oscilaciones pequeñas,

$$\alpha = -\frac{12g}{7L}\theta$$

c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{MgL/4}} = 2\pi\sqrt{\frac{7L}{12g}}$

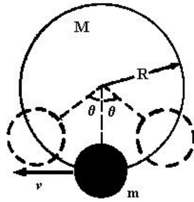
= 1,68 s

Ejemplo 18. Un disco pequeño delgado de masa m y radio r se sujeta firmemente a la cara de otro disco delgado de radio R y masa M, como se muestra en la figura. El centro del disco pequeño se localiza en el borde del disco mayor. El disco mayor se monta por su centro en un eje sin fricción. El dispositivo se gira un ángulo θ y se suelta
a) Demuestre que la rapidez del disco pequeño cuando pasa por la posición de equilibrio es

$$v = 2\sqrt{gR\frac{(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m}+\frac{r^2}{R^2}+2\right)}}$$

b) Demuestre que el periodo del movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+2m)R^2 + mr^2}{2mgR}}$$



Solución.

a) $E = K + U$ = constante, Luego

$K_{arriba} + U_{arriba} = K_{abajo} + U_{abajo}$

Como $K_{arriba} = U_{abajo} = 0$

Obtenemos $mgh = \frac{1}{2} I\omega^2$, pero

$h = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$, $\omega = \frac{v}{R}$ e

$I = \frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2} + mR^2$. Sustituyendo encontramos

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + \frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$mgR(1-\cos\theta) = \left(\frac{M}{4} + \frac{mr^2}{2R^2} + \frac{m}{2}\right)v^2$$ y

$$v^2 = 4gR\frac{(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m} + \frac{r^2}{R^2} + 2\right)}$$

de aquí

$$v = 2\sqrt{gR\frac{(1-\cos\theta)}{\left(\frac{M}{m} + \frac{r^2}{R^2} + 2\right)}}$$

b) Para un péndulo físico

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$, aquí $M = m + M$;

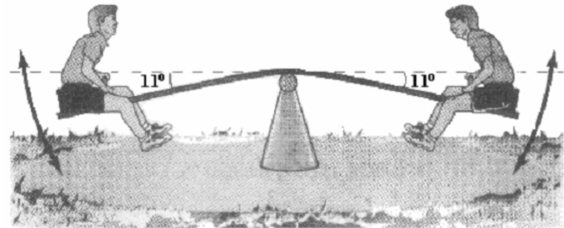
$$d = \frac{mR + M(0)}{m+M} = \frac{mR}{(m+M)}$$

Luego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2} + mR^2\right)}{(m+M)g\left[\frac{mR}{(m+M)}\right]}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+2m)R^2 + mr^2}{2mgR}}$$

Ejemplo 19. Problema del sube y baja. Una barra de 4,2 m de longitud, 8,5 kg de masa tiene un doblez de 202º en su centro de tal manera que queda como muestra la figura. El doblez de la barra reposa sobre un apoyo agudo. Los gemelos de masa 44 kg cada uno, sentados en los extremos opuestos de la barra se balancean. ¿Cuál es el periodo del movimiento de este sube y baja modificado?



Solución.

La ecuación del péndulo físico puede encontrarse aplicando la segunda ley de Newton para la rotación:

$$\sum \tau_O = I_O\alpha$$

$$-mgd\,\text{sen}\,\theta = I_O\ddot{\theta},$$

m es la masa total del sistema.,

g la aceleración de la gravedad,

d la distancia del punto de apoyo al centro de masa del sistema.

I_O es el momento de inercia del sistema con respecto al apoyo (centro de oscilación)

y θ es el ángulo que forma la línea que pasa por el punto de apoyo y por el centro con la vertical cuando el sistema está oscilando.

Luego $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_O}\text{sen}\,\theta = 0$, para oscilaciones pequeñas $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_O}\theta = 0$,

De aquí $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_O}}$

Reemplazando valores:

$m = 2(44) + 8,5 = 96,5$ kg,

$$d = \frac{2(44)(2,1)\text{sen}11^0 + 2((4,25)(1,05)\text{sen}11^0}{96,5}$$

$$= 0,38\,\text{m}$$

$$I_O = 2(44)(2,1)^2 + 2\frac{1}{3}(4,25)(2,1)^2$$

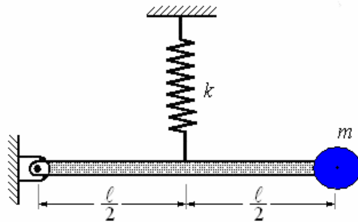
$$= 400,56\,\text{kgm}^2$$

Luego:

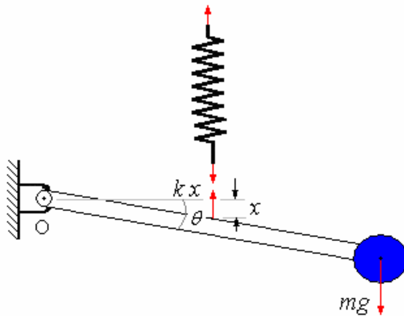
$$\omega = \sqrt{\frac{96,5(9,8)0,38}{400,56}} = 0,95\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

SISTEMAS DE PENDULOS Y RESORTES

Ejemplo 20. El sistema mostrado en la figura consiste de una barra de masa despreciable, pivotada en O, Una masa m pequeña en el extremo opuesto a O y un resorte de constante *k* en la mitad de la barra. En la posición mostrada el sistema se encuentra en equilibrio. Sí se jala la barra hacia abajo un ángulo pequeño y se suelta, ¿cuál es el periodo de las oscilaciones?



Solución.
Supongamos al sistema desviado un ángulo θ:



Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación:

$$\sum \tau_O = I_O \alpha$$

El resorte es el único elemento que causa una fuerza recuperativa, el efecto del peso de la masa está compensado por el efecto del estiramiento previo del reste para poner al sistema en posición horizontal.

$$-kx\left(\frac{\ell}{2}\right)\cos\theta = m\ell^2 \ddot{\theta}$$

Tenemos que $x = \left(\frac{\ell}{2}\right)\text{sen}\theta$

Para ángulos pequeños:

$\text{sen}\theta \approx \theta$ y $\cos\vartheta \approx 1$

Así: $-\frac{k\ell^2}{4}\theta = m\ell^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k}{4m}\theta = 0$

Ecuación de moviendo armónico simple con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{4m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}}$$

Ejemplo 21. Problema del Metrónomo. El metrónomo es un aparato para medir el tiempo y marcar el compás de la música

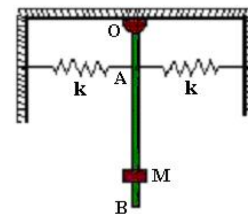


La figura muestra un metrónomo y un modelo de metrónomo.

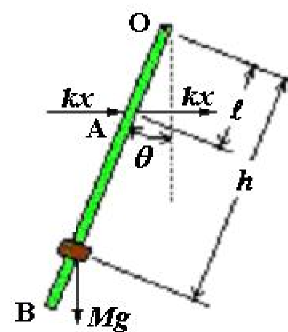
Metrónomo vertical invertido La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA = ℓ, OB = 10ℓ, la masa de la barra del péndulo se considera despreciable.

a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa *M* está situada a una distancia h del punto O.

b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando *M* está primero localizada en A y luego en B



Solución.
a)



$$\sum \tau_O = -2kx.\ell\cos\theta - Mgh.\text{sen}\theta = I_O\alpha$$

Como: $x = \ell sen\theta$, $I_O = Mh^2$:

$$-2k.\ell^2 sen\theta\cos\theta - Mgh.\text{sen}\theta = Mh^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con $\text{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta = 1$ y simplificando:

$$-2\frac{k}{M}\ell^2\theta - gh\theta = h^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{M}\frac{\ell^2}{h^2}+\frac{g}{h}\right)\theta=0$$

b) con M en A: $h=\ell$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{M}+\frac{g}{\ell}\right)\theta=0$$

$$\Rightarrow\ \omega=\sqrt{\frac{2k}{M}+\frac{g}{\ell}}=\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1+\left(\frac{M}{2k}\right)\frac{g}{\ell}}$$

Con M en B: $h=10\ell$

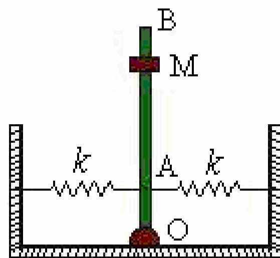
$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{100M}+\frac{g}{10\ell}\right)\theta=0\ \Rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2k}{100M}+\frac{g}{\ell}}=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1+\left(\frac{100M}{2k}\right)\frac{g}{\ell}}$$

Metrónomo vertical derecho La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA = ℓ, OB = 10ℓ.

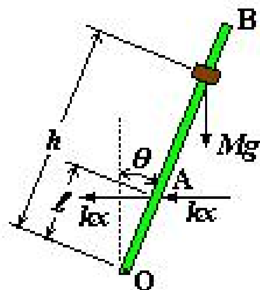
a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa *M* está situada a una distancia h del punto O

b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando *M* está primero localizada en A y luego en B



Solución.

a)



$$\sum\tau_O=-2kx.\ell\cos\theta+Mgh.\text{sen}\theta=I_O\alpha$$

Como: $x=\ell\text{sen}\theta$, $I_O=Mh^2$:

$$-2k.\ell^2 sen\theta\cos\theta+Mgh.\text{sen}\theta\ =\ Mh^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con $\text{sen}\theta\approx\theta$, $\cos\theta=1$ y simplificando:

$$-2\frac{k}{M}\ell^2\theta+gh\theta=h^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{M}\frac{\ell^2}{h^2}-\frac{g}{h}\right)\theta=0$$

b) con M en A: $h=\ell$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{M}-\frac{g}{\ell}\right)\theta=0\ \Rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2k}{M}-\frac{g}{\ell}}=\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1-\left(\frac{M}{2k}\right)\frac{g}{\ell}}$$

Con M en B: $h=10\ell$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{2k}{100M}-\frac{g}{10\ell}\right)\theta=0$$

$$\Rightarrow\ \omega=\sqrt{\frac{2k}{100M}-\frac{g}{10\ell}}$$

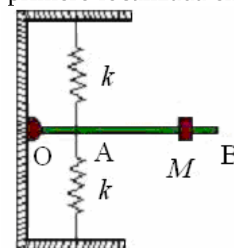
$$=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{2k}{M}}\sqrt{1-5\frac{Mg}{k\ell}}$$

Metrónomo horizontal

La figura muestra un metrónomo invertido, donde la masa M se puede situar entre los extremos A y B. Despreciar el peso de la barra rígida OAB. OA = ℓ, OB = 10ℓ.

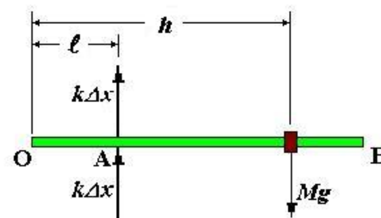
a) Encuentre la ecuación diferencial que gobierna el movimiento cuando la masa *M* está situada a una distancia *h* del punto O

b) Cuál es la frecuencia natural de la oscilación cuando M está primero localizada en A y luego en B



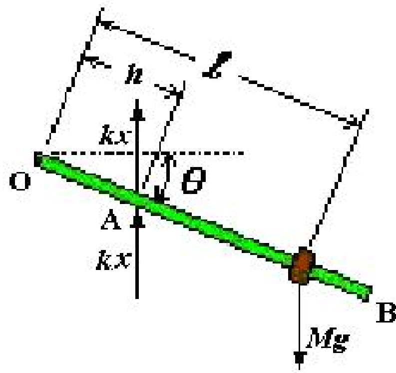
Solución.

a)



Equilibrio estático $\sum\tau_O=-2k\Delta x\ell+Mgh=0$

El torque producido por los pesos de las masas es compensado por los torques producidos por las reacciones a las deformaciones previas de los resortes. Luego la ecuación dinámica es:



$$\sum \tau_O = -2kx.\ell\cos\theta = I_O\alpha$$

Como: $x = \ell\,\mathrm{sen}\theta$, $I_O = Mh^2$:

$$-2k.\ell^2\mathrm{sen}\theta\cos\theta = Mh^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con $\mathrm{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta = 1$ y simplificando:

$$-2\frac{k}{M}\ell^2\theta = h^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M}\frac{\ell^2}{h^2}\right)\theta = 0$$

b) Con M en A: $h = \ell$

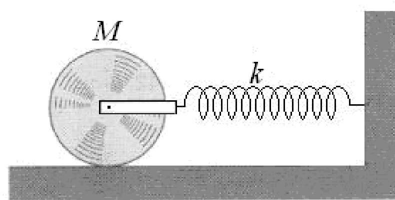
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{M}\right)\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

Con M en B: $h = 10\ell$

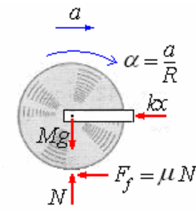
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{100M}\right)\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

Ejemplo 22. Un cilindro de masa *M* y radio *R* se conecta por medio de un resorte de constante k como de muestra en la figura. Si el cilindro tiene libertad de rodar sobre la superficie horizontal sin resbalar, encontrar su frecuencia.



Solución.
Por la ley de Newton
Aplicando la segunda ley de Newton al cilindro,



$$\sum F = ma \text{ o } m\ddot{x} = -kx - F_f$$

Donde F_f es la fuerza de fricción,
Usando la segunda ley de Newton para la rotación,

$$\sum \tau = I_o\ddot{\theta},$$

$$I_o\ddot{\theta} = F_f R \text{ o } \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right) = F_f R$$

De aquí $F_f = \frac{1}{2}m\ddot{x}$, sustituyendo esta expresión en la ecuación de la fuerza obtenemos

$$m\ddot{x} = -kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} \text{ o } \frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$$

y $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}\,\mathrm{rad/s}$

Por el método de la energía:
La energía total del sistema es la suma de la energía cinética (traslacional y rotacional) y la energía potencial; y permanece igual para todo tiempo,
$E = (K_{traslación} + K_{rotación}) + U$

$$K_{traslación} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2,\ K_{rotación} = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2$$

Donde el momento de inercia del cilindro es

$$I_o = \frac{1}{2}MR^2,$$

También $R\theta = x$ y $R\dot{\theta} = \dot{x}$
La ecuación de la energía del sistema para cualquier tiempo es

$$E = \left[\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2\right]$$

$$= \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Como E = constante, $\frac{dE}{dt} = 0$

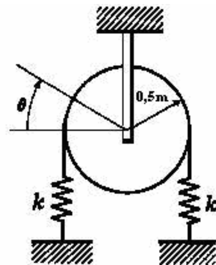
$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{3}{2}M\ddot{x} + kx\right)\dot{x} = 0$$

Como $\dot{x}$ no siempre es cero, la ecuación del

movimiento es

$$\frac{3}{2}M\ddot{x}+kx=0 \quad \text{o} \quad \omega_0=\sqrt{\frac{2k}{3M}}\text{rad/s}$$

Ejemplo 23. El disco homogéneo tiene un momento de inercia alrededor de su centro I_o = 0,5 kgm^2 y radio R = 0,5 m. En su posición de equilibrio ambos resortes están estirados 5 cm. Encontrar la frecuencia angular de oscilación natural del disco cuando se le da un pequeño desplazamiento angular y se lo suelta. k = 800 N/m



Solución.
Usando la segunda ley de Newton para la rotación,

$$\sum\tau=I_o\ddot{\theta},$$

La tensión inicial en cada uno de los resortes es

$$\left(800\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0{,}05\text{m}) = 40\text{N}$$

El cambio en tensión es 800(0,5θ) = 400θ, y

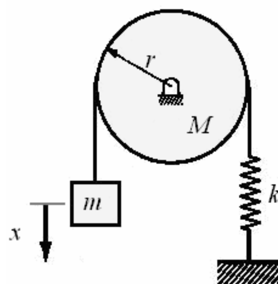
$$0{,}5\ddot{\theta}=[(40-400\theta)-(40+400\theta)]0{,}5$$

o $\ddot{\theta}+400\theta=0$

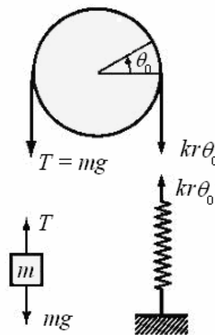
De la cual

$$\omega_0=\sqrt{400}=20\text{rad/s}$$

Ejemplo 24. Determinar la frecuencia natural del sistema resorte-masa-polea mostrado en la figura.

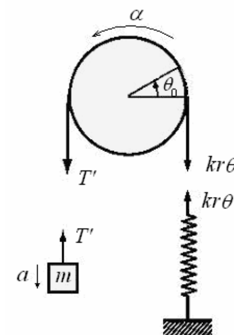


Solución.
Equilibrio estático:
El resorte tiene un estiramiento inicial igual a $r\theta_o$ que produce una fuerza $kr\theta_o$ que equilibra al peso mg.
O sea $kr\theta_o=mg$



Para hacerlo oscilar hay que sacarlo del equilibrio con un movimiento vertical de la masa *m*.

Solución aplicando la segunda ley de Newton:
Como el peso está compensado por el estiramiento previo la única fuerza actuante es producida por el estiramiento adicional del resorte.



Aplicando la segunda ley de Newton:
Para la masa m, $\sum F=ma$

$$-T'=ma=m\ddot{x}$$

Como $x=r\theta$, $\ddot{x}=r\ddot{\theta}$

Luego $T'=-mr\ddot{\theta}$ (1)

Para el disco de masa M, $\sum\tau=I\alpha$

$$I_0\alpha=I_0\ddot{\theta}=T'r-(kr\theta)r \qquad (2)$$

Donde $\text{I}_0=\frac{1}{2}\text{Mr}^2$ es el momento de inercia de la polea.

Reemplazando (1? En (2):

$$\frac{1}{2}Mr^2\ddot{\theta}=r(-mr\ddot{\theta})-kr^2\theta$$

y $\left(\frac{1}{2}Mr^2+mr^2\right)\ddot{\theta}+kr^2\theta=0$,

Finalmente $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M/2+m}}\text{rad/s}$

Solución por el método de la energía:
$E = K + U$ = constante
$K = K_{masa} + K_{polea}$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k r^2 \theta^2$$

Como la energía total de sistema permanece constante,

$$\frac{d}{dt}(K + U) = 0 \quad \text{o}$$

$$m r^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + I_0 \dot{\theta}\ddot{\theta} + k r^2 \theta \dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}\left(m r^2 \ddot{\theta} + I_0 \ddot{\theta} + k r^2 \theta \right) = 0$$

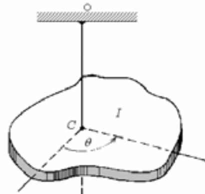
Como $\dot{\theta}$ no siempre es cero,

$\left(m r^2 \ddot{\theta} + I_0 \ddot{\theta} + k r^2 \theta \right)$ es igual a cero. Luego

$$\ddot{\theta} + \frac{k r^2}{I_0 + m r^2} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M/2 + m}} \text{rad/s}$$

PENDULO DE TORSION.



Otro ejemplo de movimiento armónico simple es el péndulo de torsión, consistente en un cuerpo suspendido por un alambre o fibra de tal manera que la línea OC pasa por el centro de masa del cuerpo. Cuando el cuerpo se rota un ángulo θ a partir de su posición de equilibrio, el alambre se tuerce, ejerciendo sobre el cuerpo un torque τ alrededor de OC que se oponen al desplazamiento θ y de magnitud proporcional al ángulo, $\tau = -\kappa \theta$, donde κ es el coeficiente de torsión del alambre.
Aplicando la segunda ley del movimiento (para variables angulares):

$$\sum \tau_0 = I_0 \alpha$$

Si I_0 es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje OC, la ecuación del movimiento

$-\kappa \theta = I_0 \alpha$, con $\alpha = \ddot{\theta}$, es

$$I_0 \ddot{\theta} = -\kappa \theta \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I_0} \theta = 0$$

Nuevamente encontramos la ecuación diferencial del MAs, de modo que el movimiento angular es armónico simple, con $\omega^2 = \frac{\kappa}{I_0}$; el período de oscilación es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{\kappa}}$$

Este resultado es interesante debido a que podemos usarlo experimentalmente para determinar el momento de inercia de un cuerpo suspendiéndolo de un alambre cuyo coeficiente de torsión κ se conoce, y luego midiendo el período T de oscilación.

MOVIMIENTO ARMONICO EN DOS DIMENSIONES.

Hasta ahora no hemos limitado a estudiar el movimiento armónico de la partícula o cuerpo descrito por una sola variable, ahora permitiremos a la partícula, movimiento en dos dimensiones.

$$\vec{F} = -k \vec{r}$$

La fuerza se puede descomponer en dos componentes

$$F_x = -kx, \quad F_y = -ky$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Donde como antes $\omega_0^2 = k/m$. Las soluciones son:

$$x_{(t)} = A\cos(\omega_0 t - \alpha), \; y_{(t)} = B\cos(\omega_0 t - \beta)$$

Luego el movimiento es armónico simple en cada una de las dimensiones, ambas oscilaciones tienen la misma frecuencia pero tienen que diferenciar amplitudes y fases. Podemos obtener la ecuación de la trayectoria de las partículas eliminando el tiempo t entre las dos ecuaciones. Para esto escribimos:

$$y_{(t)} = B\cos[\omega_0 t - \alpha - (\alpha - \beta)]$$
$$= B\cos(\omega_0 t - \alpha)\cos(\alpha - \beta)$$
$$- B\text{sen}(\omega_0 t - \alpha)\text{sen}(\alpha - \beta)$$

Con

$$\cos(\omega_0 t - \alpha) = \frac{x}{A} \quad \text{y}$$

$$\text{sen}(\omega_0 t - \alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

Llamando $\delta = (\alpha - \beta)$:

$$y = \frac{B}{A} x \cos\delta - B\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \text{sen}\delta$$

Elevada al cuadrado se transforma en:

$$A^2 y^2 - 2ABxy\cos\delta + B^2 x^2 \cos^2\delta$$
$$= A^2 B^2 \text{sen}^2\delta - B^2 x^2 \text{sen}^2\delta$$

Que es:

$$B^2 x^2 - 2AB\cos\delta + Ay^2 = A^2 B^2 \text{sen}^2\delta$$

Para $\delta = \pm\dfrac{\pi}{2}$, esta ecuación toma la forma de una elipse:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

En el caso particular de $A = B$ y $\delta = \pm\pi/2$, tendremos un movimiento circular:

$$x^2 + y^2 = A^2$$

Otro caso particular es con $\delta = 0$, en que tendremos:

$$Bx^2 - 2ABxy + Ay^2 = 0 \Rightarrow (Bx - Ay)^2 = 0,$$

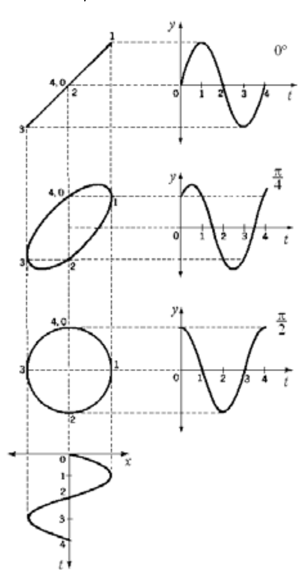
expresión de ecuación de una recta:

$$y = \frac{B}{A}, \text{ para } \quad \delta = 0$$

De forma similar para $\delta = \pm\pi$

$$y = -\frac{B}{A}, \text{ para } \quad \delta = \pm\pi$$

En la figura pueden observarse algunas de las curvas correspondientes al caso *A* = *B*, cuando $\delta = 0$, $\delta = \pi/4$ y $\delta = \pi/2$

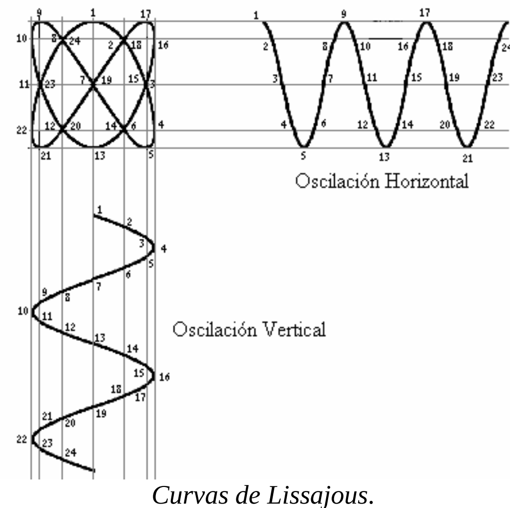


En general las oscilaciones bidimensionales no tienen por qué ser las mismas frecuencias en los mismos movimientos según las direcciones *x* e *y*, de forma que las ecuaciones se conviertan en

$$x_{(t)} = A\cos(\omega_x t - \alpha),\ y_{(t)} = B\cos(\omega_y t - \beta)$$

y la trayectoria no es ya una elipse, sino una de las llamadas curvas de Lissajous. Estas curvas serán cerradas cuando el movimiento se repita sobre sí mismo a intervalos regulares de tiempo, lo cual sólo será posible cuando las frecuencias ω_x y ω_y, sean «conmensurables», o sea, cuando ω_x/ω_y sea una fracción racional.

En la figura a continuación se representa uno de estos casos, para el cual ω_x/ω_y = 2/3 (y asimismo, $A = B$ y $\alpha = \beta$).



Curvas de Lissajous.

En el caso de que el cociente de las frecuencias no sea una fracción racional, la curva será abierta; es decir, la partícula no pasará dos veces por el mismo punto a la misma velocidad.

Medida del desfase entre dos señales

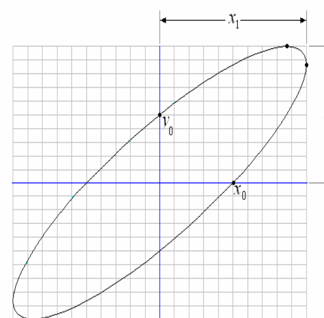
En un osciloscopio componemos dos MAS de direcciones perpendiculares y de la misma frecuencia ω, desfasados δ. Supondremos por simplicidad que ambas señales tiene la misma amplitud *A*.

$x = A\text{sen}(\omega t)$

$y = A\text{sen}(\omega t + \delta)$

La trayectoria como podemos comprobar es una elipse.

La medida de la intersección de la elipse con los ejes X e Y nos permite medir el desfase δ, entre dos señales *x* e *y*.



a) Intersección con el eje Y

Cuando $x = 0$, entonces $\omega t = 0$, ó π.

$y_0 = A\text{sen}\delta$

$y_0 = A\text{sen}(\pi + \delta) = -A\text{sen}\delta$

Si medimos en la parte positiva del eje Y, tendremos que $\text{sen}\,\delta = y_0/A$

En la pantalla del "osciloscopio" el eje X y el eje Y está dividido en 20 partes, cada división es una unidad.

En la figura, A=10, e y_0=5, el desfase δ=30º, ó mejor $\delta = \pi/6$

b) Intersección con el eje X

Cuando $y = 0$, entonces $\omega t = -\delta$, ó $(\pi - \delta)$.

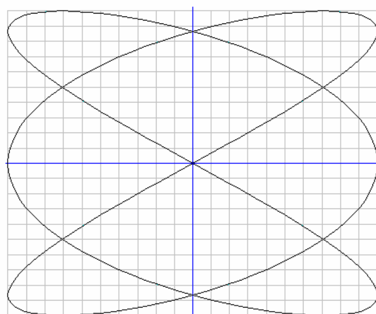
$x_0 = -A\text{sen}\delta$

x_0 =Asen(π - δ) = Asenδ
En la figura, A=10, e x_0=5, el desfase δ=30º, ó mejor $\delta = \pi/6$
c) Intersección con $x = A$ el borde derecho de la pantalla del "osciloscopio"
A =Asen(ωt) por lo que $\omega t = \pi/2$
y_1 = Asen(π/2+δ) = Acosδ

En la figura A = 10 y y_1 = 8.75, el desfase δ » 30º, ó mejor $\delta = \pi/6$
Podemos comprobar que se obtiene la misma trayectoria con el desfase 30º y 330º y también con 150º y 210º. Pero podemos distinguir el desfase 30º de 150º, por la orientación de los ejes de la elipse.

Medida de la frecuencia
Componemos dos MAS de direcciones perpendiculares y de distinta frecuencia ωx, y ωy .Supondremos por simplicidad que ambas señales tiene la misma amplitud A y el desfase δ puede ser cualquier valor
x =Asen($\omega_x t$)
y = Asen($\omega_y t+\delta$)
La relación de frecuencias se puede obtener a partir del número de tangentes de la trayectoria en el lado vertical y en el lado horizontal.
Número de tangentes lado vertical

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\text{número de tangentes lado vertical}}{\text{número de tangentes lado horizontal}}$$



Ejemplo: en la figura

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 25. Dos movimientos vibratorios perpendiculares de la misma frecuencia tienen sus amplitudes en la relación 2/3 y una diferencia de marcha de media longitud de onda. Hállese la forma del movimiento resultante.
Solución.
Las ecuaciones de estos movimientos son:

$$x = A_1 \operatorname{sen}\omega t \; ; \; y = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \pi) =$$

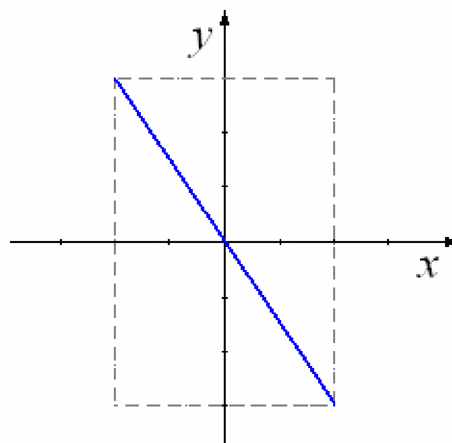
$$A_2 \operatorname{sen}\omega t \cos\pi + A_2 \cos\omega t \operatorname{sen}\pi = - A_2 \operatorname{sen}\omega t$$

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{-A_2} = -\frac{2}{3}$$

El movimiento resultante es según la ecuación

$$y = -\frac{3}{2}x$$

Corresponde a una recta de pendiente -3/2.



Ejemplo 26. Encuentre la ecuación de la trayectoria de un punto sometido a dos movimientos oscilatorios armónicos rectangulares dados por las ecuaciones

$$x = 3\operatorname{sen}\omega t \; ; \; y = 5\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Solución.

$$x = 3\operatorname{sen}\omega t \Rightarrow \operatorname{sen}\omega t = \frac{x}{3}$$

Luego: $\cos\omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}$

$$y = 5\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{y}{5} =$$

$$\operatorname{sen}\omega t \cos\frac{\pi}{6} + \cos\omega t \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} =$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{5} - \frac{\sqrt{3}x}{6} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x^2}{36}}$$

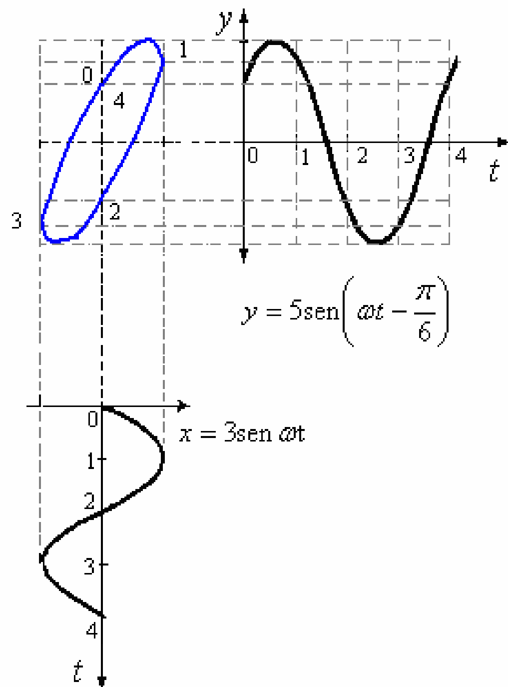
Elevando al cuadrado:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{2\sqrt{3}yx}{30} + \frac{3x^2}{36} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{36}$$

Simplificando:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{\sqrt{3}yx}{15} + \frac{x^2}{9} = \frac{1}{4}$$

Corresponde a la ecuación de una elipse inclinada.



Ejemplo 27. Dos oscilaciones perpendiculares entre si tienen el mismo periodo, la misma amplitud y una diferencia de marcha igual a $\lambda/6$. ¿Qué oscilación resultante produce?

Solución.

Una diferencia de marcha de λ equivale a 2π.

Una diferencia de marcha de $\frac{\lambda}{6}$ equivale a

$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Luego, las ecuaciones de los movimientos componentes son:

$x = a\text{sen}\omega t$, $y = a\text{sen}(\omega t - \pi/3)$

Trabajando con *y*:

$$y = a\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$a\text{sen}\omega t\cos\frac{\pi}{3} - a\cos\omega t\text{sen}\frac{\pi}{3}$$

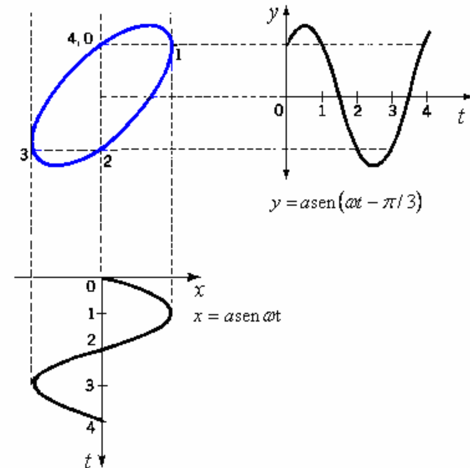
$$= x\left(\frac{1}{2}\right) - a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y - \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}a}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$y^2 + x^2 - xy = \frac{3}{4}a^2$$

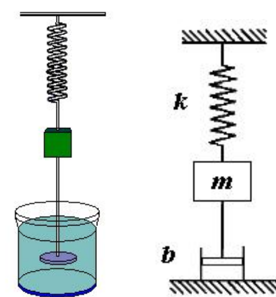
Corresponde a la ecuación de una elipse inclinada



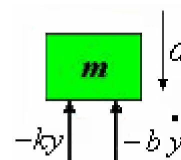
MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO.

En el movimiento armónico simple la amplitud es constante al igual que la energía del oscilador. Sin embargo sabemos que la amplitud del cuerpo en vibración, como un resorte, un péndulo, disminuye gradualmente, lo que indica una pérdida paulatina de energía por parte del oscilador. Decimos que el movimiento oscilatorio está amortiguado.

El Amortiguamiento es causado por la fricción, para una resistencia la viscosa tal como la fuerza amortiguadora del aire, la fuerza amortiguadora puede tomarse como proporcional de la velocidad. Sea la fuerza de un amortiguador $F_b = -bv$ donde el signo menos indica que esta fuerza tiene sentido opuesto al movimiento del cuerpo oscilante:



Aplicando la segunda ley de Newton:



$ma = -ky - bv$

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y}$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0,\ \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = 0 \quad \text{(I)}$$

$\beta = \frac{b}{2m}$, $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Solución de la ecuación es de la forma $y = e^{rt}$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$r^2 e^{rt} + 2\beta r e^{rt} + \omega_o^2 e^{rt} = 0$

Simplificando

$r^2 + 2\beta r + \omega_o^2 = 0$

Las raíces de esta ecuación son:

$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ y $r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

Por consiguiente la solución general de la ecuación (I) es

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{\sqrt{\beta^2-\omega_o^2}t} + Ce^{-\sqrt{\beta^2-\omega_o^2}t}\right]$$

Discusión de la solución

a) Cuando $\omega_o^2 > \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega_1$ s una cantidad imaginaria y

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{i\omega_1 t} + Ce^{-i\omega_1 t}\right]$$

Haciendo $B = \frac{A}{2}e^{i\delta}$ y $C = \frac{A}{2}e^{-i\delta}$

Obtenemos

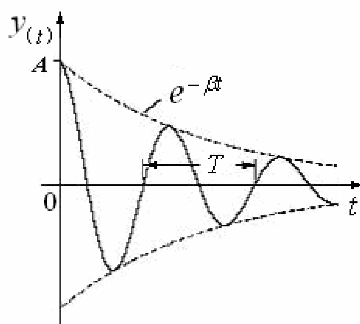
$$y = Ae^{-\beta t}\left[\frac{e^{i(\omega_1 t+\delta)} + e^{-i(\omega_1 t+\delta)}}{2}\right]$$

Expresión que se puede escribir usando las relaciones de Euler como

$$y = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta)$$

Donde ω_1 es la frecuencia del oscilador amortiguado, aunque hablando estrictamente no es posible definir la frecuencia en el caso del movimiento amortiguado desde que este no es un movimiento periódico.

La amplitud máxima del movimiento disminuye debido al factor $e^{-\beta t}$.



Este movimiento se conoce como SUBAMORTIGUADO o poco amortiguado.

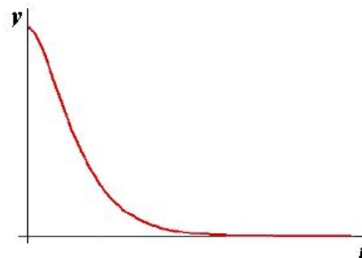
b) Cuando $\omega_o^2 = \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 0$ cantidad real

En este caso la solución tiene la forma

$$y = (B + Ct)e^{-\beta t}$$

El desplazamiento decrece a su posición de equilibrio sin oscilar en el menor tiempo posible, a este movimiento se le conoce como CRITICAMENTE AMORTIGUADO.



Pero para amortiguadores fuertes según lo mostrado en la figura abajo, el período varía según la amplitud y el movimiento cambia considerablemente del modelo armónico simple. El amortiguamiento crítico es la que lleva al oscilador al reposo en el menor tiempo. Esto encuentra aplicaciones en instrumentos donde es una ventaja el poder tomar una lectura rápida del indicador. Es también útil por resortes en asientos y amortiguadores de vehículos.

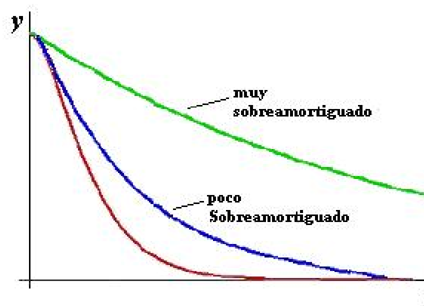
c) Cuando $\omega_o^2 < \beta^2$

$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \omega_1$

en este caso la solución tiene la forma

$$y = e^{-\beta t}\left[Be^{\omega_1 t} + Ce^{-\omega_1 t}\right]$$

En este caso tampoco existe oscilación, pero se acerca a la posición de equilibrio más lentamente que el crítico, a este movimiento se le conoce como SOBREAMORTIGUADO



Ejemplo 28. Un péndulo se ajusta para tener un período exacto 2 segundos, y se pone en movimiento. Después de 20 minutos, su amplitud ha disminuido a 1/4 de su valor inicial.

Si el movimiento del péndulo puede se representado por $\theta = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(2\pi f t)$, ¿cuál es el valor de β?

Nota: $e^{-1,386} = \frac{1}{4}$

Solución.

a) $\theta = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(2\pi f t)$

Para t = 20 x 60 = 1200 s

$\frac{\theta_0}{4} = \theta_0 e^{-1200\beta}$ (1)

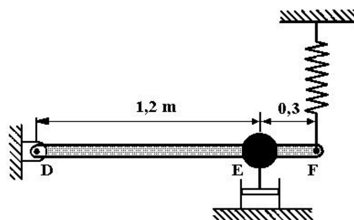
$$e^{-1200\beta} = \frac{1}{4} = e^{-1,386}$$

$$-1200t = -1,386$$

$$\Rightarrow \ \beta = \frac{1,386}{1200} = 0,001155$$

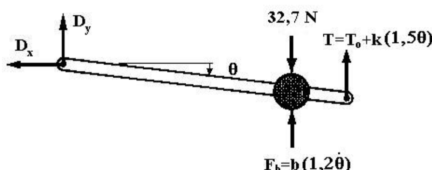
$=1,2 \times 10^{-3}$ N.s/m ó kg/s.

Ejemplo 29. El cuerpo E de 32,7 N en la figura está asegurado a la varilla DF cuyo peso puede ignorarse. El resorte tiene un módulo k = 100 N/m y el coeficiente del amortiguador es b = 26,7 N-s/m. El sistema está en equilibrio cuando DF está horizontal. La varilla se desplaza 0,10 rad en sentido horario y desde el reposo cuando t = 0. Determinar
a) la ecuación del movimiento de la varilla,
b) la frecuencia del movimiento.



Solución.
La figura muestra el diagrama del cuerpo libre de la varilla DF, desplazada en la dirección positiva.

Cuando el cuerpo está en equilibrio, θ y $\dot{\theta}$ ambas valen cero y $T = T_0 = \dfrac{1,2}{1,5}(32,7)$.



Aplicando la segunda ley de Newton para la rotación con el desplazamiento y velocidad indicados en la figura es:

$$1,2(32,7) - 1,2(26,7)F_b - 1,5T = I_o\ddot{\theta}$$

$$1,2(32,7) - 1,2(26,7)\left(1,2\dot{\theta}\right) - 1,5[(1,5)32,7 + 100(1,5\theta)]$$

$$= \frac{32,7}{9,8}(1,2)^2\ddot{\theta}$$

La ecuación se reduce a

$$4,8\ddot{\theta} + 38.4\dot{\theta} + 225\theta = 0$$

o

$$\ddot{\theta} + 8,00\dot{\theta} + 46,9\theta = 0 .$$

De la forma

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Donde: $2\beta = 8$ y $\omega_0^2 = 46.9$

Cuya solución es

$$\theta = De^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) \text{ y}$$

$$\dot{\theta} = -D\omega e^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega t - \phi) - D\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

Con D y ϕ constantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del movimiento (en este caso para t = 0, $\theta = 0,1\text{rad}$ y $\dot{\theta} = 0$.

y $\omega = \left|\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right| = \left|\sqrt{4^2 - 46,9}\right| = 5,56$ rad

Por las condiciones iniciales

$$0,1 = D\cos(-\phi) = D\cos\phi \qquad (1)$$

$$0 = -D\omega\operatorname{sen}(-\phi) - D\beta\cos(-\phi)$$

$$= D(\omega\operatorname{sen}\phi - \beta\cos\phi) \qquad (2)$$

De (2) obtenemos

$$\tan\phi = \frac{\beta}{\omega} = -\frac{4}{5,56} = -0,72$$

$$\Rightarrow \phi = -0,62 \text{ rad}$$

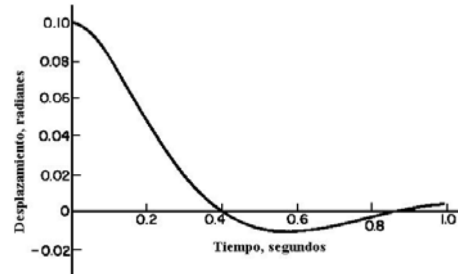
De (1)

$$D = \frac{0,1}{\cos\phi} = \frac{0,1}{0,81} = 0,12\text{ rad}$$

La ecuación del movimiento es

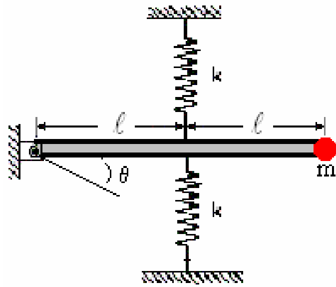
$$\theta = 0,12e^{-4t}\cos(5,56t - 0,62) \text{ rad}$$

Correspondiente a un movimiento oscilatorio subamortiguado cuyo gráfico se muestra a continuación, la vibración se amortigua rápidamente.



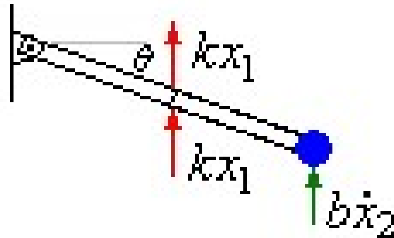
b) La frecuencia del movimiento es ω = 5,56 rad/s.

Ejemplo 30. El sistema mostrado en la figura se encuentra en el plano horizontal en equilibrio. Consiste en una barra rígida indeformable de masa M, ligada a dos resortes de constante k, y con una masa en el extremo libre de magnitud "m", sobre la cual actúa una fuerza disipativa proporcional a su velocidad $F_v = - b\, v_m$. Si se desplaza un ángulo 0,15 rad en sentido horario y luego se le suelta. Determinar:
a) La ecuación de movimiento del sistema para ángulos pequeños de deformación
b) Encontrar la ley de movimiento para cuando k=1500 N/m , b =40 N s/m y M =3m= 3kg, además ℓ =1,5m



Solución.

a)



$$\sum \tau_O = -2kx_1.\ell\cos\theta - b\dot{x}_2\, 2\ell\cos\theta = I_O\alpha$$

Como:

$$x_1 = \ell\,\text{sen}\,\theta \approx \ell\theta,\quad x_2 = 2\ell\,\text{sen}\,\theta \approx 2\ell\theta \;\Rightarrow$$

$$\dot{x}_2 = 2\ell\dot{\theta}$$

$$I_0 = \frac{1}{3}M(2\ell)^2 + m(2\ell)^2 \quad \text{y} \quad \cos\theta \approx 1:$$

$$-2k.\ell^2\theta - 4b\ell^2\dot{\theta} = \left(\frac{M}{3}+m\right)4\ell^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{\left(\frac{3m}{3}+m\right)}\dot{\theta} + \frac{k}{2\left(\frac{3m}{3}+m\right)}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{2m}\dot{\theta} + \frac{k}{4m}\theta = 0$$

b) $\theta = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$

$$\beta = \frac{b}{4m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4m}} \quad \omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|}$$

Cuando k =1500 N/m , b =40 N s/m y M =3m = 3kg, además ℓ =1.5m y el ángulo inicial = 0,15 rad.

$$\beta = \frac{(40)}{4(1)} = 10 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(1500)}{4(1)}} = \sqrt{375}$$

$$\omega = \sqrt{\left|10^2 - 375\right|} = \sqrt{275} = 16,58$$

$$\theta = \theta_0 e^{-10t}\cos(16,58t + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = -10\theta_0 e^{-10t}\cos(16,58t + \varphi) - 16,58\theta_0 e^{-10t}\text{sen}(16,58t + \varphi)$$

Si para t = 0 se desplaza un ángulo 0,15 rad en sentido horario y luego se le suelta.

$$0,15 = \theta_0\cos(\varphi)$$

$$0 = -10\theta_0\cos(\varphi) - 16,58\theta_0\text{sen}(\varphi)$$

De estas ecuaciones obtenemos:

$$\varphi = -0,54\text{rad} \;\; \text{y} \;\; \theta_0 = 0,175\text{rad}$$

$$\theta = 0,175e^{-10t}\cos(16,58t - 0,54)$$

Ejemplo 31. Un bloque de 5,0 kilogramos se une a un resorte cuya constante es 125 N/m. El bloque se jala de su posición del equilibrio en x = 0 m a una posición en x = + 0,687 m y se libera del reposo. El bloque entonces ejecuta oscilación amortiguada a lo largo del eje x. La fuerza amortiguadora es proporcional a la velocidad. Cuando el bloque primero vuelve a x = 0 m, la componente x de la velocidad es - 2,0 m/s y la componente x de la aceleración es +5,6 m/s^2.

a) Calcule la magnitud de la aceleración del bloque después de ser liberado en x = + 0,687 m?

b) ¿Calcule el coeficiente de amortiguamiento b?

c) Calcule el trabajo realizado por la fuerza amortiguadora durante el recorrido del bloque de x = + 0,687 m a x = 0 m.

Solución.

a) **Forma fácil**

Como la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

en x = + 0,687 m, $\dot{x} = 0$

Luego:

$$5\ddot{x} + 125(0,687) = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{x} = a = -17,18\,\text{m/s}^2$$

Forma trabajosa

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x} = -A\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) - A\omega e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x} = A\beta^2 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) + A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi) + A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi) - A\omega^2 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

$$= A\left(\beta^2 - \omega^2\right)e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) + 2A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)$$

Para $t = 0$

$$e^{-\beta t} = 1,\; \cos(\omega t - \phi) = 1 \;\text{y}\; \text{sen}(\omega t - \phi) = 0$$

Luego: $a = A\left(\beta^2 - \omega^2\right) = A\omega_0^2$,

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{125}{5} = 25$$

Reemplazando valores:

$$a = 0,687(25) = 17,18\,\text{m/s}^2$$

b) **Forma fácil**

Cuando el bloque primero vuelve a x = 0 m, la componente x de la velocidad es - 2,0 m/s y la componente x de la aceleración es +5,6 m/s^2.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$5(5,6) + b(-2,0) + k(0) = 0$$

$$5(5,6) + b(-2,0) = 0 \Rightarrow b = \frac{5(5,6)}{2,0} = 14 \text{m/s}$$

Forma trabajosa

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x} = -A\beta e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) - A\omega e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x} = A(\beta^2 - \omega^2)e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) + 2A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)$$

x = 0 m, v = - 2,0 m/s, a = +5,6 m/s^2.

$$0 = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi) \quad (1)$$

$$-2,0 = -A\omega e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi) \quad (2)$$

$$5,6 = 2A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi) \quad (3)$$

(3) / (2)

$$\frac{5,6}{2,0} = \frac{2A\omega\beta e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)}{A\omega e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t - \phi)}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{5,6}{4,0} = 1,4$$

Siendo $\beta = \dfrac{b}{2m}$

$$\Rightarrow b = 2m\beta = 2(5)(1,4) = 14 \text{kg/s}$$

c) En x = + 0,687 m

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(125)(0,687)^2 = 29,5 \text{ J}$$

En x = 0 m $E_2 = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}(5)(-2,0)^2$ = 10 J

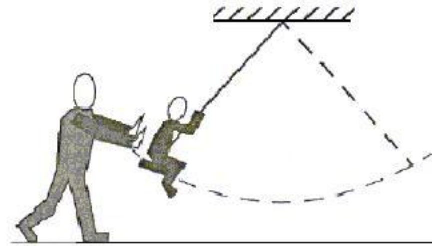
$\Delta E = E_2 - E_1$ = 10 - 29,5= - 19,5 J

Trabajo realizado por la fuerza amortiguadora

OSCILACIONES FORZADAS

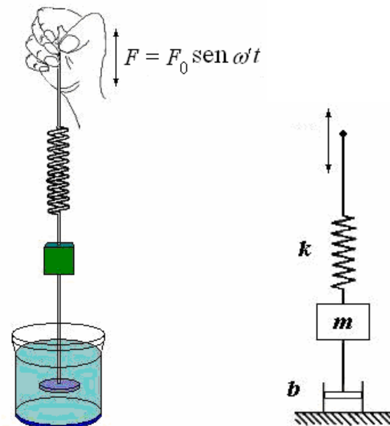
Las oscilaciones que hemos discutido hasta ahora son las oscilaciones libres en las cuales el sistema se da una cierta energía, y dejado solo. Por ejemplo, usted podría empujar a un niño en un columpio hasta cierta altura, después dejarlo y esperar que el movimiento termine.

Pero ésta no es la única posibilidad; podríamos también empujar en varias ocasiones el columpio a cualquier frecuencia y que miramos a ver que sucede. En este caso decimos que tenemos oscilaciones forzadas. Ahora hay dos frecuencias en el problema: la frecuencia natural ω_o de las oscilaciones libres, y la frecuencia productora ω de las oscilaciones forzadas



Descripción

Como observamos en un columpio, para mantener las oscilaciones hemos de aplicar una fuerza oscilante al oscilador amortiguado.

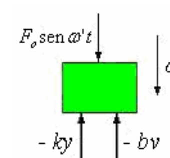


Sea $F_o\text{sen}\omega' t$ la fuerza oscilante aplicada, siendo ω' su frecuencia angular. La ecuación del movimiento será ahora

$$\sum F = ma$$

$$-ky - b\dot{y} + F_o\text{sen}\omega' t = ma$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_o\text{sen}\omega' t$$



Expresamos la ecuación del movimiento en forma de ecuación diferencial

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = F_o\text{sen}\omega' t \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

$$2\beta = \frac{b}{m}$$

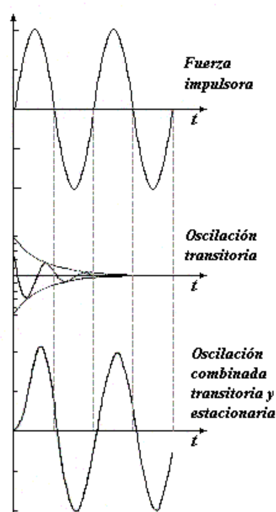
La solución de esta ecuación diferencial es complicada, y se compone de la suma de dos términos

$$y_{(t)} = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta) + D\text{sen}(\omega' t + \delta'),$$

donde D' y δ' son constantes arbitrarias que han de ajustarse a fin de satisfacer las condiciones iniciales y ω' es la frecuencia del oscilador amortiguado no forzado.
Pasado un tiempo suficientemente largo, tal que $\frac{bt}{2m} >> 1$, el primer término de la ecuación es prácticamente nulo y puede despreciarse frente al segundo término. Así, pues, la expresión:
$Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta)$ se denomina solución **transitoria**.
En cambio la expresión $D\text{sen}(\omega' t + \delta')$ se conoce como solución **estacionaria**, y es la predominante siempre que se tenga $t >> \frac{2m}{b}$.
Para obtener las expresiones de A y δ', se sustituye $y = D\text{sen}(\omega' t + \delta')$ en la ecuación diferencial, lo que nos da:

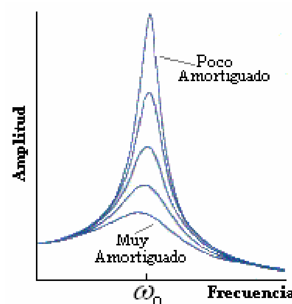
$$D = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\beta^2\omega'^2}}$$

y $\tan\delta' = \frac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$



El comportamiento dependiente del tiempo real de un oscilador armónico amortiguado y forzado puede resultar muy complejo. La figura muestra la respuesta de un oscilador amortiguado frente a la acción de una fuerza impulsora de frecuencia ω' = ½ω_o, suponiendo que el sistema está en reposo cuando la fuerza comienza a actuar. Obsérvese que una vez eliminado el comportamiento transitorio, únicamente persiste el movimiento estacionario con frecuencia ω'.

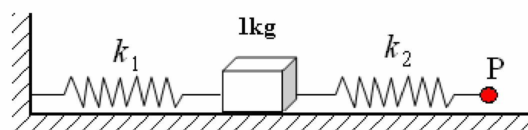
Resonancia, aplicaciones.
Resonancia
Como la amplitud D de depende de ω', ésta puede tomar diferentes valores, en particular, al valor de ω' que hace que D sea máxima, se le denomina frecuencia de resonancia ω_R.
El valor de ω' que hace máximo a D podemos encontrarlo de la manera siguiente:
$\left.\frac{\partial D}{\partial \omega'}\right|_{\omega'=\omega_R} = 0$, derivando D e igualando a cero, se obtiene: $\omega' = \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$



En la figura se muestra la respuesta en amplitud de la oscilación forzada, en el estado estacionario. Como podemos observar a partir de la fórmula o la gráfica, la amplitud de la oscilación forzada en el estado estacionario disminuye rápidamente cuando la frecuencia de la oscilación forzada ωf se hace mayor o menor que la frecuencia propia del oscilador ω_o.

En el caso ideal que no exista rozamiento, la amplitud de la oscilación forzada se hace muy grande, tiende a infinito, cuando la frecuencia de la oscilación forzada ω' se hace próxima a la frecuencia propia del oscilador ω_o.
En el caso de que exista rozamiento (β >0) la amplitud se hace máxima cuando la frecuencia de la oscilación forzada ω' es próxima a la del oscilador ω_o
Los efectos de la resonancia igualmente pueden resultar indeseables o incluso destructivos. EI traqueteo en la carrocería de un automóvil o el molesto zumbido en un alta voz estereof6nico se deben casi siempre a la resonancia. Casi todos hemos escuchado que una cantante de potente voz puede romper el cristal al cantar a determinada frecuencia. Igualmente conocida es la advertencia de que un grupo de personas no debe marchar por un puente por miedo a que la frecuencia de los pasos corresponda a alguna frecuencia natural del mismo. Todos éstos son ejemplos de resonancia.

Ejemplo 32. El extremo libre del resorte de constante k_2 empieza en $t = 0$ a oscilar armónicamente con amplitud B y frecuencia ω alrededor de su posición de equilibrio “P”.



Haga el DCL del bloque y determine la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del bloque.

Solución.

Movimiento del punto P

$$x' = B\,\text{sen}\,\omega' t$$

$$-k_1 x - k_2(x - x') = ma$$

$$ma + (k_1 + k_2)x = k_2 x'$$

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 B\,\text{sen}\,\omega' t$$

$$\ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m}x = \frac{k_2 B}{m}\text{sen}\,\omega' t$$

Ecuación que corresponde a un movimiento armónico simple forzado.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\text{sen}\,\omega' t$$

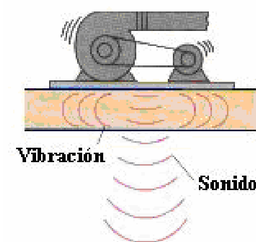
CASO DEL PUENTE TACOMA



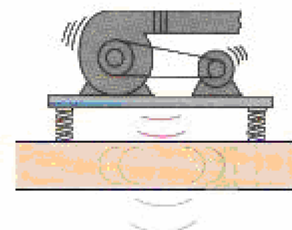
El puente Tacoma original era conocido como "Galloping Gertie" debido a su balanceo, comportamiento ondulado. Tenía una longitud de 1980 metros aproximadamente y fue abierto al tráfico el 1 de julio de 1940 uniendoTacoma y el puerto Gig por carretera.
El puente era un diseño inusualmente ligero, los ingenieros descubrieron, una peculiar sensibilidad a los fuertes vientos. En lugar de resistirlos, como lo hacen la mayoría de los puentes modernos, El puente Tacoma tendía a sacudirse y a vibrar. Esto empeoró progresivamente debido a los fenómenos armónicos. Cuatro meses después de la inauguración del puente, hubo una tormenta con viento de 70 km/h en el área alrededor del puente el 7 de noviembre de 1940. El viento hizo sacudir puente violentamente de lado a lado, y finalmente rompió el puente.
Este incidente sucedió debido a la estructura del puente entró en resonancia con la vibración que producía el viento. Nadie murió, pues el puente había sido cerrado debido a sacudidas anteriores. Éste es el más conocido y estudiado de fallas por oscilación forzada, gracias a la película y las fotografías que registran el derrumbamiento.

Muchas veces necesitamos un sistema que no transfiera eficientemente la energía. Un ejemplo es un mecanismo para aislar de las vibraciones a aparatos sensibles. Una solución común al problema de la vibración consiste en fijar la fuente de vibración sobre un montaje elástico que amortigüe y absorba los movimientos. Lo que quizás no sea tan obvio es el hecho de que el problema puede agravarse con un montaje elástico incorrecto. E1 aislamiento se consigue al disminuir la frecuencia natural del sistema con relación a la frecuencia de la fuente vibratoria. La razón por la que esta técnica funciona es la menor transferencia de energía cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es mucho mayor que la frecuencia natural del sistema.
Hemos fundamentado completamente nuestro análisis de la resonancia, así como de la respuesta de un sistema al movimiento forzado, en el comportamiento de una masa unida a un resorte que cumple con la ley de Hooke. Sin embargo, se aplican los mismos principios y resultados generales a otros sistemas oscilantes, sean mecánicos, eléctricos o de otro tipo.

Ejemplo 33. Un equipo de ventilación del sistema de calefacción y aire acondicionado de un edificio se monta firmemente en el techo y opera en forma continua. Las vibraciones se transmiten a la estructura del edificio y generan niveles de vibración inaceptables.



Para reducir la vibración que se percibe abajo, se va a fijar el equipo a una placa montada sobre resortes. EI eje del ventilador gira a 1800 rpm (revoluciones por minuto) y la masa combinada de la unidad y la placa de montaje (véase la figura) es de 576 kg.



¿Cuál es la constante de rigidez apropiada para los resortes usados para soportar la placa? Suponga que se emplean cuatro resortes, uno en cada esquina.

Estrategia. El sistema de oscilación en este caso está compuesto por el motor, el ventilador, la plataforma de montaje y los resortes. Una regla práctica a la que se recurre algunas veces establece que la frecuencia impulsora, o perturbadora, debe ser por lo menos 3 veces la frecuencia natural del sistema. Para muchos casos, resulta adecuado un factor de 5 y, en condiciones críticas, resulta conveniente un factor de

12 o superior. Podemos conseguir estos factores reduciendo la frecuencia natural del sistema. Si elegimos una proporción de 1 a 5, lo que corresponde a una reducción en la fuerza de las vibraciones en el edificio de más o menos 96%, la frecuencia natural que se desea del sistema es

$$\frac{1}{5}(1800\text{ rpm})\left(\frac{2\pi}{60s/\min}\right) = 12\pi \text{ Hz}$$

Solución. Los resortes adecuados pueden elegirse utilizando

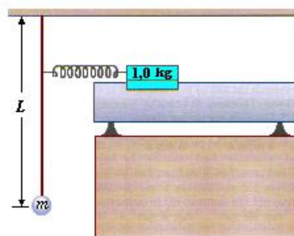
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

AI resolver para la constante de resorte k, obtenemos $k = m(2\pi f)^2 = (576 \text{ kg})(12\pi/\text{s})^2 = 8{,}18 \times 10^5$ N/m.

Esta sería la más grande constante de resorte deseable si todas las masas se soportaran mediante un resorte. Puesto que son cuatro en total, uno en cada esquina de la placa de montaje, cada uno de estos cuatro resortes tendrá una constante o rigidez de

$$\frac{1}{4}\left(8{,}18\times10^5 \text{ N/m}\right) = 2{,}05\times10^5 \text{ N/m}$$

Ejemplo 34. ¿Cuál debe ser la longitud del péndulo en la figura para producir la amplitud máxima en el carrito de 1,0 kg del carril neumático si la constante de resorte es k = 120 N/m?



Solución.

La amplitud máxima se alcanzará cuando el péndulo oscile con la frecuencia de resonancia, en este caso no hay amortiguamiento, luego la frecuencia de de resonancia es: $\omega_R = \omega_0$

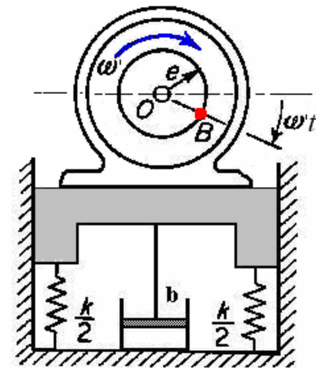
$$\sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$L = \frac{mg}{k} = \frac{(1{,}0)(9{,}8)}{120} = 0{,}0817 \text{ m} = 8{,}2 \text{ cm}$$

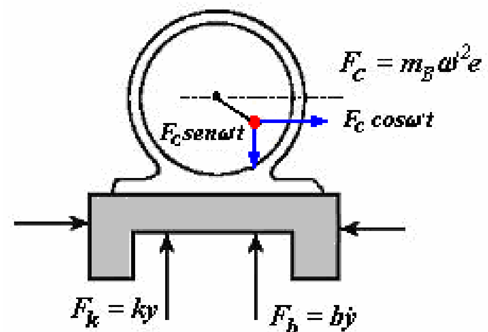
Ejemplo 35. El motor en la figura está montado sobre dos resortes, cada uno con modulo $k/2$ = 10000 N/m. El amortiguador tiene un coeficiente b = 140 N.s/m. El motor incluyendo la masa desbalanceada B, pesa 170 N, y el cuerpo no balanceado B pesa 4,5 N y está localizado a 7,5 cm. del centro del eje.

a) El motor gira a 300 rpm. Determine la amplitud y el ángulo de fase (relativo a la posición de B) del movimiento resultante.

b) Determine la velocidad de resonancia y la amplitud resultante del movimiento.



Solución.



a) Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical.

$$\sum F_y = ma_y,$$

$$-F_k - F_b + F_c \operatorname{sen}\omega t = ma_y$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\right)y - b\dot{y} + F_c \operatorname{sen}\omega t = m\ddot{y}$$

La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + \left(\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\right)y = F_c \operatorname{sen}\omega t$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_c \operatorname{sen}\omega t$$

o $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \dfrac{F_c}{m}\operatorname{sen}\omega t$

Donde $m = \dfrac{170}{9{,}8} = 17{,}3 kg$, b = 140 N.s/m

y $\beta = \dfrac{b}{2m} = 4$

k = 20000 N/m y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 34 \text{ rad/s}$

$$\omega' = \frac{300\times2\pi}{60} = 31{,}4 \text{rad/s}$$

$$F_c = m_B e\omega'^2 = \frac{4{,}5}{9{,}8}\times0{,}075\times(31{,}4)^2 = 34 \text{ N}$$

La solución de la ecuación es

$$y = D\operatorname{sen}(\omega' t + \delta)$$

Con $D = \dfrac{F_c/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$

y $\tan\delta' = \dfrac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{34/17{,}3}{\sqrt{\left(34^2 - 31{,}4^2\right)^2 + 4\times 31{,}4^2\times 4^2}}$$

$= 7{,}8\times 10^{-3}\,\text{m}$ = 7,8 mm

El ángulo de fase

$$\tan\delta = \frac{2\times 31{,}4\times 4}{34^2 - 31{,}4^2} = 1{,}48,\ \delta = 55{,}9^o$$

b) La resonancia ocurre cuando

$$\omega' = \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

$$\omega_R = \sqrt{34^2 - 2\times 4^2} = 33{,}5\,\text{rad/s}$$

$$\omega_R = \frac{33{,}5\times 60}{2\pi} = 320\text{rpm}$$

La amplitud de resonancia es:

$$D = \frac{F_c/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_R^2\right)^2 + 4\omega_R^2\beta^2}}$$

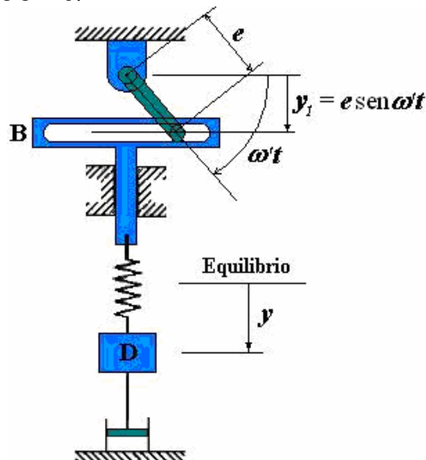
$$= \frac{34/17{,}3}{\sqrt{\left(34^2 - 33{,}5^2\right)^2 + 4\times 33{,}5^2\times 4^2}}$$

$= 7{,}3\times 10^{-3}\,\text{m}$ = 7,3 mm

Ejemplo 36. El cuerpo *D* de la figura tiene una masa de 10 kg y está soportado por un resorte con una constante de 1000 N/m. El cuerpo en la parte superior da al resorte un movimiento armónico vertical por medio de la manivela que tiene una velocidad angular de 40 rpm. La longitud de la manivela es de 1,30 cm.

a) determine la amplitud y ángulo de fase del movimiento de la masa *D* cuando el coeficiente de amortiguación es 100 N.s/m y cuando se desconecta el amortiguador

b) Determine el rango de valores de ω (si hay alguno) que limitará al movimiento de la masa a 2 cm. Cuando *b* = 0.



Solución.

a) Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento vertical.

$$\sum F_y = ma_y,$$

$$-F_k - F_b = ma_y$$

$$-k(y - y_1) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

Como $y_1 = e\,\text{sen}\,\omega' t$

$$-k(y - e\,\text{sen}\,\omega' t) - b\dot{y} = m\ddot{y}$$

La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = ke\,\text{sen}\,\omega t$$

o $\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \dfrac{ke}{m}\text{sen}\,\omega' t$

Donde

$m = 10kg$, b = 100 N.s/m y $\beta = \dfrac{b}{2m} = 5$

k = 1000 N/m y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10\,\text{rad/s}$

$$\omega' = \frac{40\times 2\pi}{60} = 4{,}19\,\text{rad/s}$$

La solución de la ecuación es

$$y = D\text{sen}(\omega' t + \delta)$$

con $D = \dfrac{ke/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$ y

$$\tan\delta' = \frac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{1000\times 1{,}3\times 10^{-2}/10}{\sqrt{\left(10^2 - 4{,}19^2\right)^2 + 4\times 4{,}19^2\times 5^2}}$$

$= 1{,}41\times 10^{-2}\,m$ = 1,41 cm

El ángulo de fase

$$\tan\delta' = \frac{2\times 4{,}19\times 5}{10^2 - 4{,}19^2} = 0{,}51,\ \delta' = 26{,}9^o$$

Cuando se desconecta el amortiguador $\beta = 0$.

Con $D = \dfrac{ke/m}{\omega_o^2 - \omega'^2}$ y $\tan\delta' = 0$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{1000\times 1{,}3\times 10^{-2}/10}{10^2 - 4{,}19^2}$$

$= 1{,}58\times 10^{-2}\,\text{m}$ = 1,58 cm

El ángulo de fase

$\tan\delta' = 0$, $\Rightarrow$ $\delta' = 0^o$

b) Determine el rango de valores de ω' (si hay alguno) que limitará al movimiento de la masa a 2 cm. Cuando *b* = 0.

La resonancia ocurre cuando

$\omega' = \omega_R = 10 \text{rad/s}$

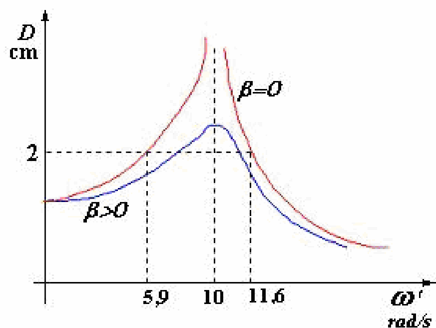
La amplitud D es infinita.

El valor de D con un valor máximo de dos se encuentra con

$$D = \frac{ke/m}{\pm(\omega_o^2 - \omega'^2)} \quad \text{Para } D = 2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow D = \frac{1{,}3}{\pm(10^2 - \omega^2)} = 2\times 10^{-2}\text{m}$$

se obtiene $\omega'_1 = 5{,}9 \text{rad/s}$ y $\omega'_2 = 11{,}6 \text{rad/s}$



D tiene como valor máximo 2 cuando

$$5{,}9 \text{rad/s} \le \omega' \ge 11{,}6 \text{rad/s}$$

Ejemplo 37. La relación entre la fuerza aplicada a un resorte y el alargamiento producido (ley de Hooke) es: $F = 439\,\Delta\ell$ (todo en SI): Si se suspende el resorte de un extremo y se cuelga en el otro una masa m = 3,2 kg calcular:

a) la frecuencia propia de las oscilaciones.

b) Si existe un amortiguamiento debido a una fuerza resistente $F = -33v$ (velocidad) ¿cuál será la frecuencia y la ecuación diferencial del movimiento?

c) Sí además actúa una fuerza sinusoidal de amplitud 10 N y frecuencia doble que la propia del oscilador ¿cuál es la velocidad máxima en las oscilaciones forzadas permanentes?

Solución.

a) La ley de Hooke es: $F = k\,\Delta\ell \quad \Rightarrow \quad F = 439\,\Delta\ell$

Luego la constante del resorte es k = 439 N/m

La frecuencia angular propia del resorte es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{439}{3{,}2}} = 11{,}7 \text{ rad/s}$$

La frecuencia propia o natural es:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{11{,}7}{2\pi} = 1{,}864 \text{ Hz}$$

b) La ecuación del movimiento con fuerza resistente es:

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Con k = 439 N/m, b = 33 N.s/m y m = 3,2 kg:

$$-439x - 33b\dot{x} = 3{,}2\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + 10{,}31\dot{x} + 137{,}2x = 0$$

Ecuación de la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Donde: $2\beta = 10{,}31$ y $\omega_0^2 = 137{,}2$

Cuya solución es

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

Con A y ϕ constantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del movimiento y

$$\omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|} = \sqrt{\left|\left(\frac{10{,}31}{2}\right)^2 - 137{,}2\right|}$$

= 10,52 rad/s

Observamos que es un poco menor que la propia del oscilador ω_0

La frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{10{,}52}{2\pi}$ = 1,674 Hz

c) Sí además actúa una fuerza sinusoidal de amplitud 10 N y frecuencia doble que la propia del oscilador

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento.

$$\sum F = ma \Rightarrow -kx - b\dot{x} + F_0 \operatorname{sen}\omega' t = m\ddot{x}$$

La ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen}\omega' t$$

o $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega' t$

Donde además de los valores conocidos, tenemos

F_0 = 10 N y $\omega' = 2\omega_0$ = 2 (11,71) = 23,43 rad/s.

La solución de la ecuación es

$x = D\operatorname{sen}(\omega' t + \delta)$, la velocidad es

$$\frac{dx}{dt} = D\omega'\cos(\omega' t + \delta)$$

con $D = \dfrac{F'/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$ y

$$\tan\delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{10/3{,}2}{\sqrt{\left(11{,}71^2 - 23{,}43^2\right)^2 + 4\times 23{,}43^2 \times 5{,}15^2}}$$

= 6,54 x 10^{-3} m = 6,54 mm

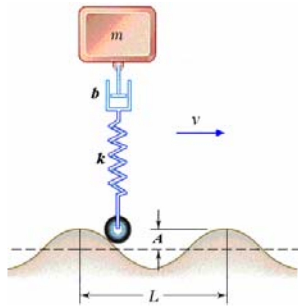
Y la velocidad máxima es

$D\omega' = 6{,}54\times 10^{-3}(23{,}43)$ = 0,153 m/s

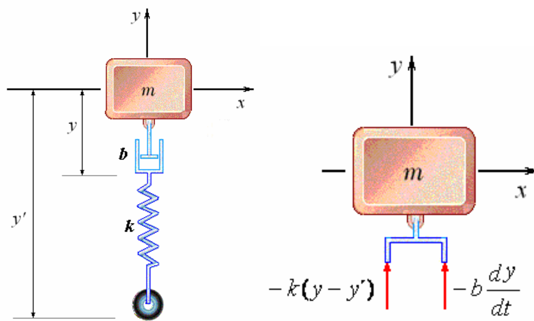
Ejemplo 38. Para estudiar el movimiento de un carro en un camino "encalaminado", se puede usar el siguiente modelo: El camino se representa por una sinusoide de amplitud A y separación entre crestas L.

El carro se representa por una masa M apoyada sobre un resorte de constante de rigidez k y un amortiguador de constante b (que representan a los 4 resortes y amortiguadores, realmente existentes, con el objeto de considerar únicamente el efecto vertical). El carro avanza con una velocidad horizontal v constante.

a) Encontrar la amplitud y frecuencia del movimiento vertical del carro.
b) ¿A qué velocidad entrará en resonancia?



Solución.
a) El carro tiene oscilación forzada debido al encalaminado de la carretera. El encalaminado le produce un movimiento vertical dado por la ecuación: $y' = A\,\text{sen}\,\omega' t$, donde $\omega' = 2\pi f$, con $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L}$.



La ecuación del movimiento vertical de la masa M se obtiene de $\sum F_y = Ma_y$

$$-k(y-y') - b\dot{y} = M\ddot{y} \Rightarrow$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = kA\,\text{sen}\,\omega' t$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_o^2 y = \frac{kA}{M}\text{sen}\,\omega' t, \text{ con } 2\beta = \frac{b}{M} \text{ y}$$

$$\omega_o^2 = \frac{k}{M}$$

La parte importante de la solución es la estacionaria $y = D\,\text{sen}(\omega' t + \delta)$, con

$$D = \frac{kA/M}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\beta^2\omega'^2}} \text{ y}$$

$$\tan\delta = \frac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

La amplitud del movimiento esta dada por D y la frecuencia por ω'

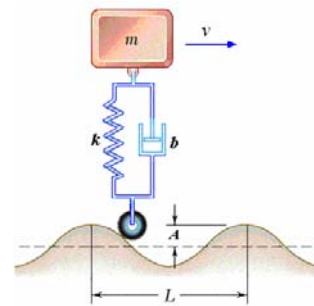
b) Como $\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} = 2\pi\frac{v}{L}$

Entrará en resonancia con la velocidad

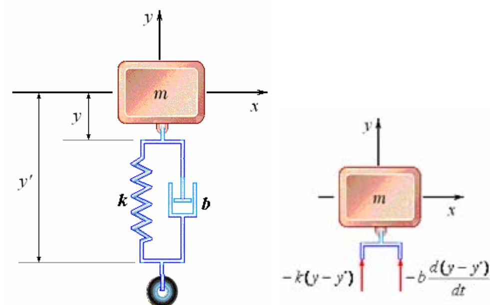
$$v = \frac{L\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}}{2\pi}$$

Nota: En la solución consideramos para el amortiguador solo el efecto del movimiento de la masa, para el resorte consideramos el efecto del movimiento de la masa y el producido por el calamonado. En el problema siguiente consideraremos los dos efectos en los dos elementos.

Ejemplo 39. Para estudiar el movimiento de un carro en un camino "encalaminado", se puede usar el siguiente modelo: El camino se representa por una sinusoide de amplitud A y separación entre crestas L.
El carro se representa por una masa m apoyada sobre un resorte de constante de rigidez k y un amortiguador de constante b (que representan a los 4 resortes y amortiguadores, realmente existentes, con el objeto de considerar únicamente el efecto vertical). El carro avanza con una velocidad horizontal v constante.
a) Encontrar la amplitud y frecuencia del movimiento vertical del carro.
b) ¿A qué velocidad entrará en resonancia?



Solución.
a) El carro tiene oscilación forzada debido al encalaminado de la carretera. El encalaminado le produce un movimiento vertical dado por la ecuación: $y' = A\,\text{sen}\,\omega' t$, donde $\omega' = 2\pi f$, con $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L}$.



La ecuación del movimiento vertical de la masa M se obtiene de $\sum F_y = Ma_y$

$$-k(y-y') - b\frac{d(y-y')}{dt} = M\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -ky + ky' - b\dot{y} + b\dot{y}' = M\ddot{y}$$

Con $y' = A\,\text{sen}\,\omega' t$ y $\frac{dy'}{dt} = \dot{y}' = A\omega'\cos\omega' t$:

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = kA\text{sen}\,\omega' t + b\omega'\cos\omega' t$$

Haciendo $kA = F_0 \text{sen}\phi$ y $b\omega' = F_0 \cos\phi$,

Con $\phi = \tan^{-1}\dfrac{kA}{b}$ y $F_0 = \sqrt{(kA)^2 + (b\omega')^2}$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_0 \text{sen}\phi \text{sen}\omega\'t + F_0 \cos\phi \cos\omega\'t$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_0 \text{sen}(\omega\'t + \phi) \Rightarrow$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{F_0}{M}\text{sen}(\omega\'t + \phi)$$

Con $2\beta = \dfrac{b}{M}$ y $\omega_o^2 = \dfrac{k}{M}$:

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{M}\text{sen}(\omega\'t + \phi)$$

La parte importante de la solución es la estacionaria $y = D\text{sen}(\omega\'t + \phi + \delta)$, con

$$D = \frac{F_0 / M}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega'^2\right)^2 + 4\beta^2\omega'^2}}$$ y

$$\tan\delta = \frac{2\beta\omega'}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

La amplitud del movimiento esta dada por D y la frecuencia por $\omega\'$

b) Como $\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} = 2\pi\dfrac{v}{L}$

Entrará en resonancia con la velocidad

$$v = \frac{L\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}}{2\pi}$$

Ejemplo 40. La constante elástica de un resorte es 40 N/m. Un extremo está fijo y en el otro hay una masa m = 0,16 kg. Calcular:
a) la frecuencia propia de la oscilación.
b) la ecuación diferencial del movimiento sin amortiguamiento.
c) La energía para el oscilador si amortiguamiento para amplitud de 0,02 m.
d) Si la masa se introduce en aceite se origina la fuerza resistente viscosa $F = - bv$ (siendo b el coeficiente de amortiguamiento y v la velocidad). Escribir la ecuación diferencial del movimiento amortiguado para b = 0,4 Ns/m.
e) ¿Cuánto tendría que valer b para que el movimiento no fuese oscilatorio?
f) Para b = 0,4 expresar la amplitud en función del tiempo.
g) Dar la frecuencia del movimiento.
h) Si b = 0,4 y además aparece una fuerza sinusoidal de amplitud 0,5 N y frecuencia doble que la propia, calcular la amplitud de la oscilación y la diferencia de fase con la fuerza aplicada
i) calcular la frecuencia de resonancia, y dar la amplitud en este caso.
j) escribir la ecuación del movimiento completa y dar la solución general, indicando el tiempo para el cual la amplitud del tiempo transitorio se reduce ala mitad.

Solución.

a) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{40}{0,16}} = \sqrt{250}$ = 15,81 rad/s

b) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 250x = 0$

c) La energía para el oscilador si amortiguamiento para amplitud de 0,02 m.

$E = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}(40)(0,02)^2$ = 0,008 N

d) La ecuación diferencial del movimiento amortiguado para es:

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

Con k = 40 N/m, b = 0,4 N.s/m y m = 0,16 kg:

$$-40x - 0,4b\dot{x} = 0,16\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + 2,5\dot{x} + 250x = 0$$

Ecuación de la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Donde: 2β = 2,5 y $\omega_0^2 = 250$

e) ¿Cuánto tendría que valer b para que el movimiento no fuese oscilatorio?
El movimiento es oscilatorio cuando

$\left(\beta^2 - \omega_0^2\right) < 0$ y no es oscilatorio cuando

$\left(\beta^2 - \omega_0^2\right) \geq 0$ o $\beta^2 \geq \omega_0^2$

$\Rightarrow \beta^2 \geq 250 \Rightarrow \beta \geq 15,81$

De aquí $b \geq 15,81(2m)$ $b \geq 5,06$

Como b = 0,4, realmente hay oscilación.

f) Para b = 0,4 expresar la amplitud en función del tiempo.

La solución de la ecuación del movimiento es

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

La amplitud está dada por $Ae^{-\beta t}$, donde $\beta = \dfrac{2,5}{2}$

$= 1,25\dfrac{\text{Ns}}{\text{m}}$ y A depende de las condiciones iniciales.

g) La frecuencia angular del movimiento es:

$$\omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|} = \sqrt{\left|\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 - 250\right|}$$

= 15,76 rad/s

y la frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{15,76}{2\pi}$ = 2,51 Hz

h) Si b = 0,4 y además aparece una fuerza sinusoidal de amplitud 0,5 N y frecuencia

$\omega' = 2\omega_0 = 2(15,81)$ = 31,62 rad/s

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\text{sen}\omega' t \Rightarrow$$

$$0{,}16\ddot{x} + 0{,}4b\dot{x} + 40x = 0{,}5\text{sen}31{,}62t$$

De donde:

$$\ddot{x} + 2{,}5\dot{x} + 250x = 3{,}125\text{sen}31{,}62t$$

Ecuación de la forma $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\text{sen}\omega' t$

Cuya solución es

$$x = D\text{sen}(\omega' t + \delta)$$

Con $D = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega'^2)^2 + 4\omega'^2\beta^2}}$ y

$$\tan\delta = \frac{2\omega'\beta}{\omega_o^2 - \omega'^2}$$

Reemplazando valores:

$$D = \frac{3{,}125}{\sqrt{(15{,}81^2 - 31{,}62^2)^2 + 4(31{,}62)^2(1{,}25)^2}}$$

$= 4{,}14 \times 10^{-3}$ m

$D = 4{,}4$ mm

El ángulo de fase

$$\tan\delta = \frac{2\times 31{,}62\times 1{,}25}{15{,}81^2 - 31{,}62^2} = -0{,}1054,$$

$$\delta = -6{,}07^0$$

i) calcular la frecuencia de resonancia, y dar la amplitud en este caso.

La resonancia ocurre cuando

$$\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

$$\omega_R = \sqrt{15{,}81^2 - 2\times 1{,}25^2} = 15{,}71\text{rad/s}$$

La amplitud de resonancia es:

$$D = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_R^2)^2 + 4\omega_R^2\beta^2}}$$

$$= \frac{3{,}125}{\sqrt{(15{,}81^2 - 15{,}71^2)^2 + 4\times 15{,}71^2\times 1{,}25^2}}$$

$= 24{,}9 \times 10^{-3}$ m

j) escribir la ecuación del movimiento completa y dar la solución general.

La ecuación completa del movimiento es.

$x = x_{\text{transitoria}} + x_{\text{particular}}$

La solución particular es $x = D\text{sen}(\omega' t + \delta)$

Y la solución transitoria es

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi)$$

El tiempo para el cual la amplitud del tiempo transitorio se reduce a la mitad es t'

De tal modo que $\frac{A}{2} = Ae^{-\beta t'}$

$$\Rightarrow t' = \frac{\ln 2}{\beta} = \frac{0{,}692}{1{,}25} = 0{,}554 \text{ s}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un oscilador armónico simple de 5 g de masa tiene un período de 0,6 s y una amplitud de 18 cm. Hallar el ángulo de fase, la velocidad y la fuerza aceleradora en el instante en que el desplazamiento del oscilador es -9 cm.

Respuesta. Fase = 120° o 240°, v = 160 cm/s,

F = 0,05 N

2. Una nadadora de masa m está sobre una balanza situada en el extremo de una palanca de salto, que ella ha puesto previamente en movimiento armónico simple con frecuencia angular ω y amplitud $A = y_m$ *(a)* ¿Cuál es la lectura de la balanza? *(b)* ¿En qué condiciones se verá lanzada la nadadora de la palanca?

Respuesta.

$$F_g = mg - m\omega^2 y_m \text{sen}\omega t$$

3. Una masa de 150 g situada en el extremo de un resorte horizontal se ve desplazada 3 cm hacia la izquierda de la posición de equilibrio mediante una fuerza de 60 N.

a) Hallar la frecuencia natural angular ω_0.

b) Hallar la amplitud del movimiento subsiguiente si se dejase de repente en libertad la masa.

c) ¿Cuáles serán la posición y velocidad de la masa 10 s después de haber quedado libre?

Respuesta. a) $\omega_0 = 115{,}47\, rad/s$, b) A = 3 cm, c) x = 0,492 cm a la izquierda de la posición de equilibrio, d) v = - 341,66 cm.

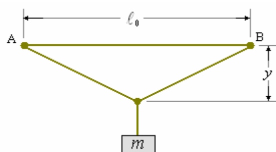
4. Un bloque descansa sobre una placa delgada que ejecuta un movimiento armónico simple vertical con un periodo de 1.2 s. ¿Cuál es la máxima amplitud del movimiento para el cual el bloque no se separa de la placa?

Respuesta. A = 0,357

5. Una plataforma está realizando un movimiento armónico simple en dirección vertical con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de $10/\pi$ vibraciones por segundo. En el punto más bajo de su trayectoria se coloca un cuerpo sobre la plataforma.

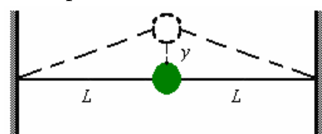
a) ¿En qué punto se separará el cuerpo de la plataforma?
b) ¿A qué altura ascenderá el cuerpo por encima del punto más alto alcanzado por la plataforma?
Respuesta. a) y = 2,5 cm, b) 1,25 cm

6. Un alambre de longitud ℓ_0 se alarga en $10^{-3}\ell_0$, cuando se cuelga de su extremo inferior una cierta masa. Si se conecta este mismo alambre entre dos puntos A y *B*, alejados ℓ_0 y situados en el mismo plano horizontal y de su punto medio se cuelga la misma masa, como se ve en la figura, ¿cuál es la depresión *y* en dicho punto y cuál es la tensión del alambre?



Respuesta. $y = \dfrac{\ell_0}{20}$, tensión = 5 x peso del objeto.

7. Una masa m se conecta a dos bandas de jebe de longitud *L*, cada una bajo una tensión *T*, como se muestra la figura. La masa se desplaza una pequeña distancia y en forma vertical. Suponiendo que la tensión no cambia significativamente, demuestre que:
a) la fuerza de restitución es - (2*T*/*L*) y
b) que el sistema presenta un movimiento armónico simple con una frecuencia dada por $\omega = \sqrt{2T/mL}$



8. Se observa que una fuerza de 0,1 N estira a una determinada cuerda elástica en 50 mm. Se suspende de un extremo de la cuerda un objeto de 15 g Y se le hace adquirir una vibración vertical tirando hacia abajo de él y luego soltándolo. ¿Hasta qué punto habrá que alargar la cuerda con el objeto colgado para que al alcanzar el punto más alto de la vibración no exista tensión en la cuerda?

Respuesta. $\Delta y = 7{,}5\text{cm}$

9. Una partícula gira con celeridad constante en una circunferencia de radio *R.*

a) Demostrar que sus proyecciones sobre los ejes horizontal y vertical (sus componentes *x* e *y)* realizan movimientos armónicos simples con unas constantes de fase que se diferencian en $\pi/2$. Esta circunferencia se conoce como circunferencia de referencia correspondiente a la oscilación horizontal.

b) Si el eje *x* representa el desplazamiento de un oscilador armónico simple en unidades de la amplitud *A* y el eje *y* representa su *velocidad* en unidades de ωA, demostrar que el gráfico del movimiento en el plano *xy* es un círculo de radio unidad.

10. Consideremos el oscilador armónico simple de 5 *g* de masa tiene un período de 0,6 s y una amplitud de 18 cm.. a) Hallar la energía mecánica total del oscilador. b) ¿Cuál es su velocidad inicial v_0 si el desplazamiento inicial es 6 cm?
Respuesta. a) E = 88,826x10^{-7} N
b) $v_0 = 177{,}7$ cm/s

11. En el instante t = 0 un oscilador armónico simple con una frecuencia de 5 rad/s tiene un desplazamiento de 25 cm y una celeridad de -10 cm/s.

a) Hallar la amplitud *A* de la oscilación.

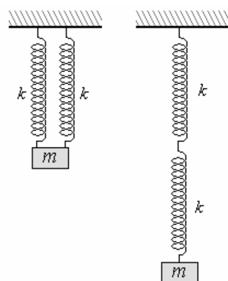
b) ¿Cuál es su constante de fase?

c) Si existe un peso de 10 g en el oscilador, ¿cuál es su energía mecánica total?
Respuesta. a) *A* = 25,08 cm, b) $\phi = 94{,}6^{\text{o}}$, c) E = 78,625 x 10^{-7} N

12. Un oscilador armónico simple de masa 0,8 kg y frecuencia $10/3\pi$ Hz se pone en movimiento con una energía cinética inicial $K_0 = 0{,}2J$ y una energía potencial inicial $U_0 = 0{,}8J$. Calcular
a) su posición inicial.
b) su velocidad inicial.
c) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?
Respuesta. a) $x_0 = \pm 0{,}45m$, b) $v_0 = \pm 1{,}5m/s$,
c) *A* = 0,50 m,

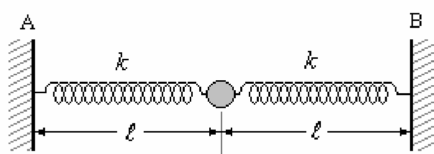
13. Se cuelga de un resorte un objeto de 1g de masa y se le deja oscilar. Para t = 0, el desplazamiento era 43,785 cm y la aceleración -1,7514 cm/s^2. ¿Cuál es la constante del resorte?
Respuesta. k = 0,025 N/m

14. Una masa *m* cuelga de un resorte uniforme de constante *k.*
a) ¿Cuál es el período de las oscilaciones del sistema?
b) ¿Cuál sería el período si la masa *m* se colgase de modo que:
(1) Estuviese sujeta a dos resortes idénticos situados uno junto al otro?
(2) Estuviese sujeta al extremo inferior de dos resortes idénticos conectados uno a continuación del otro?



Respuesta. a) $T_0 = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$, b) $\frac{T_0}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}T_0$

15. Una masa *m* descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento y está unida a unos soportes rígidos mediante dos resortes idénticos de longitud ℓ_0 sin deformar y constante *k*. Ambos resortes se estiran hasta una longitud ℓ considerablemente mayor que ℓ_0. Los desplazamientos horizontales de *m* respecto a su posición de equilibrio se denominarán *x* (sobre AB) e *y* (perpendicular a AB).
a) Escribir la ecuación diferencial del movimiento (es decir, la ley de Newton) que rige las oscilaciones pequeñas en dirección *x*.
b) Escribir la ecuación diferencial del movimiento que rige las oscilaciones pequeñas en dirección *y* (admitir que *y* <<1).
c) Calcular el cociente entre los períodos de oscilaciones sobre *x* e *y* en función de ℓ y ℓ_0.
d) Si para *t* = 0 se deja libre la masa m desde el punto $x = y = A_0$ con velocidad nula, ¿cuáles son sus coordenadas *x* e *y* en un instante posterior *t?*
e) Dibujar un gráfico de la trayectoria de *m* resultante bajo las condiciones de la parte (d) si $\ell = \frac{9}{5}\ell_0$.



Respuesta. c) $\frac{T_x}{T_x} = \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell}\right)^{1/2}$, d)

$$x_{(t)} = A_0 \cos\left(\frac{2k}{m}\right)^{1/2} t,$$

$$y_{(t)} = A_0 \cos\left[\frac{2k(\ell - \ell_0)}{m\ell}\right]^{1/2} t$$

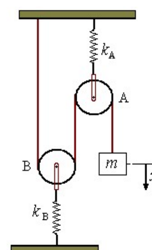
16. Un resorte que tiene su masa M distribuida uniformemente en toda su longitud tiene colgada una masa m en su extremo inferior. Si el resorte se alarga uniformemente cuando el sistema oscila, demostrar que cuando la masa suspendida se está moviendo con una velocidad *v* la energía cinética del sistema viene dada por

$$K = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right)v^2$$

Si el sistema masa-muelle realiza un movimiento armónico simple, demostrar que tendrá un período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{3}}{k}}$$

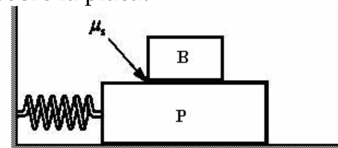
17. Si la masa de las poleas mostradas en la figura es pequeña y la cuerda inextensible, encontrar la frecuencia natural del sistema.



Respuesta.

$$\omega = \sqrt{\frac{k_A k_B}{4m(k_A + k_B)}}\ \frac{rad}{s}$$

18. Una placa plana P hace un movimiento armónico simple horizontal sobre una superficie sin fricción con una frecuencia *f* = 1,5 Hz. Un bloque B descansa sobre la placa, como se muestra en la figura, y el coeficiente de fricción estático entre el bloque y la placa es μ = 0,60. ¿Cuál es la máxima amplitud de oscilación que puede tener el sistema sin que resbale el bloque sobre la placa?



Respuesta. *A* = 6,62 cm

19. Se observó que el período de un determinado péndulo era *T* = 1,002 s al nivel del mar. Cuando el péndulo se llevó a la cima de una montaña, el período resultó ser *T* = 1,003 s.
a) ¿Qué altura tenía la montaña?
b) ¿Cómo se vería afectado por la altura un péndulo de torsión?

Para $h << R_T \Rightarrow g = g_0\left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right)$, R_T = 6 378,13 km

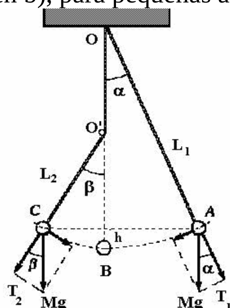
Respuesta. a) *h* = 6,36 km, b) no, excepto en el

caso de que la resistencia del aire sea más pequeña.

20. Un cohete que posee un empuje igual a cinco veces su peso está equipado con un reloj de péndulo vertical. Se dispara el cohete en el instante $t = 0$ y se eleva verticalmente. Después de 5 s se agota el combustible. ¿Cuál es el tiempo leído en dicho reloj de péndulo si un reloj semejante en el suelo marca 15 s?

Respuesta. $t = 21,2$ s

21. Un péndulo está constituido por una pequeña esfera, de dimensiones que consideramos despreciables, cuya masa es M = 200 g, suspendida en un hilo inextensible y sin peso apreciable, de 2 m de largo.
a) Calcular el período para pequeñas amplitudes.
b) Supongamos que en el momento de su máxima elongación la esfera se ha elevado 20 cm por encima del plano horizontal que pasa por la posición de equilibrio. Calcular su velocidad y su energía cinética cuando pase por la vertical.
c) Supongamos que al pasar por la vertical el hilo encuentra un clavo O' situado 1m debajo del punto de suspensión O y normal al plano de oscilación. Describir el movimiento posterior de la esfera. Calcular la relación de las tensiones del hilo cuando el péndulo alcanza sus posiciones extremas.
d) Calcular el período de este péndulo, tal como se describe en b), para pequeñas amplitudes.



Respuesta.

a) $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{9,8}} = 2\sqrt{2}$ s

b) $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2x9,8x0,2} = 0,4m/s$

c) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{L_1 - h}{L_1 - 2h} = \dfrac{2-0,2}{2-2x0,2} = 1,12$

d) $T = \dfrac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1 = 2,4s$

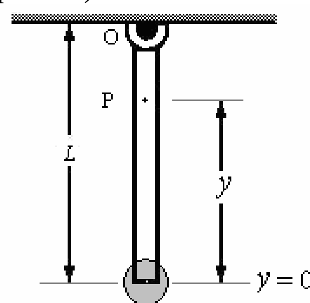
22. Un aro delgado y uniforme de diámetro d cuelga de un clavo. Se desplaza un ángulo pequeño en su propio plano y luego se le deja libre. Suponiendo que el aro no desliza sobre el clavo, demostrar que su período de oscilación es el mismo que el de un péndulo ideal de longitud d.

23. a) Una varilla homogénea delgada de longitud ℓ oscila alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Hallar la longitud del péndulo ideal equivalente y situar el centro de oscilación y el centro de percusión.

b) Un disco macizo de radio R está oscilando con una pequeña amplitud alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y situado a una distancia r de su centro. ¿A qué distancia r' será máxima la frecuencia?

Respuesta. a) $\ell_0 = \dfrac{2}{3}\ell$, b) $r' = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

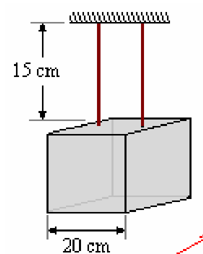
24. Se sujeta una masa M en el extremo de un barra uniforme de masa M y longitud L, la cual se pivota en la parte superior Determine las tensiones en la barra en el pivote y en el punto P, cuando la barra se encuentra en reposo. Calcule el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos del equilibrio y determine el periodo para L = 2 m. (Sugerencia: Suponga que la masa en el extremo de la barra es una masa puntual.)



Respuesta.

$$T = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{2(2)}{9,8}} = 2,68 \text{ s.}$$

25. Un bloque cúbico de 20 cm de arista está colgado por dos cuerdas de 15 cm de largo, como se indica en la figura.
a) ¿Cuál es el período de oscilación cuando el movimiento es paralelo al plano de la figura?
b) ¿Cuándo el movimiento es perpendicular al plano de la figura?



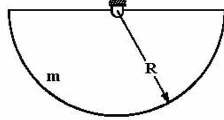
Respuesta. a) $T = 0,78s$, b) $T = 1,1s$

26. Un alambre delgado se dobla en forma de una semicircunferencia de radio R. Se le hace oscilar en

su propio plano alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por el punto medio del alambre. Hallar la longitud del péndulo ideal equivalente.

Respuesta. $\ell_0 = 2R$

27. Un semicírculo de radio R y masa m está pivotado alrededor de su centro como se muestra en la figura. Determinar su frecuencia natural de oscilación para pequeños desplazamientos.

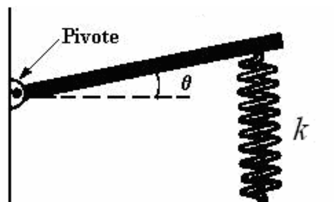


Respuesta: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{8g}{3R\pi}}$ rad/s

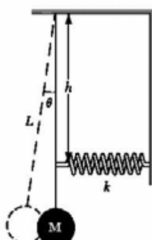
28. Un arco circular de diámetro d se cuelga de un clavo. ¿Cuál es el período de sus oscilaciones cuando las amplitudes son pequeñas?

Respuesta. $2\pi\left(\dfrac{d}{g}\right)^{1/2}$

29. Una tabla horizontal de masa m *y longitud* L se pivota en un extremo, y en el extremo opuesto se sujeta a un resorte de constante de fuerza k . El momento de inercia de la tabla respecto del pivote es $\dfrac{1}{3}mL^2$. Si la tabla se desplaza un ángulo pequeño θ de la horizontal y se suelta, demuestre que se moverá con un movimiento armónico simple, con una frecuencia angular dada por $\omega = \sqrt{3k/m}$.

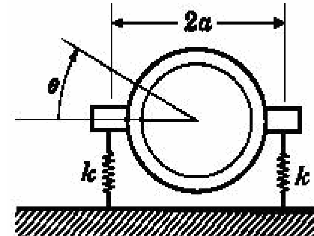


30. Un péndulo de longitud L y masa M tiene conectado un resorte de constante de fuerza k a una distancia h por debajo del punto de suspensión. Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud (θ pequeño). (Suponga que el soporte vertical, de longitud L, es rígido, pero de masa despreciable.)



Respuesta. $\omega = \sqrt{\dfrac{mgL + kL^2}{mL^2}}$

31. Un motor eléctrico está apoyado por 4 resortes, cada uno de constante k como se muestra en la figura. Si el momento de inercia del motor alrededor del eje central de rotación es I_0, encontrar la frecuencia natural de oscilación.

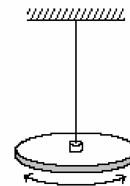


Respuesta.

$$\omega_0 = 2a\sqrt{\frac{k}{I_o}} \text{ rad/s}$$

32. a) Se cuelga una bola de acero maciza del extremo de un alambre de acero de 2m de longitud y radio 1 mm. La carga de rotura del acero es **1,1** x 10^9 N/m^2. ¿Cuáles son el radio y la masa de la bola de mayor tamaño que puede soportar el alambre?
b) ¿Cuál es el período de las oscilaciones de torsión de este sistema? (Módulo de cizalladucha del acero = 8 x 10^{10} N/m^2. Momento de inercia de la esfera respecto a un eje que pasa por centro = $2MR^2/5$.)
Respuesta. a) 22 cm radio, 360 kg b) 66 s.

33. La lenteja de un péndulo de torsión como el de la figura es un disco de momento de inercia desconocido I. Su período es T = 3 s. Cuando se coloca sobre el disco un anillo delgado de 3 kg de masa y un radio de 10 cm, de forma que el hilo de suspensión pasa por el centro exacto del anillo, el nuevo período de oscilación es T = 4 s. Hallar el momento de inercia I.



Respuesta. I = 0,0386 kg.m^2

34. Un resorte de 20 cm de longitud cuelga de un soporte fijo. Al colocarse una masa de 0,5 kg en el extremo inferior la longitud aumenta a 25 cm. Al poner en oscilación el sistema se observa que en el tiempo π/0,65 segundos ejecuta 10 oscilaciones. Analice y diga si el movimiento armónico es simple o amortiguado. Justifique.
Respuesta.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ k = \frac{0,5\times 9,8}{0,05} = 98\frac{N}{m}\ ,\ \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{98}{0,5}} = 14\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La frecuencia medida es $\omega = 2\pi\left(\frac{10}{\pi/0,65}\right) = 13\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

La diferencia se debe a que el movimiento es amortiguado.

35. Se cuelga un objeto de masa 0,2 kg de un resorte cuya constante es 80 N/m., Se somete el objeto a una fuerza resistente dada por - *bv*, siendo *v* su velocidad en m/s.
a) Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el caso de oscilaciones libres del sistema.
b) Si la frecuencia con amortiguamiento es $\sqrt{3}/2$ de la frecuencia sin amortiguamiento, ¿cuál es el valor de la constante *b?*
Respuesta. b) 4 N.s/m,

36. Se conecta un bloque de masa *m* él un resorte cuyo otro extremo se mantiene fijo. Existe también un mecanismo de amortiguamiento viscoso. Sobre este sistema se han realizado las siguientes observaciones:

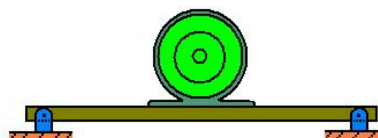
(1) Si se empuja horizontalmente el bloque con una fuerza igual a compresión estática del muelle es igual a *h*.
(2) La fuerza resistente viscosa es igual a *mg* si el bloque se mueve con una cierta velocidad conocida *u*.
a) Para este sistema completo (en el que se incluye tanto el resorte el amortiguador) escribir la ecuación diferencial que rige las oscilaciones horizontales de la masa en función de *m*, g, *h* y *u*.
Responder a las siguientes preguntas en el caso de que. $u = 3\sqrt{gh}$:
b) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas?
c) ¿Qué tiempo ha de transcurrir, expresado en forma de un múltiplo de $\sqrt{h/g}$, para que la energía descienda en un factor $1/e$?
d) ¿Cuál es el valor *Q* de este oscilador?
e) Este oscilador, inicialmente en su posición de reposo, se pone en movimiento repentinamente cuando *t* = 0 mediante un proyectil de masa despreciable, pero cantidad de movimiento no nula, que se mueve en sentido positivo las *x*. Hallar el valor del ángulo de fase δ en la ecuación $x = Ae^{-\beta t/2}\cos(\omega t - \delta)$ que describe el movimiento subsiguiente, y representar *x* en función de *t* para los primeros ciclos.
f) Si el oscilador se impulsa con una fuerza $mg\cos\omega t$, siendo $\omega = \sqrt{2g/h}$ ¿cuál es la amplitud de la respuesta del estado estacionario?
Respuesta. b) $\left(\frac{35g}{36h}\right)^{1/2}$, c) $3\left(\frac{h}{g}\right)^{1/2}$, d) Q = 3, e) $\delta = \frac{\pi}{2}$, f) 0,90 *h*.

37. Un objeto de masa 0,2 kg se cuelga de un resorte cuya constante es 80 N/m. El cuerpo se somete a una fuerza resistente dada por - *bv*, siendo *v* su velocidad (m/s) y *b* = 4 N.m/s.
a) Plantear la ecuación diferencial del movimiento en el caso de oscilaciones libres del sistema y hallar su período.
b) Se somete el objeto a una fuerza impulsora sinusoidal dad $F(t) = F_0$ sen ωt, siendo F_0 = 2N y ω = 30 rad/s. En estado estacionario, ¿Cuál es la amplitud de la oscilación forzada?

Respuesta. a) $T = \frac{\pi}{5\sqrt{3}}s$, b) 1,3 cm

38. Un Pontiac Grand Prix de 1550 kg se soporta mediante cuatro resortes en espiral, cada uno con una constante de 7,00 x 10^4 N/m.
a) ¿Cuál es la frecuencia natural de este sistema?
b) El automóvil vibra al rodar sobre los baches en una autopista de concreto. Si los baches están separados 18,5 m, ¿qué tan rápido se está moviendo el automóvil cuando la frecuencia de los baches está en resonancia con la frecuencia natural?
Respuesta. a) 2,14 Hz b) 39,6 m/s

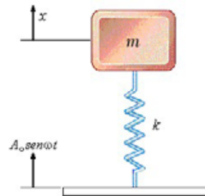
39. Un motor pequeño de velocidad variable tiene una masa de 9 kg se monta en una viga elástica tal como se muestra en la figura. El motor rota con una masa excéntrica de 1 kg a 5 cm. del centro del eje. Cuando el motor no está funcionando, el motor y el peso excéntrico hacen desviar a la viga 1,25 cm. Determine
a) la velocidad del sistema en la resonancia y
b) la amplitud de las vibraciones forzadas cuando el motor está funcionando en 300 rpm.
c) ¿Sería posible reducir la amplitud de la vibración forzada del motor en la parte
b) sujetando un peso adicional al motor? ¿Si es así qué peso se debe agregar para reducir la amplitud de la vibración a 1,25 cm?



40. Un auto con amortiguadores en mal estado rebota hacia arriba y hacia abajo con un periodo de 1,5 s después de pasar por un hoyo. El auto tiene una masa

de 1500 kg y se soporta mediante cuatro resortes de igual constante de fuerza *k*. Determine el valor de *k*.
Respuesta. k = 6580 N/m

41. Un bloque de masa m está soportado por un resorte de constante *k* el cual está montado sobre una base de peso despreciable sometida a un movimiento armónico simple de arriba abajo $A_0 \text{sen}\,\omega t$ como se muestra en la figura. Determine el movimiento del bloque.

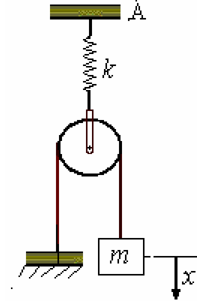


Respuesta.

$$x = A\text{sen}(\omega_0 t + \phi) + \frac{A_0\omega_0^2}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}\text{sen}(\omega t + \delta)$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. A, ϕ y δ dependen de las condiciones iniciales.

42. En el sistema mostrado en la figura, si la masa de la polea mostrada en la figura es pequeña y la cuerda inextensible Encontrar:
a) La ecuación de movimiento para cuando el soporte A no tiene movimiento alguno.
b) La ecuación de Movimiento para cuando el soporte A según la siguiente ley $x_A = x_o \cos(\omega t)$.
(Sugerencia: nótese que la deformación del resorte puede expresarla como la diferencia de las deformaciones de sus extremos)
c) La solución estable para el caso b.



Respuesta.
a) la frecuencia angular de las oscilaciones de la masa m es: $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

b) $\ddot{x} + \dfrac{k}{4m}x = \dfrac{1}{2m}\cos\omega t$

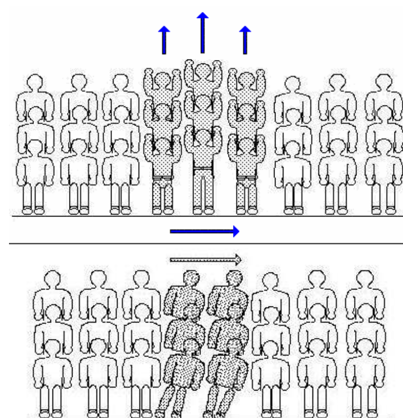
c) $x = D\cos(\omega t + \delta)$

$$D = \frac{1/2m}{\omega_o^2 - \omega^2},\quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{4m}}$$

CAPÍTULO 3. Movimiento ondulatorio y ondas

INTRODUCCIÓN.
Existen en la naturaleza muchos fenómenos de los cuales se dice "tienen naturaleza ondulatoria" pero ¿qué es exactamente una onda? ¿Qué propiedades tienen? ¿Cómo se puede formalizar una expresión matemática de un fenómeno ondulatorio? Estas y otras cuestiones son el tema objeto de este capítulo.
No obstante, antes de entrar de lleno en lo que es una onda y su formalismo, vamos a definir onda como:
Una onda es una perturbación física que transmite energía, pero que no transmite materia.
En las ondas materiales las partículas concretas que componen el material no se propagan, sino que se limitan a oscilar alrededor de su posición de equilibrio. No obstante cuando una onda se transmite por dicho material se produce una sincronización de oscilaciones entre las distintas partículas componentes del medio que posibilita la propagación de energía.
La onda de choque de una explosión es un buen ejemplo. La creación súbita de calor en la explosión eleva a presión muy alta a la masa de gas de su vecindad inmediata. Esta presión se ejerce sobre el aire que rodea el cual es comprimido e incrementado en presión. Esta presión a su vez es ejercida sobre el aire de más allá, o sea que hay una onda de presión que se aleja de la explosión con una velocidad de 335 m/s esta onda contiene la energía requerida para comprimir el aire. Esta energía rompe ventanas a grandes distancias de la explosión. Ningún material viaja, el movimiento de cualquier partícula de aire relativamente es pequeño, la perturbación es la que viaja rápidamente a grandes distancias y transmite la energía

DEFINICIÓN - CARACTERÍSTICAS.
Una onda es una perturbación que se propaga desde el punto en que se produjo hacia el medio que rodea ese punto.
Las ondas materiales (todas menos las electromagnéticas) requieren un medio elástico para propagarse.
El medio elástico se deforma y se recupera vibrando al paso de la onda.
La perturbación comunica una agitación a la primera partícula del medio en que impacta, este es el foco de las ondas y en esa partícula se inicia la onda.
La perturbación se transmite en todas las direcciones por las que se extiende el medio que rodea al foco con una velocidad constante en todas las direcciones, siempre que el medio sea isótropo (de iguales características físico-químicas en todas las direcciones).
Todas las partículas del medio son alcanzadas con un cierto retraso respecto a la primera y se ponen a vibrar, recuerda la ola de los espectadores en un estadio de fútbol.



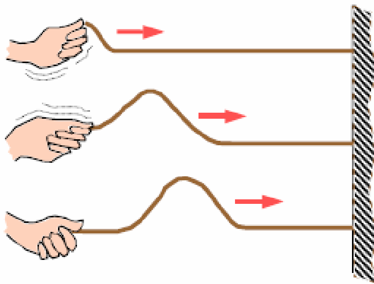
La forma de la onda es la foto de la perturbación propagándose, la instantánea que congela las posiciones de todas las partículas en ese instante.
Curiosamente, la representación de las distancias de separación de la posición de equilibrio de las partículas al vibrar frente al tiempo dan una función matemática seno que, una vez representada en el papel, tiene forma de onda.
Podemos predecir la posición que ocuparán dichas partículas más tarde, aplicando esta función matemática.
El movimiento de cada partícula respecto a la posición de equilibrio en que estaba antes de llegarle la perturbación es un movimiento oscilatorio armónico simple.
Una onda transporta energía pero no transporta materia: las partículas vibran alrededor de la posición de equilibrio pero no viajan con la perturbación.
Veamos un ejemplo: la onda que transmite un látigo lleva una energía que se descarga al golpear su punta.
Las partículas del látigo vibran, pero no se desplazan con la onda.

Pulso y tren de ondas – Onda viajera
El movimiento de cualquier objeto material en un medio (aire, agua, etc.) puede ser considerado como una fuente de ondas. Al moverse perturba el medio que lo rodea y esta perturbación, al propagarse, puede originar un pulso o un tren de ondas.
Un impulso único, una vibración única en el extremo de una cuerda, al propagarse por ella origina un tipo de onda llamada **pulso**. Las partículas oscilan una sola vez al paso del pulso, transmiten la energía y se quedan como estaban inicialmente. El pulso sólo está un tiempo en cada lugar del espacio. El sonido de un disparo es un pulso de onda sonora.
Si las vibraciones que aplicamos al extremo de la cuerda se suceden de forma continuada se forma un **tren de ondas** que se desplazará a lo largo de la cuerda, esto viene a ser una **onda viajera**.

TIPOS DE ONDAS:
Podemos establecer criterios de clasificación de las ondas. Algunos serían:

Según el medio por el que se propaguen
Ondas mecánicas. Son las que requieren un medio material para propagarse. Ejemplo, el sonido
La onda de sonido ordinario es una forma de transmisión de energía, perturbaciones en el aire entre fuente vibrante que es la que produce el sonido y un receptor tal como el oído. El sonido también puede transmitirse en los líquidos y en los sólidos. Las ondas en una cuerda, en un resorte y las ondas de agua son otros ejemplos de ondas que necesitan de un medio elástico para propagarse. A este tipo de ondas se los denomina "ondas mecánicas".
Ondas electromagnéticas. Son las que no requieren un medio material. Ejemplo, la luz.
Existe otro tipo de ondas relacionada con la luz, transmisión de radio y radiación de calor, esto es las ondas electromagnéticas que no necesitan de un medio para propagarse.

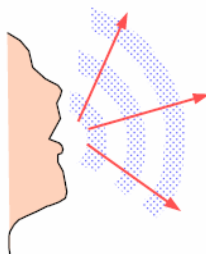
Según el número de dimensiones que involucran
Unidimensionales. Ejemplo, la propagación del movimiento en una cuerda



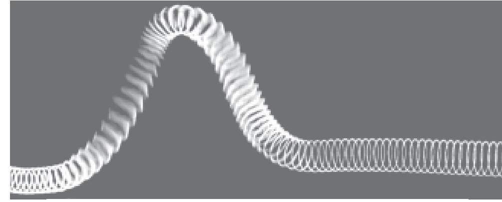
Bidimensionales. Ejemplo, olas en la superficie de un líquido.



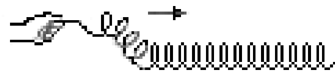
Tridimensionales. Ejemplo, el sonido normal.

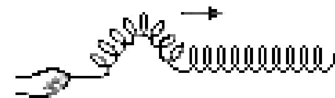


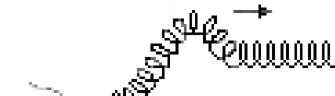
Según la relación entre la vibración y la dirección de propagación
Transversales. Son aquellas ondas en las cuales la oscilación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo en una cuerda normal y tensa la onda se propaga de izquierda a derecha (en cierto caso particular) pero, en cambio, la oscilación de un punto concreto de la cuerda se produce de arriba a abajo, es decir, perpendicularmente a la propagación



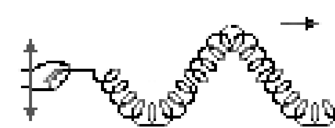




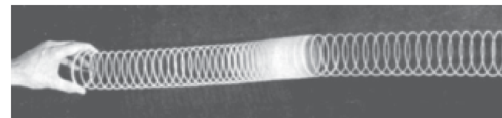




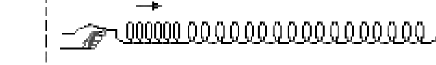


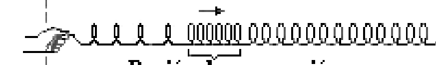


Longitudinales. En este tipo la propagación es paralela a la oscilación. Como ejemplo, si apretamos un resorte las espiras oscilan de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, paralelas en cualquier caso a la dirección de propagación.

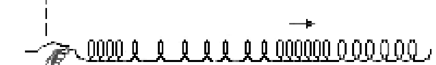


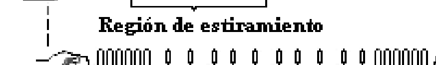








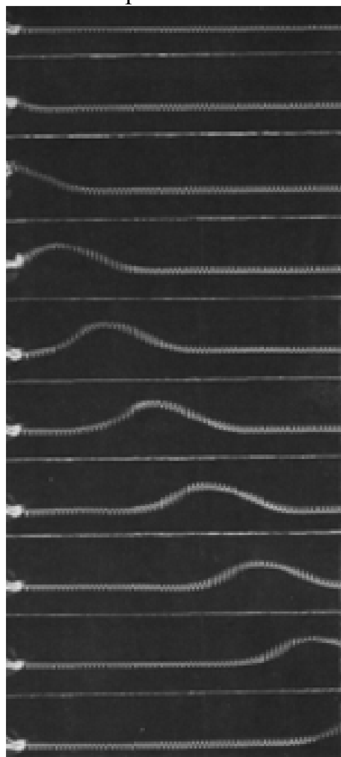




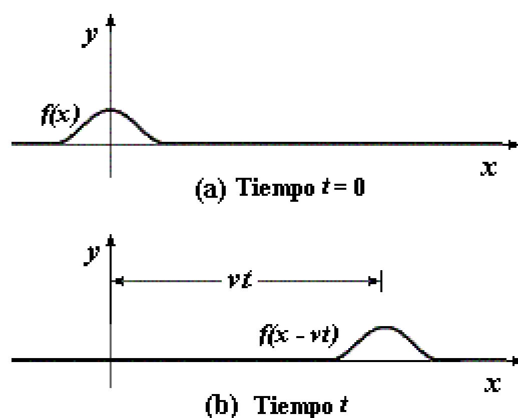


EXPRESIÓN MATEMÁTICA PARA UNA ONDA VIAJERA.

En la Figura (Physical Science Study Committee, 1965) se muestra una secuencia de fotografías de un pulso propagándose de izquierda a derecha a lo largo de un resorte. En esta sección haremos uso de estas fotografías para descubrir la expresión matemática de una onda viajera y probar el significado de algunos de los términos utilizados para describir las ondas.



El intervalo de tiempo entre cada fotografía es el mismo. Estas fotografías indican que la velocidad de un pulso es constante; y la forma del pulso prácticamente no cambia durante el movimiento de avance. Un examen más minucioso muestra que el pulso se va haciendo gradualmente más ancho conforme avanza; la altura del pulso se va haciendo menor mientras el ancho del pulso crece. Este ensanchamiento del pulso es una consecuencia de la dispersión. La dispersión no tiene un interés primordial en las ondas que deseamos considerar, por lo que la ignoraremos en nuestro estudio.



En la Figura arriba pueden apreciarse dos etapas del movimiento de un pulso en una cuerda, a dos tiempos diferentes, cuando el pulso se propaga de izquierda a derecha con velocidad *v*. La figura está dibujada sobre un sistema de ejes coordenados de modo que el eje *x* muestra la dirección en que la cuerda no se distorsiona. Supongamos que la forma de la cuerda a *t* = 0 está dada por la expresión $f(x)$ (Figura a). Después de un tiempo *t* el pulso ha avanzado hacia la derecha una distancia vt (Figura b). Debe notarse que la función $f(x-a)$ tiene la misma forma que la función $f(x)$, sin embargo $f(x-a)$ esta desplazada una distancia *a* en la dirección +x. Si suponemos que el pulso mantiene su forma mientras se propaga, podemos expresar la forma del pulso en un instante de tiempo *t* mediante

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

Una descripción similar a la anterior, nos proporciona la expresión de un pulso que se mueve hacia la izquierda con velocidad *v*

$$y(x,t) = f(x + vt)$$

Se denomina función de onda a la función $y(x,t)$ que sirve para describir onda. Para el caso de una onda en una cuerda, la función de onda representa la coordenada *y* de un elemento de la cuerda. Por tanto, la función de onda da el desplazamiento *y* de dicho elemento desde su posición de equilibrio *y* = 0, pero es una función que depende de *x* y de *t*.

Esto significa que el desplazamiento de un elemento de cuerda depende de:

a) la coordenada *x* del elemento; y

b) el tiempo *t* de la observación.

Esto es, *x* y *t* deben aparecer combinados en $y(x,t)$ como $(x - vt)$ o $(x + vt)$. Para especificar una función de onda debemos escribirla como una determinada función. Así por ejemplo la función de onda específica que vamos a discutir en la sección siguiente es $y(x,t) = A\text{sen}(x - vt)$.

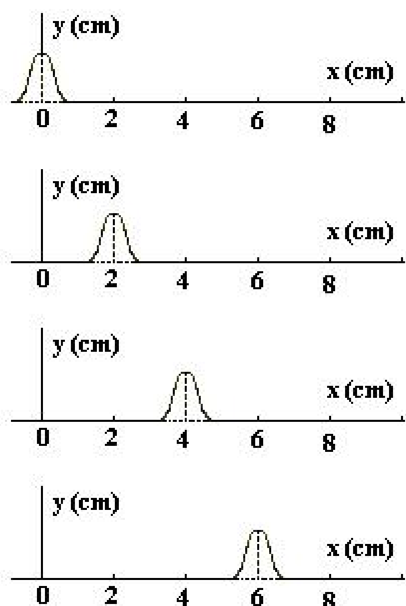
Ejemplo 1. De las funciones que se presentan a continuación, sólo dos pueden representar ecuaciones de onda, de ondas unidimensionales que se propagan en el eje *x*:

$$y_1(x,t) = \frac{5\times10^{-2}}{\left[0{,}25 + (x - 2t)^2\right]}$$

$$y_2(x,t) = \frac{5\times10^{-2}}{\left[0{,}25 + (x^2 + 4t^2 - 2t)\right]}$$

$$y_3(x,t) = \frac{5\times10^{-2}}{\left[0{,}25 + (2x + t)^2\right]}$$

a) Decir cuales de las funciones: y_1, y_2 e y_3 son funciones de onda y justificar la respuesta.
b) ¿Cuáles son las velocidades de propagación de dichas ondas?
c) En la figura se representan varias "fotografías" de una cuerda tensa, en la cual se está propagando una onda que corresponde a una de las dos anteriores. Las "fotografías" corresponden a instantes separados 0,01 s. ¿A cuál de las ondas corresponden las "fotos"?



Solución
a) Cualquier perturbación que obedece en todo instante a la ecuación: $y(x,t) = f(x \pm vt)$ representa una onda unidimensional que se propaga hacia la derecha (signo negativo) o hacia la izquierda (signo positivo) del eje x, con velocidad *v*. Así pues, las funciones y_1 e y_3 son las únicas posibles representantes de ecuaciones de onda.
b) Para y_1, el valor de la velocidad será $v_1 = 2\text{m/s}$, hacia la derecha del eje x.
Para y_3, la transformamos en:

$$y_3 = \frac{5\times 10^{-2}}{0{,}25 + 4\left(x + \frac{1}{2}t\right)^2} \Rightarrow v_3 = -\frac{1}{2}\text{m/s}$$, hacia la izquierda del eje x. .

c) Corresponde a y_1 puesto que su propagación es hacia la derecha del eje x, y además, es claro que su velocidad es 2 m/s, lo que se deduce de las medidas dadas en las fotografías sucesivas.

ONDAS ARMONICAS
Un caso especialmente interesante y frecuente es aquel en que y es una función sinusoidal o armónica tal como $y(x) = A\text{sen}kx$, de modo que

$$y(x,t) = A\text{sen}k(x - vt) \qquad (1)$$

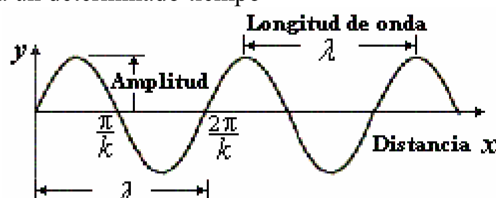
La cantidad k conocida como **número de onda** (diferente a la constante k del resorte) tiene un significado especial. Reemplazando el valor de x por $\left(x + \frac{2\pi}{k}\right)$, obtenemos para $y(x,t)$, el mismo valor; esto es,

$$y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = A\text{sen}k\left[\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) - vt\right]$$
$$= A\text{sen}k[(x - vt) + 2\pi]$$
$$= A\text{sen}k(x - vt) = y(x,t)$$

Observamos que $\frac{2\pi}{k}$ es el "periodo de espacio" de la curva, repitiéndose cada $\frac{2\pi}{k}$, cantidad la llamaremos **longitud de onda** y la designaremos por λ .

Entonces $\lambda = \frac{2\pi}{\text{k}}$

Para un determinado tiempo



Observamos que la ecuación (1) también puede ser escrita en la forma

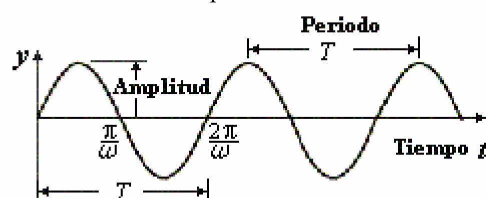
$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - kvt) = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

Donde la **frecuencia angular** $\omega = kv$ y $v = \frac{\omega}{k}$

La función $y(x,t)$ es también periódica en el tiempo, con un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Y por lo tanto, con una frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Para un determinado espacio *x*.



Podemos obtener una relación importante de las ondas.

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$, expresión que concuerda con

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f$$

También es frecuente escribir la ecuación de la onda sinusoidal en la forma:

$$y = A\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

Onda que viaja a la izquierda. Similarmente para una onda que viaja a la izquierda se tendría

$$y = A\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = A\text{sen}(kx + \omega t)$$

Función sinusoidal desfasada con respecto al origen. Adicionalmente, podemos tener una función sinusoidal desfasada con respecto al origen de coordenadas, esto es,

$$y(x) = A\text{sen}(kx - \varphi)$$

y la onda viajera será

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t - \varphi)$$

Similarmente para una onda que viaja hacia la izquierda se tendrá

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx + \omega t - \varphi)$$

Nota. Una onda real no puede ser perfectamente armónica, puesto que unas ondas armónicas se extienden hacia el infinito en ambos sentidos a lo largo del eje *x* y no tienen ni principio ni fin en el tiempo. Una onda real debe tener principio y fin en algún lugar del espacio y del tiempo. Las ondas existentes en la naturaleza, como son las ondas de sonido o las ondas de luz, pueden frecuentemente aproximarse a ondas armónicas, puesto que su extensi6n en el espacio es mucho mayor que su longitud de onda, y el intervalo de tiempo que tardan en pasar por un punto es mucho mayor que su período. Una onda de este tipo se denomina tren de ondas. Así que una onda armónica es una representación idealizada de un tren de ondas.

Ejemplo 2. Un veraneante que descansa en la playa observa que durante los últimos 30 minutos han arribado 90 olas a la orilla. Luego se mete al mar y se dirige nadando hacia un bote anclado y ubicado a 450 m mar adentro, tomándole un total de 5 minutos en llegar. En el trayecto el nadador sorteo 60 olas.
Determine
a) La velocidad con que las olas se acercan a la orilla es:
b) La separación entre crestas de 2 olas consecutivas.
Solución.

Si en 30 minutos llegan 90 olas a la orilla, la frecuencia de las olas es:

$$f = \frac{90}{30 \times 60} = \frac{1}{20}\frac{\text{c}}{\text{s}}$$

Si hay 60 olas en 450 metros la longitud de onda de las olas es:

$$\lambda = \frac{450}{60} = 7{,}50\ \text{m}$$

a) La velocidad con que las olas se acercan a la orilla.

$$v = \lambda f = 7{,}50 \times \frac{1}{20} = 0{,}375\ \text{m/s}$$

b) La separación entre las crestas de 2 olas consecutivas es una longitud de onda:

$$\lambda = \frac{450}{60} = 7{,}50\ \text{m}$$

Ejemplo 3. Una onda sinusoidal es enviada a lo largo de una de un resorte, por medio de un vibrador fijo en uno de sus extremos. La frecuencia del vibrador es 20 ciclos por segundo y la distancia entre puntos de mínimo sucesivos en el resorte es 24 cm. Encontrar:
a) La velocidad de la onda
b) La ecuación de la onda, sabiendo que el desplazamiento longitudinal máximo es de 4 cm. y que se mueve en el sentido positivo de *x*.
Solución.
a) Si f = 20 Hertz y λ = 24 cm.
la velocidad es
$v = \lambda f$ = 24 x 20 = 490 cm/seg.
b) La ecuación de la onda que se mueve en el sentido positivo es

$$y = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

Siendo

A = 4cm, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{12}$ y

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 40\ \pi$$

Luego la ecuación de la onda es

$$y_{(x,t)} = 4\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{24} - 20t\right)$$

y en cm *x* en cm y *t* en segundos.
Corno la variable x aparece en la expresión con signo opuesto a la variable *t*, la onda se propaga en la dirección + *x*.

Ejemplo 4. a) Una onda en una cuerda esta descrita por $y = 0{,}002\text{sen}(0{,}5x - 628t)$. Determine la amplitud, la frecuencia, periodo, longitud de onda y velocidad de la onda.
b) Una onda en una cuerda esta descrita por $y = 25\text{sen}[1{,}25\pi\ x - 0{,}40\pi\ t]$ en el sistema cgs. Determine la amplitud, la frecuencia, periodo, longitud de onda, la velocidad de propagación y la velocidad transversal de la onda.
Solución.
a) La ecuación de la onda es

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

$A = 0{,}002\ \text{m}$,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}5 \Rightarrow \lambda = 12{,}6\ \text{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 628 \Rightarrow T = 0{,}001\ \text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 100 \text{ Hz}$$

$$v = \lambda f = 1260 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La ecuación de una onda armónica, en general, es

$$y = A\text{sen}(kx - \omega t) = A\text{sen}2\pi(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T})$$

La ecuación dada en el problema se puede poner de la forma siguiente

$$y = 25\text{sen}2\pi\left[\frac{x}{\frac{2}{1{,}25}} - \frac{t}{\frac{1}{0{,}40}}\right]$$

Identificando ambas ecuaciones tenemos:
Amplitud $A = 25$ cm

Longitud de onda $\lambda = \frac{2}{1{,}25} = 1{,}6 \text{ cm}$

Frecuencia $f = \frac{1}{T} = 0{,}40 \text{ Hz}$

Velocidad de propagación

$$v = \frac{\lambda}{T} = 0{,}64 \text{ cm/s}$$

La velocidad transversal será

$$v_t = \frac{dy}{dt} = 25 \times 0{,}8\pi \cos \pi(1{,}25x - 0{,}80t)$$
$$= 20\pi(1{,}25x - 0{,}80t) \text{ cm/s}$$

Ejemplo 5. Un foco puntual realiza un movimiento periódico representado por la ecuación.
Las unidades están en el sistema cgs.

$$y = 4\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)$$

Se pide determinar:
a) La velocidad de la onda.
b) La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 1 s
c) La diferencia de fase, en un instante dado, de dos partículas separadas 210 cm.
d) Si el desplazamiento, y, de una determinada partícula en un instante determinado es de 3 cm, determinar cuál será su desplazamiento 2 s más tarde

Solución.
a) La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{240}{6} = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

La velocidad es de sentido contrario al positivo del eje x.
b) La diferencia de fase es

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t+1}{6} - \frac{t}{6}\right) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 30°$$

c) En este caso, la diferencia de fase viene dada por

$$\varphi = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\pi\frac{210}{240} = 2\pi\frac{7}{8} = \frac{7\pi}{4} = 31°$$

d) Sabemos que

$$3 = 4\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)$$

$$\Rightarrow \cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right) = \frac{3}{4}$$

El desplazamiento 2 segundos más tarde será

$$y = 4\cos 2\pi\left(\frac{t+2}{6} + \frac{x}{240}\right)$$
$$= 4\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240} + \frac{1}{3}\right)$$
$$= 4\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right) + \frac{2\pi}{3}\right]$$
$$= 4\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)\cos\frac{2\pi}{3} - \text{sen}2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right)\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right]$$

Pero

$$\cos 2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right) = \frac{3}{4} \text{ y}$$

$$\text{sen}2\pi\left(\frac{t}{6} + \frac{x}{240}\right) = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Sustituyendo valores

$$y = 4\left[\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{7}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \text{-3,79 cm}$$

Ejemplo 6. Una onda sinusoidal que viaja en la dirección positiva x tiene una amplitud de 15 cm, una longitud de onda de 40 cm y una frecuencia de 8 Hz. El desplazamiento de la onda en $t = 0$ y $x = 0$ es 15 cm
a) Determinar el número de onda, el período, la frecuencia angular y la rapidez de onda.
b) Determinar la constante de fase φ, y se escribirá una expresión general para la función de onda.

Solución.
a) Utilizando las ecuaciones estudiadas obtenemos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40} = 0{,}157 / \text{cm}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8) = 50{,}3 \text{ rad/s}$$

$$v = \lambda f = (40)(8) = 320 \text{ cm/s}$$

b) Puesto que la amplitud $A = 15$ cm, y como se tiene $y = 15$ cm en $x = 0$ y $t = 0$, obtenemos

$$15 = 15\text{sen}(-\varphi) \Rightarrow \text{sen}(-\varphi) = 1$$

Esto puede comprobarse por simple observación puesto que la función coseno está desplazada 90º

respecto de la función seno. Sustituyendo los valores de *A*, *k* y ω en esta expresión, se obtiene

$$y = 15\cos(0{,}157t - 50{,}3x)\,\text{cm}$$

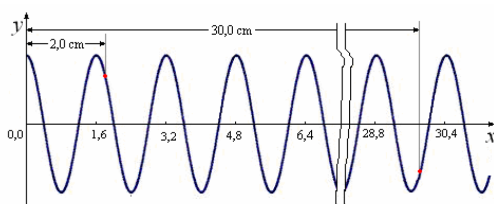
Ejemplo 7. La ecuación de una onda armónica que se propaga en una cuerda es

$$y = 25\text{sen}(1{,}25\pi x - 0{,}8\pi t)$$

Donde *x* se expresa en cm y *t* en segundos.
a) Determinar cual es el desfase para dos partículas de la soga posicionadas en 2cm y 30cm
b) Cual es la distancia mínima entre 2 partículas del medio cuyo desfase es de π/3.
Solución.
a) $y = 25\text{sen}(2{,}5\pi - 0{,}8\pi t) = 25\cos 0{,}8\pi t$

$y = 25\text{sen}(37{,}5\pi - 0{,}8\pi t) = -25\cos 0{,}8\pi t$

El desfase es π rad



El desfase entre esos dos puntos en todo instante será igual a π rad.

b) $1{,}25\pi x_2 - 1{,}25\pi x_1 = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{3(1{,}25)} = \frac{1}{3{,}75} = 0{,}27\text{ cm}$$

Otra forma
Si 2π corresponde a 1,6 cm., cuando corresponde a $\dfrac{\pi}{3}$:

$$d = \frac{1{,}6\times\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1{,}6}{6} = 0{,}27\text{ cm}$$

Ejemplo 8. La velocidad de propagación de una onda es de 330 m/s, y su frecuencia, 10^3 Hz. Calcúlese:
a) La diferencia de fase para dos posiciones de una misma partícula que se presentan en intervalos de tiempo separados 5 x 10^{-4} s.
b) La diferencia de fase en un determinado instante entre dos partículas que distan entre sí 2,75 cm.
c) La distancia que existe entre dos partículas que se encuentran desfasadas 120°.
Solución.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{10^3} = 0{,}33\text{m},\ T = \frac{1}{f} = 10^{-3}\text{ s}$$

a) Si a un período *T* le corresponde una diferencia de fase 2π:
a Δt le corresponde una diferencia de fase $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \frac{2\pi 5\times 10^{-4}}{10^{-3}} = \pi\,\text{rad}$$

b) Si a una longitud de onda λ le corresponde una diferencia de fase 2π:
a Δx le corresponde una diferencia de fase $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi 2{,}75\times 10^{-2}}{33\times 10^{-2}} = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

c) $\Delta x = \dfrac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi} = \dfrac{0{,}33\times\pi/6}{2\pi} = 0{,}11\text{ m}$

Ejemplo 9. Sometemos al extremo de una cuerda tensa a vibraciones sinusoidales de 10Hz. La mínima distancia entre dos puntos cuyas vibraciones tienen una diferencia de fase $\pi/5$ es de 20 cm, calcular:
a) La longitud de onda.
b) La velocidad de propagación.
Solución.
a) Si la diferencia de fase para dos puntos separados 20 cm es $\pi/5$, a diferencia de fase para una longitud de onda λ es 2π.

Luego $\lambda = \dfrac{2\pi}{\pi/5}20 = 200\text{ cm} = 2\text{ m}$

b) La velocidad de propagación
$v = \lambda f = 2\text{m x }10\text{s}^{-1} = 20$ m/s

Ejemplo 10. Una onda tiene por ecuación:
$y(x,t) = 5\text{sen}\,\pi(4x - 20t + 0{,}25)$, expresada en el sistema CGS. Determinar la amplitud, la frecuencia, la longitud de onda, el número de onda, la frecuencia angular, la fase inicial y la velocidad de propagación.
Solución
La ecuación general de la onda es:

$$y(x,t) = y_o\text{sen}(kx - \omega t + \varphi) = y_o\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

que comparada con la dada:

$$y(x,t) = 5\text{sen}2\pi\left(2x - 10t + \frac{1}{8}\right)$$

resulta: $y_0 = 5\text{ cm},\ T = \dfrac{1}{f}\text{ s}$

$\Rightarrow f = \dfrac{1}{T} = 10\text{ Hz},\ \lambda = \dfrac{1}{2}\text{ cm},$

$k = 4\text{ cm}^{-1},\ \omega = 20\pi r\text{ rad/s},\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}\text{ rad},$

$v = \lambda f = \dfrac{1}{2}\times 10 = 5\text{ cm/s}$

Ejemplo 11. Sometemos al extremo de una cuerda a un vibrador que le produce una onda sinusoidal. Si la ecuación de la vibración escrita en el sistema $y = 5\text{sen}0{,}2\pi t$, propagándose en la cuerda con una velocidad de 10 cm/s. Determine la ecuación de la onda producida.

Solución.

La ecuación de la onda que se propaga el sentido negativo del eje OX es:

$$y(x,t) = y_0 \text{sen} 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} + \varphi\right)$$

$$\Rightarrow \; y(x,t) = y_0 \text{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} + \varphi\right)$$

Comparando con la dada: $y(0,t) = 5\text{sen}0{,}2\pi t$

$$y_0 = 5\,\text{cm}, \; \frac{2\pi}{T} = 0{,}2\pi \rightarrow T = 10\,\text{s}, \; \varphi = 0$$

Además como

$$\lambda = vT \; \rightarrow \; \lambda = 10 \times 10 = 100\,\text{cm}$$

De aquí

$$y(x,t) = 5\text{sen} 2\pi\left(\frac{x}{100} + \frac{t}{10}\right)$$

Ejemplo 12. Las ecuaciones de dos ondas escritas en el sistema CGS vienen dadas por:

$y_1(x,t) = 4\text{sen}2\pi(4t - 0{,}5x)$ e

$y_2(x,t) = 6\text{sen}(4\pi x - 5\pi t)$

Calcular en cada caso:

a) Velocidad en función del tiempo, de un punto situado a 10 cm del foco.

b) Velocidad máxima de ese punto.

c) Velocidad de fase.

d) ¿En qué instante alcanza su velocidad máxima un punto situado a 1,5 m del foco?

e) Posición de los puntos que tienen velocidad máxima en $t = 0$.

Solución.

$y_1(x,t) = 4\text{sen}(8\pi t - \pi x)$,

$y_2(x,t) = 6\text{sen}(4\pi x - 5\pi t)$

a) $v_{y1}(x,t) = \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = 32\pi\cos(8\pi t - \pi x)$

$$v_{y2}(x,t) = \frac{\partial y_2}{\partial t} = -30\pi\cos(4\pi x - 5\pi t)$$

Cuando $x = 10$ cm, entonces:

$v_{y1}(10,t) = 32\pi\cos(8\pi t - 10\pi) = 32\pi\cos 8\pi t$

$v_{y2}(10,t) = -30\pi\cos(40\pi - 5\pi t) =$

$-30\pi\cos 5\pi t$

b) En valor absoluto: $v_{y1\max} = 32\pi\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$

$$v_{y2\max} = 30\pi\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

c) $v_1 = \dfrac{\omega_1}{k_1} = \dfrac{8\pi}{\pi} = 8\dfrac{\text{cm}}{\text{s}}$,

$$v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{5\pi}{4\pi} = \frac{5}{4}\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

d) Para $x = 150$ cm, obtenemos:

$v_{y1}(150,t) = 32\pi\cos(8\pi t - 150\pi)$

$= 32\pi\cos 8\pi t$

si v_{y1} es máxima, entonces:

$$\cos 8\pi t = \pm 1 \;\Rightarrow\; 8\pi t = n\pi \;\Rightarrow\; t = \frac{n}{8}s$$

En v_{y2} será:

$v_{y2}(150,t) = -30\pi\cos(600\pi - 5\pi t)$

$= -30\pi\cos 5\pi t$

En el máximo:

$$\cos 5\pi t = \pm 1 \;\Rightarrow\; 5\pi t = n\pi \;\Rightarrow\; t = \frac{n}{5}\text{s}$$

e) Para $t = 0$, entonces: $v_{y1}(x,0) = 32\pi\cos\pi x$

y para que sea máxima:

$\cos\pi x = \pm 1 \Rightarrow \; \pi x = n\pi \;\Rightarrow\; x = n$

Para v_{y2}, será: $v_{y2}(y,0) = -30\pi\cos 4\pi x$

y para que sea máxima:

$$\cos 4\pi x = \pm 1 \Rightarrow \; 4\pi x = n\pi \;\Rightarrow\; x = \frac{n}{4}$$

Ejemplo 13. Sometemos al extremo de una cuerda tensa a un vibrador que le produce vibraciones sinusoidales. Por este efecto se propaga por la cuerda una onda transversal que tiene por ecuación:

$y(x,t) = 10\,\text{sen}\pi(1{,}6x - 0{,}8t)$, expresada en el sistema CGS.

a) ¿Qué condiciones iniciales nos determinan esta ecuación de onda?

b) Determínese para esta onda su amplitud, velocidad de propagación y longitud de onda.

c) Tiempo que tarda en comenzar a vibrar una partícula de la cuerda situada a 10 cm del extremo en que se encuentra el vibrador y ecuaciones horarias del movimiento de el1a [$y(t)$, $v(t)$, $a(t)$] una vez transcurrido éste.

d) Dibujar la forma que tiene la cuerda [$y(t)$] cuando han transcurrido 5,625 s del comienzo de la vibración (perfil de la onda).

Solución.

a) Si hacemos $x = 0$ y $t = 0$, tendremos:

$y(0,0) = 10\,\text{sen}0 = 0$

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -8\pi\cos\pi(1{,}6x - 0{,}8t)$$

$\Rightarrow \; v(0,0) = -8\pi < 0$

La ecuación dada nos determina que en el extremo de la cuerda en que se encuentra al vibrador $x = 0$ y para

$t = 0$ es cuando comienza a actuar el vibrador con movimiento vibratorio armónico dirigido hacia abajo (en el sentido negativo del eje *y*. La onda se propaga en la dirección positiva del eje *x*.

b) Como la ecuación general de una onda sin fase inicial $(y = 0)$ es:

$$y(x,t) = y_0 \operatorname{sen} 2\pi(kx - \omega t) = y_0 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

Comparándola con la dada:

$$y(x,t) = 10 \operatorname{sen} \pi(1{,}6x - 0{,}8t)$$
$$= 10 \operatorname{sen} 2\pi(0{,}8x - 0{,}4t)$$

De aquí

$$y_0 = 10\,\text{cm},\ \lambda = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25\text{cm},$$

$$T = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5s,\ f = \frac{1}{T} = 0{,}4\text{Hz},$$

$$v = \lambda f = 1{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}5\text{cm/s}$$

c) La partícula comenzará a vibrar transcurrido un tiempo *t*, tal que:

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v} = \frac{10}{0{,}5} = 20\ \text{s}$$

Pasado éste, la partícula comienza a vibrar con movimiento armónico de ecuación:

$$x = 10\text{cm} \Rightarrow y(t) = 10 \operatorname{sen} 2\pi(8 - 0{,}4t)$$

Luego:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -8\pi \cos 2\pi(8 - 0{,}4t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -6{,}4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi(8 - 0{,}4t)$$

Obsérvese que el origen de las elongaciones para este movimiento vibratorio armónico se encuentra a 20 s del comienzo de la actuación del vibrador. El signo menos de la velocidad nos indica que comienza a moverse hacia abajo (sentido negativo del eje *y*), y, por tanto, la partícula se encuentra en fase con el vibrador. (El tiempo 20 s = 8 *T* nos indica que han transcurrido 8 períodos y, por tanto, la partícula se encuentra a 8λ = 10 cm de distancia del origen, y la forma de la cuerda hasta esa partícula será 8 "bucles" hacia abajo del eje *y* y otros tantos hacia arriba).

d) $t = 5{,}625$ s $\Rightarrow y(x) = 1 \operatorname{sen} 2\pi(0{,}8x - 2{,}25)$

Intersección con eje *y*: $x = 0 \Rightarrow$

$$y(0) = -10 \operatorname{sen} 4{,}5\pi = -10\text{cm}$$

lo que nos indica que el vibrador se encuentra en su máxima elongación (amplitud) y por debajo del origen.

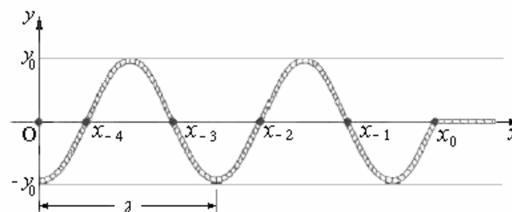
Intersección con eje *x:*

El trozo de cuerda que se ha puesto en movimiento en ese tiempo será:

$x = vt = 0{,}5 \times 5{,}625 = 2{,}8125$ cm, correspondiente a

$$2{,}8125\frac{\lambda}{1{,}25} = 2{,}25\lambda = 2\lambda + \frac{\lambda}{4}$$

lo que quiere decir es que a partir de esta distancia la cuerda se encuentra en reposo, con lo que la gráfica (forma de la cuerda en ese instante) será la de



La ecuación es

$$y(x) = 0 \Rightarrow 2\pi(0{,}8x - 2{,}25) = n\pi \Rightarrow$$
$$x = \frac{n + 4{,}5}{1{,}6}$$

Hay cinco valores de x para $y(x) = 0$.

x_0 corresponde a $n = 0 \Rightarrow$

$$x_0 = \frac{0 + 4{,}5}{1{,}6} = 2{,}8125\text{cm}$$

x_{-1} corresponde a $n = -1 \Rightarrow$

$$x_{-1} = \frac{-1 + 4{,}5}{1{,}6} = 2{,}1875\text{cm}$$

x_{-2} corresponde a $n = -2 \Rightarrow$

$$x_{-2} = \frac{-2 + 4{,}5}{1{,}6} = 1{,}5625\text{cm}$$

x_{-3} corresponde a $n = -3 \Rightarrow$

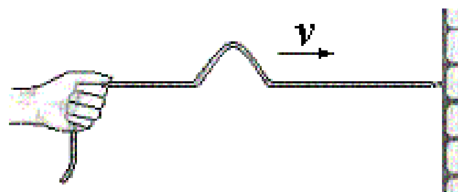
$$x_{-3} = \frac{-3 + 4{,}5}{1{,}6} = 0{,}9375\text{cm}$$

x_{-4} corresponde a $n = -4 \Rightarrow$

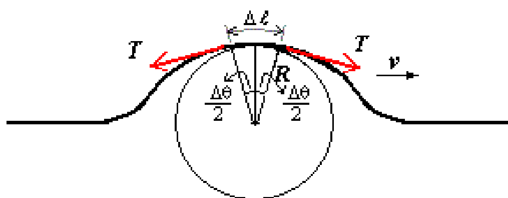
$$x_{-4} = \frac{-4 + 4{,}5}{1{,}6} = 0{,}3125\text{cm}$$

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN EN FUNCIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MEDIO.

Forma simple de calcular la velocidad de la onda en una cuerda en función de las propiedades del medio. Supongamos que tenemos una cuerda de masa por unidad de longitud μ, que esta estirada por una fuerza de tensión *T*. Un pulso se propaga en la cuerda.



Tomamos un pequeño elemento $\Delta\ell$ de la cuerda se muestra en la figura.



Este elemento, de longitud, en la parte más elevada de la onda, está sujeto a la tensión de la cuerda en los dos sentidos de propagación de la onda. Podemos dibujar una circunferencia de radio *R*, en que *R* es la amplitud de la onda. Este elemento de la cuerda, considerado bien pequeño, está en el lado de un triángulo cuyo ángulo opuesto está dado por $\Delta\theta$. Instantáneamente, es como si este elemento de cuerda estuviese en movimiento en una trayectoria circular de radio R, con velocidad *v*; la velocidad de la onda.
Aplicando la segunda ley de Newton al segmento de cuerda $\Delta\ell$

$$\sum F_x = ma_y \Rightarrow T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow -2T\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = -\Delta m a_c$$

$a_c = \dfrac{v^2}{R}$. Como $\dfrac{\Delta\theta}{2}$ es pequeño, podemos considerar $\text{sen}\dfrac{\Delta\theta}{2} \approx \dfrac{\Delta\theta}{2}$

Reemplazando:

$$2T\frac{\Delta\theta}{2} = \mu R\Delta\theta\frac{v^2}{R} \Rightarrow T = \mu v^2 \text{ y } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Obtenemos la velocidad de la onda en la cuerda en función de las propiedades de la cuerda: su tensión y su densidad lineal.

Ejemplo 14. La cuerda Si de un mandolina tiene 0,34 m de largo y tiene una densidad linear de 0,004 kg/m. El tornillo de ajuste manual unido a la cuerda se ajusta para proporcionar una tensión de 71,1 N. ¿Cuál entonces es la frecuencia fundamental de la cuerda?
Solución.

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2(0{,}34m)}\sqrt{\frac{71{,}1N}{0{,}004\,kg/m}}$$

= 196 Hz

Un instrumento de cuerda tal como una guitarra es templada ajustando la tensión en una cuerda por medio de un tornillo de ajuste manual. La longitud de la cuerda es fija, así que el ajuste de la tensión da la frecuencia fundamental. Otras frecuencias fundamentales pueden ser alcanzadas acortando la longitud de la cuerda presionando en un traste. Finalmente, varias cuerdas de diversas densidades se utilizan para dar una gama de las velocidades de la onda, de tal modo proporcionando el acceso a una mayor gama de frecuencias fundamentales.

Ejemplo 15. Una onda $y = A\text{sen}(k_1x - \omega_1 t)$ viaja por una cuerda de densidad de masa lineal μ. y tensión *T*. Diga, para cada una de las ondas que se dan a continuación, si pueden viajar por la misma cuerda simultáneamente con la onda dada. ¿Por qué? ¿Bajo qué condición?

$y_1 = A\text{sen}(k_1x + \omega_2 t)$
$y_2 = A\text{sen}(k_2x + \omega_1 t)$
$y_3 = A\text{sen}(k_2x + \omega_2 t)$
$y_4 = A\text{sen}(k_1x + \omega_1 t)$

Siendo $\omega_1 \neq \omega_2$ y $k_1 \neq k_2$

Solución.
La velocidad de propagación es única;

$v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \dfrac{\omega_1}{k_1}$, por lo tanto, la relación $\dfrac{\omega_1}{k_1}$ esta determinada o fija.

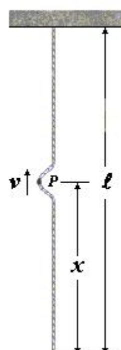
y_1. **No puede viajar**, se requiere: $\dfrac{\omega_2}{k_1} = \dfrac{\omega_1}{k_1}$, lo que nos lleva a una falsedad, contra lo supuesto, $\omega_2 = \omega_1$

y_2. **No puede viajar**, por que similar al caso anterior: $\dfrac{\omega_1}{k_2} = \dfrac{\omega_1}{k_1}$ también nos lleva a una falsedad contra lo supuesto, $k_2 = k_1$

y_3. **Si puede viajar**, bajo la condición: $\dfrac{\omega_2}{k_2} = \dfrac{\omega_1}{k_1}$

y_4. **Si puede viajar**, por que tienen igual ω_1 y k_1 es la misma onda que viaja en sentido contrario.

Ejemplo 16. Una cuerda de masa *M* y longitud ℓ cuelga del techo de una habitación.
a) Probar que la velocidad de pulso transversal en función de la posición cuando se propaga a lo largo de ella es $v = \sqrt{gx}$, siendo *x* la distancia al extremo libre.
b) Probar que un pulso transversal recorrerá la cuerda en un tiempo $2\sqrt{\ell/g}$.



Solución.

a) La velocidad del punto *P* es $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, la tensión *T* en ese punto es debido a la cuerda que cuelga de longitud x, cuya masa es μx y su peso $T = \mu g x$.

Luego $v = \sqrt{\dfrac{\mu g x}{\mu}} = \sqrt{gx}$

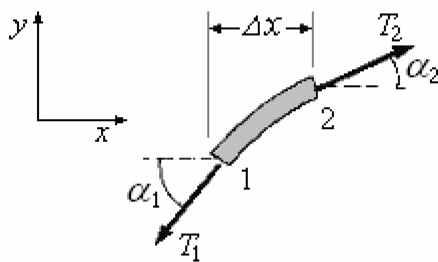
b) para encontrar el tiempo de recorrido del pulso

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{gx} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{gx}}$$

$$\Rightarrow t = \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{gx}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

ECUACION DE LA ONDA.

Ondas transversales en una cuerda. En esta parte trataremos la ecuación de la onda y su solución, considerando el caso particular de la onda transversal en una cuerda, resultado que es general también para los demás casos.



La cuerda tiene una masa uniforme μ por unidad de longitud y está sometida a una tensión *T*. Sobre esta cuerda esta viajando una onda transversal.
Consideremos un elemento de longitud (de 1 a 2) como se muestra en la figura, sobre este elemento actúan dos fuerzas externas a él, que la jalan en cada extremo debido al resto de la cuerda. Estas fuerzas son de igual magnitud que la tensón de la cuerda.
La fuerza horizontal sobre este elemento es:

$$\sum F_x = T_1 \cos\alpha_2 - T_2 \cos\alpha_1 = 0$$

si la curvatura de la cuerda no es muy grande

$$\cos\alpha_1 \cong \cos\ \alpha_2$$

de aquí concluimos que $T_1 \approx T_2 \approx T$

La fuerza vertical sobre el elemento es:

$$\sum F_y = T\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 - T\,\mathrm{sen}\,\alpha_1$$

Si los desplazamientos transversales de la cuerda no son muy abruptos, podemos considerar que, Sen $\alpha \cong \tan\alpha$

Luego,

$$\sum F_y = T(\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1)$$

Que será la fuerza total neta que actúa sobre el elemento Δx considerado.

Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\sum F_y = \Delta m a_y = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ denota la aceleración vertical del elemento de cuerda.

Como $\tan\alpha_1 = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_1$, $\tan\alpha_2 = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_2$

y, $\Delta m = \mu\Delta\ell = \mu\dfrac{\Delta x}{\cos\theta} \approx \mu\Delta x$

se tendrá

$$\mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right]$$

ó

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right]}{\Delta x}$$

Llevando al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Ecuación diferencial del movimiento.
Como la velocidad de propagación de una onda en una cuerda tensa es $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, por lo que la ecuación diferencial de la onda la escribimos como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Cuya solución es la ecuación de la onda

$$y = A\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

comprobación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\mathrm{sen}(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

Reemplazando

$$-A\omega^2\mathrm{sen}(kx - \omega t) = -v^2Ak^2\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

Expresión válida para toda onda, ya que ω/k corresponde a la velocidad de propagación de la onda.

De manera similar podemos encontrar la velocidad de propagación de la onda para:

a) Ondas longitudinales en una barra de metal de densidad ρ módulo de elasticidad *Y*.

$$v_L = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

b) Ondas transversales en una barra de metal de densidad ρ módulo de elasticidad cortante o de cizalladura *G*.

$$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

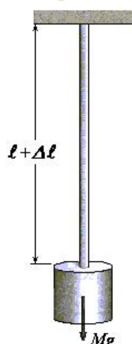
c) Ondas longitudinales en un gas de densidad ρ módulo de compresibilidad volumétrica *B*.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Ejemplo 17. Para el cobre el modulo de elasticidad volumétrica es 14×10^{10} N/m^2 y la densidad es 8920 kg/m^3. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el cobre?
Solución.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{14\times 10^{10}}{8920}} = 3960 \text{ m/s}$$

Ejemplo 18. A un alambre de acero (Módulo de Young: $Y = 2{,}0 \times 10^{11}$ N/m^2, densidad del acero: ρ = 7,8 g/cm^3) que tiene un diámetro de 1 mm y 4 m de longitud, lo colgamos del techo, calcular:
a) El alargamiento del alambre cuando de su extremo libre colgamos un peso de 150 kg.
b) La velocidad de propagación de las ondas longitudinales y transversales a lo largo del alambre cuando el cuerpo está suspendido.



Solución.

a) $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{YA} \quad \Rightarrow$

$$\Delta\ell = \frac{Mg\ell}{Y\pi R^2} = \frac{150\times 9{,}8\times 4}{2\times 10^{12}\pi 25\times 10^{-8}}$$

$= 37{,}4 \times 10^{-3}$ m

b) La velocidad de propagación de las ondas longitudinales lo largo del alambre

$$v_{longitudinal} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\times 10^{11}}{7{,}8\times 10^{3}}} = 5{,}06\times 10^{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo del alambre

$$v_{transversal} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\rho\pi R^2}} \Rightarrow$$

$$v_{transversal} = \sqrt{\frac{150\times 9{,}8}{7{,}8\times 10^{3}\times \pi 25\times 10^{-8}}}$$

$$= 490\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 19. Se tiene un alambre de acero de 1,3 mm de diámetro, sabiendo que 5 m de este alambre se alarga 0,5 mm con una carga de 2,1 kg. (densidad del acero, 7,8 g/cm^3)
a) Calcule el módulo de Young en el acero.
b) Calcule la velocidad de propagación de una onda
Solución.
Donde ρ, la densidad es un valor conocido igual a 7,8 g/cm^3.
a) El módulo de Young *Y* puede calcularse de

$$Y = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell} = \frac{F\ell}{A\Delta\ell} =$$

$$\frac{(2{,}1\times 9{,}8)(5)}{\left[\pi\left(1{,}3\times 10^{-3}\right)^2/4\right]\left(0{,}5\times 10^{-3}\right)} = 15{,}5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

b) La velocidad de propagación del sonido en el acero viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{15{,}5\times 10^{10}}{7{,}8\times 10^{3}}} = 4458 \text{ m/s}$$

Ejemplo 20. Una cuerda de piano de longitud 40 cm, sección 0,4 mm^2 y densidad 7,8 g/cm^3, emite un sonido fundamental cuando se aproxima un diapasón de frecuencia 218 Hz.
a) Determine la tensión a que está sometida.
b) Si la tensión se multiplica por 4, ¿cómo se modifica la frecuencia de su sonido fundamental?
Solución.

a) En este caso $\frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = 2L$ =0,8 m

La velocidad de las ondas es: $v = \lambda f$ = 0,8 x 218 = 174,4 m/s
La velocidad de las ondas transversales en la cuerda tensa está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu v^2$$

La densidad lineal es: $\mu = \frac{m}{L} = \frac{mA}{LA} = \rho A$ = (7,8 x 10^3)(0,4 x 10^{-6}) = 3,12 x 10^{-3} kg/m

Finalmente $T = \mu v^2$ = (3,12 x 10^{-3})(174,4)^2 = 94,9 N

b) En este caso la velocidad de las ondas transversales es:

$$v' = \sqrt{\frac{4T}{\mu}} = 2\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2v\,.$$

La longitud de onda no cambia y la nueva frecuencia será:

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{2v}{\lambda} = 2f = 2 \text{ x } 218 = 436 \text{ Hz.}$$

Ejemplo 21. A un resorte cuya masa es 200 g y cuya longitud natural cuando está colgado de un punto fijo es 4 m, se le pone una masa de 100 g unida a su extremo libre.
Cuando esta masa se encuentra en equilibrio, la longitud del resorte es 4,05 m. Determinar la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el resorte.

Solución.



Ondas longitudinales en un resorte.

$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, para un resorte $Y = \frac{k\ell_o}{A}$, $\rho = \frac{\mu}{A}$

luego para el resorte $v = \sqrt{\frac{k\ell_o}{\mu}}$

$\ell_0 = 4m$, $\Delta\ell = \ell - \ell_o = 4{,}05 - 4 = 0{,}05$ m

$$F = k\Delta\ell \Rightarrow k = \frac{Mg}{\Delta\ell} = \frac{0{,}1 \times 9{,}8}{0{,}05} = 19{,}6\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

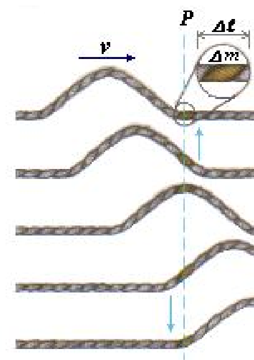
$$\mu = \frac{m}{\ell_o} = \frac{0{,}2}{4} = 5 \times 10^{-2}\frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

finalmente

$$v = \sqrt{\frac{k\ell_o}{\mu}} = \sqrt{\frac{19{,}6 \times 4}{5 \times 10^{-2}}} = 39{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ENERGÍA E INFORMACIÓN TRANSFERIDA MEDIANTE ONDAS

Tenemos la experiencia de energía transferida por ondas en muchas situaciones. Sentimos la fuerza de una ola en el océano, nuestra piel siente el calor de las ondas luminosas del sol, escuchamos las ondas de sonido. Además, la mayor parte de la información que recibimos nos llega mediante ondas. El habla y la música se transmiten por ondas de sonido, la radio y la televisión por ondas electromagnéticas. La luz reflejada por la cual usted lee esta página es una onda. ¿Cómo depende la energía (y en consecuencia la información) transmitida por las ondas de las propiedades de las ondas? Para responder esta pregunta antes debemos considerar cómo es transferida la energía por un solo pulso. Luego, ampliaremos los resultados con el fin de tener una expresión para la energía de una onda armónica.



A un elemento de masa Δm en el punto P se le da una energía cinética a medida que un pulso de onda pasa con una velocidad v.

Para el tiempo $t = 0$, un pequeño segmento de la cuerda alrededor del punto P de la figura anterior, con masa Δm y longitud $\Delta\ell$, está en reposo y no tiene energía cinética. El movimiento hacia arriba y hacia abajo proporciona la energía requerida para iniciar el pulso a lo largo de la cuerda. A medida que el borde que encabeza el pulso alcanza P, el segmento $\Delta\ell$ comienza a moverse hacia arriba. A medida que la cresta de la onda pasa el segmento $\Delta\ell$, el segmento se mueve a su posición más alta y empieza de nuevo a bajar, teniendo energía cinética mientras está en movimiento. Cuando el pulso entero ha pasado P, el segmento $\Delta\ell$ regresa al reposo y de nuevo no tiene energía cinética. El progreso del pulso a lo largo de la cuerda corresponde al flujo de energía a lo largo de la cuerda. Otro tipo de pulso, incluyendo un pulso que viaja a través del aire, transferiría energía a lo largo de la dirección de la propagación de modo similar.

¿Cuánta energía se ha transferido al pasar P durante un tiempo t? Para una onda armónica que viaja en una cuerda, cada punto se mueve con movimiento armónico simple en la dirección transversal (y). Como vimos anteriormente, en ausencia de amortiguamiento, la energía total de un oscilador armónico es igual a su energía potencial en el desplazamiento máximo A, es decir, $\frac{1}{2}kA^2$.

También vimos que la relación entre masa, constante k del oscilador (no es el número de onda k) y frecuencia es $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Si tratamos el segmento de la cuerda como un oscilador armónico con masa Δm que se mueve a la frecuencia f, podemos acomodar la ecuación para obtener una constante de salto efectiva $k = (2\pi f)^2 \Delta m$. La energía asociada con el movimiento de este segmento de la cuerda es entonces

$$\Delta E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(2\pi f)^2 \Delta m A^2$$

$$\Delta E = 2\pi^2 \Delta m f^2 A^2$$

Ahora tenemos un resultado importante: la energía de una onda depende del cuadrado de la amplitud de la onda. Así, una onda con el doble de amplitud de otra onda equivalente (con la misma frecuencia, el mismo medio) tendrá energía cuatro veces mayor.

Para encontrar la rapidez del flujo de energía, o potencia, observamos que Δm se puede escribir corno $\rho S \Delta \ell$, donde ρ es la densidad, *S* el área de la sección transversal y $\Delta \ell$ la longitud del segmento de la cuerda. En un tiempo Δt, la onda con rapidez v recorre una longitud $\Delta \ell = v \Delta t$, de manera que podemos sustituir $\Delta m = \rho S v \Delta t$ dentro de la ecuación para ΔE. Obtenemos una expresión para la energía transportada en el tiempo Δt.

$$\Delta E = 2\pi^2 S \rho v f^2 A^2 \Delta t$$

La rapidez a la cual se propaga la energía a lo largo de la cuerda es la potencia *P*.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = 2\pi^2 S \rho v f^2 A^2$$

El parámetro más útil generalmente es la intensidad I, que se define como la potencia que fluye a través de un área unidad. Para este caso, la intensidad en watts por metro cuadrado (W/m^2) es:

$$I = \frac{P}{S} = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2$$

Aunque este resultado lo hemos derivado para el caso especifico de ondas en una cuerda, dan la dependencia correcta de la densidad del medio, la velocidad de la onda, la frecuencia y la amplitud apropiada para cualquier onda armónica viajera.

El oído humano puede acomodarse a un intervalo de intensidades sonoras bastante grande, desde 10^{-12} W/m^2 aproximadamente (que normalmente se toma como umbral de audición), hasta 1 w/m^2 aproximadamente que produce sensación dolorosa en la mayoría de las personas. Debido a este gran intervalo y a que la sensación fisiológica de fuerza sonora no varía directamente con la intensidad, se utiliza una escala logarítmica para describir el nivel de intensidad de una onda sonora.

Nivel de Intensidad.

El nivel de intensidad, β, se mide en decibelios (dB) y se define:

$\beta = \log \dfrac{I}{I_0}$, donde I es la intensidad del sonido, e I_0 es un nivel de referencia cuyo valor es de 10^{-12} W/m^2 que escogemos como la unidad de audición.

En esta escala, el intervalo de intensidad sonora para el oído humano es de 0 dB a 120 dB, que corresponden a intensidades a partir de 10^{-12} W/m^2 hasta cerca de 1 W/m^2. La sensación de sonido más o menos fuerte depende de la frecuencia además de la intensidad del mismo.

Ejemplo 22. Una cuerda de densidad lineal 480 g/m está bajo una tensión de 48 N. Una onda de frecuencia 200 Hz y amplitud 4,0 mm recorre la cuerda. ¿A qué razón la onda transporta energía?

Solución.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(200) = 400\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{48N}{0{,}48\, kg/m^3}} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$P = \frac{1}{2}\mu v \mu^2 A^2$$

$$= (0{,}5)(0{,}48)(10)(400\pi)^2(0{,}004)^2 = 61 \text{ W}$$

Ejemplo 23. La conversación normal se desarrolla a cerca de 60 dB. ¿A qué nivel de intensidad corresponde?

Solución.

$$60 = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}, \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^6$$

$$\Rightarrow I = 10^6 I_0 = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Ejemplo 24. Una fuente emite el sonido uniformemente en todas las direcciones en un nivel de la energía de 60 W. ¿Cuál es la intensidad una distancia de 4 m de la fuente?

Solución.

La potencia se distribuye sobre la superficie de una esfera de área $A = 4\pi r^2$.

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{60}{4\pi r(4)^2} = 0{,}30 \text{W/m}^2$$

Ejemplo 25. A una distancia de 5 m de una fuente el nivel de sonido es 90 dB. ¿A qué distancia el nivel ha bajado a 50 dB?

Solución.

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \text{ y } I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2} \text{ de aquí } \frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\beta_1 = 10\log_{10}\frac{I_1}{I_0} = 90dB, \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^9$$

Similarmente,

$$\beta_2 = 10\log_{10}\frac{I_2}{I_0} = 50dB, \Rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 10^5$$

Luego $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{10^5}{10^9} = 10^{-4} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$

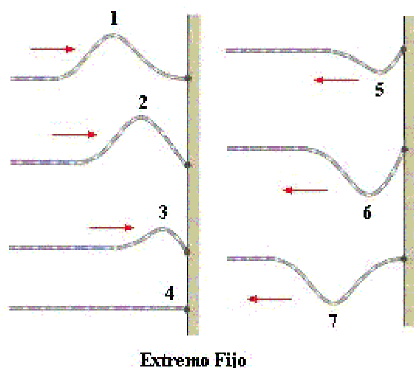
$$\Rightarrow r_2 = 10^2 r_1 = 500 \text{ m}$$

REFLEXION DE ONDAS

Ahora veremos que sucede con una onda al llegar a un extremo que la confina; para este estudio consideraremos una perturbación en una cuerda, primero veremos cuando el extremo esta rígidamente atado a la pared y la cuerda no tienen posibilidad de desplazamiento en ese punto. Luego veremos el caso en que la cuerda tiene posibilidad de desplazamiento vertical en el punto de atadura. Esta propiedad de las ondas que aquí introducimos se aplica a todas las ondas.

Primer Caso.- Extremo fijo

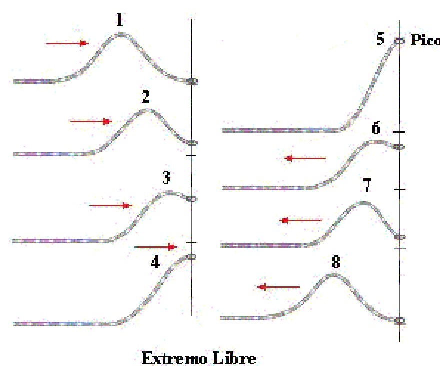
Cuando el pulso de una onda llega al extremo más alejado de una cuerda que esta fija a una pared en ese extremo, la onda no se detiene repentinamente, sino que es reflejada. Si no se disipa energía en el extremo lejano de la cuerda, la onda reflejada tiene una magnitud igual a la de la onda incidente; sin embargo, la dirección de desplazamiento se invertirá (vea figura). Esta inversión sucede porque a medida que el pulso encuentra la pared, la fuerza hacia arriba del pulso en el extremo tira hacia arriba sobre la pared. Como resultado, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la pared tira hacia abajo sobre la cuerda. Esta fuerza de reacción hace que la cuerda estalle hacia abajo, iniciando un pulso reflejado que se aleja con una amplitud invertida (o negativa).



Extremo Fijo

Segundo Caso.- Extremo Libre

Si la cuerda tiene libertad para moverse en su extremo lejano. De nuevo, un pulso de onda que viaja a lo largo de la cuerda se refleja cuando alcanza ese extremo (vea figura). Pero en este caso vemos que la onda reflejada tiene la misma dirección de desplazamiento que la onda incidente. A medida que el pulso alcanza el extremo de la cuerda, ésta se mueve en respuesta al pulso. A medida que el extremo de la cuerda empieza a regresar a su posición, inicia un pulso inverso a lo largo de la cuerda, justamente como si el movimiento final se debiera a alguna fuerza externa. El resultado es un pulso exactamente igual al pulso de onda incidente. Pero viajando en el sentido contrario.



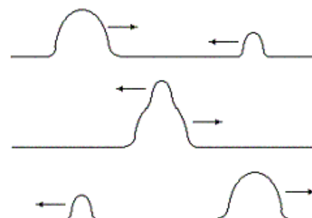
Extremo Libre

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE ONDAS - INTERFERENCIA

Tratamos en este punto el efecto combinado de dos o más ondas que viajan en el mismo medio. En un medio lineal, esto es, en un medio en que la fuerza de recuperación es proporcional al desplazamiento del mismo, se puede aplicar el **principio de superposición** para obtener la perturbación resultante. Este principio es aplicable a muchos tipos de ondas, incluyendo las ondas en cuerdas, ondas sonoras, ondas superficiales en el agua y ondas electromagnéticas. El término **interferencia** se empleó para describir el efecto producido al combinar dos ondas que se desplazan simultáneamente a través de un medio.

Principio de superposición.

El principio de superposición establece que, cuando dos o más ondas se mueven en el mismo medio lineal, la onda resultante en cualquier punto es igual a la suma algebraica de los desplazamientos de todas las ondas componentes.



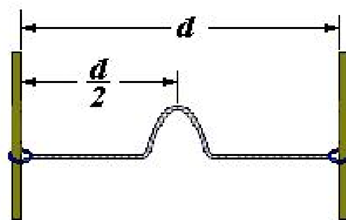
Ejemplo 26. Entre dos barras paralelas se mantiene tensa una cuerda mediante dos anillos, como se indica en la figura. Se perturba la cuerda partiendo de un desplazamiento inicial como el indicado en la figura (muy exagerado en la misma). La longitud de la cuerda es d y la velocidad de propagación de las ondas transversales en dicha cuerda es v.

Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la cuerda alcance un estado igual al representado si:

a) Los anillos pueden moverse libremente a lo largo de las barras.

b) Un anillo está fijo.

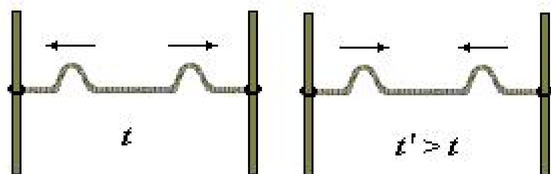
c) Están fijos los dos anillos.



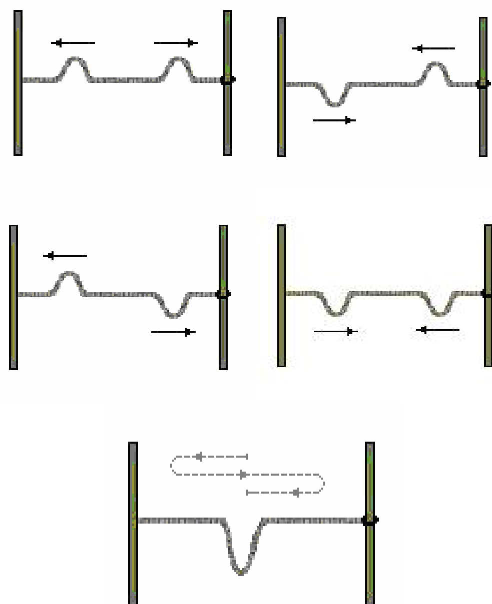
Solución.

a) Si los anillos pueden moverse a lo largo de las barras, cuando los pulsos de la figura llegan a los extremos la reflexión se realiza sin cambio de fase. El máximo central se produce en el instante t_1 tal que:

$$t_1 = 2\frac{d/2}{v} \Rightarrow t_1 = \frac{d}{v}$$



b) En el anillo fijo se produce cambio de fase en la reflexión. La propagación sigue los pasos de la figura.

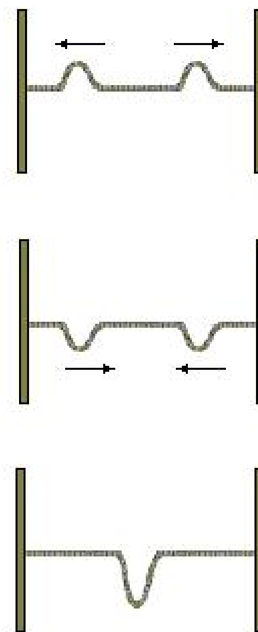


Se produce un mínimo en el centro en el instante:

$t = \frac{d/2}{v} + \frac{d}{v} + \frac{d/2}{v} = \frac{2d}{v}$ y el tiempo necesario para que se produzca el máximo en el centro es el doble que el anterior, es decir: $t_2 = \frac{4d}{v}$

c) Con los dos extremos fijos hay cambio de fase en ambos. Como se aprecia en la figura el mínimo central se produce en $t = d/v$, y el máximo en un tiempo:

$$t_3 = \frac{2d}{v}$$



ONDAS QUE VIAJAN EN LA MISMA DIRECCION.

Se aplicará el principio de superposición a dos ondas armónicas que viajan en la misma dirección en cierto medio.

Ondas con la misma Amplitud y frecuencia.

Si el sentido de avance es el del semieje positivo de las *x*, y tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, pero difieren en fase se pueden expresar sus funciones de onda individuales como

$y_1 = A\,\text{sen}(\omega t - kx)$ e

$y_2 = A\,\text{sen}(\omega t - kx - \varphi)$

La función de onda resultante *y* se obtiene haciendo

$$y_{total} = y_1 + y_2$$

$$= A\,\text{sen}(\omega t - kx) + A\,\text{sen}(\omega t - kx - \varphi)$$

Empleando la identidad trigonométrica siguiente:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\cos\frac{(A-B)}{2}\,\text{sen}\frac{(A+B)}{2}$$

Se obtiene

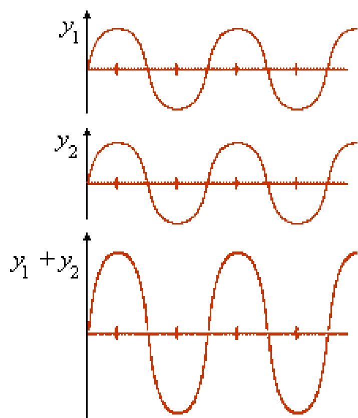
$$y_{total} = \left[2A\cos\frac{\varphi}{2}\right]\text{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Luego, observamos el movimiento resultante es nuevamente ondulatorio, pues es de la forma $f(x - vt)$ o bien $f(kx - \omega t)$.

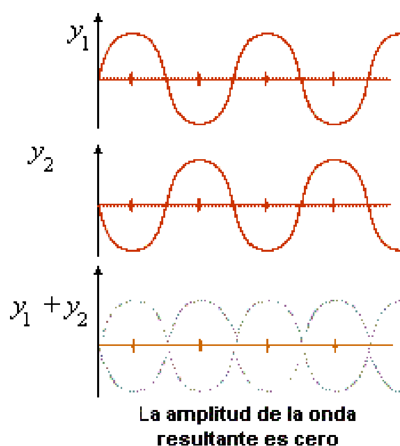
La onda resultante tiene igual frecuencia y longitud de onda que sus componentes, pero con desfase $\frac{\varphi}{2}$ respecto a y_1 y $-\frac{\varphi}{2}$ respecto a y_2

La amplitud de este movimiento ondulatorio es $\left[2A\cos\frac{\varphi}{2}\right]$, vemos que es diferente al de sus componentes y con la característica fundamental que depende de φ.

Si $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi...$, entonces $\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 1$ y la amplitud de la onda resultante es $\pm 2A$. En otras palabras, la onda resultante es el doble de amplia que las ondas individuales. En este caso se dice que las ondas están en fase en todos los puntos, es decir, las crestas y los valles de las ondas individuales ocurren en las mismas posiciones. Este tipo de superposición se denomina **interferencia constructiva**.

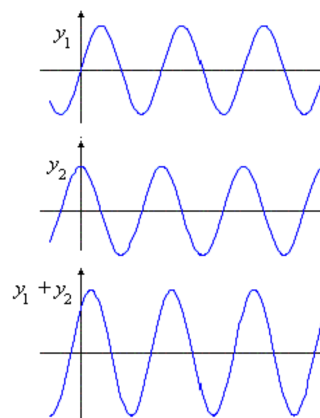


Si $\varphi = \pi$ (o cualquier múltiplo impar de veces) π, entonces $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$, y la onda resultante tiene amplitud cero en cualquier parte. En este caso la cresta de una onda coincide con el valle de la otra y sus desplazamientos se cancelan en cada punto. Este tipo de superposición se denomina **interferencia destructiva**.



La amplitud de la onda resultante es cero

Si $0 < \varphi < \pi$ la onda resultante tiene una amplitud cuyo valor está entre 0 y *2A*. La figura muestra un desfase $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



APLICACIONES:

El estetoscopio y la cancelación de ruidos.

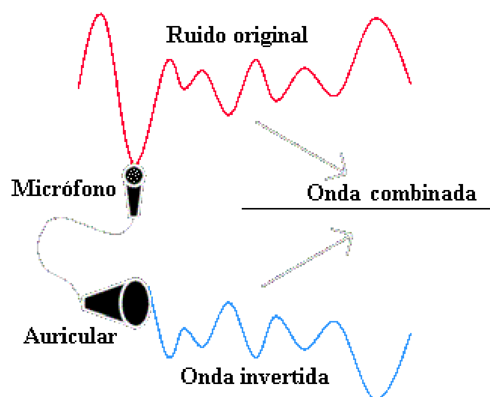
El estetoscopio.

Este instrumento fue inventado en 1816 por el médico francés R.T.H. Laennec. A este hombre, por pudor, no le agradaba la idea de aplicar su oreja sobre el pecho de las pacientes, por lo que se acostumbró a utilizar un tubo de papel. Posteriormente perfeccionó la idea aplicando el principio de interferencia constructiva.

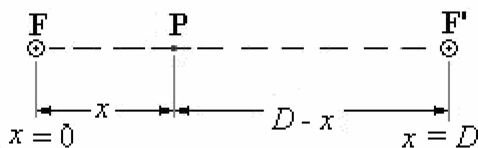


Cancelación de ruidos.

La interferencia destructiva puede ser muy útil. Es muy importante que el piloto de un avión oiga lo que sucede a su alrededor, pero el ruido del motor representa un problema. Por eso, los pilotos pueden usar unos auriculares especiales conectados a un micrófono que registra directamente el sonido del motor. Un sistema en los auriculares crea una onda inversa a la que llega a través del micrófono. Esta onda es emitida, de forma que neutraliza la primera. En los automóviles se está experimentando con un sistema similar.



Ejemplo 27. Dos focos puntuales F y F', separados entre si 1 m, emiten en fase sonidos de 500 Hz de frecuencia con la misma intensidad.
a) Obtener la posición de los puntos, si los hay, en los que no se registra sonido.
b) Obtener la posición de los máximos y mínimos de intensidad que se registran a lo largo del segmento FF'. (v = 340 m/s).
$x=D$



Solución.
a) Si consideramos que ambos sonidos se propagan con frentes de ondas esféricos y que por tanto la amplitud disminuye con la distancia, para que se produzca anulación total en un punto, éste deberá equidistar de *F* y *F'*, con lo que los únicos puntos serian los de la mediatriz del segmento *F F';* pero precisamente en esos puntos las dos amplitudes se suman por estar los *focos* en fase. En consecuencia, no hay ningún punto a distancia finita en el que la intensidad resultante sea nula.
b) Desde un punto P del segmento *F'* a distancia x de *F*, la diferencia de caminos a los focos es:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = x - (D - x) = 2x - D$$

MÁXIMOS:

$$\Delta x = n\lambda \;\Rightarrow\; 2x - D = n\frac{v}{f} \;\Rightarrow x = \frac{D}{2} + \frac{n}{2}\frac{v}{f}$$

$$n = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{340}{500} = 0{,}16\text{m}$$

$$n = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0{,}50\text{m}$$

$$n = +1 \;\Rightarrow\; x_3 = 0{,}84\text{m}$$

Los máximos están en valores de x igual a 0,16; 0,50; 0,84 m
MÍNIMOS:

$$\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{D}{2} + \frac{(2n+1)}{4}\frac{v}{f}$$

$$n = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{340}{500} = 0{,}33\text{m}$$

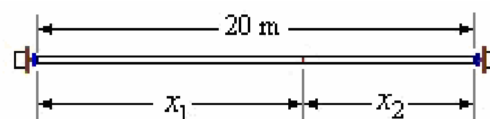
$$n = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0{,}67\text{m}$$

Los mínimos están en valores de *x* igual 0,33 m; 0,67 m.
Los restantes máximos y mínimos se localizan fuera del segmento F F'.

Ejemplo 28. Dos Fuentes separadas 20 m vibran de acuerdo a las ecuaciones

$$y_1 = 0{,}06\,\text{sen}\,\pi t \text{ m} \quad y_2 = 0{,}02\,\text{sen}\,\pi t \text{ m}$$

Ellas envían ondas de velocidad 3 m/s a lo largo de una varilla. ¿Cuál es la ecuación del movimiento de una partícula a 12 m de la primera fuente y a 8 m de la segunda?
Solución.



Referido a la figura. La fuente 1 envía ondas en el sentido +x, tal que

$$y_1 = A_1\text{sen}(kx_1 - \omega t).$$

La fuente 2 envía ondas en el sentido -*x*, tal que

$$y_2 = A_2\text{sen}(kx_2 + \omega t)$$

como $\omega = \pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, y $v = \frac{\omega}{k} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{\pi}{3}\text{m}$$

También A_1 = 0,06 m y A_2 = 0,02 m
La perturbación resultante en el punto x_1 = 12 m, x_2 = -8 m es.

$$y = y_1 + y_2$$

$$= 0{,}06\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x_1 - \pi t\right) + 0{,}02\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x_2 + \pi t\right)$$

$$= 0{,}06\,\text{sen}\left(\frac{12\pi}{3} - \pi t\right) + 0{,}02\,\text{sen}\left(-\frac{8\pi}{3} + \pi t\right)$$

$$= 0{,}06\,\text{sen}\,\pi t + 0{,}02\,\text{sen}\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 0{,}06\,\text{sen}\,\pi t + 0{,}02\left[-\frac{1}{2}\text{sen}\,\pi t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi t\right]$$

$$= 0{,}05\,\text{sen}\,\pi t - 0{,}0173\cos\pi t$$

Ejemplo 29. Dos fuentes F_1 y F_2, que vibran con la misma fase producen en la superficie libre del agua ondas representada por las ecuaciones:

$$y_1 = 8\,\text{sen}(20\pi t - 0{,}2\pi x) \text{ (en cm)}$$

$$y_2 = 4\,\text{sen}(40\pi t - 0{,}4\pi x) \text{ (en cm)}$$

Determine la amplitud de la onda que se produce por interferencia en un punto P que dista 25 cm de F_1 y 15 cm de F_2.
Solución.

Usando la relación

$\text{sen}(A-B)=\text{sen}A\cos B-\cos A\text{sen}B$:

$$y_1=8(\text{sen}20\pi t\cos 0{,}2\pi x-\cos 20\pi t\,\text{sen}0{,}2\pi x)$$

$$y_2=4(\text{sen}40\pi t\cos 0{,}4\pi x-\cos 40\pi t\,\text{sen}0{,}4\pi x)$$

En el punto P (x_1 = 25 cm, x_2= 15 cm):

$$y_1=8(\text{sen}20\pi t\cos 5\pi-\cos 20\pi t\,\text{sen}5\pi)$$

$$y_2=4(\text{sen}40\pi t\cos 6\pi-\cos 40\pi t\,\text{sen}6\pi)$$

Con $\text{sen}5\pi=\cos\pi=0$, $\cos 5\pi=\cos\pi=-1$

y $\text{sen}6\pi=\cos 2\pi=0$, $\cos 6\pi=\cos 2\pi=1$

Obtenemos:

$$y_1=8(-\text{sen}20\pi t)=-8\text{sen}2\pi t$$

$$y_2=4(\text{sen}40\pi t)=4\text{sen}2\pi t$$

La suma:

$$y=y_1+y_2=-8\text{sen}2\pi t+4\text{sen}2\pi t=$$
$$-4\text{sen}2\pi t$$

La amplitud de la onda que se produce por interferencia en un punto P es 4 cm.

Ondas que difieren tanto en Frecuencia como en Amplitud

Sean las ondas y_1 e y_2 que difieren tanto en frecuencia como en amplitud

$$y_1=A_1\text{sen}(\omega_1 t\pm k_1x)=A_1\text{sen}\theta_1 \text{ e}$$

$$y_2=A_2\text{sen}(\omega_2 t\pm k_2x)=A_2\text{sen}\theta_2$$

Si las ondas componentes difieren tanto en frecuencia como en amplitud, existen varios modos de combinarse, de modo que todos ellos exigen cierta habilidad en el cálculo trigonométrico. Si ponemos

$\theta_2=\theta_1+\delta$ y desarrollamos

$$\text{sen}(\theta_1+\delta)=\text{sen}\theta_1\cos\delta+\cos\theta_1\text{sen}\delta$$

$$y=y_1+y_2=A_1\text{sen}\theta_1+A_2\text{sen}\theta_2$$
$$=A_1\text{sen}\theta_1+A_2\text{sen}(\theta_1+\delta)$$
$$=(A_1+A_2\cos\delta)\text{sen}\theta_1+A_2\text{sen}\delta\cos\theta_1 \quad (1)$$

Esta expresión puede recombinarse en la forma de una sola onda

$$y=A\text{sen}(\theta_1+\phi)$$
$$=A\cos\phi\,\text{sen}\theta_1+A\text{sen}\phi\cos\theta_1 \quad (2)$$

Igualando coeficientes de (1) y (2) obtenemos las ecuaciones:

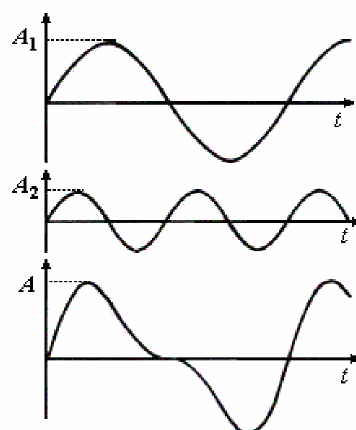
$$A\cos\phi=A_1+A_2\cos\delta \text{ y } A\text{sen}\phi=A_2\text{sen}\delta$$

Elevándolas al cuadrado y sumando obtenemos el valor de A:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta}$$

Y dividiéndolas obtenemos el valor de ϕ:

$$\tan\phi=\frac{A_2\text{sen}\delta}{A_1+A_2\cos\delta}$$



Si se desea la onda resultante puede sumarse a una tercera onda y así sucesivamente. En general esta superposición no es simple, puesto que tanto la amplitud como la fase resultante pueden ser funciones del tiempo y de la posición.

Ejemplo 30. Dos ondas armónicas de amplitudes 2 y 4 cm viajan en la misma dirección y tienen idéntica frecuencia; si su diferencia de fase es π/4, calcúlese la amplitud de la onda resultante.

Solución.

A una diferencia de fase $\delta=\dfrac{\pi}{4}$, le corresponde una distancia: $\Delta x=\dfrac{\delta}{k}=\dfrac{\lambda\delta}{2\pi}=\dfrac{\pi}{8}$

y como la amplitud de la onda resultante verifica:

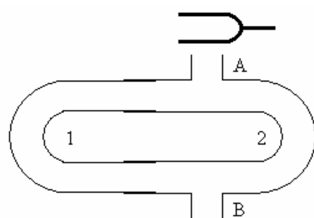
$$A_o^2=A_{o1}^2+A_{o2}^2+2A_{o1}A_{o2}\cos\delta$$

Sustituyendo:

$$A_o=\sqrt{A_{o1}^2+A_{o2}^2+2A_{o1}A_{o2}\cos\delta}$$
$$=\sqrt{4+16+16\cos\frac{\pi}{4}}=5{,}6\text{ cm}$$

Ejemplo 31. El aparato de Quincke consta de dos tubos en U, pudiéndose deslizar las ramas de uno de ellos dentro de las ramas del otro. En las proximidades de la ramificación

A se produce un sonido que se escucha poniendo el oído en B. Deslizando el tubo 1 dentro del 2, se encuentran posiciones en las que no se percibe sonido; ¿por qué? Si el desplazamiento lateral que hay que dar al tubo 1, desde que no se percibe sonido hasta que, de nuevo, se deja de percibir, es de 25 cm, ¿cuáles son la longitud de onda, la frecuencia y el período de las ondas sonoras? Velocidad de propagación del sonido en el aire, 340 m/s.

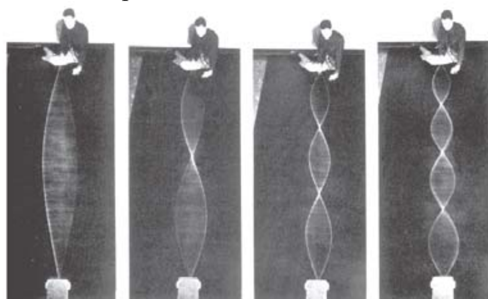


Solución.
No se percibirá sonido cuando la diferencia de recorridos A 1 B y A 2 B sea un número impar de semi longitudes de onda. Si en tales condiciones se desplaza el tubo 1 hasta dejar de nuevo de per*cibir* sonido, el exceso de recorrido que hace el sonido, con respecto a la posición anterior, es una longitud de onda.
En la segunda posición el sonido ha recorrido en la rama A 1 B, 50 cm más que en la A 2 B (25 en la parte superior y de 1 y 25 en la inferior). Por tanto:
λ =50 cm

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0,5} = 680\,\text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{680}\,\text{s}$$

ONDAS IGUALES VIAJANDO EN SENTIDOS OPUESTOS. ONDAS ESTACIONARIAS
Un tipo de superposición de ondas especialmente interesante es el que tiene lugar entre dos ondas de idénticas características pero propagándose en sentido contrario. Las ondas resultantes reciben el nombre de **ondas estacionarias**, pues no implican un movimiento de avance de la perturbación



Este tipo de ondas están asociadas a reflexiones en los límites de separación de medios de propiedades diferentes. Dichos límites pueden ser básicamente de dos tipos, libres y fijos. El nudo de unión de dos cuerdas de diferente grosor sería un ejemplo de límite libre; por el contrario, el extremo de la cuerda unido a un punto fijo en una pared sería un límite fijo.
Vimos anteriormente que en un **límite libre** la onda reflejada tiene las mismas características que la onda incidente, tan sólo difieren en el sentido de avance de la perturbación. Por el contrario, en un **límite fijo** la onda reflejada posee las mismas características que la incidente, pero está desfasada π radianes respecto a la onda incidente

Consideremos en primer lugar las ondas estacionarias (que se propagan en el eje *x*) por reflexión en un límite libre. La función de onda resultante será:

$y_1 = A\text{sen}(kx - \omega t)$ e $y_2 = A\text{sen}(kx + \omega t)$, la suma de estas ondas nos da:

$$y_{total} = y_1 + y_2$$
$$= A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(kx + \omega t)$$, haciendo uso de la suma trigonométrica

$$y_{total} = 2A\text{sen}kx\cos\omega t$$

El movimiento resultante no es ondulatorio, pues no se propaga al no ser de la forma $f(x - vt)$.
Una partícula en cualquier punto dado x ejecuta movimiento armónico simple conforme transcurre el tiempo. Nótese que todas las partículas vibran con la misma frecuencia, pero con la particularidad que la amplitud no es la misma para cada partícula del medio, con la posición (en un movimiento ondulatorio al amplitud es igual para cualquier punto).
La amplitud esta dada por 2*A* sen *kx*.

Los puntos de mínima amplitud (nula) se llaman **nodos**. En ellos se debe cumplir:

$$\text{sen}kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi$$
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \Rightarrow$$
$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

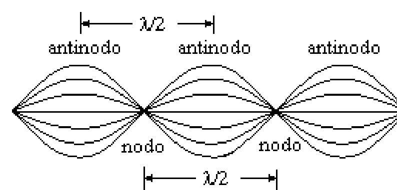
Para *n* = 0, 1, 2, 3, ……….

Los puntos de máxima amplitud (± 2*A*) se llaman **vientres** o **antinodos**. En ellos se debe cumplir:

$$\text{sen}kx = \pm 1 \Rightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$
$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Para *n* = 0, 1, 2, 3,……….

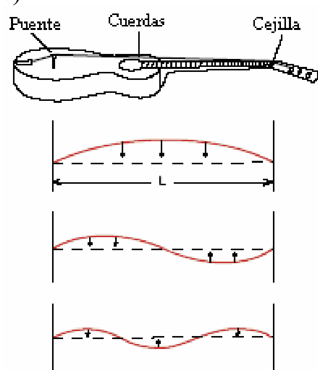
Así pues, tanto los nodos como los vientres aparecen a intervalos de longitud λ/2, mediando entre un nodo y un antinodo hay una distancia de λ/4.



La figura muestra la envolvente de una onda estacionaria.
Al no propagarse las ondas estacionarias, no transportan energía.
La energía se mantiene estacionaria, alternando entre cinética vibratoria y potencial elástica. Por lo tanto el movimiento repetimos no es ondulatorio, el nombre proviene del hecho que podemos analizarlo como superposición de ondas.

Condiciones de contorno
Las condiciones en los límites, llamadas *condiciones de contorno*, imponen restricciones a la hora de formarse ondas estacionarias en el medio correspondiente. Así, si los límites son fijos, en ellos se tendrán que dar nodos necesariamente; si ambos límites son libres se darán antinodos, y si uno es libre y el otro es fijo se habrán de dar antinodo y nodo respectivamente.

Límite fijo - Límite fijo: (como en los instrumentos musicales, violín, arpa, etc., la cuerda esta fija en sus dos extremos)



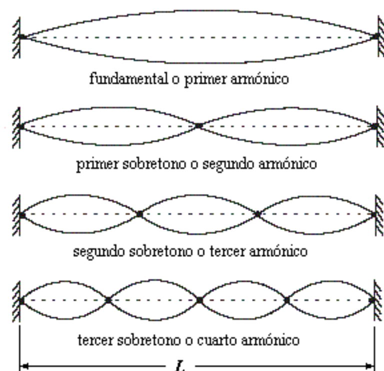
En este caso las condiciones a imponer son que, si la longitud del medio es *L*, tanto en *x=0* como *x=L* se habrán de dar nodos. Aplicando la condición de nodo en un límite fijo, resulta:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

o en términos de frecuencias,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = n\frac{v}{2L}$$

Para n = 1, 2, 3, 4,…………..
Por tanto, tanto la frecuencia como la longitud de onda sólo pueden tomar determinados valores, es decir, están cuantificadas. La frecuencia más baja de la serie recibe el nombre de **frecuencia fundamental**, y las restantes, que son múltiplos de la fundamental, reciben el nombre de **armónicos**.



Estas frecuencias posibles en la cavidad formada por los límites fijos, se denominan **modos** de la cavidad

Ejemplo 32. Por un medio unidimensional (dirección del eje O*x*) se propagan dos ondas transversales, vibrando en el plano *x*O*y* y dadas por:

$$y_1 = A\text{sen}(\omega t + kx),\; y_2 = A\text{sen}(\omega t - kx + \varphi).$$

a) Comprobar que la superposición de ambas da lugar a una onda estacionaria.
b) Si en $x = 0$ ha de haber un nodo de la onda estacionaria, comprobar que el valor de φ debe ser π.
c) Calcular la velocidad de un punto del medio cuya distancia al origen sea 1/4 de la longitud de onda.

Solución.
a)

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\text{sen}(\omega t + kx) + A\text{sen}(\omega t - kx + \varphi)$$
$$= 2A\text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right) \qquad (1)$$

Llamando: $y_{o(x)} = 2A\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \; y = y_o \text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Por lo tanto, la expresión (1) es la ecuación de la onda estacionaria puesto que cualquier partícula en un punto dado *x* efectúa un movimiento armónico simple al transcurrir el tiempo, vibrando todas las partículas con idéntico periodo; y cada partícula vibra siempre con la misma amplitud, no siendo la misma para cada una sino que varia con la posición *(x)* de cada partícula.

b) $y_{o(0)} = 0 \;\Rightarrow\; \cos\frac{\varphi}{2} = 0 \;\; \varphi = \pi$

c) $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = y_o \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -y_o \omega \text{sen}\omega t$

$$y_{o\left(\frac{\lambda}{4}\right)} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 2A$$

Finalmente $v_y = -2A\omega \text{sen}\omega t$
En tal punto existe un vientre.

Ejemplo 33. La onda $y_1 = A\text{sen}(kx - \omega t)$ viaja por una cuerda. Después de reflejarse se convierte en $y_2 = -\frac{A}{2}\text{sen}(kx + \omega t)$. Que es lo que se obtiene de la combinación de estas dos ondas.

Solución.

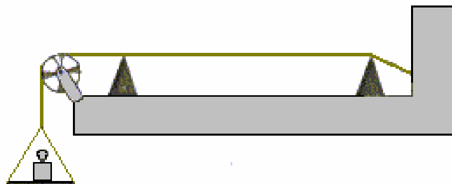
Hagamos $y = y_1 + y_2$.

$$y = A\text{sen}(kx - \omega t) - \frac{A}{2}\text{sen}(kx + \omega t) =$$
$$\frac{A}{2}\text{sen}(kx - \omega t) + \frac{A}{2}\text{sen}(kx - \omega t) - \frac{A}{2}\text{sen}(kx + \omega t)$$

$= \frac{A}{2}\text{sen}(kx - \omega t) - A\text{sen}\omega t \cos kx$

El primer término es una onda viajera y el Segundo una onda estacionaria.

Ejemplo 34. Calcular la frecuencia del sonido fundamental emitido por una cuerda de 1 m de longitud y 1 mm de diámetro, cuya densidad es 2 g/cm^3 y está tensa por un peso de 9231,6 g.



Solución.

La frecuencia del sonido emitido por una cuerda es:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T = (9{,}2316 kg)\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right) = 90{,}47 \text{ N}$$

$$\mu = \rho A = \left(2000\frac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{10^{-6}\pi}{4}\right)$$

$$= 1{,}57 \times 10^{-3}\frac{kg}{m}$$

$$f = \frac{1}{2(1)}\sqrt{\frac{90{,}47}{1{,}57\times 10^{-3}}} = 38{,}8 \text{ Hz}$$

Ejemplo 35. Una cuerda está estirada por un peso de 10 N. Calcular el peso que debe tensar a otra cuerda de la misma sustancia, la misma longitud y doble radio para que emita la octava aguda de la que produce la primera. Se supone que ambas emiten el sonido fundamental.

Solución.

$$\mu = \rho A = \pi r^2 \rho,$$

$$\mu' = \frac{m'}{L} = \frac{\rho\pi(2r)^2 L}{L} = 4\pi r^2\rho = 4\mu$$

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ y}$$

$$f' = 2f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{\mu'}} \Rightarrow f' = 2f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{4\mu}}$$

Relacionando f y f':

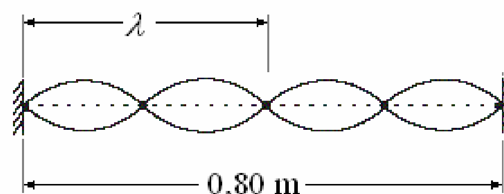
$$\frac{f'}{f} = \frac{2f}{f} = \frac{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T'}{4\mu}}}{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T'}{T}} \Rightarrow \frac{T'}{T} = 16$$

Como T = 10 N, T' = 160 N

Ejemplo 36. Una cuerda horizontal, de longitud ℓ = 0,80 m, esta sometida en uno de sus extremos a oscilaciones sinusoidales de frecuencia f = 120 Hz, esta frecuencia corresponde a uno de los modos resonantes de la cuerda y se observa que entre sus extremos aparecen 4 antínodos ó vientres cuya amplitud de oscilación es A = 2 cm. Calcular:

a) La velocidad de propagación de las ondas.
b) La velocidad y aceleración máxima que puede alcanzar un punto de la cuerda.
c) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,050 m de un extremo de la cuerda.
d) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,125 m de un extremo de la cuerda.

Solución.



$\lambda = 0{,}40$ m, f = 120 Hz,

a) La velocidad de propagación de las ondas.

$$v = \lambda f = 0{,}40 \times 120 = 48 \text{ m/s}$$

b) La velocidad y aceleración máxima que puede alcanzar un punto de la cuerda.

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega\text{sen}\omega t$$

$$\Rightarrow v_{máx} = A\omega = 0{,}02 \times 240\pi = 4{,}8\pi \text{ m/s}$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\text{sen}\omega t$$

$$\Rightarrow$$

$$a_{máx} = A\omega^2 = 0{,}02 \times (240\pi)^2 = 1152\pi^2 \text{ m/s}^2$$

c) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,050 m de un extremo de la cuerda.

Ecuación de una onda estacionaria:

$$y = 2A\text{sen}kx\cos\omega t$$

La amplitud está dada por:

$$2A\text{sen}kx = 2A\text{sen}\frac{2\pi}{\lambda}x$$

Para 0,050 m

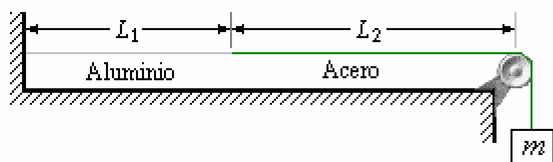
$$0{,}04\text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}40}0{,}050\right) = 0{,}04\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}028 \text{ m}$$

d) La amplitud de oscilación de un punto de la cuerda situado a 0,125 m de un extremo de la cuerda.

Para 0,125 m

$$0{,}04\text{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}40}0{,}125\right) = 0{,}04\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}037 \text{ m}$$

Ejemplo 37. Un alambre de aluminio de $L_1 = 60{,}0$ cm y con una superficie transversal 1,00x10^{-2} cm^2, está conectado a un alambre de acero de la misma superficie. El alambre compuesto, cargado con un bloque *m* de 10,0 kg de masa, está dispuesto como se indica en la figura, de manera que la distancia L_2 de la unión con la polea de sostén es 86,6 cm. Se crean ondas transversales en el alambre utilizando una fuente externa de frecuencia variable.
a) Determine la frecuencia más baja de excitación en que se observan las ondas estacionarias, de modo que la unión en el alambre es un nodo.
b) ¿Cuál es el número total de nodos observados en esta frecuencia, excluyendo los dos en los extremos del alambre?
La densidad del aluminio es 2,60 g/cm^3, y la del acero es 7,80 g/cm^3.



Solución.
La frecuencia para ondas estacionarias en una cuerda fija en los dos extremos es

$f_n = n\dfrac{v}{2L}$, como para una cuerda tensa $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$,

obtenemos: $f_n = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

Como el punto de unión de los alambres tiene que ser un nodo, tenemos n_1 nodos para el aluminio y n_2 nodos para el acero.
Siendo la frecuencia f, la tensión T y la sección de alambre S común para los dos alambres, tenemos:

Para el aluminio $f = \dfrac{n_1}{2L_1}\sqrt{\dfrac{T}{\mu_1}}$, para el acero

$$f = \frac{n_2}{2L_2}\sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

Luego $\dfrac{n_1}{2L_1}\sqrt{\dfrac{T}{\mu_1}} = \dfrac{n_2}{2L_2}\sqrt{\dfrac{T}{\mu_2}}$

La masa por unidad de longitud

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{mS}{LS} = \left(\frac{m}{V}\right)S = \rho S$$

Reemplazando las expresiones de μ_1 y μ_2:

$$\frac{n_1}{L_1}\sqrt{\frac{T}{\rho_1}} = \frac{n_2}{L_2}\sqrt{\frac{T}{\rho_2}} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{L_1}{L_2}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

Reemplazando valores, obtenemos: $\dfrac{n_1}{n_2} = 0{,}4$

Como la menor es la frecuencia se obtiene con el menor valor de *n*, tenemos que buscar los menores valores de n_1 y n_2 que tengan la relación 0,4,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{5}$$

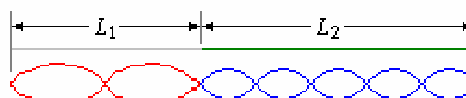
Correspondiendo $n_1 = 2$ y $n_2 = 5$.

a) Usando $n_1 = 2$, obtenemos la frecuencia que produce un nodo en la unión

$$f = \frac{n_1}{2L_1}\sqrt{\frac{T}{\mu_1}} = \frac{2}{2(0{,}6)}\sqrt{\frac{10(9{,}8)}{2{,}6\times10^3\left(10^{-6}\right)}}$$

= 324 Hz

b) El número total de nodos observados en esta frecuencia, excluyendo los dos en los extremos del alambre, se pueden contar en el esquema de la figura, son 6 (hay un nodo común para el aluminio y para el acero).



Ejemplo 38. Dos ondas armónicas se escriben por medio de:

$$y_1(x,t) = 0{,}015\cos\left(\frac{x}{2} - 40t\right),$$

$$y_2(x,t) = 0{,}015\cos\left(\frac{x}{2} + 40t\right)$$

Donde $x, y_1\ e\ y_2$ están en metros y *t* en segundos.
Dichas ondas se propagan en una cuerda tensa de gran longitud e interfieren para producir una onda estacionaria.
a) Determine la longitud de onda, frecuencia y rapidez de propagación de las ondas que interfieren.
b) Determine la función de la onda estacionaria.
c) Determine la posición de los nodos y antinodos en la onda estacionaria.
d) ¿Cuál es la amplitud de la onda en *x* = 0,4 m?

Solución.
a) La onda viajera es de la forma

$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi f t\right)$$

Luego comparando:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 4\pi = 12{,}56 \text{ m}$$

$$2\pi f = 40 \Rightarrow f = \frac{20}{\pi} = 6{,}37 \text{ Hz}$$

$$v = \lambda f = (4\pi)\left(\frac{20}{\pi}\right) = 80 \text{ m/s}$$

b) $y = y_1 + y_2$

$$y(x,t) = 0{,}015\cos\left(\frac{x}{2} - 40t\right) + 0{,}015\cos\left(\frac{x}{2} + 40t\right)$$

$$y(x,t) = 0{,}015\left[\cos\left(\frac{x}{2} - 40t\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + 40t\right)\right]$$

Siendo

$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$:

$$y(x,t) = 0{,}015\left(2\cos\frac{x}{2}\cos 40t\right)$$

$$= 0{,}030\cos\frac{x}{2}\cos 40t$$

Función de la onda estacionaria

c) Determine la posición de los nodos y antinodos en la onda estacionaria.

Los nodos son para $\cos\frac{x}{2} = 0$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, ...n\frac{\pi}{2}$$

$$x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, ... \pm n\pi$$

Los antinodos son para $\cos\frac{x}{2} = \pm 1$,

$$\frac{x}{2} = 0,\ 2\pi,\ 4\pi....2n\pi$$

$$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, ... \pm 2n\pi$$

d) Amplitud de la onda en $x = 0{,}4$ m.

$$A = 0{,}030\cos\frac{0{,}4}{2} = 0{,}030(0{,}98)$$

$= 0{,}0294$ m $= 2{,}94$ cm

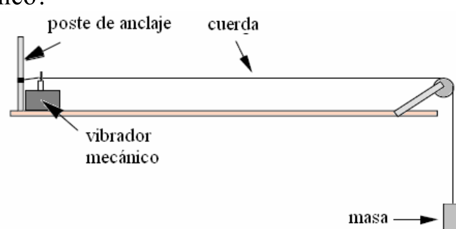
Ejemplo 39. En el dispositivo de la figura, una masa *m* es colgada de una cuerda que pasa sobre una polea. El otro extremo de una cuerda es conectada a un generador de frecuencia *f* fija. La cuerda tiene una longitud *L* de 2 metros y una densidad lineal de 0,002 kg/m. Se observan armónicos únicamente cuando las masas colgadas son 16 kg y 25 kg.

a) ¿Cuáles son los armónicos producidos por estas masas?

¿Cuál es la relación entre las tensiones y el número armónico?

b) ¿Cuál es la frecuencia del generador?

c) ¿Cuál es el valor máximo *m* para que se produzca un armónico?



Solución.

a) ¿Cuáles son los armónicos producidos por estas masas?

Los armónicos se producen para $m_1 = 16$ kg y para $m_2 = 25$ kg.

$$n\frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

$$\lambda_1 f = \frac{2L}{n_1} f = \sqrt{\frac{m_1 g}{\mu}},\ \lambda_2 f = \frac{2L}{n_2} f = \sqrt{\frac{m_2 g}{\mu}}$$

Luego: $\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

Los armónicos son el quinto y el cuarto.

¿Cuál es la relación entre las tensiones y el número armónico?

$$T_1 = m_1 g,\ T_2 = m_2 g \text{ y } \frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{16}{25}$$

b) ¿Cuál es la frecuencia del generador?

$$f = \frac{n_1}{2L}\sqrt{\frac{m_1 g}{\mu}} \Rightarrow f = \frac{5}{2(2)}\sqrt{\frac{16(9{,}8)}{0{,}002}} = 350$$

Hz

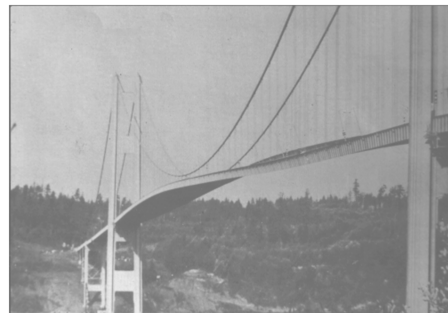
c) ¿Cuál es el valor máximo de *m* que produce un armónico?

$$\lambda f = \frac{2L}{n} f = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} \Rightarrow m = \frac{4L^2 f^2 \mu}{n^2 g}$$

El mayor valor de *m* se produce con $n = 1$

$$m = \frac{4(2)^2(350)^2(0{,}002)}{(1)^2(9{,}8)} = 400 \text{ kg}$$

Ejemplo 40. El puente colgante de Tacoma, de aproximadamente 1810m de longitud, fue abierto al tráfico el 1 de julio de 1940, luego de 2 años de construcción, uniendo Tacoma y Gig Harbor. 4 meses después el puente colapsó durante una tormenta el 7 de Noviembre de 1940. Durante la resonancia se observó al puente oscilando en su segundo modo de vibración a razón de 60 oscilaciones cada minuto.



Determine:

a) la longitud de onda de la onda estacionaria formada.

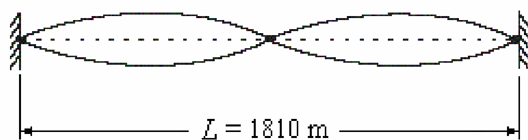
b) la velocidad de propagación de la onda.

c) el módulo de corte del puente, asumiendo que la densidad promedio del puente era de $5\text{x}10^3 \text{kg/m}^3$.

d) la ley de movimiento vertical de un carro que se hallaba estacionado a un cuarto de la longitud del puente desde uno de sus extremos.

Solución.

a)



$\lambda = 1810\text{ m}$

b) $v = \lambda f = (1810\text{ m})(1/\text{s}) = 1810\text{ m/s}$

c) Como $v = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}} \Rightarrow G = v^2\rho =$

$(1810)^2(5\times10^3) = 1{,}63805\times10^{10}\dfrac{N}{m^2}$

d) Para ondas estacionarias $y = 2A\text{sen}kx\cos\omega t$

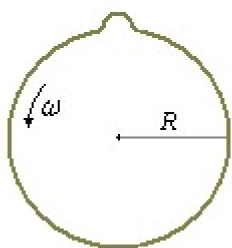
Para $x = \dfrac{\lambda}{4}$, $\text{sen}kx = 1$, luego

$y = 2A\cos\omega t \Rightarrow y = 2A\cos 2\pi ft$

Ejemplo 41. Un lazo de cuerda se gira a una alta velocidad angular ω, de modo que se forma un círculo tenso del radio R. Se forma un pulso (como se muestra en la figura) en la cuerda girante.

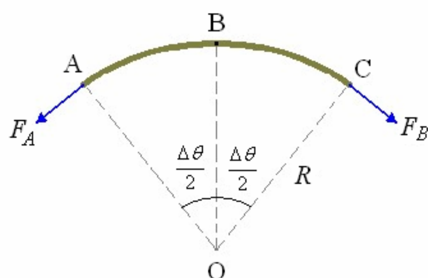
a) Demostrar que la tensión en la cuerda es $T = \mu\omega^2R^2$, donde μ es la densidad lineal de la cuerda.

b) Bajo que condiciones el pulso permanecería estacionario relativo a un observador en tierra.



Solución.

a) Según se muestra en figura tomemos ACB una pequeña sección de la cuerda, que subtiende un ángulo $\Delta\theta$ en O, el centro del lazo. Elegimos C en el punto medio del arco.



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_H = F_B\cos\frac{\Delta\theta}{2} - F_A\cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_A = F_B = T$$

$$\sum F_V = -F_B\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} - F_A\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = -\Delta m a_c$$

De esta última ecuación:

Con $F_A = F_B = T$, $\Delta m = \mu\Delta\ell = \mu R\Delta\theta$ y $\text{sen}\dfrac{\Delta\theta}{2} \approx \dfrac{\Delta\theta}{2}$:

Obtenemos:

$$2T\frac{\Delta\theta}{2} = \mu R\Delta\theta(\omega^2R)$$

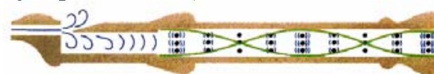
$$\Rightarrow T = \mu\omega^2R^2$$

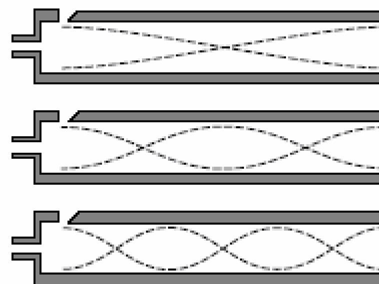
b) En una cuerda con densidad lineal μ y tensión T una onda viaja con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu\omega^2R^2}{\mu}} = \omega R.$$

Luego el pulso debe viajar con una velocidad $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ relativa a la cuerda. Luego, si el pulso se mueve en sentido horario con respecto a la cuerda, permanecería estacionario con respecto a tierra.

Límite libre. Límite libre: (un tubo abierto en ambos extremos, como en los instrumentos musicales de viento, ejemplo, la flauta).





En este caso las condiciones a imponer son que, si la longitud del medio es L, tanto en x=0 como x=L se habrán de dar antinodos. Aplicando la condición de antinodo en un límite libre, resulta:

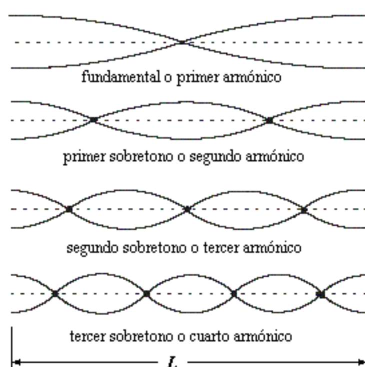
$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

o en términos de frecuencias,

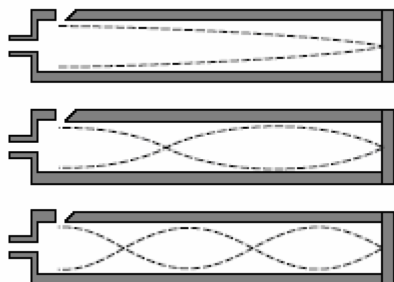
$$f_n = \frac{\lambda_n}{v} \Rightarrow f_n = n\frac{v}{2L}$$

Para n = 1, 2, 3, 4,…………..

Por tanto, igual que antes la frecuencia y la longitud de onda sólo podrán tomar determinados valores, y estarán cuantificadas. La frecuencia más baja de la serie recibe el nombre de **frecuencia fundamental**, y las restantes, que son múltiplos de la fundamental, reciben el nombre de **armónicos.** Se representan a continuación los cuatro primeros.



Limite fijo. Límite libre: (una cuerda con un extremo con libertad de movimiento y el tubo cerrado en un extremo).



En esta situación se tendrá un nodo en $x=0$ y un antinodo en $x=L$, lo que implica que en la longitud L de la cuerda han de caber un número impar de cuartos de onda. Aplicando la condición de antinodo reflexión en un límite fijo resulta:

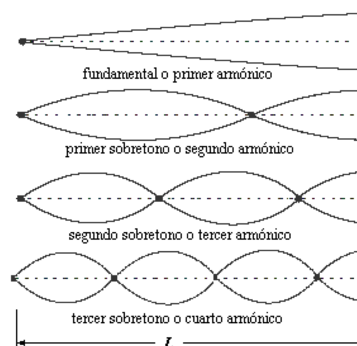
$$L = (2n-1)\frac{\lambda_n}{4} \Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

o, en términos de frecuencias,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = (2n-1)\frac{v}{4L}$$

Para n = 1, 2, 3, 4,…………..

que representan la serie de ondas permitidas por las condiciones de contorno. Se representan a continuación los cuatro primeros.



Ejemplo 42. Calcular la frecuencia de los sonidos emitidos por un tubo abierto y otro cerrado de 1 m de longitud, produciendo el sonido fundamental. Se supone .que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.

Solución.

Para tubo abierto (n = 1):

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{340}{2(1)} = 170 \text{ Hz}$$

Para un tubo cerrado (n = 1):

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{340}{4(1)} = 85 \text{ Hz}$$

Ejemplo 43. Calcular la longitud de un tubo abierto que lleno de aire y a 0° C (v = 330 m/s) emite como sonido fundamental el DO3.

Solución.

Frecuencia del DO 3 = 264 Hz:

$$f = \frac{v}{2L} \Rightarrow L = \frac{v}{2f} = \frac{330}{2(264)} = 0{,}625 \text{ m}$$

Ejemplo 44. Un tubo de 1 m de largo está cerrado por uno de sus extremos. Un alambre estirado se coloca cerca del extremo abierto. El alambre tiene 0,3 m de largo y una masa de 0,01 kg. Se sostiene fijo en sus dos extremos y vibra en su modo fundamental.

Pone a vibrar a la columna de aire en el tubo con su frecuencia fundamental por resonancia.

Encontrar:

a) La frecuencia de oscilación de la columna de aire.

b) La tensión del alambre.

Velocidad del sonido en el aire 340 m/s.

Solución.

a) La frecuencia fundamental (n =1) en el tubo sonoro cerrado valdrá:

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{340}{4(1)} = 85 \text{ Hz}$$

b) Dicha frecuencia será la fundamental que se produce en la cuerda, por lo que:

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}01}{0{,}3} = \frac{1}{30}\frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$T = 4L^2 f^2 \mu = 4(0{,}3)^2(85)^2\left(\frac{1}{30}\right) = 86{,}7 \text{ N}$$

Ejemplo 45. El tubo de un órgano representado en la figura tiene 45 cm de longitud y las onda estacionaria que se produce por el silbato en espacio libre es de una longitud de onda de 60 cm. Dicho tubo se puede considerar abierto en el extremo izquierdo y cerrado en el derecho.

a) Muéstrese en un diagrama al interior del tubo la onda estacionaria que se produce ubicando la posición de las crestas nodos y vientres de amplitud.

b).Si la máxima amplitud de oscilación de las partículas de aire al interior del tubo es de 10^{-6} cm. ¿cuál será la máxima amplitud que podrán alcanzar las partículas de aire en el centro del tubo?



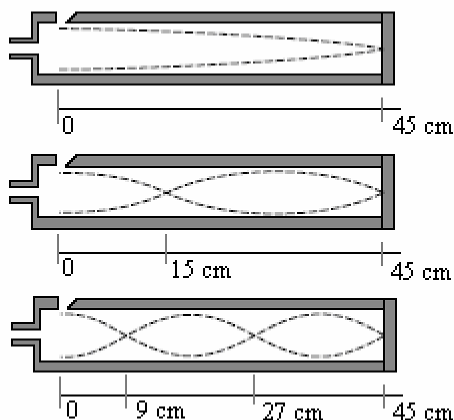
Solución.

La frecuencia libre es

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0,6} = 566,6\ \text{Hz},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,6} = 10,47\ \text{rad}$$

a) Diagrama al interior del tubo la onda estacionaria para las tres primeras resonancias.



b).Si la máxima amplitud de oscilación de las partículas de aire al interior del tubo es de 10^{-6} cm. ¿cuál será la máxima amplitud que podrán alcanzar las partículas de aire en el centro del tubo?

$$y_{total} = 2A\text{sen}kx\cos\omega t$$

La máxima amplitud de oscilación es en un vientre

$\text{sen}kx = 1$ y $\cos\omega t = 1$, luego: $10^{-8} = 2A \Rightarrow$

$$A = 0,5\times 10^{-8}\ \text{m}$$

La máxima amplitud que podrán alcanzar las partículas de aire en el centro del tubo

$x = 22,5\ \text{cm}$ y $\cos\omega t = 1$

$$y_{máx(x=0,225)} = 2A\text{sen}kx$$

$$= 2\left(0,5\times 10^{-8}\right)\left[\text{sen}(10,7)(0,225)\right]$$

$$= 0,71 \times 10^{-8}\ \text{m}$$

Ejemplo 46. Un ingeniero naval quiere averiguar si un tubo que presenta externamente una boca circular abierta está abierto o cerrado en el otro extremo que no logra ver. Para esto decide usar una fuente sonora de frecuencia variable. Tomó para ello dos frecuencias de resonancia consecutivas, que le dieron los siguientes valores: 125 y 175 Hz.

a) ¿Cuál es el razonamiento en que se basó?
b) ¿A qué conclusión llegó?
c) ¿Para qué frecuencia resonaría en estado fundamental?
d) Cree que también pudo averiguar la longitud del tubo. Si se puede ¿cuál es?

Solución.

a) Las frecuencias de resonancia están dadas:

Para tubo abierto: $f = \dfrac{n}{2L}v$.

Para tubo cerrado en un extremo: $f = \dfrac{(2n-1)}{4L}v$

Para n = 1, 2, 3, 4, 5, ……………….

Y lo que tenemos que hacer es analizar para 125 y 175 Hz, con cuál de las condiciones concuerdan.

b) Para 125 correspondería (n – 1) y para 175 correspondería n.

De tal manera que $\dfrac{n-1}{125} = \dfrac{n}{175}$, se cumple para

n = 3,5 valor que no es entero, lo que descarta esta posibilidad.

No cumple para tubo abierto

Haciendo lo mismo para el caso de tubo cerrado

$\dfrac{2n-3}{125} = \dfrac{2n-1}{175}$, se cumple para n = 4, valor entero que si cumple

EL TUBO ES CERRADO .

c) Como $f = \dfrac{(2n-1)}{4L}v$

La frecuencia fundamental es para n = 1

$f = \dfrac{1}{4L}v$, f = 25 Hz

d) Si, ya que $\dfrac{v}{4L} = 25$, y $L = \dfrac{v}{100}$,

Considerando la velocidad el sonido v = 340 m/s, se obtiene L = 3,40 m.

LOS INSTRUMENTOS MUSICALES

La formación de ondas estacionarias está relacionada con los instrumentos musicales tanto de cuerda como de viento. Así, el sonido generado por un arpa es

consecuencia de la propagación por el aire de las ondas estacionarias que se producen, entre dos límites fijos, en las diferentes cuerdas, de modo que los graves (frecuencias bajas) se producirán en las cuerdas más largas y los agudos (frecuencias altas) en las cuerdas más cortas. En los órganos, las ondas estacionarias que se forman en los tubos se corresponden con las formadas por reflexión en dos límites, uno fijo y otro libre. Por tanto, cuanto mayor sea la longitud del órgano menor es la frecuencia: los tubos largos corresponden a frecuencias bajas (sonidos graves) y los cortos a frecuencias altas (sonidos agudos)

OSCILACION DE VARILLAS. DIAPASÓN

Varilla fija por un extremo. Puesta en oscilación, al organizarse la onda estacionaria se debe tomar un nodo en el extremo fijo y un vientre en el opuesto. Los razonamientos que se realizan para un tubo cerrado son válidos para este caso; por lo tanto, una varilla que oscila fija por un extremo responde a la ley

$$\ell = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

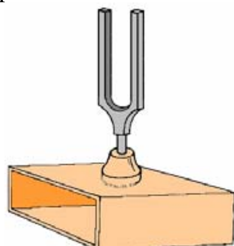
Varilla fija por un punto interior. Si se hace oscilar una varilla fija por un punto interior para que se organice una onda estacionaria, se formará allí un nodo y vientres en los extremos. Todo esto depende exclusivamente del punto por el que se sostenga. Este punto (siguiendo el razonamiento de tubos abiertos), deberá estar situado en la mitad, a $1/4$ a $1/6$, etcétera, de un extremo.

Téngase presente que varillas de igual longitud, idénticamente .fijadas, pueden producir sonidos de distinta frecuencia si se varía la naturaleza de 1a sustancia, las dimensiones o la forma de excitación.

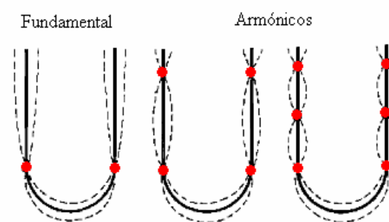
La frecuencia fundamental depende de la velocidad de propagación. Esta observación es válida para los tubos sonoros ya que, modificando la naturaleza y las condiciones del gas, se modifica la velocidad de propagación.

DIAPASÓN

Un aparato de aplicación en acústica es el diapasón que consta de una barra metálica en forma de "U", soportada en su parte media.



Si se lo excita, entra en vibración formándose una onda estacionaria; los nodos estarán ubicados a 2/3 de su longitud al emitirse el sonido fundamental. La frecuencia del diapasón depende de la elasticidad del material y su densidad.



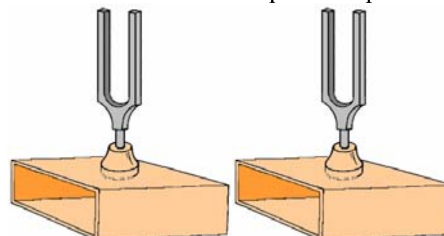
Para aumentar la intensidad del sonido producido, se monta el diapasón sobre una caja. Si la caja está cerrada en un extremo, su longitud es ¼ de la longitud de onda del sonido en el aire emitido por el diapasón. Si la caja está abierta en los dos extremos la longitud de la caja es igual a la mitad de dicha longitud de onda. Al vibrar, las .dos ramas de un diapasón se mueven en fases opuestas. Cuando las ramas se acercan, el punto más bajo del pie del diapasón baja, y sube cuando las ramas se alejan. Este pie se encuentra afectado de un movimiento vibratorio de dirección vertical lo que puede comprobarse apoyándolo en la mano. Es así finalmente, como se transmite la vibración del diapasón a la columna de aire contenida en la caja. Los diapasones se utilizan como patrones de registro de frecuencia, pues pueden construirse de manera que no sean afectados por variaciones de temperatura. Es posible lograr diapasones capaces de mantener una frecuencia de vibración con una precisión de 1 en 100000.

Resonancia

Se ha visto que un sistema tal como una cuerda estirada es capaz de oscilar en uno o más modos naturales de vibración. Si se aplica una fuerza periódica a este sistema, la amplitud resultante del movimiento del sistema será mayor cuando la frecuencia de la fuerza aplicada sea igual o aproximadamente igual a una de las frecuencias naturales del sistema, que cuando la fuerza excitadora se aplique en alguna otra frecuencia.

Las correspondientes frecuencias naturales de oscilación de un sistema generalmente se conocen como **frecuencias resonantes**

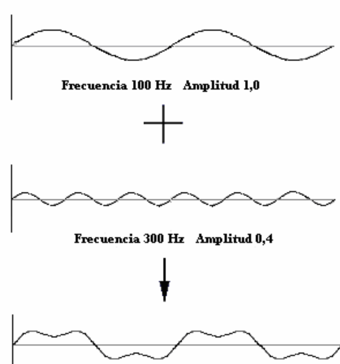
Experimento de resonancia. En la figura se muestran dos diapasones montados en sendas cajas de igual longitud, lo que indica que ambos tienen igual frecuencia. A estas cajas se las llama de resonancia, pues tienen 1a misma longitud que un tubo sonoro capaz de emitir la misma nota que el diapasón.



Enfrentadas las aberturas de las cajas y excitado un diapasón, se comprueba que el otro entra espontáneamente en vibración, En efecto, si se detiene con la mano el diapasón excitado en un principio, se percibe nítidamente el sonido producido por el otro y,

si se libera el diapasón detenido, éste vuelve a vibrar, lo que podrá percibirse acercando levemente la mano a las ramas del diapasón. Se ha producido un fenómeno de resonancia acústica.
Si existe un cristalero cerca podrá comprobar que algunas copas mantienen la vibración por más tiempo que otras y que durante algunos instantes la amplitud de la vibración va en aumento. Lo que sucede es que un cuerpo puede vibrar, entre otras razones, por la recepción de ondas. Como cada cuerpo tiene una frecuencia propia d vibración, si ésta coincide con la de la onda recibida la vibración se mantiene

ONDAS DE DIFERENTE FRECUENCIA VIAJANDO EN EL MISMO ESPACIO
La figura ilustra la suma de dos ondas sinusoidales de frecuencia y amplitud diferentes. Esta onda resultante mantiene la frecuencia del componente más grave, pero con el timbre alterado

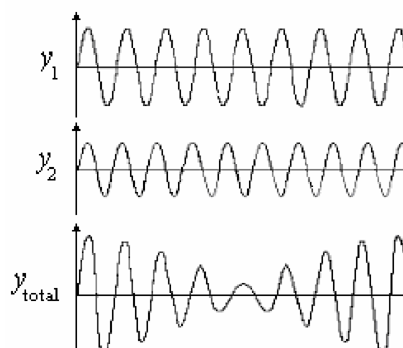


PULSACIONES O BATIDOS.

Cuando dos fuentes de sonido que tienen casi la misma frecuencia se hace sonar al mismo tiempo, ocurre un efecto interesante. Puede oír un sonido con una frecuencia que es el promedio de las dos. Sin embargo, la sonoridad de este sonido crece repetidamente y después decae, en lugar de permanecer constante. Estas variaciones repetidas en amplitud se denominan **pulsaciones** o **batidos**, y la ocurrencia de pulsaciones es una característica general de las ondas.

Si la frecuencia de una de las fuentes de ondas se cambia, hay un cambio que corresponde en el grado en que varía la amplitud. Este grado se llama frecuencia de pulsación. A medida que las frecuencias se hacen más cercanas, la frecuencia de pulsación se hace más lenta. Así, un músico puede afinar una guitarra a otra fuente de sonido escuchando las pulsaciones mientras incrementa o disminuye la tensión en cada cuerda. A la postre, las pulsaciones se hacen tan lentas que efectivamente se desvanecen, y las dos fuentes están en un tono.

Las pulsaciones se pueden explicar con facilidad considerando dos ondas sinusoidales y_1 e y_2 a partir de la misma amplitud A, pero de frecuencias diferentes f_1 y f_2. El principio de superposici6n establece que la amplitud combinada y es la suma algebraica de las amplitudes individuales.



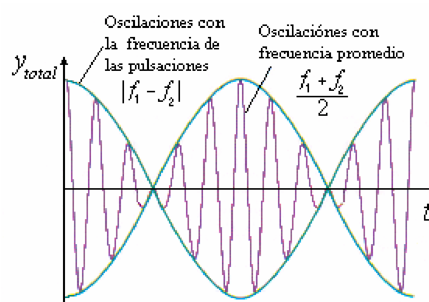
$$y = y_1 + y_2$$

$$y_{total} = A\,\text{sen}2\pi f_1 t + A\text{sen}2\pi f_2 t$$

Usando la identidad trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos, tenemos

$$y_{total} = \left[2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\text{sen}2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

Esta ecuación representa una onda que oscila con el promedio de sus frecuencias. La amplitud resultante también oscila, con una frecuencia de pulsación igual a la diferencia entre las frecuencias de la fuente.



La primera parte de y_{total} es $2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t$,

esto da la amplitud de las pulsaciones que varían lentamente, como se indica en la figura anterior.

Como el sonido alto se escucha siempre que el término sea $2A$ o $-2A$, la frecuencia de las pulsaciones es $f_p = |f_1 - f_2|$. Finalmente, las oscilaciones rápidas con cada pulsación son debidas a la segunda parte de y_{total}, $\text{sen}2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$

Estas oscilaciones tienen una frecuencia que es el promedio de las dos frecuencias de las fuentes. Las pulsaciones se pueden escuchar hasta frecuencias de alrededor de 10 Hz. Más allá son difíciles de distinguir

Ejemplo 47. Cuando se golpea un diapasón de 440 Hz al mismo tiempo que se pulsa la cuerda de una guitarra que debe dar la nota Sol, se escuchan 3 pulsaciones por segundo. Después de que la cuerda de la guitarra se tensa un poco más para aumentar su frecuencia las pulsaciones aumentan a 6 por segundo. ¿Cuál es la frecuencia de la guitarra con la tensión final?

Solución.

En este fenómeno de interferencia de dos ondas sonoras de frecuencia parecida se producen **pulsaciones** que el oído percibe con un tono $\frac{f_1 + f_2}{2}$ y una amplitud que oscila con $f_p = |f_1 - f_2|$. El oído responde a la intensidad de la onda sonora que depende del cuadrado de la amplitud, es decir el sonido será fuerte tanto para amplitud máxima como para amplitud mínima. Es decir para el oído la frecuencia de batido es Δf .

En este caso y dado que la frecuencia de batido percibida por el oído es 3 s^{-1}, la frecuencia original emitida por la cuerda es 437 Hz ó 443 Hz.

La frecuencia de oscilación de la cuerda es directamente proporcional a la velocidad de transmisión de las ondas de la cuerda que a su vez depende de la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda. Por tanto al aumentar la tensión de la cuerda, aumentamos la frecuencia de oscilación.

En este caso, al aumentar la tensión, aumenta la frecuenta de **batidos** a 6 s^{-1}. Por tanto este hecho implica que la frecuencia original de la cuerda era de 443 Hz y después de aumentar la tensión es de 446 Hz. Si hubiese sido 437 Hz se detectaría un decremento en la frecuencia de batido.

Ejemplo 48. Algunas de las notas bajas del piano tienen dos cuerdas. En una nota particular una de las cuerdas se templa correctamente a 100 Hz. Cuando las dos cuerdas suenan juntas, se oye un batido por segundo. ¿En qué porcentaje debe un afinador de piano cambiar la tensión de la cuerda desafinada para hacerla coincidir correctamente? (el batido es entre los tonos fundamentales)

Solución.

La frecuencia fundamental es $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

Asumimos que las dos cuerdas son de la misma longitud, composición y diámetro, tal que la diferencia Δf es debida a la diferencia de tensión ΔT .

De la ecuación anterior obtenemos.

$$\frac{df}{dT} = \frac{1}{2L}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{T\mu}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{1}{2T} = \frac{f}{2T}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{f} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T}$$

Como $|\Delta f| << f$, tenemos $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta T}{T}\right)$.

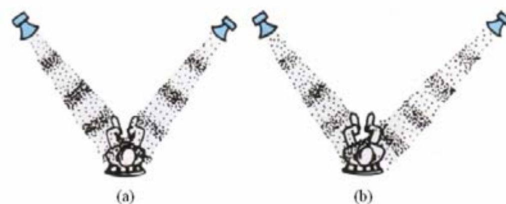
En este caso f = 100 Hz y $|\Delta f| = 1\,\text{Hz}$.

Luego $\frac{\Delta T}{T} = 2\frac{|\Delta f|}{f} = 2\left(\frac{1}{100}\right)$ = 2 por ciento.

(si la cuerda desafina es “baja” su tensión debe ser aumentada; si la cuerda es “alta” su tensión se debe bajar.)

INTERFERENCIA DE DOS ONDAS QUE VIAJAN EN DISTINTAS DIRECCIONES

Una causa corriente que origina una diferencia de fase entre dos ondas sonoras, es la diferencia de longitudes de los trayectos que deben recorrer las ondas desde su fuente o foco hasta el punto donde se produce la interferencia. Supóngase que tenemos dos focos que están emitiendo ondas armónicas de la misma frecuencia y longitud de onda. En la figura a continuación, el espectador (a) recibe los dos sonidos en fase, el observador (b) recibe los sonidos con diferencia de fase.



En el caso general, podemos escribir las funciones de onda como:

$$y_1 = A\text{sen}(kr_1 - \omega t - \varphi),\ y_2 = A\text{sen}(kr_2 - \omega t)$$

La diferencia de fase para estas dos funciones de onda está dada por:

$$\delta = k(r_2 - r_1) - \varphi \ \Rightarrow\ \delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \varphi$$

Este término se debe a:

La diferencia de fase inicial entre y_1 e y_2;

Si las ondas están oscilando en fase, en t = 0 y r = 0, entonces φ = 0.

Realizando la composición de movimientos obtenemos para la amplitud de la onda resultante:

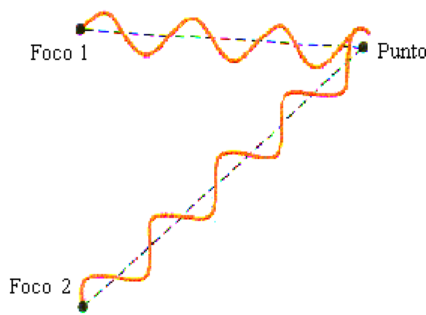
$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta}$, siendo el término de interferencia: $2A_1A_2\cos\delta$.

Estudiamos ahora los máximos y mínimos a partir del término de interferencia.

La diferencia para los caminos recorridos por las dos ondas es

$$\delta = k(r_2-r_1)-\varphi \quad \Rightarrow \quad \delta=\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-\varphi$$

1. Interferencia constructiva: Si la diferencia entre los caminos recorridos por ambas ondas hasta un cierto punto es un número entero de longitudes de onda, la interferencia es constructiva



Para cumplir con esta condición

$\delta = 2n\pi \Rightarrow \cos\delta = 1 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-\varphi = 2n\pi \quad \Rightarrow$$

$$(r_2-r_1)=\frac{\lambda}{2\pi}(2n\pi+\varphi)$$

En conclusión, para que ocurra la interferencia constructiva la diferencia de caminos debe ser:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \left(n+\frac{\varphi}{2\pi}\right)\lambda$$

La amplitud de la onda resultante será:

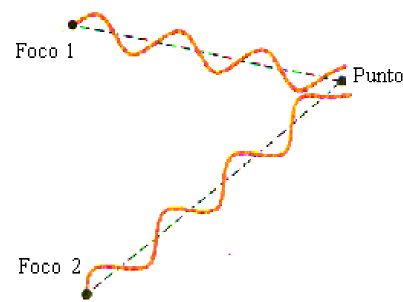
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}$$

$$A=\sqrt{(A_1+A_2)^2} = A_1+A_2$$

Si $A_1 = A_2 \Rightarrow A = 2A_1$

Por tanto se puede afirmar que una diferencia en los trayectos de una longitud de onda o de un número entero cualquiera de longitudes de onda es equivalente a que no haya ninguna diferencia en absoluto entre las trayectorias.

2. Interferencia destructiva: Si la diferencia de trayectos es una semilongitud de onda o un número impar de semilongitudes de onda, el máximo de una onda coincidirá con el mínimo de la otra y la interferencia será destructiva.



Para cumplir con esta condición

$\delta = (2n+1)\pi \Rightarrow \cos\delta = -1 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2,$ ....

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)-\varphi = (2n+1)\pi \Rightarrow$$

$$(r_2-r_1)=\frac{\lambda}{2\pi}[(2n+1)\pi+\varphi]$$

En conclusión, para que ocurra la interferencia constructiva la diferencia de caminos debe ser:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \left[(2n+1)+\frac{\varphi}{2\pi}\right]\lambda$$

La amplitud de la onda resultante será:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2}$$

$$A=\sqrt{(A_1-A_2)^2} = A_1-A_2$$

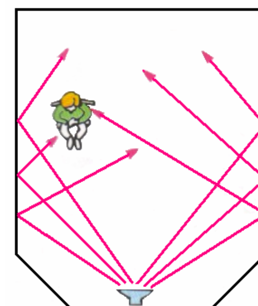
Si $A_1 = A_2 \Rightarrow A = 0$

Resumiendo, si $\varphi = 0$:

Condición de máximo: $(r_1-r_2)=n\lambda$

Condición de mínimo: $(r_1-r_2)=(2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$

APLICACIONES. Cuando se construye una sala de conciertos hay que tener en cuenta la interferencia entre ondas de sonido, para que una interferencia destructiva no haga que en algunas zonas de la sala no puedan oírse los sonidos emitidos desde el escenario.



Arrojando objetos al agua estancada se puede observar la interferencia de ondas de agua, que es constructiva en algunos puntos y destructiva en otros. La interferencia puede producirse con toda clase de ondas, no sólo ondas mecánicas.



Las ondas de radio interfieren entre sí cuando se reflejan en los edificios de las ciudades, con lo que la señal se distorsiona. La luz visible está formada por ondas electromagnéticas que pueden interferir entre sí. La interferencia de ondas de luz causa, por ejemplo, las irisaciones que se ven a veces en las burbujas de jabón. La luz blanca está compuesta por ondas de luz de distintas longitudes de onda. Las ondas de luz reflejadas en la superficie interior de la burbuja interfieren con las ondas de esa misma longitud reflejadas en la superficie exterior. En algunas de las longitudes de onda, la interferencia es constructiva y en otras destructiva. Como las distintas longitudes de onda de la luz corresponden a diferentes colores, la luz reflejada por la burbuja de jabón aparece coloreada.



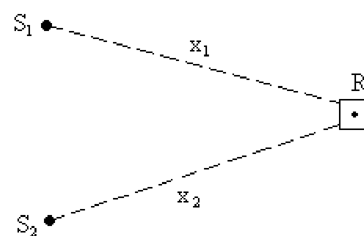
Ejemplo 49. Dos focos sonoros emiten simultáneamente ondas de la misma frecuencia f = 425 Hz, siendo la velocidad del sonido en el aire v = 340 m/s. Si colocamos un aparato registrador de sonidos a x_1 = 100 m del primer foco y a x_2 = 101,2 del segundo ¿Se registrará sonido en el aparato?

Solución.

La longitud de onda del sonido emitido por ambos focos es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{425} = 0,80 \text{ m}$$

Para que el aparato no registrara sonido sería preciso que en el punto donde está situado se produzca un mínimo de interferencia. De otra manera, R deberá estar situado en un punto cuya diferencia de distancias a S_1 y S_2 sea igual a un múltiplo impar de semilongitudes de onda:



$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

Según los valores dados:

$$x_2 - x_1 = 101,2 - 100 = 1,2 \text{ m}$$

y $$\frac{\lambda}{2} = \frac{0,80}{2} = 0,40 \text{ m}$$

Luego $$x - x_1 = 1,2 = 3(0,40) = 3\frac{\lambda}{2}$$

Por tanto, el aparato no registrará el sonido

Ejemplo 50. Dos parlantes S_1 y S_2 están separados una distancia de 5m, están conectados a un oscilador de audio. Un muchacho está en el punto P, a 12,0 m de S_1 y 13,0 m de S_2: Formando un triángulo rectángulo S_1, S_2 y P. La onda de S_2 llega al punto P, 2,00 periodos después que la onda de S_1. La velocidad del sonido es 350 m/s.

a) ¿Cuál es la frecuencia del oscilador?

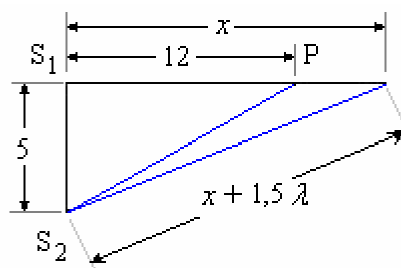
b) Si el muchacho camina alejándose de S_1 por la línea que pasa por P, hasta que una interferencia destructiva ocurre. ¿En qué punto medido desde S_1 la onda de S_2 llega 1,50 periodos más tarde?

Solución.

a) $$2\lambda = 13 - 12 = 1\text{m} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} = 0,5\text{m}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{350}{0,5} = 700 \text{ Hz}$$

b)



$$(x + 1,5\lambda)^2 - x^2 = 5^2 \Rightarrow$$

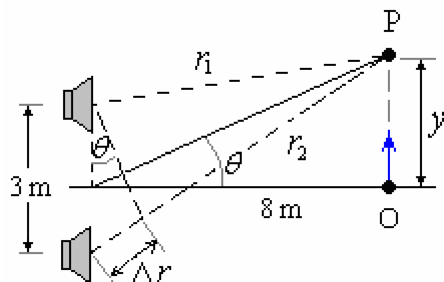
$$x^2 + 3\lambda x + (1,5\lambda)^2 - x^2 = 25$$

con $\lambda = 0,5$ m : $1,5x + (0,75)^2 = 25$

finalmente $x = 16,3$ m

Ejemplo 51. Dos altavoces se excitan mediante el mismo oscilador a una frecuencia de 2000 Hz. La separación entre los altavoces es de 3 m, como se muestra en la figura. Un escucha está originalmente en

el punto O, situado a 8 m medidos sobre el eje axial central. ¿Cuánto debe caminar el oyente perpendicularmente a ese eje, antes de alcanzar el primer mínimo en la intensidad sonora?



Solución.
Puesto que la velocidad del sonido en el aire es 330 m/s y ya que f = 2000 Hz, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{2000} = 0{,}165 \text{ m}$$

El primer mínimo ocurre cuando las ondas que alcanzan el punto P están 180º fuera de fase, o cuando la diferencia de trayectos, $r_2 - r_1$, sea igual a $\lambda/2$.
Por lo tanto, la diferencia de fase se obtiene de

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{\lambda}{2} = \frac{0{,}165}{2} = 0{,}0835 \text{ m}$$

Del pequeño triángulo rectángulo de la figura del enunciado se observa que para una buena aproximación, sen $\theta = \Delta r/3$ para pequeños valores de θ o sea

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\Delta r}{3} = \frac{0{,}0825}{3} = 0{,}0275$$

$$\theta = 1{,}58^\circ$$

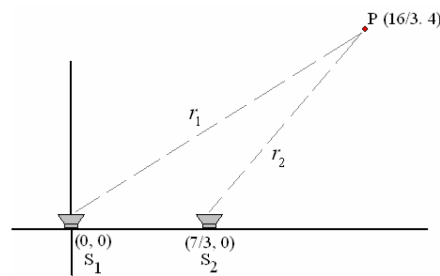
Del triángulo rectángulo grande de la misma figura se encuentra que tan $\theta = y/8$, o sea

$$y = 8\tan\theta = 8\tan 1{,}58^\circ = 0{,}22 \text{ m}$$

Es decir, el oyente escuchará mínimos en la intensidad sonora resultante a 22 cm desde cualquier lado de la línea central. Si el escucha permanece en estas posiciones, ¿en qué otras frecuencias se escucharán mínimos?

Ejemplo 52. Dos parlantes S_1 y S_2 son activados por el mismo sistema de audio emitiendo simultáneamente ondas sonoras armónicas idénticas de frecuencia "f" que llegan a un observador en P.
Los parlantes S_1 y S_2 se encuentran en el origen (0, 0) m y en (7/3, 0) m, respectivamente, mientras el observador está en (16/3, 4) m, (v_s = 340 m/s).
a) Si la onda emitida por S_1 llega 10 periodos más tarde que la emitida por S_2. ¿Qué frecuencia emiten los parlantes?
b) Si ahora el observador se ubica sobre el eje x, diga justificando que fenómeno ondulatorio percibe entre las regiones:
- Entre los parlantes.
- A la izquierda de S_1.
- A la derecha de S_2.

Solución.
a)



$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2} = 16\sqrt{\frac{4^2+3^2}{(4^2)(3^2)}}$$

$$= 16\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{20}{3}$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{16}{3} - \frac{7}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$r_1 - r_2 = \frac{20}{3} - 5 = \frac{5}{3} = 10\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}\text{m}$$

Luego la frecuencia $f = \frac{v_s}{\lambda} = \frac{340}{1/6} = 2040$ Hz

b) Si ahora el observador se ubica sobre el eje x
Como la separación entre las fuentes es 7/3 m y la longitud de onda es 1/6, hay un número exacto de longitudes de onda entre las fuentes $\left(\frac{7/3}{1/6} = 14\right)$.

- Entre los parlantes.

$$y_1 = A\,\text{sen}(kx - \omega t),\ y_2 = A\text{sen}(kx + \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1/6} = 12\pi,\ \omega = 2\pi f = 4080\pi$$

$$y = y_1 + y_2 = A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(kx + \omega t)$$

$$= 2A\text{sen}kx\cos\omega t$$

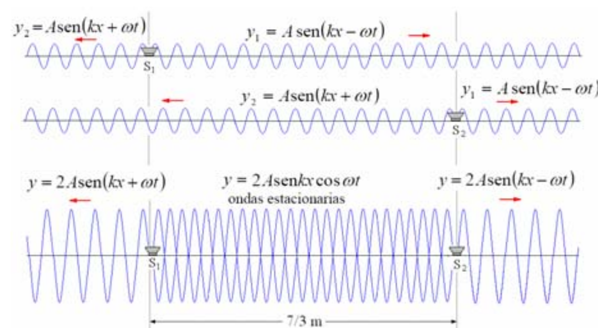
Se forman ondas estacionarias.
- A la izquierda de S_1.

$$y = y_2 + y_2 = 2A\text{sen}(kx + \omega t)$$

Hay interferencia constructiva.
- A la derecha de S_2.

$$y = y_1 + y_1 = 2A\text{sen}(kx - \omega t)$$

Hay interferencia constructiva.



EFECTO DOPPLER

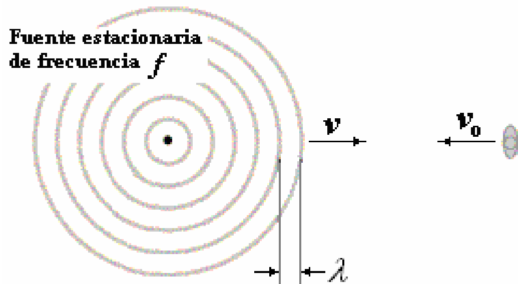
La mayoría de nosotros estamos familiarizados con la elevación y descenso posterior del tono de la sirena de una ambulancia o la bocina de un automóvil cuando éste se aproxima y cuando ha pasado**.** Este cambio en el tono, debido al movimiento relativo entre una fuente de sonido y el receptor se llama el efecto de Doppler, en honor del físico austriaco Christian Doppler (1803 -1853). Si usted escucha cuidadosamente el efecto Doppler, usted notará que el tono aumenta cuando el observador y la fuente se acercan y disminuye cuando se alejan. Uno de los aspectos más interesantes del efecto Doppler es el hecho que se aplica a todos los fenómenos ondulatorios, no solamente al sonido. La frecuencia de la luz también experimenta el efecto Doppler cuando hay movimiento relativo entre la fuente y el receptor. Para la luz, este cambio en frecuencia significa un cambio en color. En efecto, la mayoría de las galaxias distantes se observan cambiadas a rojo lo que significa que se están moviendo alejándose de la tierra. Algunas galaxias, sin embargo, se están moviendo hacia nosotros, y su luz muestra un cambio a azul.

En el resto de esta sección, nos centramos en el efecto Doppler en ondas acústicas. Demostramos que el efecto es diferente dependiendo de si el observador o la fuente se está moviendo. Finalmente, el observador y la fuente pueden estar en el movimiento, y presentamos los resultados para tales casos también.

Observador en movimiento

Si tenemos una fuente sonora estacionaria en aire quieto. El sonido radiado es representado por frentes de onda circunferenciales que se alejan de la fuente con una velocidad *v*. La distancia entre los frentes de onda es la longitud de onda λ, y la frecuencia del sonido es *f*. Para las ondas estas cantidades están relacionadas por $v = \lambda f$.

Para un observador que se acerca con una velocidad v_o, como se muestra en la figura, el sonido parece tener una mayor velocidad $v + v_o$ (considerando que la velocidad del sonido relativa al aire es siempre la misma). Como resultado llegan al observador en un determinado tiempo un mayor número de frentes de onda que si hubiera estado en reposo. Para el observador el sonido tiene una frecuencia, *f'*, que es más alta que la frecuencia de la fuente, *f*.



Podemos encontrar la frecuencia *f'* notando que la longitud de onda del sonido no cambia, sigue siendo λ. Sin embargo la velocidad se ha incrementado a $v' = v + v_o$.

Entonces, $v' = \lambda f'$, y de aquí

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_o}{\lambda}$$

Como $\lambda = v/f$, reemplazando, tenemos

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_o}{v/f} = f\left(\frac{v + v_o}{v}\right) = f\left(1 + \frac{v_o}{v}\right)$$

Notamos que *f'* es mayor que *f*.

En el caso de alejarse de la fuente sonora el observador, para el observador el sonido parecerá tener una velocidad reducida $v' = v - v_o$, repitiendo los cálculos encontramos que

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v/f} = f\left(\frac{v - v_o}{v}\right) = f\left(1 - \frac{v_o}{v}\right)$$

En general el Efecto Doppler para un observador en movimiento es

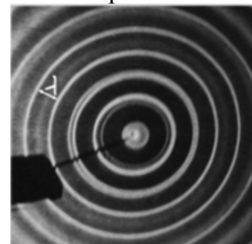
$$f' = f\left(1 \pm \frac{v_o}{v}\right)$$

El signo mas (+) corresponde cuando el observador se mueve hacia la fuente, y el signo menos (–) cuando el observador se aleja de la fuente.

Fuente en movimiento

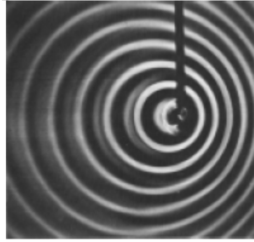
Con el observador estacionario y la fuente en movimiento, el efecto Doppler no se debe a que el sonido parece tener una mayor o menor velocidad como en el caso del observador en movimiento. Por el contrario, el sonido una vez que la fuente emite una onda sonora, viaja a través del medio con su velocidad característica *v*, sin importar lo que la fuente haga.

Por analogía, consideremos una onda de agua. La figura muestra una bolita oscilando hacia arriba y hacia abajo sobre la superficie de con recipiente de agua. Su movimiento causa ondas de agua circulares que se extienden alejándose del punto de contacto.

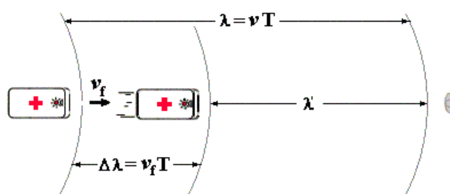


Cuanto la fuente de ondas (la bolita) es movida hacia la derecha (vea la figura), cada cresta de onda se mueve alejándose como un círculo en expansión, pero dado que la fuente se está moviendo, emite cada onda a una ubicación diferente. Como resultado, las ondas que se mueven en la misma dirección que la fuente se juntan apretándose, en tanto que las que se mueven en la dirección opuesta se separan alejándose unas de otras. La velocidad de la onda es constante si la fuente se mueve o no. Por tanto, donde la longitud de onda la

frecuencia es incrementada, y donde la longitud de onda es alargada, la frecuencia es reducida. Esto es válido también para las ondas de sonido.



Consideremos Una fuente que se mueve hacia el observador con una velocidad v_f tal como muestra la figura. Si la frecuencia de la fuente es f, emite un frente de onda cada T segundos, donde $T = 1/f$. Por consiguiente, durante un periodo un frente de onda viaja una distancia vT mientras que la fuente emisora viaja una distancia $v_f T$. Como resultado el siguiente frente de onda es emitido a una distancia $vT - v_f T$ detrás del frente previo, como muestra la figura.



Esto significa que la longitud de onda hacia delante es

$$\lambda' = vT - v_f T = (v - v_f)T$$

Como mencionamos antes, la velocidad de la onda sigue siendo v, de aquí

$$v = \lambda' f'$$

La nueva frecuencia es

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_f)T}$$

Considerando que $T = 1/f$, tenemos

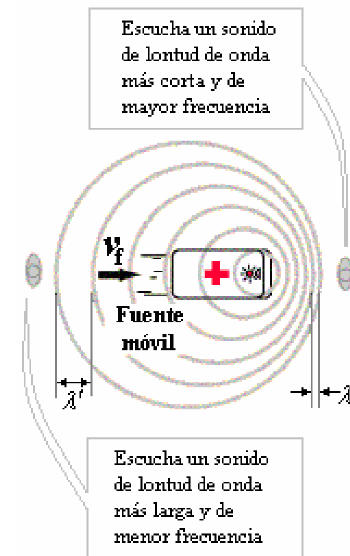
$$f' = \frac{v}{(v - v_f)(1/f)} = f\frac{v}{(v - v_f)} = f\frac{1}{\left(1 - \frac{v_f}{v}\right)}$$

f' es mayor que *f*, como esperábamos.

En general el Efecto Doppler para una fuente en movimiento y observador estacionario es

$$f' = f\frac{1}{\left(1 \mp \frac{v_f}{v}\right)}$$

El signo menos (-) corresponde cuando la fuente se mueve hacia el observador, y el signo menos (–) cuando la fuente se aleja del observador.



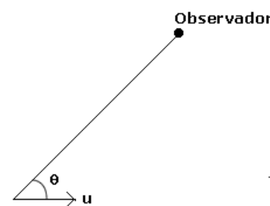
Finalmente

Si ambas se mueven:

Acercándose uno a otro $f' = f\dfrac{(v + v_o)}{(v - v_f)}$

Alejándose uno a otro $f' = f\dfrac{(v - v_o)}{v + v_f}$

La situación es más complicada para otras direcciones, pero puede analizarse sencillamente si la distancia de la fuente al punto de observación es grande comparada con la longitud de onda. En este caso se llega al resultado siguiente



$$\lambda_{(\theta)} = \lambda_0\left(1 - \frac{u\cos\theta}{v}\right)$$

o bien

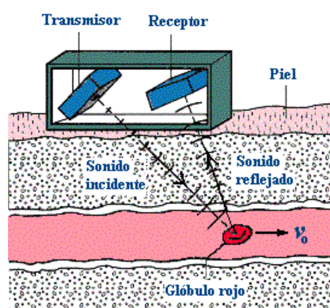
$$f_{(\theta)} = f_0\frac{1}{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{v}\right)}$$ para la frecuencia.

Estas últimas ecuaciones nos indican que el efecto Doppler depende de la componente de la velocidad de la fuente en la dirección del observador

APLICACIÓN: Medidor de flujo doppler

Este dispositivo mide la velocidad del torrente sanguíneo y constituye una aplicación interesante del efecto Doppler. El dispositivo consta de elementos transmisor y receptor colocados directamente sobre la piel, como se observa en la figura. El transmisor emite una onda sonora continua cuya frecuencia es de 5 MHz. Cuando los g1óbulos rojos reflejan el sonido su frecuencia cambia como si se presentara el efecto Doppler, debido a que se mueven las células. El

elemento receptor detecta el sonido reflejado y el contador electrónico mide su frecuencia, que está corrida por el efecto Doppler con respecto a la frecuencia de transmisión. A partir del cambio en frecuencia es posible determinar la rapidez con q fluye el torrente sanguíneo. Por lo general, el cambio en frecuencia es aproximadamente 6 000 Hz para rapideces de flujo aproximadamente iguales a 0,1 m/s. El medidor de flujo Doppler puede usarse para localizar regiones en las que los vasos capilares se estrechan, ya que en tales regiones se producen mayores rapideces de flujo, según la ecuación de continuidad. Además, el medidor de flujo Doppler puede utilizarse para detectar el movimiento cardiaco de un feto de apenas 8 a 10 semanas de edad.
EI efecto Doppler también se emplea en dispositivos de un radar para medir la velocidad de vehículos en movimiento. Sin embargo, se utilizan las ondas electromagnéticas, en vez de las ondas sonoras, para tales propósitos.



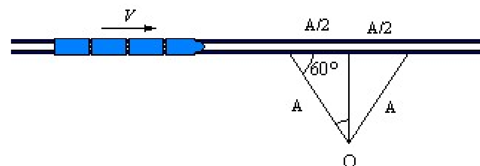
Ejemplo 53. La sirena de un auto patrullero estacionado emite un sonido de 1200 Hz. ¿Bajo condiciones en que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s, qué frecuencia oirá un peatón parado si la sirena se está acercando a 30 m/s? ¿Qué frecuencia oirá cuando la sirena está alejándose en 30 m/s?
Solución.
Acercándose

$$f' = \frac{v_f}{v_f - v} f = \left(\frac{340}{340-30}\right)(1200) = 1316 \text{ Hz}$$

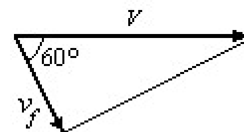
Alejándose

$$f' = \frac{v_f}{v_f + v} f = \left(\frac{340}{340+30}\right)(1200) = 1103 \text{ Hz}$$

Ejemplo 54. Una persona se encuentra a una distancia $\sqrt{3}A/2$ de línea férrea, por la cual viene un tren a velocidad constante V y tocando una sirena de frecuencia f. La velocidad del sonido en el aire es v_s.
¿Qué frecuencia escucha la persona? Cuando:
a) El tren esta acercándose a una distancia A de él.
b) Cuando se encuentra frente a él.
c) Cuando se ha alejado una distancia A de él.
d) ¿Qué frecuencia escucha un niño que se asoma por la ventanilla de uno de los vagones del tren?
Solución.
En el gráfico se ve fácilmente la situación geométrica planteada en el problema.



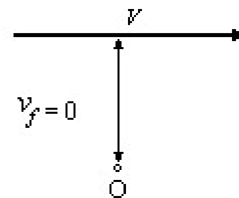
a) La velocidad de la fuente v_f respecto al observador será:



$$v_f = V\cos 60^o = \frac{V}{2}$$

Luego, $f' = f\left(\dfrac{v_s}{v_s - \dfrac{V}{2}}\right)$

Vemos que aumenta la frecuencia.
b) En este caso, la velocidad de la fuente con respecto al observador es cero.



$$f' = f$$

c) Como en el caso a) la velocidad de la fuente es: $v_f = \dfrac{V}{2}$, pero, se aleja del observador , o sea que la frecuencia disminuye :

$$f' = f\left(\frac{v_s}{v_s + \dfrac{V}{2}}\right)$$

d) En el caso del niño, la velocidad de la fuente respecto a él es nula, por lo tanto, escucha la frecuencia f.

Ejemplo 55. Una sirena que emite un sonido de 1000 Hz se aleja de un observador y se aproxima a una pared con una velocidad de 10m./seg. .
¿Cuál es la frecuencia que escucha el observador?
Solución.
El observador escucha dos frecuencias:
La frecuencia directa y la reflejada en la pared.
La frecuencia directa

$$f_1' = f\frac{1}{\left(1+\dfrac{v_f}{v_s}\right)} = 1000\frac{1}{\left(1+\dfrac{10}{330}\right)} = 971\ \text{Hz}$$

Y la frecuencia reflejada en la pared.
La frecuencia que llega a la pared es

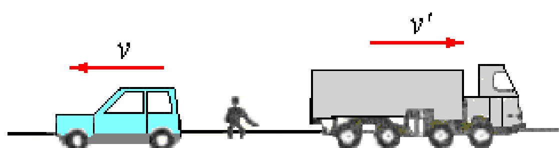
$$f_2' = f\frac{1}{\left(1-\dfrac{v_f}{v_s}\right)} = 1000\frac{1}{\left(1-\dfrac{10}{330}\right)} = 1\,031\ \text{Hz}$$

Las que sumadas producen pulsaciones de frecuencia

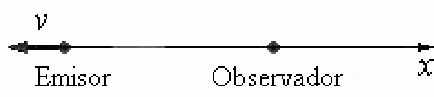
$$f_b = f_2' - f_1' = 1031 - 971 = 60\ \text{Hz}$$

Que es lo que escucha el observador.

Ejemplo 56. Un automóvil se mueve hacia la izquierda con una velocidad v = 30 m/s. En dirección contraria (rebasado suficientemente el punto de cruce) va un camión a una velocidad v' = 21 m/s, con una gran superficie reflectora en su parte posterior. El automóvil emite un bocinazo (emisión instantánea) con una frecuencia de 1 000 Hz. Determinar:
a) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas percibidas por el observador de la figura colocado a la derecha del auto?
b) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que llegan a la superficie reflectora del camión?
c) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibirá el observador después que las ondas se han reflejado en el camión?
d) ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibiría el conductor del auto, después de la reflexión en el camión?
Velocidad del sonido: 330 m/s. Se supone el aire en calma.

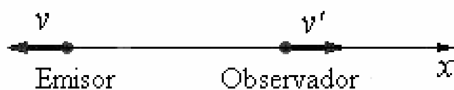


Solución.
a)



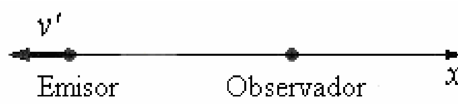
$$f_1 = f_0\frac{v_s}{v_s + v} = 1000\frac{330}{330+30} = 916{,}7\text{Hz}$$

b) La superficie reflectora es ahora el receptor auditivo.



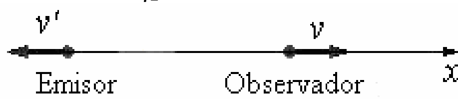
$$f_2 = f_0\frac{v_s - v'}{v_s + v} = 1000\frac{330-21}{330+30} = 858{,}3\ \text{Hz}$$

c) La superficie reflectora se vuelve foco emisor, emitirá con la frecuencia f_2.



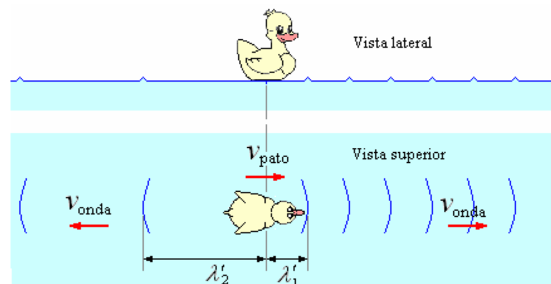
$$f_3 = f_2\frac{v_s}{v_s + v'} = 858{,}3\frac{330}{330+21} = 806{,}9\ \text{Hz}$$

d) El receptor es el auto y el emisor el camión y la frecuencia emitida f_2:



$$f_4 = f_2\frac{v_s - v}{v_s + v'} = 858{,}3\frac{330-30}{330+21} = 733{,}6\ \text{Hz}$$

Ejemplo 57. Al nadar un pato patalea una vez cada 1,6 s produciendo ondas superficiales en el agua, el pato avanza con rapidez constante en un estanque en el que las ondas superficiales viajan a 0,4 m/s. Las crestas de las ondas están espaciadas adelante del pato 0,10m
a) Calcule la rapidez del pato.
b) ¿Cuál es el espaciamiento de las crestas detrás del pato?
Nota: En este problema las ondas son producidas por el pataleo del pato y las ondas se propagan en el agua (ondas acuáticas).
Solución.



Perturbación producida por el pataleo del pato:
T = 1,6 s. $\Rightarrow$ f = 1 / 1,6 Hz
Para la onda: v_{onda} = 0,4 m/s.

a) Como $\lambda_1' = 0{,}1\text{m} \Rightarrow f_1' = \dfrac{v_{\text{onda}}}{\lambda_1'} = \dfrac{0{,}4}{0{,}1} = 4\text{Hz}$

Efecto doppler de fuente que se mueve, la frecuencia hacia delante es:

$$f_1' = f\left(\frac{1}{1-\dfrac{v_{\text{pato}}}{v_{\text{onda}}}}\right) \Rightarrow 1 - \frac{v_{\text{pato}}}{v_{\text{onda}}} = \frac{f}{f_1'}$$

$$\Rightarrow v_{\text{pato}} = v_{\text{onda}}\left(1 - \frac{f}{f_1'}\right)$$

Reemplazando valores:

$$v_{\text{pato}} = 0{,}4\left(1 - \frac{1/1{,}6}{4}\right) = 0{,}3375\ \text{m/s.}$$

b) La frecuencia detrás del pato

$$f_2' = f\left(\frac{1}{1+\frac{v_{\text{pato}}}{v_{\text{onda}}}}\right)$$

$$= \frac{1}{1,6}\left(\frac{1}{1+\frac{0,3375}{0,4}}\right) = 0,39 \text{ Hz}$$

$$\lambda_2' = \frac{v_{\text{onda}}}{f_2'} = \frac{0,4}{0,39} = 1,18 \text{ m}$$

El espaciamiento de las crestas detrás del pato es de 1,18 m.

Ejemplo 58. El sonar de un patrullero estacionado al borde de una pista emite hacia delante un corto pulso de ultra sonido de frecuencia de 34 kHz .Luego de 1,5 s de haberse emitido las ondas se capta un pulso de retorno de frecuencia de 32 kHz proveniente de un automóvil.

(v_{sonido} = 340 m/s)

a) Determine la velocidad del automóvil

b) A que distancia del patrullero se encontraba el automóvil al salir el pulso

Solución.

a) Determine la velocidad del automóvil

La frecuencia que llega al automóvil

$$f_1' = f\left(1-\frac{v_o}{v_s}\right) = 34000\left(1-\frac{v_0}{340}\right)$$

Esta frecuencia vuelve al patrullero

$$f_2' = f_1'\frac{1}{\left(1+\frac{v_o}{v_s}\right)}\left(1-\frac{v_0}{v_s}\right) = 34000\left(\frac{340-v_o}{340+v_o}\right)$$

= 32000 Hz

$$\Rightarrow \left(\frac{340-v_o}{340+v_o}\right) = \frac{32}{34} \Rightarrow$$

$$34(340-v_o) = 32(340+v_o)$$

$$\Rightarrow 66v_o = 340(34-32)$$

$$\Rightarrow v_o = \frac{340(2)}{33} = 10,3 \text{ m/s}$$

b) A que distancia del patrullero se encontraba el automóvil al salir el pulso

Cuando el pulso llega al automóvil han pasado 1,5/2 = 0,75 s

La distancia a la que se encontraba el automóvil del patrullero fue: $340(0,75) - 10,30(0,75)$ = 240,28 m.

Ejemplo 59. El sonar de un patrullero estacionado al borde de una pista emite hacia delante un corto pulso de ultrasonido de frecuencia 60 kHz. Luego de un corto tiempo se capta un pulso de retorno de frecuencia 62 kHz proveniente de un automóvil.

Determine: la velocidad con que se mueve el carro e indique si el carro se acerca o aleja del patrullero.

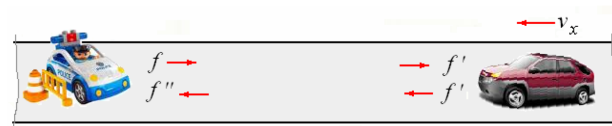
(Velocidad del sonido = 340 m/s).

Solución.

$v_s = 340$ m/s

v_x es la velocidad del automóvil.

El sonido se emite del patrullero, llega al automóvil y regresa al patrullero.



$f = 60$ Hz y $f'' = 62$ Hz

Al automóvil llega

$$f' = f\left(\frac{v_s \pm v_o}{v_s}\right)$$

$$\Rightarrow f' = 60\left(\frac{340 \pm v_x}{340}\right) \qquad (1)$$

+ o -, dependiendo si el automóvil se acerca o aleja del patrullero en reposo.

Al patrullero llega de retorno

$$f'' = f'\left(\frac{v_s}{v_s \mp v_f}\right)$$

$$\Rightarrow 62 = f'\left(\frac{340}{340 \mp v_x}\right) \qquad (2)$$

- o +, dependiendo si el automóvil se acerca o aleja del patrullero en reposo.

Multiplicando (1) x (2):

$$62 = \frac{60(340 \pm v_x)}{(340 \mp v_x)}$$

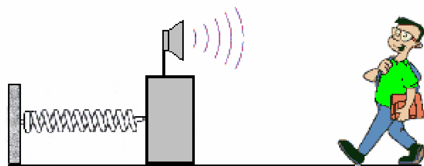
La única posibilidad de tener solución es en el caso que el automóvil se acerca al patrullero.:

$$62 = \frac{60(340 + v_x)}{(340 - v_x)} \Rightarrow v_x = 5,57 \text{ m/s}$$

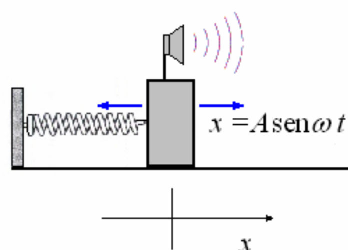
Luego el automóvil se está acercando al patrullero.

$v_x = 5,57$ m/s.

Ejemplo 60. Un altavoz es colocado sobre un bloque, conectado a un resorte (k = 50 N/m), como se muestra en la figura. La masa total (bloque y altavoz) es 0,5kg; el sistema oscila con una amplitud de 5 cm. Si el altavoz emite a 500 Hz, determinar:
a) La frecuencia máxima percibida por la persona.
b) La frecuencia mínima percibida por la persona.
Asumir c = 340m/s



Solución.
Oscilación de la masa:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0,5}} = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

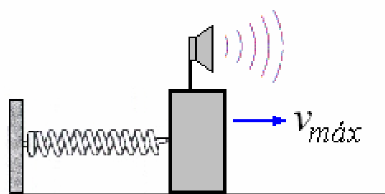
$$x = A\text{sen}\omega t = 0,05\text{sen}10t \;\Rightarrow\; v = 0,5\cos 10t$$

$$v_{máx} = \begin{cases} +0,5 \\ -0,7 \end{cases}$$

En general el Efecto Doppler para una fuente en movimiento y observador estacionario es

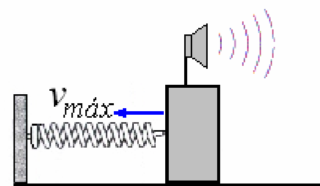
$$f' = f\frac{1}{\left(1 \mp \dfrac{v_f}{v}\right)}$$

El signo menos (-) corresponde cuando la fuente se mueve hacia el observador, y el signo menos (–) cuando la fuente se aleja del observador.
a) La frecuencia máxima percibida por la persona.



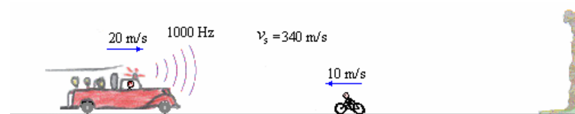
$$f' = f\frac{1}{\left(1 - \dfrac{v_f}{v}\right)} = 500\frac{1}{\left(1 - \dfrac{0,5}{340}\right)} = 500,74 \text{ Hz}$$

b) La frecuencia mínima percibida por la persona.



$$f' = f\frac{1}{\left(1 + \dfrac{v_f}{v}\right)} = 500\frac{1}{\left(1 + \dfrac{0,5}{340}\right)} = 499,27 \text{ Hz}$$

Ejemplo 61. El carro de bomberos que se mueve con una velocidad de 20 m/s, hace sonar su sirena que tiene una frecuencia de 1000 Hz.
Un ciclista se acerca al carro alejándose del acantilado con una velocidad de 10 m/s,
a) ¿Qué sonido escucha el conductor del carro de bomberos?
b) ¿Qué sonido escucha el ciclista?



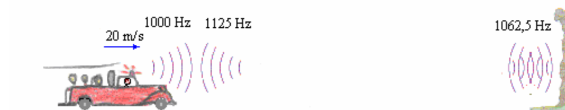
Solución.
a) El conductor escucha dos frecuencias f_1 que es la frecuencia f (1000 Hz) de la sirena y la frecuencia f' del eco producido por la presencia del acantilado.
La frecuencia que llega al acantilado se debe a una fuente que se acerca con v_f = 20 m/s

$$f' = f_0\frac{v_s}{v_s - v_f} = 1000\frac{340}{340 - 20} = 1062,5 \text{ Hz}$$

Esta frecuencia se refleja y llega a los oídos del conductor que se acerca con velocidad v_o = 20 m/s.

$$f'' = f'\frac{(v_s + v_o)}{v_s} = 1062,5\frac{(340 + 20)}{340} = 1125 \text{ Hz}$$

Como las dos frecuencias que escucha son muy cercanas escuchará batidos o pulsaciones correspondientes a las frecuencia f = 1000 Hz y f' = 1125 Hz.
Es decir $f_b = 1125 - 1000$ = 125 Hz (frecuencia de los batidos) .



b) Al oído del ciclista llega la frecuencia directa que es con observador y fuente acercándose

$$f_1'' = f\frac{v_s + v_o}{v_s - v_f} = 1000\frac{340 + 10}{340 - 20} = 1093,75 \text{ Hz}$$

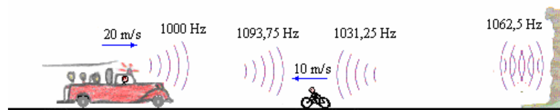
También llega el eco producido por el acantilado

$$f_2'' = f'\frac{(v_s - v_o)}{v_s} = 1062,5\frac{(340 - 10)}{340} =$$

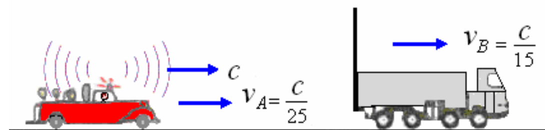
1031,25 Hz

Como las dos frecuencias que escucha son muy cercanas escuchará batidos

$f_b = 1093{,}75 - 1031{,}25$ = 62,5 Hz (frecuencia de los batidos).



Ejemplo 62. Las ondas sonoras emitidas por el carro de bomberos (A) se reflejan en el camión (B) y al regresar interfieren con las ondas emitidas. Determinar el número de pulsaciones por segundo que detecta un observador sobre el móvil A.
f_o = 400 Hz



Solución.
Frecuencia que llega a la pared
$f' = f_0$ Acercándose fuente y alejándose "observador"

$$f' = f_0 \frac{(v - v_B)}{(v - v_A)} \qquad (1)$$

Frecuencia que recibe el pasajero
Alejándose fuente y acercándose "observador"

$$f'' = f' \frac{(v + v_A)}{(v + v_B)} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$f'' = f_0 \frac{(v - v_B)}{(v - v_A)} \frac{(v + v_A)}{(v + v_B)} =$$

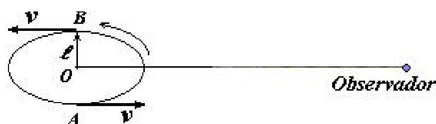
$$400 \frac{\left(c - \frac{c}{15}\right)\left(c + \frac{c}{25}\right)}{\left(c - \frac{c}{25}\right)\left(c + \frac{c}{15}\right)}$$

$$= 400 \frac{(15-1)}{(25-1)} \frac{(25+1)}{(15+1)} = 400 \frac{(14)}{(24)} \frac{(26)}{(16)}$$

= 379,17 Hz.

El pasajero escucha f_p = 400 – 379,17 = 20,83 pulsaciones/s

Ejemplo 63. Una sirena de 420 Hz gira atada al extremo de una cuerda de 2 m de longitud a razón de 300 r.p.m. ¿Qué intervalo de frecuencias percibe un observador situado en el plano de rotación de la sirena y alejado de ésta? Tomar para velocidad del sonido en el aire 340 m/s.



Solución.

$$\omega = 300 \frac{\text{rev} \times 2\pi \text{rad} \times \text{min}}{\text{min} \times \text{rev} \times 60\text{s}} = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La velocidad de la fuente emisora es:

$v = \omega \ell = 10\pi(2) = 20\pi$ m/s

Si el observador está lo suficientemente alejado, tomamos la dirección de percepción en la misma dirección que tiene la velocidad. Cuando la sirena se encuentra en la posición A de la figura, tendremos:

$$f_1' = f \frac{v}{v - v_f} = \frac{340}{340 - 20\pi} = 515{,}2 \text{ Hz}$$

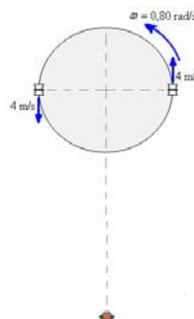
En el punto B:

$$f_2' = f \frac{v}{v + v_f} = \frac{340}{340 + 20\pi} = 354{,}2 \text{ Hz}$$

El intervalo será el comprendido entre las dos frecuencias calculadas

Ejemplo 64. Un carrusel de 5,0 m de radio, tiene un par de altoparlantes de 600 Hz montados en postes en extremos opuestos de un diámetro. El carrusel gira con una velocidad angular de 0,80 rad/s. Un observador estacionario está colocado a cierta distancia enfrente del carrusel. La velocidad del sonido es 350 m/s.
a) Calcular la longitud de onda más larga que llega al escucha desde las sirenas.
b) Calcular la frecuencia de las sirenas más alta que escucha.
c) Calcular la frecuencia de batido máxima en la posición del escucha.
d) Un escucha montado en una bicicleta que se aleja directamente del carrusel con una rapidez de 4,5 m/s. ¿Cuál es la frecuencia de las sirenas más alta que escucha?

Solución.
a)



La longitud de onda más larga es con la menor frecuencia
Y eso sucede cuando la fuente se aleja

$$f_1' = f \frac{v_s}{(v_s + v_f)} = 600 \frac{350}{(350 + 0{,}80 \times 5)}$$

$$= 600 \frac{350}{(354)} = 593{,}2 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{350}{593{,}2} = 0{,}59 \text{ m} = 59 \text{ cm}.$$

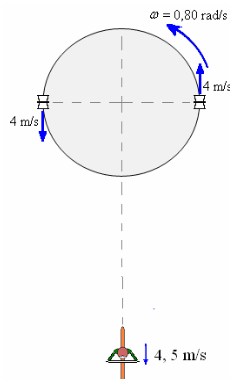
b) La frecuencia más alta sucede cuando la fuente se acerca.

$$f_2' = f\frac{v_s}{(v_s - v_f)} = 600\frac{350}{(350 - 0{,}80\times 5{,}0)}$$

$$= 600\frac{350}{(346)} = 606{,}9 \text{ Hz}$$

c) $f_b = f_2' - f_1' = 606{,}9 - 593{,}2 = 13{,}74$ Hz

d)



La fuente se acerca y el observador se aleja.

$$f'' = f\frac{(v_s - v_o)}{(v_s - v_f)} = 600\frac{(350 - 4{,}5)}{(350 - 4)} =$$

$$600\frac{(345{,}5)}{(346{,}0)}$$

Ejemplo 65. Un buque se acerca a una costa acantilada haciendo sonar una sirena de 600 Hz. El sonido se refleja en la costa y se oye 10 s después, interfiriendo con el propio de la sirena, lo que da lugar a 12 pulsaciones por segundo. Calcule con estos datos el tiempo que el buque tardará en alcanzar la costa.

Solución.

$$f_b = f' - f \Rightarrow f' = f + f_b = 600 + 12 = 612 \text{ Hz}$$

$$f' = f\frac{(v_s + v_b)}{(v_s - v_b)} = 600\frac{(340 + v_b)}{(340 - v_b)} = 612$$

$$\Rightarrow v_b = 3{,}88\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sea *d* la distancia a la que se encuentra el buque cuando inicia el sonido de la sirena, 10 segundos después escucha pulsaciones, esto es el tiempo de viaje de las ondas de ida y vuelta.

Tiempo de ida: $t_1 = \frac{d}{v_s}$

Tiempo de vuelta: $t_2 = \frac{d - v_b t}{v_s}$

Tiempo total:

$$t = t_2 + t_2 = \frac{d}{v_s} + \frac{d - v_b t}{v_s} = \frac{2d - v_b t}{v_s}$$

$$\Rightarrow d = \frac{(v_s + v_b)t}{2} = \frac{(340 + 3{,}88)10}{2} = 1719{,}4 \text{ m.}$$

$$t_b = \frac{1719{,}}{}$$

Como $t_b = \frac{d - v_b t}{v_b}$, obtenemos:

$$t_b = \frac{1719{,}4 - 3{,}88(10)}{3{,}88} = 433{,}14 \text{ s} = 7 \text{ min } 13{,}14 \text{ s.}$$

El tiempo que el buque tardará en alcanzar la costa es 7 min 13,14 s.

Ejemplo 66. Una sirena que emite con una frecuencia *f* sube verticalmente hacia arriba, partiendo del suelo y a una velocidad constante *V*. El punto de partida de la sirena está a una distancia *d* de un observador.

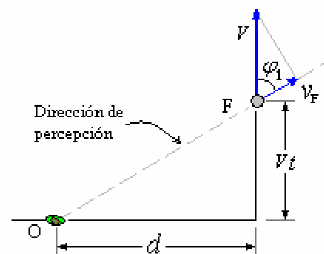
a) Supuesto el observador parado, calcular en función de los datos la frecuencia que percibiría el observador después de transcurridos *t* segundos.

b) Supuesto que el observador se aleja del punto de partida a una velocidad *V'*, y que parte del punto a esa distancia *d*, en el mismo instante que la sirena. Calcular en función de los datos la frecuencia que percibiría el observador, después de transcurridos t segundos.

(Velocidad del sonido: *v)*

Solución.

a)



Frecuencia cuando la fuente se aleja del observador:

$$f' = f\frac{v}{(v + v_F)},$$

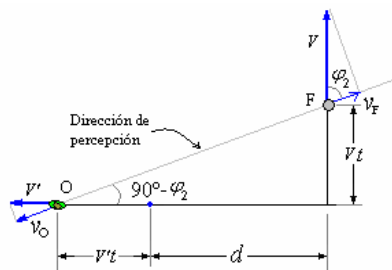
$$v_F = V\cos\varphi_1 = V\frac{Vt}{\sqrt{V^2t^2 + d^2}}$$

De aquí:

$$f' = f\frac{v}{\left(v + \frac{V^2 t}{\sqrt{V^2t^2 + d^2}}\right)}$$

$$= f\frac{v\sqrt{V^2t^2 + d^2}}{v\sqrt{V^2t^2 + d^2} + V^2 t}$$

b)



Frecuencia cuando la fuente y el observador se alejan mutuamente:

$$f' = f\frac{(v - v_O)}{(v + v_F)}$$

$$v_O = V'\cos(90º - \varphi_2) = V' sen\varphi_2$$

$$= V'\frac{V't + d}{\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2}}$$

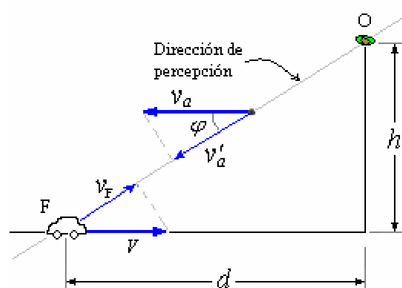
$$v_F = V\cos\varphi_2 = V\frac{Vt}{\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2}}$$

$$f' = f\frac{\left(v - V'\frac{V't + d}{\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2}}\right)}{\left(v + \frac{V^2t}{\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2}}\right)}$$

$$= f\frac{\left[v\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2} - V'(V't + d)\right]}{\left[v\sqrt{V^2t^2 + (V't + d)^2} + V^2t\right]}$$

Ejemplo 67. Un hombre se encuentra en lo alto de una torre de altura *h*. A una distancia *d* del pie de ésta, un automóvil que se dirige hacia ella con una velocidad *V* emite un bocinazo con una frecuencia *f*. El aire se mueve con una velocidad v_a y en dirección contraria al automóvil. Calcular en función de estos datos la frecuencia percibida por el hombre de la torre. (Velocidad del sonido: *v)*.

Solución.



La velocidad del sonido en la dirección de percepción está afectada por la velocidad del viento, de tal modo que bajo estas condiciones $v_s = (v - v'_a)$

La frecuencia que percibe un observador en reposo con la fuente acercándose, bajo estas condiciones es:

$$f' = f\frac{(v - v'_a)}{[(v - v'_a) - v_F]}$$

$$v'_a = v_a\cos\varphi = \frac{v_a d}{\sqrt{h^2 + d^2}},$$

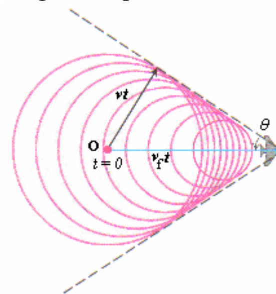
$$v_F = V\cos\varphi = \frac{Vd}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$

$$f' = f\frac{\left(v - \frac{v_a d}{\sqrt{h^2 + d^2}}\right)}{\left(v - \frac{v_a d}{\sqrt{h^2 + d^2}} - \frac{Vd}{\sqrt{h^2 + d^2}}\right)}$$

$$= f\frac{\left(v\sqrt{h^2 + d^2} - v_a d\right)}{\left(v\sqrt{h^2 + d^2} - v_a d - Vd\right)}$$

FORMACION DE UNA ONDA DE CHOQUE

Hemos visto en el efecto Doppler que los frentes de onda producidos por una fuente de sonido en movimiento están comprimidos en la dirección hacia la cual está viajando la fuente. A medida que aumenta la velocidad de la fuente, la compresión se hace más pronunciada. ¿Qué sucede cuando la velocidad de la fuente empieza a hacerse mayor que la velocidad de la onda? En este caso, la fuente se mueve más aprisa que las ondas y los argumentos usados para describir el efecto Doppler ya no son aplicables más. En su lugar, las ondas esf6ricas expandiéndose desde la fuente t posiciones posteriores a lo largo de la trayectoria de la fuente, se combinan todas formando un frente de onda único cónico que se conoce como onda de choque (véase la figura). Como la onda de choque está compuesta por muchos frentes de onda actuando juntos, tiene una gran amplitud.

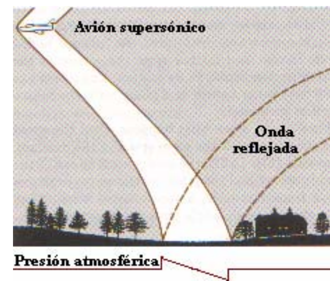


Para el tiempo *t* = 0 la fuente emite una onda desde el punto O En un tiempo posterior t, el frente de la onda se ha expandido a un radio *r* = *vt* y la fuente ha viajado a una distancia *v,t* para alcanzar al punto S. Frentes de onda posteriores también se expanden como se indica en la figura anterior, de manera que a ese tiempo t alcanzan justamente la línea tangente que se dibuja desde S al frente de onda centrado en O. La envolvente resultante de frentes de onda forma un cono con un semiángulo θ dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{vt}{v_f t} = \frac{v}{v_f}$$

La relación v_f / v, llamada número Mach, se usa frecuentemente para dar la velocidad en términos de la velocidad del sonido. Así una velocidad de 1,5 veces la velocidad del sonido se denota como Mach 1,5.
Cuando la onda de choque es producida por un aeroplano que se mueve a una velocidad mayor que la velocidad del sonido, es decir, a velocidad supersónica, la onda de choque se conoce como explosión sónica.

En la figura siguiente se muestra la onda de choque producida en el aire por un aeroplano supersónico que se mueve a Mach 1,1. Nótese que además de la onda de choque producida en el extremo frontal, en la parte posterior del aeroplano aparecen ondas de choque menores. Una nave a alta velocidad produce dos o más ondas de choque, las cuales están asociadas con la nariz, la cola y otras proyecciones de la nave.
Los aviones supersónicos producen ondas de choque que se escuchan como explosiones sónicas.



El gráfico muestra que la presión de aire se eleva bruscamente a lo largo de la onda de choque formada por la parte delantera de la nave. Luego la presión cae por debajo de la presión atmosférica y nuevamente se eleva bruscamente a lo largo de las ondas de choque formadas por la parte posterior de la nave. (Los frentes de onda son curvos porque la velocidad del sonido depende de la temperatura del aire y la temperatura varía con la altura.). La segunda elevación vuelve a la normalidad a la presión.
El tiempo entre los dos cambios de presión es 1/30 de segundo, de tal manera que se escucha un simple "Bum" cuando las ondas de choque pasan.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un joven en un barco mira las ondas en un lago que pasan con una pausa de medio segundo entre cada cresta, ¿Si a una onda le toma 1,5 s pasar los 4,5 m de longitud de su barco de 4,5 m, cuál es la velocidad, la frecuencia, el período, y la longitud de onda de las ondas?

2. Los delfines se comunican bajo el agua usando ondas de compresión de alta frecuencia. ¿Si la velocidad del sonido en agua es 1,4 x 10^3 m/s y la longitud de onda promedio es 1,4 centímetros, cuál es la frecuencia típica del sonido de un delfín? ¿Es esta frecuencia audible a los seres humanos?

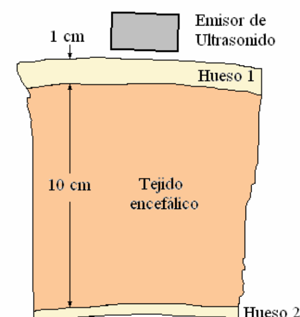
3 La cavidad del pecho de un ser humano resuena alrededor de 8 Hz. ¿qué longitud de onda causa tal vibración?

4. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es
$y = 6{,}0\,\text{cm}\,\operatorname{sen}[(2{,}0\pi\ \text{rad/m})x + (4{,}0\pi\ \text{rad/s})t]$.
Calcule:
a) amplitud
b) longitud de onda
c) frecuencia
d) velocidad de propagación
e) dirección de propagación de la onda
f) La velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

5. Una barra de acero transmite ondas longitudinales por medio de un oscilador acoplado a uno de sus extremos. La barra tiene un diámetro de 4 mm. La amplitud de las oscilaciones es 0,1 mm y la frecuencia es 10 oscilaciones por segundo. Hallar:
a) ecuación de las ondas que se propagan a lo largo de la barra.
b) energía por unidad de volumen.
c) promedio del flujo de energía por unidad de tiempo a través de una sección cualquiera de la barra.
d) potencia requerida para operar el oscilador.

6. La ecuación de una onda transversal en una cuerda es $y = 1{,}8\,\text{mm}\,\operatorname{sen}[(23{,}8\text{rad/m})x + (317\text{rad/s})t]$. La cuerda se encuentra sometida bajo una tensión de 16,3 N. Determinar la densidad lineal de masa.

7. En una eco encefalografía se aplica una señal de ultrasonido para detecta la respuesta de un obstáculo (hueso, tumor, etc.). Suponga la disposición de la figura. Calcule el tiempo que emplea el ultrasonido para obtener un eco en la segunda capa ósea (hueso 2). Se sabe que la velocidad de propagación de las ondas sonoras en el hueso es de 3,370 m/s y en el tejido encefálico, de 1550 m/s



Respuesta. $1,35 \times 10^4$ m/s

8. Calcule la distancia a la cual un nadador debe encontrarse respecto del fondo (o de un obstáculo) para percibir el fenómeno del eco de un sonido producido por él mismo (velocidad del sonido en agua 1640 m/s).
Respuesta. 82 m

9. La velocidad de propagación en un gas y en un líquido a la misma temperatura es de 330 m/s y 1500 m/s respectivamente. Un dispositivo, por ejemplo, un diapasón, produce ondas sonoras en ambos fluidos de 420 Hz.
Halle la relación de longitudes de onda en el líquido respecto del gas y la longitud de onda del sonido en cada medio.
Respuesta.
a) $\dfrac{\lambda_{líquido}}{\lambda_{gas}} = 4,55$, b) $\lambda_{gas} = 0,786\text{m}$,
c) $\lambda_{l_{líquido}} = 3,57\text{m}$

10. Una ventana de 1,5 m^2 se abre en una calle donde el ruido propio produce un nivel sonoro en la ventana de 60 dB. Determine la potencia acústica que entra por la ventana mediante ondas sonoras.
Respuesta. $1,5 \times 10^4$ W

11. Un alambre se doblado en un lazo circular del diámetro D. se asegura por medio de una abrazadera por los extremos opuestos. Se envía una onda transversal alrededor del lazo por medio de un vibrador pequeño que actúe cerca de la abrazadera. Encuentre las frecuencias de resonancia del lazo en los términos de la velocidad v de la onda y el diámetro D.
Respuesta. Los soportes del lazo forman nodos en dos puntos; para medio lazo $\pi \dfrac{D}{2} = n \dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \dfrac{\pi D}{n}$,
con esto se encuentra $f = \dfrac{v}{\lambda} = n\left(\dfrac{v}{\pi D}\right)$

12. Una cuerda vibrante sometida a una fuerza de tracción vibra con frecuencia de 220 Hz. Si la fuerza de tracción se duplica y se mantienen las otras condiciones constantes, determine la nueva frecuencia de vibración.
Respuesta. $f_2 = 311,13$ Hz

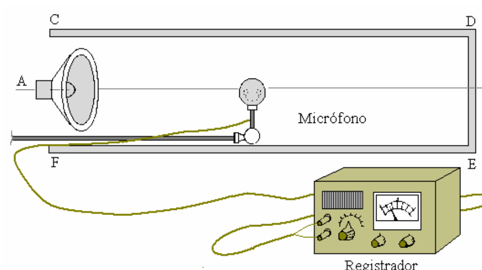
13. Una cuerda de 80 cm de longitud y densidad lineal de $1,69 \times 10^{-4}$ g/cm, está fija en sus dos extremos y emite un sonido fundamental cuando se la somete a una fuerza de tracción de 1,92 kg.
a) Determine la frecuencia fundamental del sonido
b) Calcule el factor por el cual debe multiplicarse la intensidad de la fuerza de tracción para que la frecuencia del nuevo sonido fundamental sea el tercer armónico del caso anterior
Respuesta. a) 481Hz, b) 9

14. La cuerda de un violín de 30 cm de longitud emite un sonido de 460 Hz. Al fijarla en un punto tal que su longitud disminuya a 25 cm, emite un nuevo sonido. Calcule su frecuencia.
Respuesta. $f = 552$ Hz

15. Un diapasón emite un sonido de frecuencia constante. Este diapasón (vibrando) se coloca sobre un tubo cilíndrico de vidrio que contiene agua. El nivel de agua puede variar observándose que, para ciertas alturas h de la columna de aire en el tubo, la intensidad del sonido es mucho mayor que para otras. Las alturas para las -cuales existe resonancia son $h_1 = 12$ cm; $h_2 = 36$ cm; $h_3 = 60$ cm. Calcule la longitud de la onda emitida por el diapasón.
Respuesta. $\lambda = 48$ cm

16. Una probeta tiene 80 cm de profundidad y recibe la mayor cantidad de agua para que el aire contenido en el tubo entre en resonancia con un diapasón que emite una onda sonora de período $T = 32 \times 10^{-1}$ s (valor de la velocidad del sonido en aire en las condiciones del problema, 340 m/s).
Calcule la profundidad del agua.
Respuesta. 0,52 m

17. Un altoparlante se coloca en un punto A de una caja rectangular de sección C D E F. El sonido emitido es de 120 Hz. Suponga que un micrófono A, puede desplazarse a lo largo de la línea AB. El micrófono es conectado a un registrador de intensidad sonora. Mediante este experimento se logra demostrar que en A y en puntos contados a partir de A hacia la derecha cada 1,20 m se registra un máximo e intensidad sonora.
a) calcule la longitud de onda sonora emitida
b) calcule la velocidad de propagación
c) ¿qué intensidad indicará el micrófono cuando llegue a B?

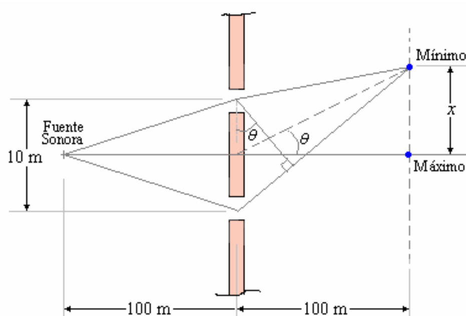


Respuesta. a) $\lambda = 2,40$ m, b) $v = 288$ m/s

18. Sea un tubo de Kundt construido con un tubo de vidrio, un émbolo que ajusta en un extremo y un altoparlante colocado en el otro (fuente sonora en el cual se utiliza como "detector" polvo de corcho. Ajustando, convenientemente la posición del émbolo se observa que el polvo de corcho en ciertos lugares se agita violentamente, mientras que en otros permanece en reposo. En estas condiciones se mide la distancia entre de puntos consecutivos en reposo que da 35 cm. Entonces se retira el aire atmosférico y se lo sustituye

por otro gas, observándose ahora que distancia entre los puntos citados precedentemente es de 45 cm, Sabiendo que la velocidad del sonido en el aire era de 340 m/s, calcule la velocidad del sonido en el gas introducido.
Respuesta. 437,14 m/s

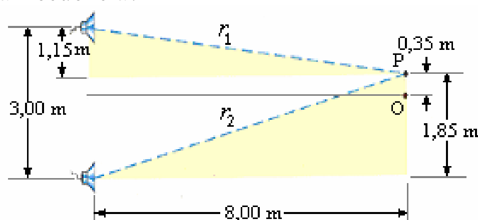
19. Una fuente sonora F emite ondas de λ = 2 m. A 100 m de la misma encuentra una pared con dos ventanas separadas entre si. A 100 m otro lado de esta última pared un observador detecta una posición máxima intensidad de sonido. ; ¿A qué distancia mínima debe colocarse observador para dejar de percibir el sonido?



Respuesta.

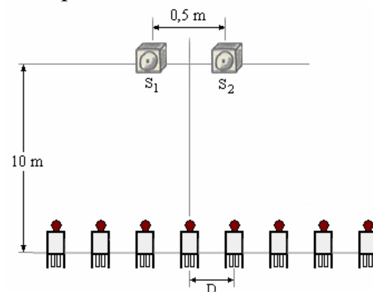
$$x = \frac{1}{2}\frac{D\lambda}{\sqrt{d^2 - \frac{\lambda^2}{4}}} = 5{,}03\text{m}$$

20. Dos altoparlantes están colocados como se muestra en la figura con una separación de 3 m. Los altoparlantes son puestos a vibrar sinusoidalmente por un amplificador que hace que emitan ondas sonoras en fase. Un hombre se encuentra originalmente en el punto O a 8 m de los altoparlantes en una línea perpendicular a ambos los altoparlantes y que pasa por el punto medio del segmento que une los altoparlantes donde escucha un máximo de intensidad. El hombre después se desplaza a un punto P situado a 0,350 m del punto O. En ese punto detecta el primer mínimo de la intensidad sonora.
a) Calcule la diferencia de fase de las ondas sonoras producidas por los dos altoparlantes para el punto P.
b) Calcule la longitud de onda de las ondas sinusoidales.
c) Determine la frecuencia de la fuente sabiendo que en estas condiciones (20ºC) la velocidad del sonido en el aire es de 344 m/s.
d) Si la frecuencia de la fuente de ondas se ajusta de modo que el hombre detecte el primer mínimo de intensidad sonora a 0,75 m del punto O, ¿cuál será la nueva frecuencia?



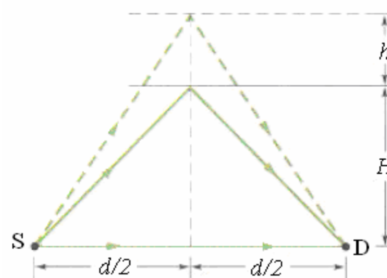
Respuesta.
a) 13 cm b) 26 cm c) f =1,3 kHz d) f = 0.63 kHz

21. Dos altoparlantes están colocados con una distancia de 0,5 m entre si emiten ambos una onda sonora. Los altoparlantes son puestos a vibrar por un amplificador que hace que emitan ondas en fase. A 10 m de distancia de los altoparlantes hay una fila de sillas y a una distancia de D = 1 m del punto central está situado el primer mínimo de intensidad.



a) Diga si un oyente en la silla central escucha un máximo o un mínimo de intensidad del sonido.
b) ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia de las ondas sonoras considerando que la velocidad del sonido es 344 m/s (20ºC)?
c) ¿Cuál es la diferencia del camino del sonido emitido por los dos altoparlantes correspondientes al máximo siguiente de intensidad?
d) Considere ahora que el amplificador hace que las ondas producidas por los dos altoparlantes estén desfasados 180º. Diga si tienen un máximo o mínimo de intensidad en el punto central y a D = 1 m del punto central.
Respuesta.
a) Máximo, b) λ =10 cm, f =3.5 kHz, c) 10 cm, d) mínimo; máximo

22. Una fuente S y un detector D de ondas de radio están separados una distancia *d*, uno del otro. Las ondas de radio de longitud de onda λ llegan a un detector después de un recorrido en línea recta o después de ser reflejados por alguna capa en la atmósfera. Cuando esa capa atmosférica está a una altura *H* las ondas llegan en fase al detector. Si la altura de la capa reflectora aumenta gradualmente, la diferencia de fase entre las ondas en el detector cambia de forma gradual hasta que las ondas están desfasadas π cuando la capa reflectora está a la altura *H* + *h*.



a) Encuentre la expresión de λ en función de: *d*, *h*, e *H*.
b) Calcule la longitud de onda sabiendo que la fuente y el detector se encuentran apartados 100 km, y que H = 6 km y h = 52 m.

Respuesta.
a)
$$\lambda = 4\left[\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (H+h)^2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + H^2}\right]$$
b) λ =25 m

23. Una fuente sonora emite un sonido de 540 Hz y se aproxima a un observador detenido con velocidad de valor 60 km/h. Supuesto que el valor de la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, calcule la frecuencia del sonido recibido por el observador.
Respuesta. 567 Hz

24. Una fuente sonora estacionaria emite un sonido de frecuencia 680 Hz. Si el valor de la velocidad del sonido del aire es de 340 m/s, determine en qué sentido (con relación a la fuente) debe moverse un observador y con qué valor de velocidad debe hacerla si desea que la frecuencia del sonido percibido sea de 694 Hz.
Respuesta. a) hacia la fuente, b) 6,8 m/s

25. Una fuente sonora emite sonido con frecuencia de 840 Hz y se aproxima a un observador a velocidad de valor 40 m/s. Simultáneamente, el observador se acerca a la fuente con velocidad de valor 10 m/s, Si se acepta como valor de la velocidad del sonido 340 m/s, calcule el nuevo valor de la frecuencia percibida por el observador.
Respuesta. 980 Hz

26. Una fuente sonora se aparta de un observador partiendo del reposo y con aceleración constante de valor 2 m/s^2. La velocidad del sonido en este medio vale 360 m/s. Determine el intervalo entre dos sonidos recibidos a 20 s y 30 s.
Respuesta. 1,05

27. Cuatro batidos o pulsaciones por segundo se oyen cuando dos diapasones suenan simultáneamente. Después de unir un pedazo pequeño de la cinta a una rama del segundo diapasón, los dos diapasones se hacen sonar otra vez y se oyen dos batidos por segundo. Si el primer diapasón tiene una frecuencia de 180 hertzios, ¿cuál es la frecuencia original del segundo diapasón?

Respuesta. La frecuencia del segundo diapasón debe ser más alta que la del primer diapasón o al agregar la cinta habría aumentado el número de batidos. Por lo tanto, v_2 - 180 = 4 o v_2 = 184 Hz.

28. Un conductor viaja al norte en una carretera a una velocidad de 25 m/s. Un auto patrullero, conduciendo al sur a una velocidad de 40 m/s, se acerca con su sirena que suena en una frecuencia de 2500 hertz.
a) ¿Qué frecuencia escucha el conductor mientras que el patrullero se acerca?
b) ¿Qué frecuencia escucha el conductor después de pasar el patrullero?
c) ¿si hubiera estado viajando el conductor al sur, cuáles serían los resultados para (a) y (b)?
Respuesta. a) 3042 Hz b) 2072 Hz c) 2625Hz, 2401 Hz

29. Jorge se está dirigiendo hacia la isla con una velocidad de 24 m/s cuando él ve a Betty que esta en orilla en la base de un acantilado. Jorge hace sonar la bocina de frecuencia 330 Hz.
a) ¿Qué frecuencia escucha Betty?
b) Jorge puede oír el eco de su bocina reflejado por el acantilado. ¿La frecuencia de este eco mayor que o igual a la frecuencia es oída por Betty? Explique.
c) Calcule la frecuencia que escucha Jorge del eco del acantilado.



30. Dos naves en una niebla espesa están hacen sonar sus sirenas, que producen sonido con una frecuencia de 165 hertz. Una de las naves está en el reposo; la otra se mueve en una línea recta que pasa por la que está en el reposo. ¿Si la gente en la nave inmóvil oye una frecuencia de los batidos de 3,0 hertzios, cuáles son las dos velocidades y direcciones posibles del movimiento de la nave móvil?
Respuesta. 6,13 m/s 6,35 m/s

CAPÍTULO 4. Mecánica de fluidos

INTRODUCCIÓN
La materia puede clasificarse por su forma física como un sólido, un líquido o un gas. Las moléculas de los s6lidos a temperaturas y presiones ordinarias tienen atracción fuerte entre ellas y permanecen en posición fija relativa una a la otra. Luego un sólido tiene volumen y forma definida y sufre deformaciones finitas bajo la acción de una fuerza.
Las moléculas de los líquidos a temperaturas y presiones ordinarias tienen poca atracción entre ellas y cambian de posición relativa una a otra. En consecuencia los líquidos tienen volumen definido tomando la forma del recipiente que los contiene, pero no lo llenan necesariamente.
Las moléculas de los gases a. temperaturas y presiones ordinarias tienen muy poca atracción entre ellas y tienen un movimiento al azar, o sea que los gases no tienen volumen ni forma definidas, adoptan la forma del recipiente que los contiene y lo llenan completamente. : .
A causa de que los líquidos y gases a temperaturas y presiones ordinarias no resisten la acción de un esfuerzo cortante y continúan deformándose bajo su acción, son conocidos como **fluidos**.
La rama de la Física que estudia los efectos de las fuerzas que actúan sobre 1os fluidos se denomina **Mecánica de Fluidos**, tradicionalmente subdividida en dos partes estática y dinámica.
Estática de los fluidos, estudia el equilibrio de los fluidos bajo la acción de fuerzas estacionarias.
Dinámica de los fluidos, estudia el movimiento de los fluidos y las causas que la producen, sostienen o se oponen a este movimiento.

DENSIDAD, DENSIDAD RELATIVA Y PESO ESPECÍFICO

Densidad o masa especifica
En un fluido, es importante la densidad o masa específica ella permite calcular el peso del elemento de volumen que se considere, que es una posible fuerza exterior actuando sobre cada elemento de fluido. Para un elemento de volumen dV ubicado en algún punto del fluido y que contenga una masa dm, la densidad ρ en ese punto se define mediante

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

La unidad de densidad en SI será kg/m^3 pero se usa generalmente densidades en g/cm^3,
1 g/cm^3 =1000 kg/m^3.

Densidad relativa
Es posible utilizar una escala de densidades relativas a la de alguna sustancia específica, por ejemplo existen las densidades de los fluidos respecto al agua, es decir

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{agua}}$$, cantidad adimensional.

Densidad del agua a 4º C = 1g/cm^3

Peso específico
El peso específico denotado por γ se define como el peso por unidad de volumen del fluido, es decir
$\gamma = \rho g$, la unidad SI será N/m^3.

Ejemplo 1. Suponga que usted es capaz de llevar un peso de 400 N. ¿Cuál sería el tamaño del cubo hecho de oro podría usted llevar? La densidad del oro es 19300 kg/m^3.
Solución.

$$W = mg = \rho V g = \rho a^3 g \Rightarrow$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{W}{\rho g}} = \sqrt[3]{\frac{400}{(19300)(9,8)}} = 0,13$$

Lado del cubo = a = 13 cm

LA PRESIÓN EN LOS FLUIDOS. El concepto de presión es muy general y por ello puede emplearse siempre que exista una fuerza actuando sobre una superficie. Sin embargo, su empleo resulta especialmente útil cuando el cuerpo o sistema sobre el que se ejercen las fuerzas es deformable. Los fluidos no tienen forma propia y constituyen el principal ejemplo de aquellos casos en los que es más adecuado utilizar el concepto de presión que el de fuerza.
Cuando un fluido está contenido en un recipiente, ejerce una fuerza sobre sus paredes y, por tanto, puede hablarse también de presión. Si el fluido está en equilibrio las fuerzas sobre las paredes son perpendiculares a cada porción de superficie del recipiente, ya que de no serlo existirían componentes paralelas que provocarían el desplazamiento de la masa de fluido en contra de la hipótesis de equilibrio. La orientación de la superficie determina la dirección de la fuerza de presión, por lo que el cociente de ambas, que es precisamente la presión, resulta independiente de la dirección; se trata entonces de una magnitud escalar.
La presión se designa con la letra p , y se define como la fuerza de compresión por unidad de área perpendicular a la fuerza.

$$p = \frac{\text{Fuerza normal sobre un área}}{\text{Area sobre la que se distribuye la fuerza}}$$

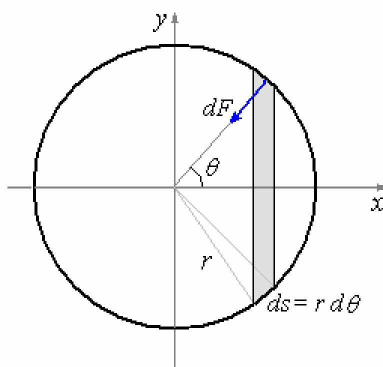
$$= \frac{F}{A}$$

O bien $p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$

Unidades de presión. En el Sistema Internacional (SI) la unidad de presión es el pascal, se representa

por Pa y se define como la presión correspondiente a una fuerza de un newton de intensidad actuando perpendicularmente sobre una superficie plana de un metro cuadrado.
1 Pa = 1 N/m^2.
Otras unidades:
Atmósfera (atm) se define como la presión que a 0 ºC ejercería el peso de una columna de mercurio de 76 cm de altura y 1 cm^2 de sección sobre su base.
1 atm = 1,013x10^5 Pa.
Bar es realmente un múltiplo del pascal y equivale a 10^5 N/m^2.
En meteorología se emplea con frecuencia el milibar (mb) o milésima parte del bar
1 mb = 10^2 Pa ó 1 atm = 1013 mb.
También tenemos:
Milímetros de mercurio
1 mmHg = 133,322 Pa
Torr
1 torr = 133, 322 Pa
1 torr = 1 mmHg

Ejemplo 2. En 1654, Otto Van Guericke, alcalde de Magdeburgo e inventor de la bomba de aire, demostró que dos equipos de caballos no podrían separar dos hemisferios de bronce evacuados. ¿Si los diámetros de los hemisferios fueron 0,30 m, qué fuerza sería requerida para separarlos?
Solución.



Consideremos el hemisferio orientado con su eje a lo largo del eje *x*. Tomemos una tira estrecha de la ancho *ds* que circunda el hemisferio. El componente de *x* de la fuerza en esta tira es

$dF_x = p_a dA\cos\theta = p_a(2\pi r\,\text{sen}\,\theta)ds\cos\theta$ y

$ds = rd\theta$

Así

$$F_x = \int_0^{\pi/2} 2\pi r p_a \text{sen}\,\theta\cos\theta r d\theta$$

$$= 2\pi r^2 p_a \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\theta\cos\theta d\theta$$

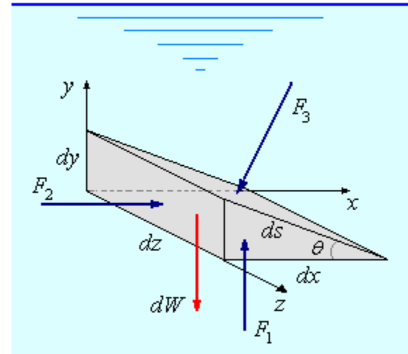
$$= 2\pi r^2 p_a \left[\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \pi r^2 p_a$$

Reemplazando valores:

$$F_x = \pi(0{,}15)^2(1{,}013\times 10^5) = 7160 \text{ N}$$

HIDROSTÁTICA

PRESIÓN EN UN PUNTO DE UN FLUIDO.
La presión sobre un punto totalmente sumergido en un fluido en reposo es igual en todas las direcciones.
Para demostrar esto consideremos un pequeño prisma triangular como se muestra en la figura.



Los valores de presiones promedio sobre cada una de las tres superficies son p_1, p_2, y p_3, en la dirección *x* las fuerzas son iguales y opuestas y se cancelan mutuamente.
Haciendo la sumatoria de fuerzas obtenemos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_2 - F_3\text{sen}\,\theta = 0$$

$$p_2(dydz) - p_3(dsdz)\text{sen}\,\theta = 0$$

Con $dy = ds\,\text{sen}\,\theta$:

$$p_2(dydz) - p_3(dydz) = 0$$

$$\Rightarrow p_2 = p_3$$

También

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 - F_3\cos\theta - dW = 0$$

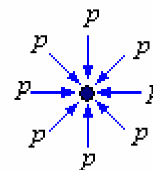
$$p_1(dxdz) - p_3(dsdz)\cos\theta - \rho g\left(\frac{1}{2}dxdydz\right) = 0$$

Con $dx = ds\cos\theta$:

$$p_1(dxdz) - p_3(dxdz) - \rho g\left(\frac{1}{2}dxdydz\right) = 0$$

$$\Rightarrow p_1 - p_3 - \frac{1}{2}\rho g dy = 0$$

Cuando el prisma triangular se aproxima a un punto,



$dy \to 0$, y las presiones promedio se hacen uniformes, esto es la presión para un “punto”

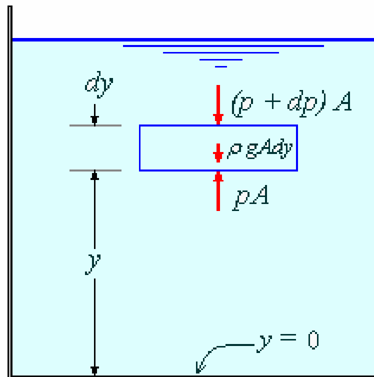
$p_1 = p_3$.

Por lo tanto finalmente:

$$p_1 = p_2 = p_3$$

VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA PROFUNDIDAD EN UN LÍQUIDO

Para encontrar la variación de presión con la profundidad, consideremos el estudio una porción de fluido como se muestra en la figura, consistente en un prisma de área A y altura dy, a una altura y un nivel de regencia arbitrario.



La presión a la altura y es p y la presión en $(y + dy)$ es $(p + dp)$.

El peso del elemento es $\rho gAdy$, donde ρ es la densidad del fluido.

Como el elemento está en equilibrio:

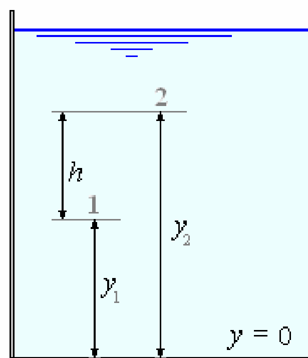
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow pA - (p + dp)A - \rho gAdy = 0$$

Simplificando: $-Adp - \rho gAdy = 0$

O $dp = -\rho gdy \Rightarrow \dfrac{dp}{dy} = -\rho g$

Esta ecuación nos da el cambio de presión con la altura.

DIFERENCIA DE PRESIÓN ENTRE DOS PUNTOS EN UN FLUIDO.



Diferencia de presión entre dos puntos cualquiera (1 y 2) en un fluido en reposo, será

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho gdy \Rightarrow p_2 - p_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho gdy$$

Para fluidos que pueden considerarse incompresibles (por lo general los líquidos), ρ es constante, adicionalmente para diferencias de altura no muy grandes g se puede considerar constante.

En este caso $p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$, llamando a $(y_2 - y_1) = h$

$$p_2 - p_1 = -\rho gh \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho gh$$

Cuando el punto 2 está en la superficie p_2 es la presión atmosférica p_a y se tendrá.

$$p_1 = p_a + \rho gh$$

Donde h representa la profundidad de un punto cualquiera en el fluido y p su presión:

Ejemplo 3. Un dispositivo de exploración de las profundidades del mar tiene una ventana de área 0,10 m^2. ¿Qué fuerza se ejercida sobre ella por la agua de mar (densidad 1030 kg/m^3) a la profundidad de 5000 m?

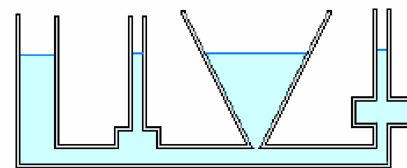
Solución.

$F = pA = \rho ghA$ = (1030)(9,8)(5000)(0,1)

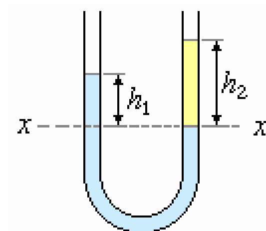
= 5,05 x 10^6 N

PARADOJA HIDROSTÁTICA

Una consecuencia de la ecuación $p_1 = p_a + \rho gh$ es el fenómeno que se ilustra en la figura, llamado paradoja hidrostática. Podría parecer que el vaso cónico ejerce una mayor presión en su base que el que tiene la base más ancha, con lo cual el líquido pasaría del cónico al otro, y alcanzaría una mayor altura en este último. Sin embargo, ya hemos visto que la ecuación $p_1 = p_a + \rho gh$ establece que la presión depende únicamente de la profundidad, y no de la forma de la vasija.



Ejemplo 4. Un experimentador desea determinar la densidad de una muestra de aceite que ha extraído de una planta. A un tubo de vidrio en U abierto en ambos extremos llena un poco de agua con colorante (para la visibilidad). Después vierte sobre el agua una pequeña cantidad de la muestra del aceite en un lado del tubo y mide las alturas h_1 y h_2, según como se muestra en la figura. ¿Cuál es la densidad del aceite en términos de la densidad del agua y de h_1 y de h_2?



Solución.

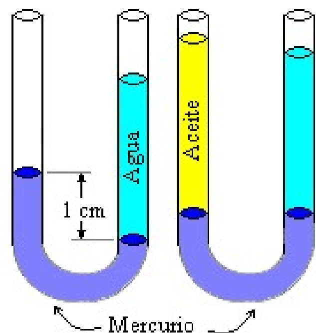
La presión en el nivel $x - x'$ es igual en ambos lados del tubo.

$$\rho_{agua} gh_1 = \rho_{aceite} gh_2 \Rightarrow \rho_{aceite} = \frac{h_1}{h_2}\rho_{agua}$$

Ejemplo 5. Si la presión manométrica del agua en la tubería a nivel del depósito de un edificio es de 500 kPa, ¿a qué altura se elevará el agua?
Solución.

$$p = \rho_a gh \Rightarrow h = \frac{p}{\rho_a g} = \frac{5\times 10^5}{10^3 \times 9{,}8} = 51 \text{ m}$$

Ejemplo 6. En unos vasos comunicantes hay agua y mercurio. La diferencia de alturas de los niveles del mercurio en los vasos es h = 1 cm. Calcular la altura de aceite que se debe añadir por la rama de mercurio para que el nivel de éste en los dos casos sea el mismo.
Densidad del mercurio = 13,6 g/cm^3.
Densidad del aceite = 0,9 g/cm^3.



Solución.
La ley de los vasos comunicantes nos da para valor de la altura del agua:

$$\frac{h_{Hg}}{h_{agua}} = \frac{\rho_{agua}}{\rho_{Hg}} \Rightarrow \frac{1}{h_{agua}} = \frac{1}{13{,}6} \Rightarrow$$

$$h_{agua} = 13{,}6 \text{ cm}$$

Una vez añadido el aceite los líquidos quedarán en la disposición de la figura segunda. Las presiones en las superficies de separación deben ser iguales y, por tanto:

$$\rho_{agua} gh_{agua} = \rho_{aciete} gh_{aceite} \Rightarrow$$

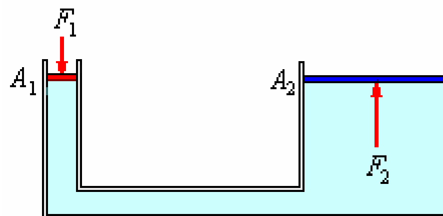
$$h_{acite} = h_{agua}\frac{\rho_{agua}}{\rho_{aceite}} = \frac{13{,}6}{0{,}9} = 15{,}11 \text{ cm}$$

EL PRINCIPIO DE PASCAL.
Si mediante algún método o sistema externo aumentamos la presión en la superficie, la presión en todos los puntos del fluido sufrirá igual aumento, es decir, “el cambio de presión en alguna parte del fluido confinado introduce el mismo cambio de presión en todas partes del fluido”. Enunciado que corresponde al Principio de Pascal. Frecuentemente utilizado en la práctica de la ingeniería con la prensa hidráulica.

La prensa hidráulica, representada en la figura a continuación. Mediante un pistón de sección transversal pequeña, A_1 se ejerce una fuerza F_1 sobre un líquido. La presión se trasmite a un cilindro de mayor área A_2 sobre el que ejerce una fuerza F_2 mucho mayor:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1\frac{A_2}{A_1}$$

Mientras mayor sea la relación entre las áreas de los pistones, mayor es la fuerza ejercida sobre el pistón mayor.



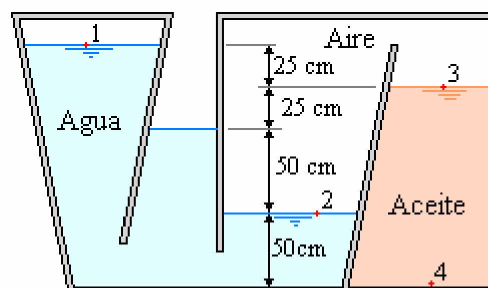
Ejemplo 7. Una gata hidráulica consiste en un cilindro grande del área A conectado con un cilindro pequeño del área a.. Ambos cilindros se llenan de aceite. Cuando la fuerza f se aplica al cilindro pequeño; la presión que resulta se transmite al cilindro grande, que entonces ejerce una fuerza ascendente F. Suponer que u auto pesa 12.000 N sobre el cilindro grande de área 0,10 m^2. ¿Qué fuerza se debe aplicar al cilindro pequeño del área 0,002 m^2 para soportar al auto?

Solución. $p = \frac{F}{A} = \frac{f}{a}$, tal que

$$f = \frac{a}{A}F = \frac{0{,}002}{0{,}10}(12000) = 240 \text{ N}$$

La gata tiene una ventaja mecánica de 50.

Ejemplo 8. Calcular la presión en los puntos 1, 2, 3 y 4 en el sistema mostrado en la figura.
Densidad específica del aceite = 0,9

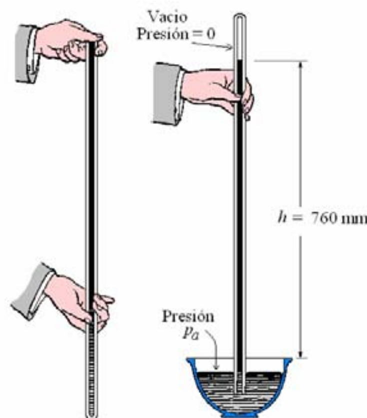


Solución.
Considerando la disposición y geometría mostrada en la figura:
Presión en 1:
$p_1 = p_{atm} - (0{,}25 + 0{,}25)\rho_{agua}\, g$
$= 1{,}033 \times 10^5 - 4900$
$= 98400$ Pa
Presión en 2:
$p_2 = p_{atm} + (0{,}50)\rho_{agua}\, g$
$= 1{,}033 \times 10^5 + 4900$
$= 108200$ Pa
Presión en 3:

$p_3 = p_2 - (0{,}75)\rho_{aire}\, g$
Como la densidad del aire es 1000 veces manos que la del agua podemos considerar
$p_3 = p_2 = 108200$ Pa
Presión en 4:
$p_4 = p_3 + (1{,}25)\rho_{aceite}\, g$
$= 108200 + 11025$
$= 119225$ Pa

MEDIDA DE LA PRESIÓN.

Barómetro
La presión en la superficie de un fluido que se encuentra en un recipiente abierto a la atmósfera no es nula, sino igual a la presión atmosférica. Esta última se debe a que estamos inmersos en un fluido compresible constituido por el aire. La atmósfera de la Tierra ejerce una presión sobre todos los objetos con los que está en contacto. La presión atmosférica sobre la superficie terrestre la denotaremos por p_a, y es igual a la presión ejercida por el peso de toda la columna de aire que está por encima. La presión atmosférica p_a no es despreciable o insignificante como algunas personas suelen creer. Por el contrario, la presión atmosférica juega un papel importante en numerosos aparatos y máquinas de la vida diaria.
Considere un tubo de 1 m de largo y sección transversal A, cerrado por uno de los extremos. Llenemos el tubo con mercurio y coloquemos el tubo, con el extremo abierto hacia abajo, en un recipiente con mercurio. Observaremos que el nivel de mercurio se situará aproximadamente 760 mm del nivel del recipiente.



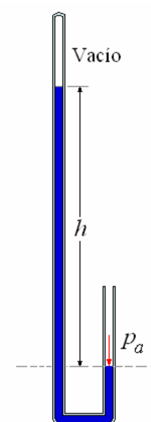
El extremo superior del tubo queda al vacío.
Apliquemos la segunda ley de Newton a la columna de mercurio (que sobresale de la superficie del líquido en el recipiente). ¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella?
Hay sólo dos: por una parte está la presión que el fluido que está en el recipiente ejerce sobre el mercurio que está en el tubo: tal fuerza es $F_1 = p_a A$; por otra, está el peso del mercurio al interior de la columna
$Peso = \rho_{Hg} gV = \rho_{Hg} ghA$. Como el fluido está en reposo la fuerza neta debe ser nula, o sea:

$$p_a A = \rho_{Hg} ghA$$

La densidad del mercurio es ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3. Con esto obtenemos para p_a el valor
$p_a \approx 1{,}013 \times 10^5$ Pa = 1 atm .
La fuerza que eleva al mercurio al interior del tubo es la presión atmosférica. El dispositivo que acabamos de describir es un **barómetro de mercurio**. La altura de la columna de mercurio mide la presión atmosférica. La presión atmosférica promedio a nivel del mar corresponde a 760 mm de mercurio.
AL repetir el mismo experimento, pero con una columna de agua, la altura será
13,6 veces mayor (recuerde que la densidad del mercurio es 13,6 g/cm^3 y la del agua
1 g/cm^3). Multiplicando los 76 cm por 13,6 se obtienen 10,34 m. Este dato es muy importante, ya que interviene en varias aplicaciones tecnológicas. Por ejemplo, al intentar elevar agua de un pozo (cuya superficie está en contacto con el aire que nos rodea) succionando por el extremo superior de un tubo largo, sólo se tendrá éxito si el nivel de agua no está a más de 10,34 metros de profundidad (en la práctica esta altura es menor ya que el agua comienza a hervir bastante antes de llegar a los 10,34 metros).

Barómetro de mercurio en U
Considere la figura donde se muestra un tubo cerrado en un extremo, doblado en forma de U, abierto por el otro extremo donde actúa la presión atmosférica que se desea medir. El mercurio alcanza una cierta posición de equilibrio, donde por el extremo cerrado por existir vacío, la presión es nula. Al nivel indicado, la presión debe ser la misma, de modo que podemos igualar

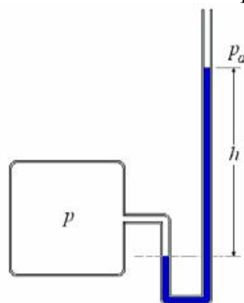
$$p_a = h \text{ mmHg} = h \text{ torr}$$



Manómetro simple.
Otra aplicación práctica de la ecuación
$p_1 = p_2 + \rho gh$ son los instrumentos de medida de la presión:

Manómetro en U de líquido, para presiones relativas de gases
La columna en U contiene un líquido (líquido manométrico), por ejemplo agua, de modo que en la

situación de equilibrio, cuando la presión p en el recipiente que contiene un gas es mayor que la atmosférica, la condición de equilibrio indicada en la figura da $p = p_a + \rho_L gh$, de modo que si se mide la altura *h* tenemos una medida de la presión relativa.



Presión relativa y la presión absoluta:
La presión relativa (a la atmosférica) será

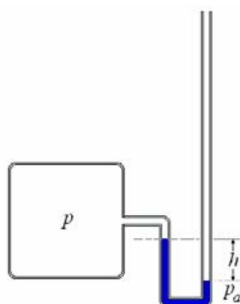
$p - p_a = \rho_L gh$.

La presión absoluta p puede también calcularse de allí si se conoce o se mide la presión atmosférica mediante un barómetro.
Si la presión en el recipiente que contiene el gas es menor que la atmosférica, la situación de equilibrio será como se indica en la figura siguiente de modo que la condición de equilibrio será

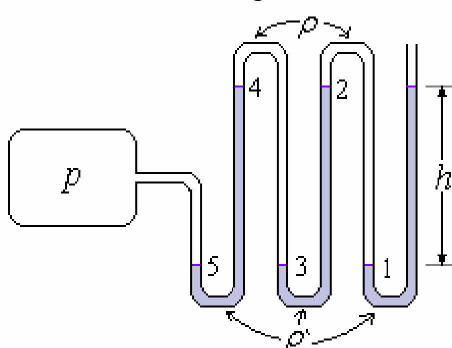
$p + \rho_L gh = p_a$, dando para la presión relativa

$p - p_a = -\rho_L gh$, un valor negativo que refleja que la presión en el interior del recipiente es menor que la atmosférica. Igualmente se puede calcular la presión (absoluta) si la presión atmosférica es conocida

$p = p_a - \rho_L gh$



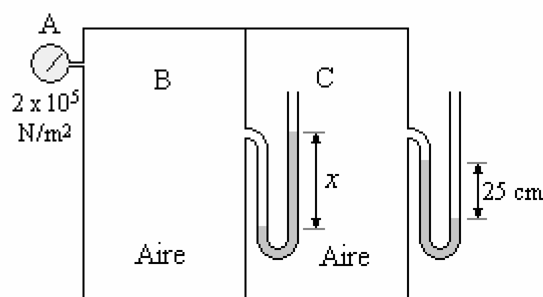
Ejemplo 9. Determinar la presión *p* de un gas, en el manómetro mostrado en la figura.



Solución.
Podemos determinar sucesivamente las presiones de los puntos indicados en la figura:

$$p_1 = p_a + \rho' gh$$
$$p_2 = p_1 - \rho gh = p_a + (\rho' - \rho)gh$$
$$p_3 = p_2 + \rho' gh = p_a + (2\rho' - \rho)gh$$
$$p_4 = p_3 - \rho gh = p_a + 2(\rho' - \rho)gh$$
$$p_5 = p_4 + \rho' gh = p_a + (3\rho' - 2\rho)gh$$
$$p = p_5 = p_a + (3\rho' - 2\rho)gh$$

Ejemplo 10. Los compartimientos B y C en la figura están cerrados y llenos con aire, el barómetro lee 76 cm de mercurio cuando los manómetros leen *x* y 25 cm. ¿Cuál será el valor de *x*?
Los tubos en U están llenos de mercurio de mercurio.



Solución.
Cálculo de p_C

$p_C = p_a - 0{,}25\rho_{Hg} g$ = 1,033 x 10^5 – 0,25 x 13700 x 9,8 = 69735 Pa

El valor de la presión en B se lee en el manómetro A:

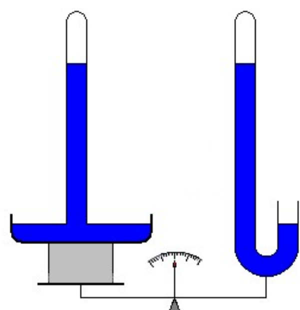
p_B = 2 x10^5 Pa

La lectura del manómetro entre los tanques B y C es la diferencia entre las presiones de dichos tanques:

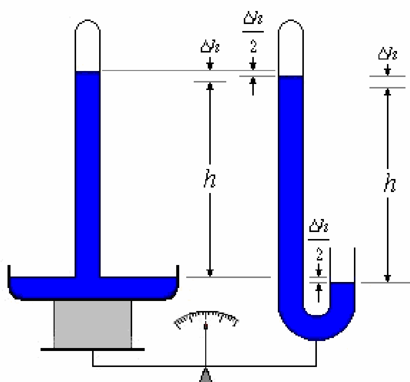
$p_B - p_C = \rho_{Hg} g(x)$

200000 – 69735 = 13700 x 9,8 *x*
De aquí se obtiene: *x* = 0,97 m

Ejemplo 11. En una balanza de gran sensibilidad fueron equilibrados dos barómetros de mercurio: uno en forma de platillo (con un plato ancho) y el otro en forma de U. Los barómetros están hechos del mismo material, tienen el mismo diámetro de los tubos y contienen la misma cantidad de mercurio. Las distancias entre las partes soldadas de los tubos y los niveles superiores del mercurio en ellos son iguales. ¿Cómo variará el equilibrio de la balanza si aumenta la presión atmosférica?



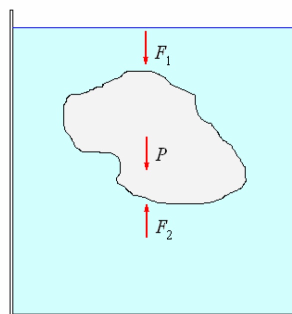
Solución.
Como resultado de la variación de la presión atmosférica, la fuerza de Arquímedes que actúa sobre los barómetros por parte del aire se varía tanto por el cambio de la densidad del aire, como por el cambio del volumen de los barómetros, cuando se cambian los niveles del mercurio en sus secciones abiertas. Tomando en consideración todas las condiciones del problema, los barómetros tienen no sólo el mismo peso, sino también el mismo volumen. Por eso, para cada uno de ellos la variación de la fuerza de empuje, debido a la primera causa, es la misma. La variación de los volúmenes, como es evidente, será diferente. En el barómetro en forma de U, para una variación de la diferencia de niveles en un determinado valor, el nivel del mercurio en cada caño acodado debe cambiar sólo en la mitad de este valor. En el barómetro de cubeta el nivel del mercurio en la cubeta cambia muy poco y en el tubo cambia prácticamente en todo el valor de variación de la diferencia de niveles. Además, en la misma cantidad en que cambia el volumen del mercurio dentro del tubo variará el volumen en la cubeta. Por consiguiente, para el barómetro de cubeta, la variación del volumen será dos veces mayor que para el barómetro en forma de U (a diámetros iguales de los tubos). Al aumentar la presión, el volumen del barómetro de cubeta se hace menor que el volumen del barómetro en forma de U, la fuerza de Arquímedes que actúa sobre el barómetro de cubeta también será menor y por eso él pesa más.
Explicación gráfica



La figura ilustra la variación en los barómetros con el aumento de presión.
Las alturas de las columnas de mercurio son iguales a $(h + \Delta h)$. Mientras la variación en el volumen de la cubeta corresponde al volumen de una columna de altura Δh del tubo, para el barómetro en U solo corresponde al volumen de una columna de altura $\Delta h / 2$, por lo tanto desaloja menor volumen y el empuje es menor que en barómetro de cubeta.

EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES.
Cuando un objeto se sumerge en un fluido (un líquido o un gas), experimenta una fuerza ascendente de la flotabilidad porque la presión en el fondo del objeto es mayor que en la parte superior. El gran científico griego Arquímedes (287-212 B.C.) hizo la observación cuidadosa siguiente, ahora llamada el principio de Arquímedes.
Cualquier objeto totalmente o parcialmente sumergido en un fluido es empujado para arriba por una fuerza igual al peso del fluido desplazado.
Para ver que esto es verdad, considere una porción pequeña de agua en un recipiente como se muestra en la figura. El agua sobre esta porción actúa hacia abajo, al igual que su peso. El agua bajo la porción empuja hacia arriba. Puesto que la porción de agua está en equilibrio, la fuerza hacia arriba equilibra las fuerzas hacia abajo.

$$F_1 + P = F_2$$



La fuerza neta hacia arriba debido al fluido se llama la fuerza **Empuje**, así

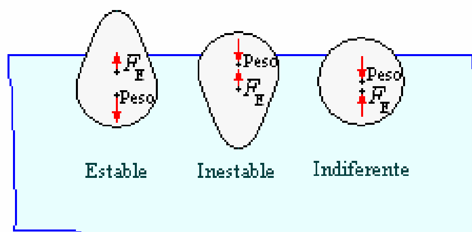
$$F_E = F_2 - F_1 = P$$

Aquí *P* es el peso del fluido desplazado por el objeto. Si la porción de agua de peso *P* es substituido por un objeto de la misma forma y tamaño, este objeto también sentiría la fuerza de empuje hacia arriba
$F = P$
O sea que la fuerza de empuje F_E es $F_E = \rho g V$, donde ρ es la densidad del fluido, y V es el volumen del cuerpo sumergido.
Si el peso del objeto es mayor que *P* (el peso del fluido desplazado), el objeto se hundirá (siempre experimenta la fuerza de empuje, razón por la que un objeto no se siente tan pesado cuando se sumerge que cuando se saca del agua). Si el peso del objeto es menor que el peso de agua desplazada cuando se sumerge totalmente, experimentará una fuerza neta hacia arriba y flotará a la superficie. Algo del objeto resaltará sobre la superficie, de modo que la porción todavía sumergida desplace un peso de fluido igual al peso del objeto.

CENTRO DE EMPUJE

Es el punto a través del cual actúan las fuerzas de empuje, y está en el centro de gravedad del volumen de líquido desplazado. Si el cuerpo es homogéneo y está totalmente sumergido, su centro de gravedad coincide con el centro de empuje.

EQUILIBRIO ROTACIONAL DE OBJETOS FLOTANTES.
Un cuerpo tiene estabilidad vertical cuando un pequeño desplazamiento vertical en cualquier sentido origina fuerzas restauradoras que tienden a volver al cuerpo a su posición original y tiene estabilidad rotacional cuando al aplicar un pequeño desplazamiento angular se origina un par restaurador. En la figura se muestran los diversos casos de equilibrio que se presentan.



a) Estable. Ocurre cuando el centro de gravedad del cuerpo está por debajo del centro de empuje, para una pequeña rotación el par de fuerzas hará retornar al cuerpo a su posición inicial.,
b.) Inestable. Ocurre cuando el centro de gravedad del cuerpo esta por encima del centro de empuje para una pequeña rotación el par de fuerzas tenderá a hacer rotar el cuerpo hacia una nueva posición de equilibrio.
c) Indiferente. Ocurre para cilindro recto horizontal y esfera, ya que su peso y fuerza de empuje son siempre colineales al aplicarle cualquier rotación.

Ejemplo 12. Un hombre que está pescando en el Mar Egeo pesca accidentalmente un artefacto antiguo de oro. La densidad del oro es 19,3 x 10^3 kg/m^3, y la densidad del agua de mar es 1,03 x 10^3 kg/m^3. ¿Mientras está levantando el tesoro, la tensión en su línea es 120 N. ¿Cuál será la tensión cuando saque el objeto del agua?
Nota: Si usted engancha un tesoro o un pez grande, no lo levante del agua. El cordel puede romperse.
Solución.
Si el objeto de peso *mg* se levanta lentamente, está en equilibrio y
$mg = T_1 + F_E$, donde $m = \rho V$, (ρ es la densidad del objeto, *V* es el volumen del objeto)
T_1 es la tensión en la línea mientras está en el agua y
F_E es la fuerza de empuje,
$F_E = \rho_a gV$, (ρ_a es la densidad del agua)

Así: $\rho Vg = T_1 + \rho_a Vg \Rightarrow V = \dfrac{T_1}{(\rho - \rho_a)g}$

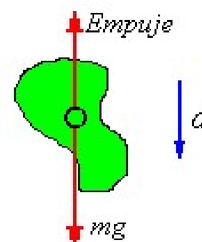
Cuando el objeto está en aire, la tensión es igual al peso *mg*.

$$\text{Peso} = mg = \rho gV$$
$$= \frac{\rho g T_1}{(\rho - \rho_a)g} = \frac{\rho/\rho_a}{[(\rho/\rho_a) - 1]}T_1$$
$$= \frac{19{,}3}{(19{,}3 - 1)}(120N) = 127\text{ N}$$

Ejemplo 13. Un bloque de madera de la gravedad específica 0,8 flota en agua. ¿Qué fracción de volumen del bloque se sumerge?
Solución.
Si *V* es el volumen del bloque y *xV* es el volumen sumergido (*x* es la fracción de volumen sumergido), entonces
$mg = F_B$ o $\rho gV = \rho_a xVg$

$$\Rightarrow x = \frac{\rho}{\rho_a} = 0{,}8$$

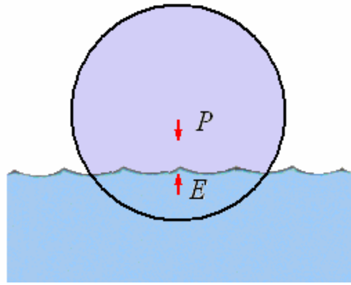
Ejemplo 14. Consideremos el movimiento de un objeto de volumen *V* y masa *M* que cae a través de un fluido con viscosidad cero (sin rozamiento).
a) Dibuja las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.
b) ¿La aceleración del objeto en caída es independiente de su masa?, ¿y de su volumen?
Solución.
a)



b) Ecuación del movimiento
$ma = mg - Empuje$
ρ_c = densidad del cuerpo, ρ_f = densidad del fluido, *V* = volumen del cuerpo
$\rho_c Va = \rho_c Vg - \rho_f Vg$

$a = g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_c}\right)$, *a* es independiente de la masa y el volumen, depende de las densidades del cuerpo y del fluido.

Ejemplo 15. Una pelota de plástico tiene 25 cm de radio y flota en agua con el 25% de su volumen sumergido.
a) ¿Qué fuerza deberemos aplicar a la pelota para sostenerla en reposo totalmente sumergida en agua?
b) Si se suelta la pelota, ¿qué aceleración tendrá en el instante en que se suelte?
Solución.
Primero calcularemos la densidad de la pelota. Utilizando la primera condición:



Fuerza de empuje: $E = \rho_a 0{,}25Vg$

Peso: $P = \rho_p Vg$

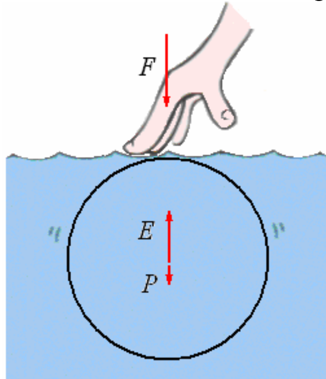
$\sum F_v = 0$

Peso = empuje

$\rho_p Vg = \rho_a 0{,}25Vg \Rightarrow$

$\rho_p = 0{,}25\rho_a$ = 0,25 g/cm^3.

a) Empuje cuando está totalmente sumergida en agua;



Fuerza de empuje: $E = \rho_a Vg$

Peso: $P = \rho_p Vg$

$\sum F_v = 0$

$E - F - P = 0 \Rightarrow F = E - P$

La fuerza que se necesaria para mantenerla en equilibrio totalmente sumergida es:

Empuje – peso = $(\rho_a - \rho_p)Vg$

$$= (1000 - 250)\left(\frac{4}{3}\pi 0{,}25^3\right)9{,}8$$

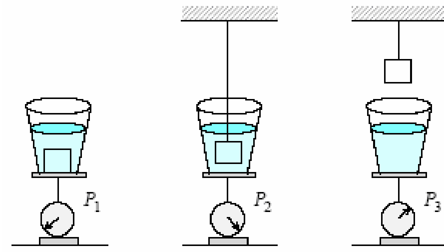
= 481,06 N.

b) Sea a la aceleración de la pelota en el instante en que se suelte

$F = ma \Rightarrow$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{481{,}06}{(250)\left(\frac{4}{3}\pi 0{,}25^3\right)} = 29{,}4 \text{ m/s}^2.$$

Ejemplo 16. Considere las tres mediciones mostradas en la figura adjunta:



I) P_1 es el peso de un recipiente con agua con un objeto sumergido en él.
II) P_2 es el peso cuando el objeto está sumergido en el agua, pero colgado de una cuerda sin que toque el fondo del recipiente.
III) P_3 es el peso del recipiente con agua.
Encuentre la densidad promedio del objeto.

Solución.

Sean: m masa del objeto, V volumen del objeto, ρ densidad del objeto.

Restando (III) de (I):

$$P_1 - P_3 = mg \Rightarrow m = \frac{P_1 - P_3}{g},$$

Como $V = \dfrac{m}{\rho}$

$$\Rightarrow V = \frac{P_1 - P_3}{\rho g} \quad (1)$$

De (II) y (III):

$P_2 = P_3 + E \Rightarrow E = P_2 - P_3$,

como $E = \rho_{agua} gV$

$\Rightarrow P_2 - P_3 = \rho_{agua} gV$

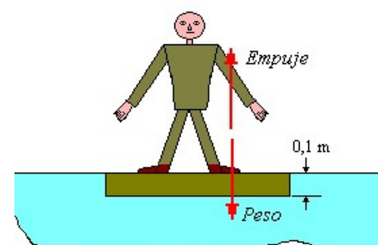
y $V = \dfrac{P_2 - P_3}{\rho_{agua} g}$ (2)

Igualando (1) y (2):

$$\frac{P_1 - P_3}{\rho g} = \frac{P_2 - P_3}{\rho_{agua} g} \Rightarrow \rho = \frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3}\rho_{agua}$$

Ejemplo 17. Disponemos de una plancha de corcho de 10 cm de espesor. Calcular la superficie mínima que se debe emplear para que flote en agua, sosteniendo a un náufrago de 70 kg. La densidad del corcho es de 0,24 g/cm^3.
Nota: entendemos por superficie mínima la que permite mantener al hombre completamente fuera del agua aunque la tabla esté totalmente inmersa en ella.

Solución.



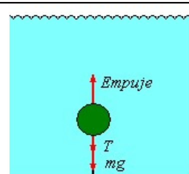
Peso = empuje

$$[70 + 240(0{,}1A)]g = 1000(0{,}1A)g$$

0,1 A es el volumen de la plancha de corcho.

$$70 = 100A - 24A \Rightarrow A = \frac{70}{76} = 0{,}92\text{m}^2$$

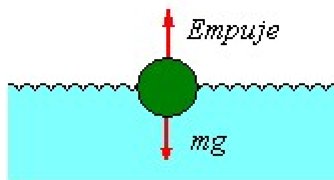
Ejemplo 18. Un cable anclado en el fondo de un lago sostiene una esfera hueca de plástico bajo su superficie. El volumen de la esfera es de 0,3 m^3 y la tensión del cable 900 N.

a) ¿Qué masa tiene la esfera? b) El cable se rompe y la esfera sube a la superficie. Cuando está en equilibrio, ¿qué fracción del volumen de la esfera estará sumergida? Densidad del agua de mar 1,03 g/cm^3	

Solución.

a) $E = mg + T$ E = Empuje,
T = Tensión del cable.
1030 x 0,3 x 9,8 = m x 9,8 + 900 $\Rightarrow$ m = 217,2 kg
b) $E = mg$ V = Volumen sumergido.
1030 x V x 9,8 = m x 9,8 $\Rightarrow$ V = 0,21 m^3

Fracción del cuerpo sumergido = $\dfrac{0{,}21}{0{,}3} = 0{,}7$



Ejemplo 19. Un pedazo de aluminio se suspende de una cuerda y se sumerge completamente en un recipiente con agua. La masa del trozo de aluminio es de 1 kg. Calcule la tensión de la cuerda antes y después de sumergir el trozo de aluminio.

Solución.

La tensión antes es simplemente el peso del trozo de aluminio es decir

$$P = mg = 1 \times 9{,}8 = 9{,}8N$$

Cuando se sumerge la fuerza de empuje es

$E = \rho_{agua} V_{al} g$, pero el volumen del aluminio es

$$V_{Al} = \frac{m}{\rho_{Al}}$$

de modo que la fuerza de empuje será:

$$E = \rho_{agua} \frac{m}{\rho AL} g = 10^3 \frac{1}{2{,}70 \times 10^3} 9{,}8 = 3{,}6 \text{ N.}$$

y finalmente la tensión en la cuerda será la diferencia
T = 9,8 - 3,6 = 6,2 N

Ejemplo 20. En un vaso de agua flota un pedazo de hielo,- ¿Cómo cambia el nivel del agua en el vaso cuando el hielo se derrite? Analizar los siguientes casos:

a) el hielo es completamente homogéneo;

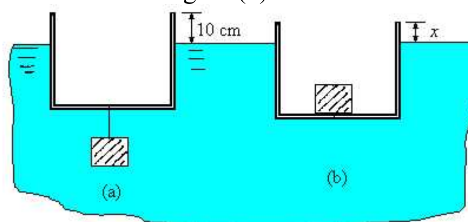
b) en el hielo se encuentra una piedra fuertemente adherida;

c) dentro del pedazo de hielo hay una burbuja de aire.

Solución.

a) Como el pedazo de hielo flota, el peso de toda el agua desplazada por éste es igual al peso del propio hielo o del agua recibida de éste. Por eso el agua que se forma después del deshielo ocupará un volumen igual al volumen de la parte hundida del pedazo de hielo y por consiguiente el nivel del agua no cambiará.
b) El volumen de la parte sumergida del pedazo de hielo con la piedra es mayor que la suma de los volúmenes de la piedra y el agua que se obtiene después del deshielo. Por lo tanto, el nivel del agua en el vaso se descenderá.
c) El peso del agua desplazada es igual al peso del hielo (el peso del aire en la burbuja puede prescindirse). Por eso igualmente como en el caso a), el nivel del agua no cambia.

Ejemplo 21. Se tiene un cilindro vacío de radio 10 cm, que flota en agua dejando fuera del nivel del agua una altura de 10 cm cuando de el cuelga externamente un bloque de hierro de peso 10 kg y densidad 7,8 g/cm^3 tal como lo muestra la figura (a). Calcular la altura que quedara afuera del agua si el bloque de hierro se introduce dentro del cilindro como lo muestra la figura (b).



Solución.

Sea h la altura del cilindro.
De la figura (a):

$$1000g(h - 0{,}1)\pi 0{,}1^2 + 1000g\frac{10}{7800} = 10g$$

$\Rightarrow$ h = 0,38 m
De la figura (b):

$$1000g(h - x)\pi 0{,}1^2 = 10g$$

$\Rightarrow$ x = 0,06 m

Ejemplo 22. Un cuerpo homogéneo y compacto, colocado en un líquido con peso específico γ_1, pesa P_1; y colocado en un líquido con peso específico γ_2, pesa P_2 Determinar el peso específico ρ del cuerpo.

Solución: El peso del cuerpo hundido en el líquido

en el primer caso es igual a $P_1 = (\gamma - \gamma_1)V$; en el segundo caso es igual a $P_2 = (\gamma - \gamma_2)V$. donde *V* es el volumen del cuerpo; de allí resulta que

$$\gamma = \frac{(P_2\gamma_1 - P_1\gamma_2)}{(P_2 - P_1)}$$

Ejemplo 23. En el centro de un lago grande congelado han hecho Un claro. El grosor del hielo resultó igual a 1,0 m. ¿De qué longitud será necesaria la cuerda para sacar un balde de agua?

Solución.

Solamente en los pequeños lagos el hielo puede mantenerse suspenso gracias a la orilla. En el centro de un lago grande éste obligatoriamente flotará. La relación de las densidades del hielo y del agua es 0,9. Por consiguiente, 0,9 de todo el espesor del hielo se encuentra en el agua. La distancia entre la superficie del hielo y el agua es 1 m.

Ejemplo 24. En una taza con agua flota una cajita de fósforos dentro de la cual hay una piedra pequeña. ¿Variará el nivel del agua en la taza si la piedra se saca de la cajita y se pone en el agua?

Solución.

Al retirar la piedra de la caja se hizo más ligera en un peso igual al de la piedra y. por lo tanto, el volumen del agua desplazada por la caja disminuyó en $V_1 = P/\rho_1 g$, donde *P* es el peso de la piedra y ρ_1, la densidad del agua. Al sumergirse en el agua, la piedra desalojará un volumen de agua igual a su propio volumen, o sea, $V_2 = P/\rho_2 g$, donde ρ_2 es la densidad de la sustancia de la piedra. Como $\rho_2 > \rho_1$. entonces $V_1 > V_2$ y por consiguiente el nivel del agua en la taza disminuirá.

Ejemplo 25. Un cubo de Hielo flota en agua. Determine la fracción del hielo que queda sobre la superficie del agua.

Solución.

Sea *m* la masa de hielo. Su peso será

$$P = mg$$

Su volumen total será

$$V = \frac{m}{\rho_{Hielo}},$$

De modo que podemos escribir el peso en términos del volumen como

$$P = \rho_{Hielo} V g$$

Cuando una fracción V_S del volumen queda sumergida, la fuerza de empuje es

$$E = \rho_{agua} V_s g .$$

En la situación de equilibrio el peso iguala al empuje de modo que

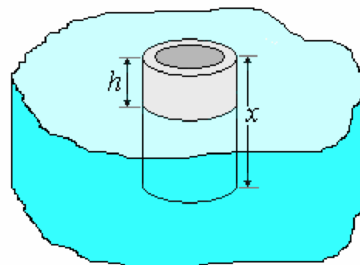
$$\rho_{Hielo} V g = \rho_{agua} V_s g ,$$

De donde

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_{Hielo}}{\rho_{agua}} = 0,917$$

O sea hay un 91,7% sumergido y por lo tanto 8,3 % sobre el nivel del agua.

Ejemplo 28. Un tubo flota en el agua en posición vertical. La altura del tubo que sobresale del agua es *h* = 5 cm. Dentro del tubo se vierte aceite de densidad ρ' = 0,9 g/cm^3. ¿Cuál deberá ser la longitud del tubo para llenarlo totalmente de aceite manteniendo la altura *h*?

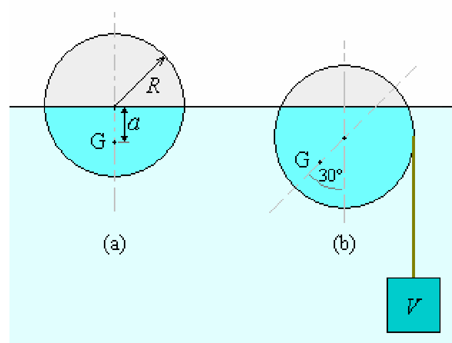


Solución.

La longitud del tubo *x* se halla de la condición $\rho' g x = \rho g (x - h)$ que expresa la igualdad de las presiones en la profundidad del extremo inferior del tubo. Aquí ρ es la densidad del agua. Obtenemos, entonces, que

$$x = \frac{\rho}{(\rho - \rho')} h = 50 \text{ cm.}$$

Ejemplo 29. La posición estable de un cilindro de longitud *L*, flotando en un liquido de densidad ρ , es como se muestra en la figura (a). Cuando el bloque de concreto (densidad ρ') se suspende del cilindro toma la posición mostrada en la figura (b) Si se desprecia el volumen y peso del cable. ¿Cuál es el volumen del bloque?



Solución.

En la posición (a)

$$\text{peso} = \frac{\pi R^2 L}{2} \rho g$$

En la posición (b.)

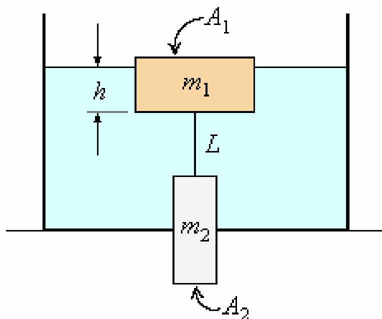
Tomando momentos con respecto al eje vertical por el que pasa el empuje, tenemos:

$$\text{Peso}(a \text{sen} 30^\circ) = (V\rho' g - V\rho g)R$$

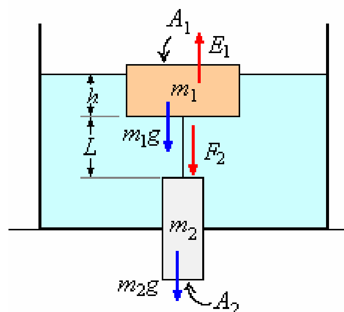
$$\frac{\pi R^2 L}{2}\left(\frac{a}{2}\right) = VRg(\rho' - \rho)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi RL\rho a}{4(\rho' - \rho)}$$

Ejemplo 30. Un corcho cilíndrico de masa m_1 y sección transversal A_1 flota en un líquido de densidad ρ. El corcho está conectado por medio de una cuerda sin masa, de largo L, a un cilindro de aluminio de masa m_2 y sección transversal A_2.
El cilindro de aluminio puede deslizarse sin roce por un orificio hermético en el fondo del recipiente. Calcular la profundidad h a la que debe hallarse la base del corcho para que el sistema de los dos cilindros esté en equilibrio. La presión atmosférica, ¿juega algún rol?



Solución.



$$E_1 - F_2 - (m_1 + m_2)g = 0$$

$$E_1 = A_1 h\rho g\ ,\ F_2 = \rho g(h + L)A_2$$

$$A_1 h\rho g - \rho g(h + L)A_2 - (m_1 + m_2)g = 0$$

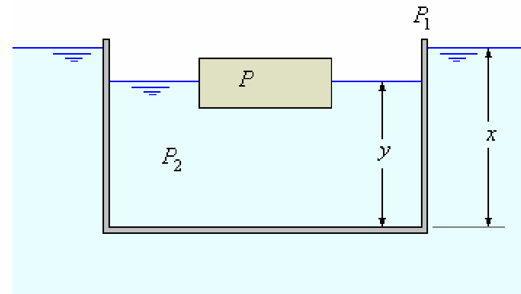
$$A_1 h\rho g - A_2 h\rho g - A_2 L\rho g = (m_1 + m_2)g$$

$$(A_1 - A_2)h\rho = (m_1 + m_2) + A_2 L\rho$$

$$h = \frac{(m_1 + m_2) + A_2 L\rho}{(A_1 - A_2)\rho}$$

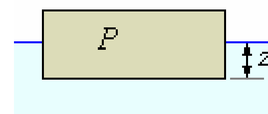
La diferencia de presión debido a la atmósfera para un caso como este, en que las diferencias de altura son pequeñas no juega un rol perceptible.

Ejemplo 29. Un depósito de peso P_1 flota en un líquido y al mismo tiempo tiene una cantidad del mismo líquido, de peso P_2, determinar el peso del flotador P para que la relación de las profundidades x/y se igual a n.
Sugerencia.
Para la solución considere lo siguiente
El P tiene una sección A, la parte sumergida es z.
La sección del depósito es A_1



Solución.
El peso P tiene una sección A y está hundido una altura z, de tal manera que:

$$P = \rho g A z$$



En el depósito: Peso P = empuje sobre P
La sección del depósito es A_1.

$$P_2 = \rho g(A_1 y - Az) = \rho g A_1 y - P\ ,$$

$$\Rightarrow P_2 + P = \rho g A_1 y \qquad (1)$$

Para el conjunto total:
Peso total = Empuje sobre P_2

$$\Rightarrow P + P_1 + P_2 = \rho g A_1 x \qquad (2)$$

Dividiendo (2) / (1):

$$\frac{\rho g A_1 x}{\rho g A_1 y} = \frac{P + P_1 + P_2}{P + P_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{(P + P_2) + P_1}{(P + P_2)} \Rightarrow n = 1 + \frac{P_1}{(P + P_2)}$$

Finalmente:

$$P = \frac{P_1}{(n - 1)} - P_2$$

Ejemplo 30. En una tentativa de identificar un espécimen de roca, un geólogo pesa una muestra en aire y también cuando que está sumergido en agua, usando una balanza de brazos iguales improvisada... ¿Obtiene en su medición 120 g y 78 g. cuál es la densidad de la muestra?
Solución.

En aire $m = \rho V = 120$ y en agua

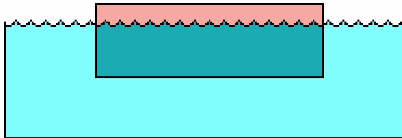
$$120 - \rho_a V = 78 \Rightarrow \rho_a V = 42$$

De estas relaciones obtenemos:

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{120}{42} = 2,86$$

La roca desconocida tiene una densidad 2,86 g/cm^3

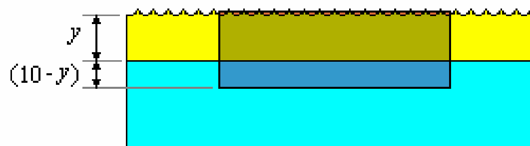
Ejemplo 31. Un cuerpo de forma rectangular de 10 cm de espesor está flotando en una laguna pequeña con tres cuartos de su volumen sumergido
a) Si un camión cisterna derrama en la laguna aceite de densidad 0,65 g/cm^3, quedando la cara superior del cuerpo justamente a nivel de la superficie del líquido. ¿Cuál es el espesor de la capa de aceite?
b) ¿Qué pasará si se para sobre el cuerpo un pajarito de masa m y luego se sale? Determinar la ecuación de movimiento considerando que el agua tiene una constante de viscosidad bA (A es área del cuerpo rectangular).



Solución.
a) Antes que se derrame el aceite, el poste está flotando en el agua simétricamente. Sea su sección transversal A y su densidad ρ_p, si ¾ de su volumen están sumergidos, sobresalen 2,5 cm y están sumergidos 7,5 cm. El peso es igual al empuje. La densidad del agua es ρ.

$$\rho_p gA(10) = \rho gA(7,5) \Rightarrow \rho_p = \frac{3}{4}\rho$$

Cuando el aceite de densidad ρ_a se derrama éste permanece sobre el agua y se extiende a una altura y sobre el agua, al agua le corresponde una altura (10 – y). Como se ha alcanzado el equilibrio:



$$\rho_p gA(10) = \rho gA(10-y) + \rho_a gAy \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}\rho gA(10) = \rho gA(10-y) + \rho_a gAy \Rightarrow$$

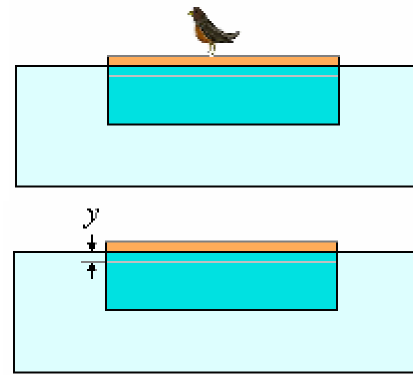
$$\frac{3}{4}\rho gA(10) = \rho gA(10) - \rho gAy + \rho_a gAy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\rho(10) = (\rho - \rho_a)y$$

$$\Rightarrow y = \frac{10\rho}{4(\rho-\rho_a)} = \frac{10(1)}{4(1-0,65)}$$

= 7,14 cm

b) Si se para sobre el cuerpo un pajarito de masa m y luego se sale, el cuerpo quedará en movimiento armónico simple vertical, como lo demostraremos a continuación.
Vamos a considerar antes de derramado el aceite.



$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow$$

Fuerza recuperadora por empuje extra (debido a y) + Fuerza de oposición por viscosidad
= masa de palo moviéndose verticalmente.

$$\Rightarrow -\rho gAy - bA\dot{y} = \rho_p A\ell \ddot{y}$$

$\ell = 0{,}1$ m , ρ_p = densidad del palo

$$\ddot{y} + \frac{b}{\rho_p \ell}\dot{y} + \frac{\rho g}{\rho_p \ell}y = 0,$$

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad 2\beta = \frac{b}{\rho_p \ell},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_p \ell}}$$

$$y = y_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

$$y_0 = \frac{m}{\rho A}, \ \varphi = \frac{\pi}{2} \ \text{y} \ \omega = \sqrt{\left|\beta^2 - \omega_0^2\right|}.$$

Ejemplo 32. Un recipiente se llena parcialmente de agua. Aceite de densidad 750 kg/m^3 se vierte sobre el agua, y flota sin mezclarse. Un bloque de la madera de densidad 820 kg/m^3 se coloca en el recipiente, y flota en la interfase de los dos líquidos. ¿Qué fracción del volumen del bloque se sumerge en agua?
Solución.
Sea el bloque de madera de sección A y altura h, la parte sumergida en agua es x y la parte en aceite es (h - x).
El volumen en agua es $V_a = Ax$, y el volumen en aceite es $V_o = A(h-x)$
El peso del bloque es equilibrado por los empujes debidos al agua y al aceite.

$$\rho_m gAh = \rho_a gAx + \rho_o gA(h-x)$$

$$\Rightarrow \rho_m h = \rho_a x + \rho_o (h-x)$$

$$\Rightarrow \rho_m = \rho_a \frac{x}{h} + \rho_o - \rho_o \frac{x}{h}$$

$$\Rightarrow (\rho_a - \rho_o)\frac{x}{h} = \rho_m - \rho_o$$

$$\Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{(\rho_m - \rho_o)}{(\rho_a - \rho_o)}$$

$$\Rightarrow \frac{820 - 750}{1000 - 750} = 0{,}28$$

Ejemplo 33. Un gran bloque de hielo (densidad 917 kg/m^3) flota en la agua de mar (densidad 1030 kg/m^3). ¿Si el área superficial del hielo es 20 m^2 y tiene 0,20 m de espesor, cuál es la masa del oso polar más pesado que puede estar parado en el hielo sin hacerlo ir debajo de la superficie del agua?

Solución.

$m_a = \rho_a Ah$, $m_B = \rho_B Ah$

$m_B g + mg = m_a g$

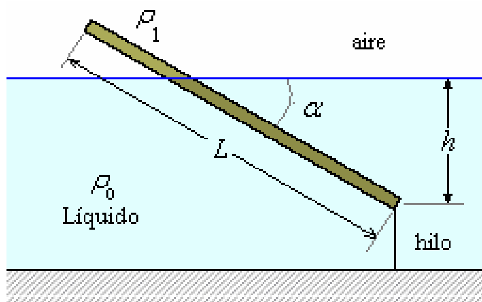
$$\Rightarrow m = m_a - m_B = (\rho_a - \rho_B)Ah$$
$$= (1030 - 917)(20)(0{,}2) = 452 \text{ kg}$$

Ejemplo 34. Una varilla de largo L y densidad ρ_1 flota en un líquido de densidad ρ_0 $(\rho_0 > \rho_1)$. Un extremo de la varilla se amarra a un hilo a una profundidad h (ver figura adjunta).

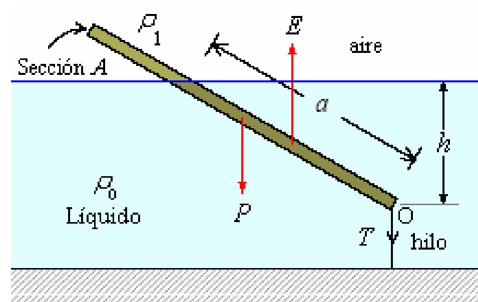
a) Encuentre el ángulo α.

b) ¿Cuál es el mínimo valor de h para el cual la varilla se mantiene en posición vertical?

c) ¿Cuál es la tensión del hilo?



Solución.



a) La fuerza de empuje se aplica en el lugar $\frac{a}{2}$ y la fuerza de gravedad en el lugar $\frac{L}{2}$ (medidos desde O).

Sea A la sección transversal de la varilla

El volumen de la barra es: AL

El peso de la barra es $P = \rho_1 ALg$

El largo a de la parte de la varilla sumergida es $a = \frac{h}{\text{sen}\alpha}$.

La fuerza de empuje viene dada por:

$$E = \rho_0 Aag = \rho_0 A\frac{h}{\text{sen}\alpha}g$$

La fuerza de gravedad es

El torque ejercido por ambas fuerzas respecto a O debe ser nulo, o sea,

$$E\left(\frac{a}{2}\cos\alpha\right) = P\left(\frac{L}{2}\cos\alpha\right) \Rightarrow Ea = PL$$

Sustituyendo las expresiones para E y P se deduce que

$$\rho_0 Aa^2 g = \rho_1 AL^2 g \Rightarrow \rho_0 a^2 = \rho_1 L^2,$$

Reemplazando el valor de a.

$$\rho_0\left(\frac{h}{\text{sen}\alpha}\right)^2 = \rho_1 L^2$$

Despejando se encuentra finalmente que

$$\text{sen}\alpha = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}}\frac{h}{L}$$

b) Si el lado derecho de la última ecuación es mayor o igual a uno, la varilla se mantendrá en posición vertical. El mínimo valor de h para que la varilla esté en posición vertical es

$$h_{\min} = L\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}}$$

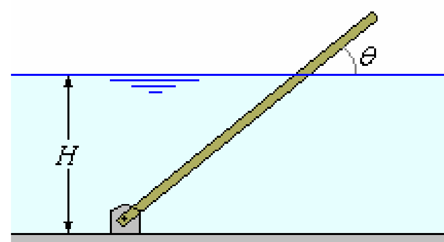
c) La tensión del hilo se obtiene exigiendo que la fuerza total sea nula. De esta manera se obtiene que

$$T = E - P = \rho_0 A\frac{h}{sen\alpha}g - \rho_1 ALg$$
$$= ALg\rho_1\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1\right) = Mg\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1\right),$$

Donde M es la masa de la varilla.

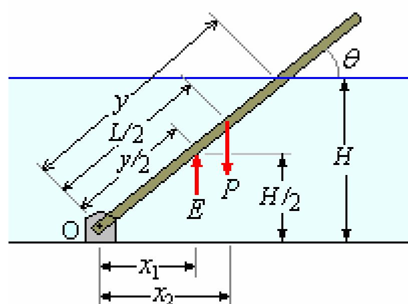
Ejemplo 35. Una barra homogénea de peso P, área de sección transversal A y longitud L flota en agua con uno de sus extremos anclados a una profundidad H, tal como se muestra en la figura. Considerando el espesor de la barra pequeño, determinar el ángulo θ de equilibrio.

Densidad del líquido = ρ.



Solución.

Geometría del problema



$y = \frac{H}{\text{sen}\theta}$, $x_1 = \frac{H}{2\tan\theta}$, $x_2 = \frac{L}{2}\cos\theta$

Determinación del empuje:

$$E = \rho g V_{Sumergido} = \rho g A y = \rho g A \frac{H}{\text{sen}\theta}$$

Estática, se tendrá equilibrio cuando:

$$\sum \tau_O = 0$$

O sea, $Px_2 = Ex_1$

Sustituyendo valores:

$$P\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) = \rho g A \frac{H}{\text{sen}\theta}\left(\frac{H}{2\tan\theta}\right)$$

$$= \frac{\rho g A H^2 \cos\theta}{2\text{sen}^2\theta}$$

De aquí:

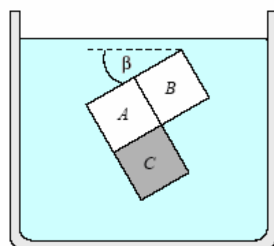
$$\text{sen}^2\theta = \frac{\rho g A H^2}{PL}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\theta = H\sqrt{\frac{\rho g A}{PL}}$$

Finalmente:

$$\theta = \text{arc sen } H\sqrt{\frac{\rho g A}{PL}}$$

Ejemplo 36. Considere tres cubos del mismo tamaño, adheridos tal como se muestra en la figura. La densidad del material del cual están hechos los dos cubos *A* y *B* es ρ_1 = 0,5 g/cm^3, mientras que el cubo C está hecho de un material de densidad ρ_2 = 2 g/cm^3. Observe que la densidad media de los tres cubos es igual a la del agua ρ = 1 g/cm^3) y, por lo tanto, al sumergirlo en agua, la fuerza de empuje exactamente cancela el peso. ¿Cuál será la orientación de equilibrio estable que el objeto adquirirla cuando está "flotando" rodeado de agua?



Solución.

Las únicas fuerzas que están actuando sobre el objeto son el peso *P* y el empuje

E. Ya sabemos que ambas fuerzas tienen la misma magnitud y apuntan en direcciones opuestas y, por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto es nula. Pero para que se encuentre en equilibrio también el torque neto debe ser nulo. Esto se logra solo si ambas fuerzas son colineales (actúan a lo largo de la misma recta).

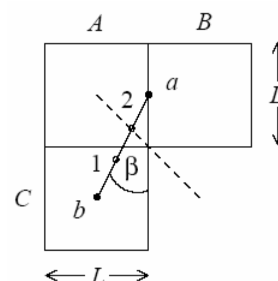
Encontremos los puntos en que actúan las dos fuerzas.

La gravedad actúa en el centro de masas.

El centro de masas de los cubos *A* y *B* se encuentra en a y el centro de masas de *C* se encuentra en b. El centro de masas del objeto completo se encontrará sobre la recta que une *a* con *b*. Como el cubo *C* tiene el doble de masa de los dos cubos *A* + *B* juntos, el centro de masas del objeto completo se ubicará más cerca de *b* que de *a*. En la figura más abajo hemos designado el centro de masas del objeto completo con el numero 1. Se tiene que

$$\overline{b1} = \frac{\overline{ab}}{3}$$

La fuerza de empuje, por otra parte, actúa en el centro de masas que se obtiene al sustituir los tres cubos por agua (en la figura lo hemos designado con el numero 2).



Nuevamente el centro de masas de los cubos *A* + *B* se encuentra en *a*, mientras que el de *C* se encuentra en *b*. El centro de masas de los centros de masas nuevamente se encontrará sobre la recta $\overline{ab}$. Pero ahora los cubos *A*+*B* pesan el doble de lo que pesa *C*, luego el centro de masas ahora estará mías cerca de *a* que de *b*. De hecho, el centro de masas cuando los tres cubos están hechos de agua debe estar sobre el plano de simetría indicado en la figura con una línea punteada.

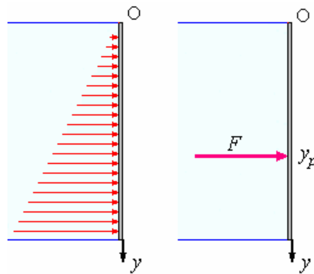
En resumen, la fuerza de gravedad actúa en 1 y el empuje actúa en 2. Para que no haya torque sobre el sistema la recta $\overline{ab}$ debe orientarse a lo largo de la vertical.

Concluimos que el ángulo β de la figura del enunciado debe coincidir con el de la segunda figura. Se deduce inmediatamente que tan β = 1/2.

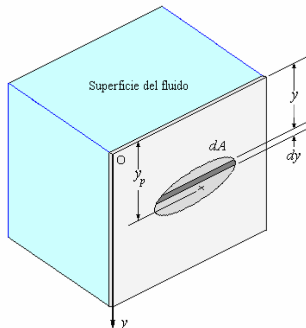
Convénzase de que el equilibrio es estable cuando el punto 2 está sobre el punto 1 e inestable cuando 1 está sobre 2.

FUERZAS SOBRE LAS PAREDES O COMPUERTAS

Ya hemos estudiado la variación de presión con la profundidad de un fluido, el conjunto de fuerzas que resultan de la acción del fluido sobre la cara de una superficie de área finita puede reemplazarse por una fuerza resultante. Luego, ahora nos ocuparemos de encontrar la magnitud de esta fuerza resultante y la determinación de su línea de acción o punto de aplicación.
Las fuerzas horizontales causadas por la presión sobre superficies que encierran al fluido, aumentan linealmente con la profundidad, de modo que se tienen fuerzas distribuidas no uniformes actuando sobre ellas. La resultante de ese sistema de fuerzas paralelas es en general una fuerza paralela aplicada en un punto llamado centro de presión, respecto al cual el torque de las fuerzas distribuidas es equivalente al torque de la fuerza resultante.



Para el caso de compuertas y situaciones similares, la fuerza debido a la presión atmosférica actúa por ambos lados, y entonces la omitiremos del análisis por no contribuir en forma neta a la fuerza horizontal actuando sobre la superficie.
La figura siguiente ilustra una situación típica, donde por el interior de una superficie hay un fluido y por el exterior está la atmósfera.



Para calcular la fuerza sobre superficie A en la pared vertical. Tomemos un elemento de área dA de ancho L y altura dy que se encuentra a una profundidad y. La fuerza sobre este elemento diferencial es:

$$dF = pdA = \rho gyLdy$$

La fuerza tota la encontramos integrando en toda la superficie: $F = \int_A pdA = \rho g \int_A ydA$

Como $\int_A ydA = y_G A$

Donde y_G es la posición del centroide del área de la superficie sobre la que actúa la fuerza.
A es el área total de la superficie.
Finalmente: $F = \rho g y_G A$

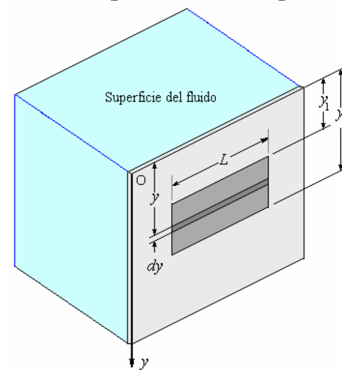
Centro de presión. El centro de presión lo encontramos de la siguiente manera
Torque de las fuerzas distribuidas = Torque de la fuerza resultante

$$y_p F = \int_A ydF \Rightarrow y_p \rho g y_G A = \int_A \rho g y^2 dA$$

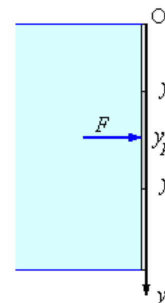
$$\Rightarrow y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I}{y_G A}$$

Donde I es el momento de inercia con respecto a un eje.

APLICACIÓN: Superficie rectangular



El caso más simple es si la superficie es rectangular como se indica en la figura que sigue donde se desea evaluar la fuerza resultante de las fuerzas distribuidas entre y_1 e y_2.



$$F = \int_A pdA = \rho g \int_A ydA$$

$$F = \rho g L \int_{y_1}^{y_2} ydy$$

$$= \rho g L \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{2} \rho g L \left(y_2^2 - y_1^2 \right)$$

También podríamos calcularlo de otra forma
El centroide está en

$$y_G = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)$$

El área $A = L(y_2 - y_1)$
Y la fuerza es:

$$F = \rho g y_G A = \frac{1}{2} \rho g L \left(y_2^2 - y_1^2 \right)$$

Para calcular el centro de presión:

$$y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I}{y_G A}$$

$$I = \int_A y^2 dA = L\int_{y_1}^{y_2} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{3}L\left[y^3\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)$$

$$y_G = \frac{1}{2}(y_2 + y_1),\; A = L(y_2 - y_1)$$

Reemplazando:

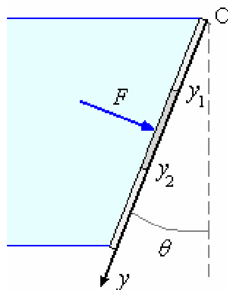
$$y_p = \frac{\frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)}{\frac{1}{2}L(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{2\left(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right)}{3(y_2 + y_1)}$$

En particular si la superficie está entre $y_1 = 0$ e $y_2 = h$ resultará

$$y_p = \frac{2}{3}h$$

APLICACIÓN: Fuerza sobre una superficie de forma rectangular inclinada



En una sección anterior se calculó la fuerza resultante y centro de la fuerza para un área vertical de sección rectangular. Para una sección rectangular inclinada un ángulo θ con la vertical, el cálculo es muy parecido, pero ahora, el eje Oy está inclinado luego resultarán

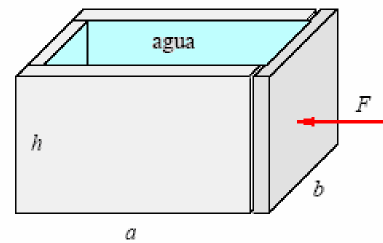
$$F = \frac{1}{2}\rho g L\left(y_2^2 - y_1^2\right)\cos\theta$$

y su punto de aplicación será

$$y_p = \frac{2\left(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right)}{3(y_2 + y_1)}$$

Note que la expresión para el centro de fuerza es la misma.

Ejemplo 37. Considere una caja de dimensiones *a*, *b* y *h*, llena de agua. Todos los lados de la caja están firmemente unidos entre sí, excepto uno de los lados laterales (de dimensión $b \cdot h$). Evalúe la magnitud de la fuerza exterior mínima con que debe presionarse ese lado contra el resto de la caja para que el agua no escurra. Si la fuerza se aplica en un solo lugar, encuentre la posición en la que debe aplicarla.



Solución.
Elijamos el eje z a lo largo de la vertical, con el origen al fondo de la caja sobre la tapa móvil. La presión a una altura *z* es $p_{(z)} = \rho g(h - z)$.
Dividamos la tapa en franjas horizontales de largo *b* y ancho (altura) *dz*. La fuerza que ejerce el fluido sobre la franja que está a la altura *z* es

$$dF = p_{(z)} b dz.$$

Integrando la fuerza que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene la fuerza total

$$F = \int_0^h p_{(z)} b dz = \rho g b\int_0^h (h - z)dz = \frac{1}{2}\rho b g h^2.$$

Para encontrar a qué altura h_p debemos aplicar esta fuerza sobre la tapa, evaluemos el torque que ejerce el fluido sobre la tapa respecto al origen.
El torque que el fluido ejerce sobre la franja que está a la altura z es

$$d\tau = z p_{(z)} b dz.$$

Integrando el torque que el líquido ejerce sobre cada una de las franjas se obtiene el torque total

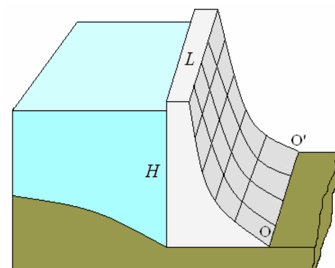
$$\tau = \int_0^h z p_{(z)} b dz = \rho g b\int_0^h z(h - z)dz = \frac{1}{6}\rho g b h^3.$$

Para que la tapa esté en equilibrio el torque que ejerce la fuerza total externa *F* debe ser igual en magnitud con τ , es decir,

$$F h_p = \frac{1}{6}\rho g b h^3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\rho g b h^2 h_p = \frac{1}{6}\rho g b h^3$$

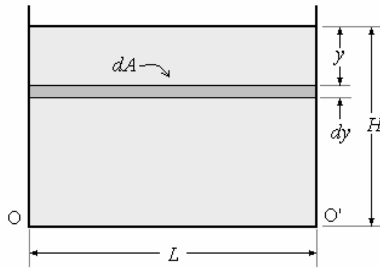
De esta ecuación se deduce finalmente que $h_p = \frac{h}{3}$

Ejemplo 38. La figura nos representa el dique de un embalse en el que el agua alcanza una profundidad *h* = 60 m en la pared vertical, y tiene una longitud *L* = 250 m. Calcular:
a) La fuerza resultante que actúa sobre el dique.
b) El torque o momento de la fuerza que tiende a hacer girar el dique alrededor de OO'.
c) Posición de la línea de acción de la resultante.



Solución.

a)



El valor de la fuerza sobre un elemento de área *dA* será:

$$dF = pdA$$

Con $p = \rho_a gh$ y $dA = Ldy$

$$\Rightarrow dF = \rho_a gLydy$$

Y la fuerza resultante es, por tanto:

$$F = \int_0^H dF = \rho_a gL\int_0^H ydy = \frac{1}{2}\rho_a gLH^2$$

Expresión que podíamos haber obtenido aplicando directamente:

$F = \rho g h_C A$, sustituyendo valores:

$$F = \frac{1}{2}(1000)(9,8)(250)(60)^2 = 4,42 \text{ x } 10^9 \text{ N}$$

b) El torque o momento de la fuerza dF respecto del eje O O' es:

$$d\tau = (H - y)dF = \rho_a gLy(H - y)dy$$

y el torque resultante es:

$$\tau = \int_0^H d\tau = \rho_a gL\int_0^H y(H - y)dy = \frac{1}{6}\rho_a gLH^3$$

Sustituyendo valores:

$$\tau = \frac{1}{6}(1000)(9,8)(250)(60)^3 = 8,82 \text{ x } 10^{10} \text{ N}$$

c) Llamando h a la distancia por encima de O a la fuerza *F* para producir el torque τ calculado en (b), obtenemos:

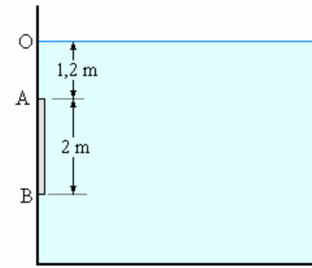
$$\tau = hF \Rightarrow \frac{1}{6}\rho_a gLH^3 = h\left(\frac{1}{2}\rho_a gLH^2\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{H}{3}$$

Sustituyendo valores:

$$h = \frac{60}{3} = 20 \text{ m}$$

Ejemplo 39. Determine la fuerza resultante y su punto de aplicación debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular de altura AB = 2 m y de ancho 1 m (hacia adentro del papel), donde el punto A está a profundidad de 1,2m.



Solución.

Cálculo de la fuerza resultante

$$F = \int_A pdA = \rho g\int_A ydA$$

$$F = \rho gL\int_{y_1}^{y_2} ydy = \rho gL\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{1}{2}\rho gL\left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}1000(9,8)(1)\left(3,2^2 - 1,2^2\right)$$

$= 43120$ N

Cálculo del centro de presión:

$$y_p = \frac{\int_A y^2 dA}{y_G A} = \frac{I}{y_G A}$$

$$I = \int_A y^2 dA = L\int_{y_1}^{y_2} y^2 dy$$

$$= \frac{1}{3}L\left[y^3\right]_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)$$

$$y_G = \frac{1}{2}(y_2 + y_1),\ A = L(y_2 - y_1)$$

Reemplazando:

$$y_p = \frac{\frac{1}{3}L\left(y_2^3 - y_1^3\right)}{\frac{1}{2}L(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}$$

$$= \frac{2\left(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2\right)}{3(y_2 + y_1)}$$

En particular si la superficie está entre $y_1 = 1,2$ e $y_2 = 3,2$ resultará:

$$y_p = \frac{2\left(3,2^2 + 3,2 \times 1,2 + 1,2^2\right)}{3(3,2 + 1,2)}$$

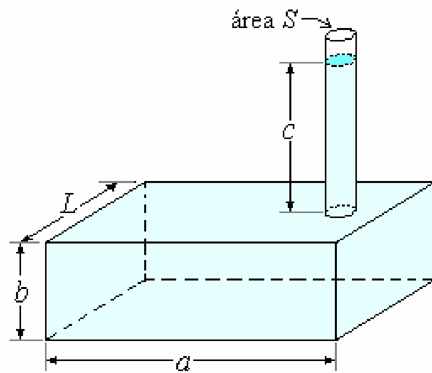
$= 2,35$ m.

Ejemplo 40. El agua se eleva hasta la altura c en el tubo soldado al tanque mostrado en la figura. Despreciando el peso del tubo:

a) Determinar y localizar la fuerza resultante que actúa sobre el área Lb.

b) Determinar la fuerza total en la base del tanque.

c) Comparar el peso total del agua con el resultado obtenido en (b) y explicar la diferencia.



Solución.

a) La fuerza sobre el área $A_1 = Lb$.

$$F_{1_1} = \rho g h_{G1} A_1 = \rho g\left(c + \frac{b}{2}\right)Lb$$

$$y_{p1} = \frac{\int_{A1} y^2 dA}{y_{G1}A_1} = \frac{L\int_c^{(c+b)} y^2 dy}{\left(c+\frac{b}{2}\right)Lb}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left[(c+b)^3 - c^3\right]}{\left(c+\frac{b}{2}\right)b} = \frac{2\left[(c+b)^3 - c^3\right]}{3(2c+b)b}$$

b) La fuerza total en la base $A_2 = La$ del tanque.

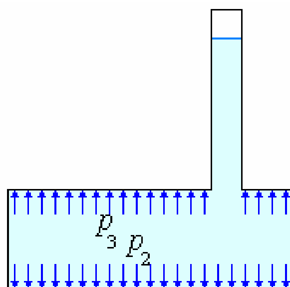
$$F_2 = \rho g h_2 A_2 = \rho g(c+b)La$$
$$= \rho g(Lac + Lab)$$

c) El peso total del agua

$$P = \rho g(Lab - Sc)$$

Resultado diferente al obtenido en (b)

Explicación: porque el peso es:



$$P = F_2 - F_3$$

Donde: $F_2 = \rho g(Lac + Lab)$ y

$$F_3 = \rho g h_3 A_3 = \rho g c(La - Sc)$$

Luego: $P = \rho g(Lac + Lab) - \rho g(La - Sc)$

$$= \rho g(Lab - Sc)$$

Ejemplo 41. Supongamos los recipientes de la forma indicada en la figura. El primer recipiente es cúbico, de 10 cm de arista; los otros tres recipientes tienen la misma base e igual altura y están llenos de agua.

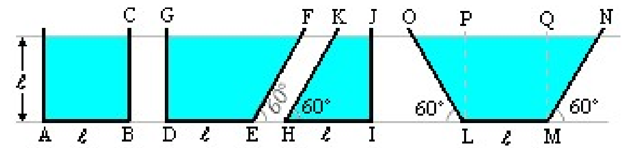
Calcular:

a) El peso del agua en cada recipiente.

b) La fuerza sobre el fondo de cada uno.

c) La fuerza sobre las caras BC, EF y HK.

d) La fuerza sobre la cara vertical LMNO del cuarto recipiente.



Solución.

a)

$$V_1 = \ell^3 \quad \Rightarrow$$
$$P_1 = \ell^3 \rho_a g$$
$$V_2 = \ell^3\left(1 + \frac{1}{2}\cot an 60^o\right) \quad \Rightarrow$$
$$P_2 = \ell^3\left(1 + \frac{1}{2}\cot an 60^o\right)\rho_a g$$
$$V_3 = \ell^3\left(1 - \frac{1}{2}\cot an 60^o\right) \quad \Rightarrow$$
$$P_3 = \ell^3\left(1 - \frac{1}{2}\cot an 60^o\right)\rho_a g$$
$$V_4 = \ell^3(1 + \cot an 60^o) \quad \Rightarrow$$
$$P_4 = \ell^3(1 + \cot an 60^o)\rho_a g$$

Sustituyendo valores:

$P_1 = 10$ N $P_2 = 12,89$ N

$P_3 = 7,11$ N $P_4 = 15,77$ N

b) La fuerza sobre el fondo de cada uno.

$$F = \rho g \ell\left(\ell^2\right) = 10 \text{ N}$$

c) La fuerza sobre las caras BC, EF y HK.

$$F_{BC} = \frac{1}{2}\ell^3 \rho_a g = 5N$$

$$F_{BF} = F_{HK} = 5,8N$$

d) La fuerza sobre la cara vertical LMNO del cuarto recipiente.

$$F = \rho_a g h_c A$$

$$h_c = \frac{2\frac{\ell}{3}\left(\frac{\ell^2}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{\ell}{2}\left(\ell^2\right)}{\frac{\ell^2}{\sqrt{3}} + \ell^2} = 0,44\ell ,$$

$$A = \frac{\ell^2}{\sqrt{3}} + \ell^2 = 1,58\ell^2$$

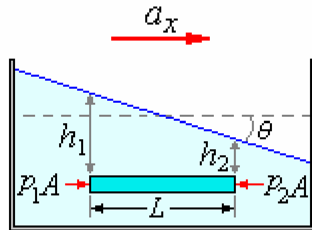
$$F = 1000 \times 9,8(0,44\ell)\left(1,58\ell^2\right) = 7N$$

TRASLACIÓN DE FLUIDOS.

Un fluido puede estar sujeto a traslación o rotación con aceleración constante si movimiento relativo entre partículas. Esta condición de equilibrio relativo hace que el fluido este libre de esfuerzos cortantes y

se aplican las leyes de la estática de fluidos teniendo en cuenta los efectos de la aceleración.

Traslación horizontal.
Si el recipiente que contiene un líquido de densidad ρ se traslada horizontalmente con aceleración constante a_x, la superficie inicialmente horizontal se inclina con una pendiente que calcularemos a continuación.



En la figura consideremos un prisma de líquido a lo largo de una línea horizontal. La presión no varía igual que en un líquido en reposo, por lo tanto el efecto de la aceleración a_x será en la dirección x.
Para el cuerpo libre se tiene:

$$\sum F_x = ma_x$$

$p_1A - p_2A = \rho LAa_x$, como $p_1 = \rho gh_1$ y $p_2 = \rho gh_2$
Podemos escribir:

$$\rho gh_1A - \rho gh_2A = \rho LAa_x$$

Simplificando

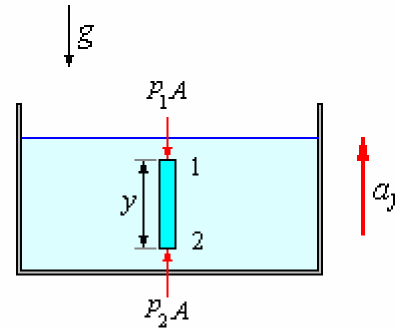
$$g(h_1 - h_2) = La_x \Rightarrow \frac{(h_1 - h_2)}{L} = \frac{a_x}{g}$$

Siendo $\frac{(h_1 - h_2)}{L}$ la pendiente de la superficie libre, se tendrá finalmente:

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g}$$

Como a_x es constante, la superficie libre es un plano inclinado.

Traslación vertical.
Si el recipiente que contiene un líquido de densidad ρ se mueve con aceleración vertical a_y, la superficie libre permanece horizontal. La presión es constante en planos horizontales, pero es diferente a cuando está en reposo, valor que calcularemos a continuación.



Para el prisma de líquido en la figura tenemos:

$$\sum F_y = ma_y$$

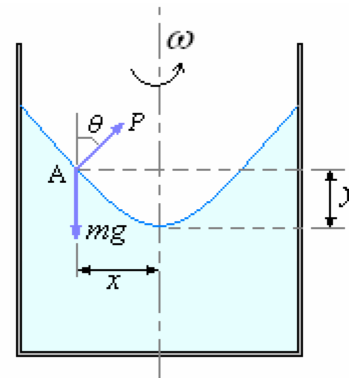
$$p_2A - p_1A - \rho yAg = \rho yAa_x$$

Simplificando: $p_2 - p_1 = \rho gy\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)$

Si el punto 1 estuviera en la superficie del líquido, la presión en un punto cualquiera bajo la superficie a un a profundidad h sería:

$$p = p_a + \rho gy\left(1 + \frac{a_y}{g}\right)$$

Rotación uniforme alrededor de eje vertical.
Si un recipiente abierto parcialmente lleno con un líquido rota alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante, no hay movimiento relativo entre las partículas, la superficie que inicialmente era horizontal toma una forma parabólica como lo demostraremos a continuación.



En la figura, consideremos una partícula de masa m en el punto A, aplicando la segunda ley de Newton se tiene:

En el eje x: $\sum F_x = ma_x$

$$\Rightarrow P\text{sen}\theta = m\omega^2 x \qquad (1)$$

En el eje y: $\sum F_y = 0$

$$\Rightarrow P\cos\theta - mg = 0 \text{ o } P\cos\theta = mg \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Como la pendiente de la curva en A es $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$, tenemos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g} \Rightarrow dy = \frac{\omega^2}{g} x dx$$

Integrando: $y = \dfrac{\omega^2 x^2}{2g} + C$

Para evaluar la constante, tenemos que para $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 0$, por lo tanto $C = 0$.

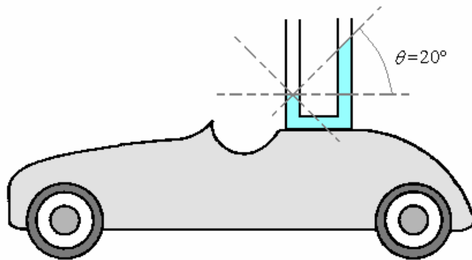
Finalmente:

$y = \dfrac{\omega^2 x^2}{2g}$, ecuación de la parábola.

La presión manométrica a una profundidad h del vértice de la parábola será:

$$p = \rho g(h + y) = \rho g\left(h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}\right)$$

Ejemplo 42. Sobre un automóvil de carreras se instala un tubo en U lleno de agua. El conductor acelera uniformemente desde el arranque, al cabo de 5 segundos el agua contenida en el tubo tiene la posición señalada en la figura. ¿Cuáles son la aceleración y la velocidad del automóvil en ese instante? (No tome en cuenta los efectos viscosos transitorios del agua del tubo).



Solución.
Observamos en el esquema que la gravedad efectiva es normal a la línea trazada por los extremos de la columna de agua. Sus extremos están a la presión atmosférica y quedan en una línea de presión constante. Podemos calcular fácilmente la magnitud de a:

$$a = g\tan\theta = g\tan 20^\circ = 9{,}81 \times 0{,}364$$
$$= 3{,}57 \text{ m/s}^2$$

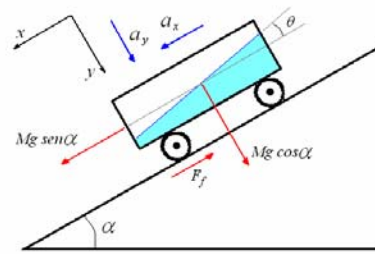
La magnitud de la velocidad del automóvil se determina de la siguiente ecuación:

$$a = \frac{dx}{dt} = 3{,}57 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Integramos y para $t = 5$ s:

$$v = 3{,}57t = (3{,}57)(5) = 17{,}85 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 64 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ejemplo 43. Un tanque abierto, lleno de agua, rueda sobre un plano inclinado, que forma un ángulo α con la horizontal. Si el tanque tiene una masa M y la fuerza producida por la resistencia del aire y la fricción en ruedas es F_f, ¿qué ángulo formaría la superficie del agua con el fondo del tanque?



Solución.
Primeramente hallemos la aceleración a_x del tanque que desciende por el plano.

$$\sum F_x = Ma_x \Rightarrow$$
$$Mg\text{sen}\alpha - F_f = Ma_x$$

La aceleración será: $a_x = g\text{sen}\alpha - \dfrac{F_f}{M}$

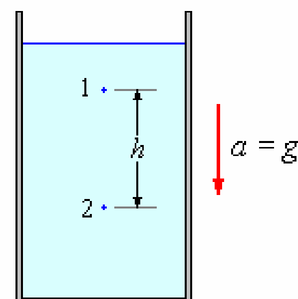
La aceleración perpendicular al fondo del tanque es

$a_y = g\cos\alpha$

El ángulo θ que forma la superficie del agua con el fondo del tanque (dirección x) se encuentra de la siguiente manera:

$$a_x = a_y \tan\theta \Rightarrow$$
$$\tan\theta = \frac{a_x}{a_y} = \frac{g\text{sen}\alpha - F_f/M}{g\cos\alpha}$$

Ejemplo 44. Un tanque sufre una caída libre. Encuentre la diferencia de presión entre dos puntos separados por una distancia vertical h.

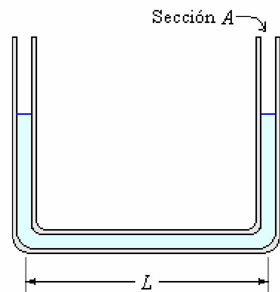


Solución.
La diferencia de presiones entre dos puntos de un fluido que se mueve verticalmente con aceleración a es $(p_2 - p_1) = \rho gh\left(1 + \dfrac{a}{g}\right)$

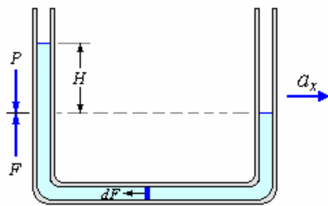
Luego $(p_2 - p_1) = 0$, consecuentemente $p_2 = p_1$

Ejemplo 45. Se tiene un tubo en U de área A y con un fluido de densidad ρ, como se muestra en la

figura. Determinar la diferencia de altura *H* que se producir entre las alturas que alcanza el líquido en cada una de las ramas cuando,
a) Se le imprime una aceleración lineal horizontal.
b) Rote con una velocidad angular constante a alrededor de un eje vertical que coincide con una de sus ramas.



Solución.
a) Solamente la masa de líquido que está en la parte horizontal podrá desplazarse bajo la acción de la aceleración, pues, la masa de líquido que esta en las ramas verticales tiene su movimiento restringido, por ser perpendiculares.



Como todos los elementos diferenciales de masa en la parte horizontal tienen la misma aceleración, la fuerza total será:

$$F = ma = \rho Va = \rho ALa$$

Esta fuerza, al alcanzarse el equilibrio, debe ser igual al peso de la columna de líquido de altura H, que es:

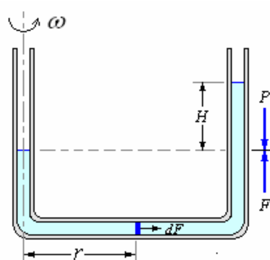
$$P = pA = \rho gHA$$

Luego, igualando $F = P \Rightarrow \rho ALa = \rho gHA$

De donde $H = \dfrac{a}{g}L$

b) En este caso se tiene la acción de la aceleración centrípeta $a_c = \omega^2 r$, al ser horizontal, como en el caso anterior, solo actúan sobre la masa de líquido que está en la parte horizontal del tubo, pero, como es variable, función del radio r, la fuerza sobre cada elemento diferencial de masa será:

$$dF = (dm)a = (\rho Adr)\omega^2 r$$



Integrando, tendremos la fuerza total F :

$$F = \int dF = \omega^2 A\rho \int_0^L rdr = \omega^2 A\rho \frac{L^2}{2}$$

Nuevamente, en equilibrio, la igualaremos: al peso de la columna de líquido de altura H,

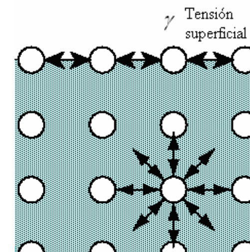
$$F = P \Rightarrow \omega^2 A\rho \frac{L^2}{2} = \rho gHA$$

Finalmente: $H = \dfrac{\omega^2 L^2}{2g}$

TENSION SUPERFICIAL - CAPILARIDAD

TENSIÓN SUPERFICIAL

Entre dos moléculas de un fluido actúan fuerzas. Estas fuerzas, llamadas fuerzas de van der Waals o fuerzas cohesivas son de origen eléctrico. Una de las características de estas fuerzas es que su alcance es muy pequeño (rápidamente se desvanecen cuando la distancia entre las moléculas es dos o tres veces su tamaño); otra característica es que mientras las moléculas no se traslapan, la fuerza es atractiva.
El efecto neto de las fuerzas de cohesión sobre una molécula que está en el interior del líquido es nulo, pero no así para una molécula que se encuentra en la superficie.

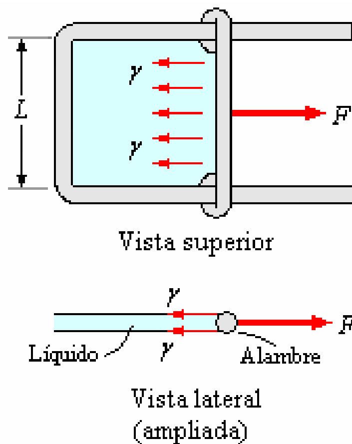


Para poner una molécula en la superficie hay que realizar un trabajo. O sea, la existencia de una superficie en un fluido introduce una energía potencial. Esta energía es proporcional a la superficie y se tiene que

$$dW = \gamma\, dA$$

Aquí γ es una constante que depende del fluido y se llama tensión superficial y *dA* es un elemento (infinitesimal) de superficie. En realidad la tensión superficial depende de las dos sustancias que están en contacto.

Medición de la tensión superficial.
Para medir la tensión superficial se puede usar el dispositivo mostrado en la figura. Un alambre movible, inicialmente sumergido, se tira lentamente, extrayéndolo del líquido (con una película del líquido adosada).



La energía para desplazar la longitud d es Fd y el área de la película se incrementa en $2dL$, considerando que existen dos superficies.
La relación entre la energía necesaria para realizar el desplazamiento y el área incrementada es la tensión superficial

$$\gamma = \frac{\text{Energía}}{\text{Area formada}}$$

En el caso del dispositivo empleado:

$$\gamma = \frac{Fd}{2Ld} = \frac{F}{2L}$$

F es la fuerza paralela a la superficie de la película necesaria para mantener la película extendida. Esta fuerza por unidad de longitud es la tensión superficial γ.
Así la tensión superficial γ no sólo es igual a la fuerza por unidad de longitud; sino también es igual al trabajo hecho por unidad de incremento del área superficial. De ahí que y pueda especificarse en N/m o en J/m^2.

Ejemplo 46. Deseamos encontrar la diferencia de presión entre el interior y exterior de una pompa de jabón de radio R = 1 cm.
Solución.
Si, soplando con una pajita, aumentamos el radio de la pompa de R a $R + dR$, entonces la superficie aumenta en

$$dA = 2\left[4\pi(R+dR)^2 - 4\pi R^2\right] = 16\pi R dR$$

El factor 2 nuevamente se debe a que hay que considerar tanto la superficie interior como exterior de la pompa.
El cambio de energía debido al aumento de la superficie es por lo tanto

$$dW = \gamma\, dA = 16\gamma\pi R dR$$

Por otra parte, podemos evaluar el trabajo directamente, multiplicando el desplazamiento dR por la fuerza $\Delta p\left(4\pi R^2\right)$, es decir,

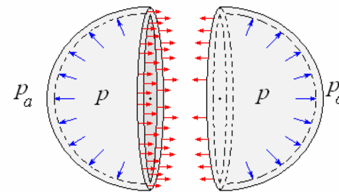
$$dW = \Delta p.4\pi R^2 dR.$$

Igualando las dos últimas expresiones se encuentra la diferencia de presión

$$\Delta p = \frac{4\gamma}{R}.$$

Con γ = 0,025 N/m y R = 0,01 m se obtiene
Δp = 10 N/m^2.
Si se deja de soplar por la pajita, la pompa se desinfla.
Observe que la presión al interior de una pompa de jabón es mayor tanto más pequeño es su radio. De esta observación se deduce que al juntarse una pompa de jabón grande con una pequeña, la pequeña inflará a la más grande. De esta manera la pompa grande aumentará su tamaño mientras que la pequeña disminuirá: en otras palabras, la más grande absorberá a la más pequeña.
Otra manera.

La pompa es una película delgada sostenida por la tensión superficial de dos superficies (la superficie externa y la superficie interna).



$$\Delta p = p - p_a$$

Fuerza debida a la presión dentro de la pompa.

$$F_p = (p - p_a)\pi R^2 = \Delta p \pi R^2$$

Fuerza debida a la tensión superficial de las dos caras de la pompa

$$F_\gamma = \gamma 2(2\pi R) = \gamma 4\pi R$$

Como están en equilibrio:

$$F_p = F_\gamma$$

$$\Delta p \pi R^2 = \gamma 4\pi R$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{4\gamma}{R}$$

La gota y la burbuja.

En el caso de la gota y la burbuja solamente hay una superficie que las encierra por lo tanto:

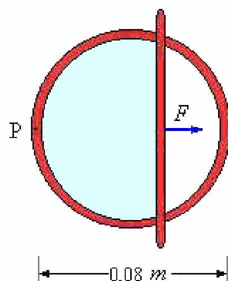
$$F_\gamma = \gamma 2\pi R$$

La diferencia de presión es:

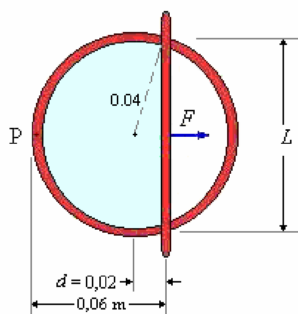
$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$$

Ejemplo 47. Un alambre con forma circular, 0,08 m de diámetro, con un alambre que puede deslizar en él, está en un plano horizontal. Se forma una película

líquida, limitada por los alambres, en el lado izquierdo, como se muestra en la figura. La tensión superficial del líquido es 25 mN/m. una fuerza aplicada *F*, perpendicular al alambre deslizante mantiene a la película en equilibrio.



a) Cuando el alambre deslizante se encuentra a 0,06 m del punto P, la fuerza aplicada *F*, es:
b) Cuando la fuerza *F* es 1,5 mN, la distancia del alambre deslizante al centro del círculo es:
c) Cuál es el valor máximo de la fuerza *F*:
Solución.
a)



$$L = 2\sqrt{0{,}04^2 - 0{,}02^2} = 0{,}069 \text{ m}$$

$$F = \gamma(2L) = 25\frac{\text{mN}}{\text{m}}(2 \times 0{,}069 \text{ m}) = 3{,}46 \text{ mN}$$

b)

$$F' = \gamma(2L') \Rightarrow L' = \frac{F'}{2\gamma}$$

$$L' = \frac{1{,}5}{2 \times 25} = 0{,}03 \text{ m}$$

Luego

$$d = \sqrt{0{,}04^2 - 0{,}03^2} = 0{,}026 \text{ m}$$

c)

$$F_{max} = \gamma(2L_{max}) = 25(2 \times 0{,}08) = 4{,}0 \text{ mN}$$

Ejemplo 48. Cuál es el trabajo requerido para formar una pompa de jabón de radio R, usando una solución jabonosa de tensión superficial γ.
Solución.

Como $\gamma = \dfrac{\text{Energía}}{\text{Area formada}} = \dfrac{\Delta W}{\Delta A}$

$\Rightarrow \Delta W = \gamma \, \Delta A$

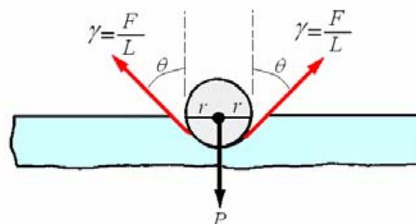
Siendo $\Delta A = 2(4\pi R^2) = 8\pi R^2$
Obtenemos:

$$\Delta W = \gamma 8\pi R^2$$

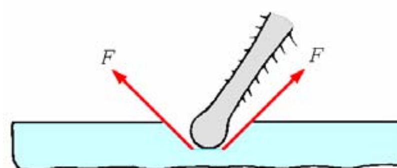
INSECTOS QUE CAMINAN SOBRE EL AGUA.



Debido a la tensión superficial, los insectos pueden caminar sobre el agua y cuerpos más densos que ésta, como una aguja de acero, pueden flotar realmente sobre la superficie. La figura muestra cómo puede soportar el peso *P* de un objeto la tensión superficial. En realidad, *P* es el "peso efectivo" del objeto (su peso verdadero menos la fuerza de empuje) puesto que el objeto se sumerge ligeramente en el fluido.



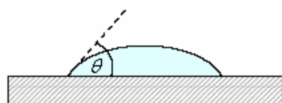
Si el objeto tiene forma esférica, que es aproximadamente la forma que tienen las patas de los insectos, la tensión superficial actúa en todos los puntos a lo largo de un círculo de radio r. Sólo la componente vertical, $\gamma \cos\theta$, actúa para equilibrar *P*. En consecuencia la fuerza neta ascendente debida a la tensión superficial es $2\pi r \gamma \cos\theta$.



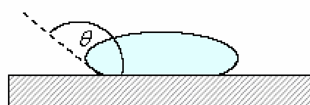
Tensión superficial actuando sobre la pata de un insecto.

ADHESIÓN Y COHESIÓN.
En las superficies de un líquido algunas de sus moléculas dejan el líquido por evaporación, pero no todas. Existe una fuerza de atracción entre las moléculas de un líquido, por ejemplo una gota de mercurio tiene la tendencia a asumir la forma esférica, esto es, una superficie de área mínima, consistente con la fuerza atractiva entre moléculas, esta propiedad es conocida como **cohesión.**
La atracción que existe entre las moléculas de dos sustancias diferentes, como la atracción que hay entre el líquido y las paredes del recipiente que lo contiene, es la propiedad conocida como **adhesión.**

Consideremos una pequeña cantidad de líquido en contacto con una superficie sólida plana y ambos en contacto con un gas.
Si la fuerza de adhesión (entre el líquido y el sólido) es mucho mayor que la fuerza de cohesión (entre las moléculas del líquido), entonces el líquido tenderá a esparcirse sobre el sólido. En este caso se dice que el líquido moja al sólido,

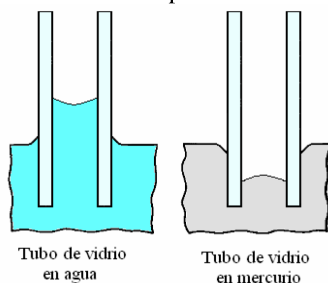


Si la fuerza de cohesión es mayor entonces el líquido tenderá a concentrarse, adquiriendo una forma compacta tipo gota

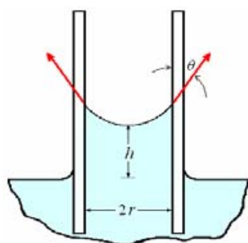


Como resultado de esta competencia entre las distintas fuerzas de adhesión y cohesión, se forma un ángulo de contacto θ bien característico entre el líquido y el sólido.
Experimentalmente se determina que este ángulo de contacto para las substancias, en el caso $\theta < 90^o$ el fluido es humectante, o sea moja al sólido y cuando $\theta > 90^o$ el fluido es no humectante.

CAPILARIDAD
En tubos que tienen diámetros muy pequeños se observa que los líquidos se elevan o se hunden en relación con el nivel del líquido de los alrededores. Este fenómeno se conoce por capilaridad y dichos tubos delgados se llaman capilares. El que un líquido suba o baje depende de los esfuerzos relativos de las fuerzas adhesivas y cohesivas. Así, el agua sube en un tubo de vidrio en tanto que mercurio baja.



La cantidad real que sube (o que baja) depende de la tensión superficial (puesto que es ésta la que mantiene unida a la superficie del líquido), así como del ángulo de contacto θ, y el radio r del tubo. Para calcular h, la altura que nos referiremos a la figura siguiente.



La tensión superficial γ actúa en un ángulo θ alrededor de un círculo de radio r. La magnitud de la fuerza vertical F debida a la tensión superficial es $F = (\gamma\cos\theta)(2\pi r)$. Esta fuerza está equilibrada por el peso del líquido de abajo que es aproximadamente un cilindro de altura h y volumen $V = \pi r^2 h$. En consecuencia,

$$2\pi r\gamma\cos\theta = mg$$

Como $mg = \rho Vg = \rho\pi r^2 hg$, donde ρ es la densidad del líquido, tenemos:

$$2\pi r\gamma\cos\theta = \rho\pi r^2 hg$$

Resolviendo para h encontramos

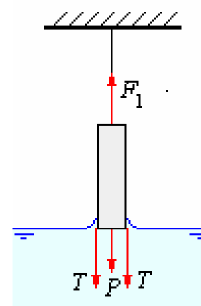
$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

Para mayor parte de los líquidos como el agua en un vaso, θ, es casi cero y

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}$$

Esta ecuación también se cumple cuando desciende el líquido, como en el caso del mercurio en un tubo de vidrio. En esta situación, el ángulo de contacto mayor que 90° y $\cos\theta$ será negativo; esto hace h negativa lo que corresponde a un descenso de nivel.
Note que mientras más delgado sea el tubo mayor será el ascenso (o descenso) del líquido.

Ejemplo 49. Un cuadrado cuyas aristas miden 6 cm hecho de una placa delgada de metal se suspende verticalmente de una balanza tal que el borde inferior de la hoja se moja en agua de tal forma que es paralela a la superficie. Si la hoja está limpia, el ángulo de contacto es 0º, y la hoja parece pesar 0,047 N. Si la hoja esta grasosa, el ángulo de contacto es 180º y el peso parece ser 0,030 N. ¿Cuál es la tensión superficial del agua?
Solución.
Cuando la hoja está limpia



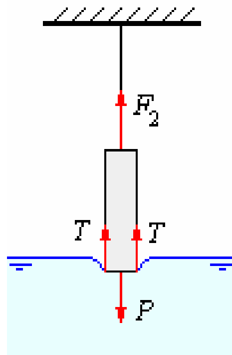
La fuerza de tensión superficial en cada cara de la placa es:

$$T = \gamma L$$

No tomaremos en cuenta las partes del espesor, por ser placa delgada.
Como hay equilibrio vertical

$$F_1 = P + 2T, \quad (1)$$

Cuando la hoja está grasosa



$F_2 = P - 2T$ (2)

Restando (2) de (1):

$$T = \frac{F_1 - F_2}{4} \Rightarrow \gamma L = \frac{F_1 - F_2}{4}$$

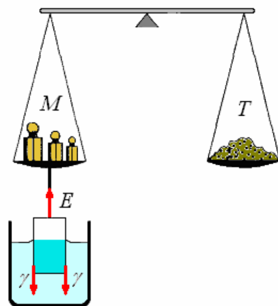
$$\Rightarrow \gamma = \frac{F_1 - F_2}{4L}$$

Reemplazando valores:

$$\gamma = \frac{0,047 - 0,030}{4(0,06)} = \frac{0,017}{0,24}$$

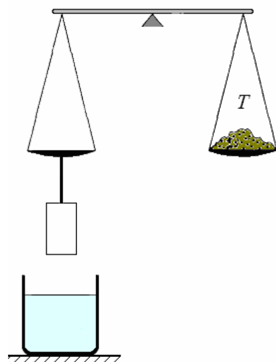
$= 0,071$ N/m

Ejemplo 50. Del platillo de una balanza se cuelga un cuerpo cilíndrico de vidrio cerrado por su base inferior, de 1 cm de radio y 4 cm de altura, y se pone tara en el otro platillo hasta conseguir el equilibrio. Se sumerge el cuerpo en agua destilada a 4º C hasta la mitad de su altura exactamente. Para restablecer el equilibrio hace falta poner en el platillo del cuerpo pesas por valor de 5,8 g. Calcular el coeficiente de tensión superficial del agua. El ángulo de contacto se supone de cero grados, es decir, que el menisco es tangente a la superficie lateral del cilindro.



Solución.

La tara T equilibra al sistema

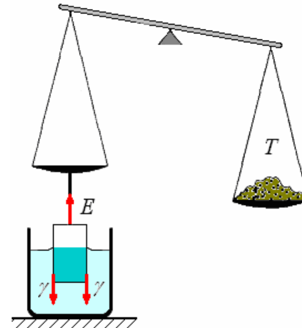


Cuando el cuerpo cilíndrico de vidrio cerrado se sumerge en agua aparecen las fuerzas de empuje y la de tensión superficial

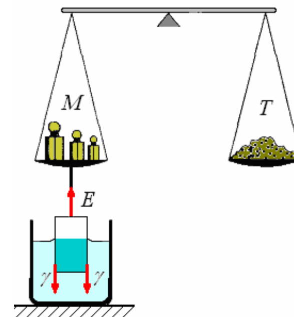
La tensión superficial actúa a lo largo del contacto del líquido con el cilindro. La fuerza hacia abajo debida a ella es:

$F = 2\pi R\gamma$

El empuje vale: $E = V_s\rho_a g = \pi R^2 \frac{h}{2}\rho_a g$



Para volver al equilibrio (balanza horizontal) se colocan las pesas en el platillo izquierdo de la balanza (peso Mg), esto anula la acción del empuje E y a la fuerza de la tensión superficial F.



Por lo tanto

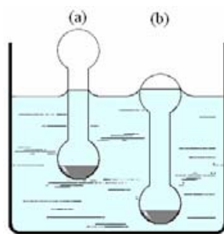
$$E = F + Mg \Rightarrow \pi R^2 \frac{h}{2}\rho_a g = 2\pi R\gamma + Mg$$

$$\gamma = \frac{\pi R^2 hg - 2Mg}{4\pi R}$$

$$= \frac{\pi(10^{-2})^2(4\times 10^{-2})(10^3)(9,8) - 2(5,8\times 10^{-3})(9,8)}{4\pi(10^{-2})}$$

$= 75,36 \times 10^{-3}$ N/m

Ejemplo 51. Tenemos unas ampollitas de vidrio de paredes muy estrechas en la forma indicada en la figura. La ampollita va lastrada en su parte inferior con mercurio para que se mantenga en la posición de la figura (a) al dejarla sobre el nivel de un recipiente con agua. Sumergimos el sistema hasta la posición de la figura (b). Debería recobrar la posición a, pero se queda en la b. ¿Por qué? El ángulo de contacto se supone de cero grados



Solución.
Llamamos r y R los radios de la parte cilíndrica y de la esferita, respectivamente: $R > r$.
En la posición (a) el valor de la tensión superficial es:

$$F = 2\pi r\gamma$$

Y al estar en equilibrio, el empuje ha de ser igual al peso más la fuerza correspondiente a la tensión superficial:

$$E = P + 2\pi r\gamma$$

Al sumergir la ampollita la fuerza debida a la tensión superficial es: $F' = 2\pi R\gamma$
Y se habrá de verificar:

$$E' = P + 2\pi R\gamma \, .$$

Y como el peso es el mismo, nos queda:

$$E - 2\pi r\gamma = E' - 2\pi R\gamma \Rightarrow$$

$$V\rho g - 2\pi r\gamma = V'\rho g - 2\pi R\gamma$$

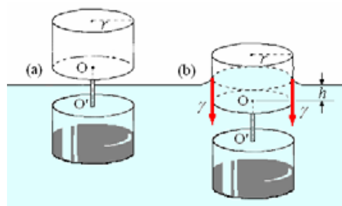
$$\Rightarrow \frac{V' - V}{R - r} = \frac{2\pi\gamma}{\rho g}$$

Condición que se debe cumplir para que exista el segundo equilibrio.

Ejemplo 52. Los cilindros huecos y cerrados de la figura son de vidrio y están unidos por la varilla OO'; el inferior se ha lastrado con el mercurio necesario para que el sistema flote en un líquido, con el cilindro inferior sumergido. Sumergimos el sistema hasta que quede también flotando en la forma de la figura (b), sin recobrar la primitiva posición (a).
Demostrar que se debe cumplir:

$$rh = 2\gamma / \rho g \, ,$$

γ es la tensión superficial y
ρ es la densidad del líquido respectivamente.
Se supone la varilla OO' infinitamente delgada, que el líquido moja al vidrio y que el ángulo de contacto es nulo.
Solución.



En el primer equilibrio: $Mg = V\rho g$.
V = volumen del cilindro inferior.
En el segundo equilibrio:

$$Mg + 2\pi r\gamma = V\rho g + \pi r^2 h\rho g$$

Luego teniendo en cuenta la primera, nos queda:

$$2\pi r\gamma = \pi r^2 h\rho g \Rightarrow rh = \frac{2\gamma}{\rho g}$$

Ejemplo 53. Ocho gotas de mercurio de radio r se unen para formar una sola. ¿Qué relación existe entre las energías superficiales antes y después de la unión?
Solución.
El volumen de la gota formada, que tendrá por radio R, será ocho veces mayor que el volumen de una de las gotas pequeñas:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 8\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R^3 = 8r^3 \Rightarrow \frac{R}{r} = 2$$

La energía superficial de las ocho gotas será ocho veces la energía de una sola:

$$W = 8\gamma 4\pi r^2 = 32\gamma\pi r^2$$

Y de la gota resultante: $W' = \gamma 4\pi R^2 = 4\gamma\pi R^2$

Dividiendo: $\frac{W}{W'} = 8\frac{r^2}{R^2} = 8\frac{1}{4} = 2$

La disminución que experimenta la superficie del mercurio (o de otro líquido cualquiera) al juntarse las gotas pequeñas para formar una grande, libera una determinada energía que se emplea en calentar la gota. Por el contrario cuando una gota grande se divide en otras más pequeñas, se produce un aumento de energía en la película superficial y, como consecuencia un determinado enfriamiento de las gotas.

Ejemplo 54. El aceite de olivo tiene una tensión superficial respecto del aire de 32 mN/m. Una gota esférica tiene un diámetro de 4 mm. Calcular:
a) La presión a que está sometida.
b) La fuerza total a la que está sometida, debida a la tensión superficial que actúa sobre su superficie.
c) La energía potencial de superficie.
Solución.

a) $p = \frac{2\gamma}{r} = \frac{2\left(32\times 10^{-3}\right)}{2\times 10^{-3}}$
= 32 Pa

b) $F = pA = p4\pi R^2 = 32\times 4\pi\left(2\times 10^{-3}\right)^2$
= 1,608 mN

c) $W = \gamma A = \gamma 4\pi R^2 = \left(32\times 10^{-3}\right)4\pi\left(2\times 10^{-3}\right)^2$
= 1,608 μJ

Ejemplo 55. Calcular la energía superficial de una pompa de agua jabonosa de 1 cm de radio y la presión debida a su curvatura. Consideramos el espesor de la película líquida como despreciable. Tensión superficial = 35 x 10^{-5} N/cm.
Solución.

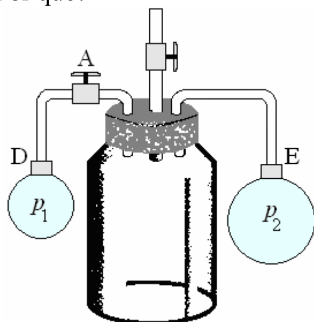
$$W = 2\gamma A = 2\gamma 4\pi R^2 = 2\left(35\times 10^{-3}\right)4\pi\left(10^{-2}\right)^2$$

= 87,96 μJ

$$p = 2\frac{2\gamma}{r} = \frac{4\left(35\times 10^{-3}\right)4\pi\left(10^{-2}\right)^2}{10^{-2}}$$

= 14 Pa

Ejemplo 56. En un dispositivo como el de la figura se han conseguido dos pompas de agua jabonosa en los extremos D y E de los tubos. La llave A incomunica el aire interior de las dos pompas. Abierta tal llave, la pequeña se achica y la grande aumenta de volumen. ¿Por qué?



Solución.
Las presiones del gas interior de las pompas pequeña y grande, respectivamente, exceden a la atmosférica en: $p_1 = 2\frac{2\gamma}{r}$ $p_2 = 2\frac{2\gamma}{R}$.
Al ser $r < R$, se ha de verificar que $p_1 > p_2$, y el aire pasa de la pompa pequeña a la grande

Ejemplo 57. Sabiendo que la tensión superficial del agua es 75 x 10^{-3} N/m. Calcular la altura a que asciende el agua en un tubo de 1 mm de diámetro y en unas láminas cuadradas paralelas cuya distancia es 0,05 mm. Se supone el ángulo de contacto igual a cero.
Solución.
Como el líquido no moja: $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$, luego:

$$h_1 = \frac{2\gamma}{r\rho g} = \frac{2(75\times10^{-3})}{(5\times10^{-4})(10^3)(9,8)}$$

= 0,031 m
La altura alcanzada entre dos láminas paralelas es:

$$h_2 = \frac{2\gamma\cos\theta}{d\rho g} = \frac{2(75\times10^{-3})}{(5\times10^{-5})(10^3)(9,8)}$$

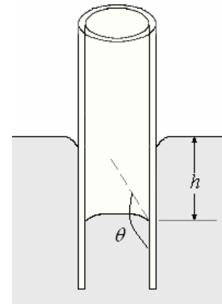
= 0,31 m

Ejemplo 58. El tubo de un barómetro de mercurio (tensión superficial, 547 x 10^{-3} N/m; ángulo de contacto, 125°) tiene 3 mm de diámetro. ¿Qué error introduce en las medidas la tensión superficial?
Solución.

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g} = \frac{2(547\times10^{-3})\cos125^o}{(1,5\times10^{-3})(13600)(9,8)}$$

= -0,003 m
El signo menos nos indica que la medida es inferior a la correcta.

Ejemplo 59. Sabiendo que la tensión superficial del mercurio es 547 dina/cm y que el ángulo de contacto con un tubo de 1 mm de diámetro y con unas láminas paralelas separadas 0,05 mm es de 125°, calcular la altura que desciende el mercurio al introducir tubo y láminas en una cubeta con dicho líquido.



Solución.
Hacemos este problema y los dos siguientes en el sistema cgs.
a) En el tubo

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g}$$

$$= \frac{2(547)\cos125^o}{(0,05)(13,6)(980)} = -1 \text{ cm}$$

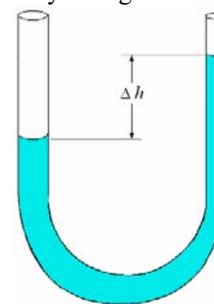
b) En las láminas

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{d\rho g}$$

$$= \frac{2(547)\cos125^o}{(0,005)(13,6)(980)} = -10 \text{ cm}$$

El signo menos indica el descenso.

Ejemplo 60. En un tubo en U cuyas ramas son de 0,6 mm y 0,6 cm de diámetro se introduce un líquido de densidad 1,8 g/cm^3 y de 32 dina/cm de tensión superficial. ¿Cuál será la diferencia de nivel del líquido en las dos ramas del tubo, si éste se encuentra en posición vertical y el ángulo de contacto es 32°?



Solución.

$$\Delta h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$$= \frac{2(32)\cos32^o}{(1,8)(980)}\left[\frac{1}{0,03} - \frac{1}{0,3}\right] = 1 \text{ cm}$$

Ejemplo 61. En un experimento para calcular el ángulo de contacto entre un líquido y el vidrio se han obtenido los siguientes datos: densidad del líquido, 0,8 g/cm^3; radio del capilar, 0,5 mm; elevación en el

tubo capilar, 1,2 cm; tensión superficial del líquido 28 dina/cm. Calcular dicho ángulo.

Solución.

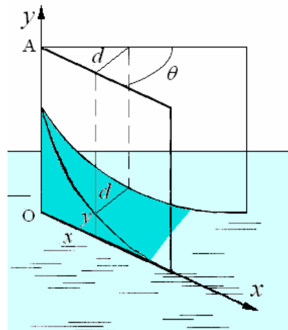
$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{r\rho g}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{r\rho gh}{2\gamma} = \frac{(0,05)(0,8)(9,8)(1,2)}{2(28)}$$

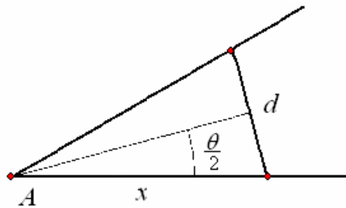
$= 0,84$

$$\Rightarrow \theta = 32^{\circ}\ 51'\ 36''$$

Ejemplo 62. Demostrar que la línea de contacto de un líquido con dos láminas de vidrio verticales que forman entre sí un ángulo diedro muy pequeño es una hipérbola equilátera.



Solución.



Tomaremos los ejes sobre una de las láminas:

$$y = \frac{2\gamma\cos\theta}{d\rho g} \quad d = 2x\text{sen}\frac{\theta}{2}$$

Luego

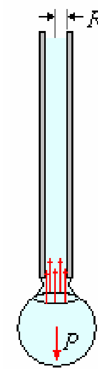
$$y = \frac{\gamma\cos\theta}{x\rho g\,\text{sen}\frac{\theta}{2}} \Rightarrow$$

$$xy = \frac{\gamma\cos\theta}{g\rho\,\text{sen}\frac{\theta}{2}} = \text{constante} \text{ (l. q. d.)}$$

Ley de Tate de la formación de gotas mediante un cuentagotas.

Consideremos un gotero con agujero de salida de radio *R*,

El liquido ira saliendo formando la gota, la que se mantendrá unida al cuentagotas mientras la tensión superficial la mantenga. Cuando el peso de la gota iguale a la tensión superficial, esta caerá como gota suelta.



Sea γ la tensión superficial del líquido, consideremos el ángulo de contacto cero.

$$\sum F_V = 0$$

$$P - 2\pi R\gamma = 0 \Rightarrow P = Mg = 2\pi\gamma R$$

Ejemplo 63. El estalagmómetro, aparato destinado a la medida de tensiones superficiales, es una pipeta de la que se vierte gota a gota, en una primera experiencia, el líquido problema, contándose el número de gotas *n* correspondientes a un determinado volumen: se repite el recuento para el mismo volumen de agua, obteniéndose *n*' gotas. Determina la tensión superficial del líquido (γ) conocida la del agua (γ') y las densidades $(\rho \ y \ \rho')$ de ambos líquidos.

Solución.

Las masas de una gota de líquido y de agua son:

$$M = \frac{V\rho}{n} \quad M' = \frac{V\rho'}{n'}$$

Por división, y teniendo en cuenta la ley de Tate (ley del cuentagotas):

$$\frac{M}{M'} = \frac{\rho}{\rho'}\frac{n'}{n} = \frac{\gamma}{\gamma'} \Rightarrow \gamma = \gamma'\frac{\rho}{\rho'}\frac{n'}{n}$$

Ejemplo 64. En el platillo izquierdo de una balanza se coloca una tara; en el derecho un vasito y pesas de masa M_1 hasta equilibrarla. Se quitan las pesas y se vierte en el vaso con un cuentagotas, *n* gotas de un líquido; se vuelve a equilibrar la balanza (la misma tara) con pesas de masa M_2. Se quitan éstas y se vierten en el vasito, sobre el líquido, *n* gotas de agua. Se consigue de nuevo el equilibrio con pesas de masa M_3. Conocida la constante de tensión superficial del agua γ' determinar la del líquido (γ).

Solución.

Masa de n gotas de líquido:

$$nM = M_1 - M_2$$

Masa de *n* gotas de agua:

$$nM' = M_2 - M_3$$

Por división obtenemos:

$$\frac{M}{M'} = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

Aplicando la fórmula de Tate al líquido y al agua, nos da:

$$\left.\begin{array}{l} P = Mg = 2\pi r\gamma \\ P' = M'g = 2\pi r\gamma' \end{array}\right\} \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

Igualando:

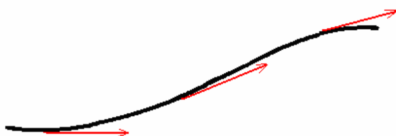
$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

$$\Rightarrow \ \gamma = \gamma' \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

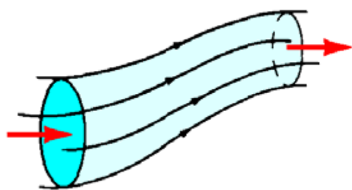
DINÁMICA DE FLUIDOS - MOVIMIENTO DE UN FLUIDO

El flujo describe el cambio en la posición de las partículas del fluido en el tiempo.
La descripción op1eta del movimiento de un fluido es compleja por lo tanto, en el tratamiento que utilizaremos será necesario suponer algunas simplificaciones.
En particular, no analizaremos el comportamiento de cada una de las partículas con los conceptos de la mecánica, sino más bien describiremos las características del movimiento en cada punto del espacio conforme transcurre el tiempo.

LÍNEA DE FLUJO. Es una línea imaginaria continua que denota en cada uno de sus puntos la dirección del vector velocidad del fluido. Las líneas de flujo de un sistema estable nunca se cruzan una a otra (pues una partícula podría seguir dos direcciones) y representan
Un patrón instantáneo de flujo el cual en otro instante puede ser completamente diferente.



Si seleccionamos un número finito de líneas de corriente como se muestra en la figura, esta región tubular se denomina **tubo de flujo**, las fronteras de este son líneas de corriente y por lo tanto ninguna partícula puede cruzar este tubo, comportándose como una verdadera tubería.



CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL FLUJO DE FLUIDOS:

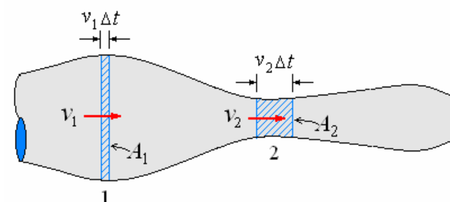
El flujo puede clasificarse como estacionario (o estable) y no estacionario uniforme y no uniforme, laminar (o irrotacional) o turbulento (o rotacional), compresible e incompresible y viscoso y no viscoso.
Un flujo es **estacionario** cuando los parámetros del flujo (velocidad, densidad., presión) son independientes del tiempo y la temperatura o sea que no cambian en el punto (puede ser diferente de punto a punto del espacio). Cuando ocurre lo contrario el flujo es **no estacionario.**
Un flujo en un campo es **uniforme** cuando el vector velocidades constante e igual n todos los puntos de aquel campo y es **no uniforme** cuando el vector velocidad está variando.
Un flujo es **turbulento** cuando las partículas del fluido tienen un movimiento irregular, caótico causando pérdidas de energía proporcionales al cuadrado de la velocidad, lo contrario ocurre cuando el movimiento es suave, ordenado, sus pérdidas son proporcionales a la velocidad y se conoce como flujo **laminar.** (en cada punto no hay velocidad angular respecto a ese punto).
Experimentalmente se ha encontrado que hay una combinación de cuatro factores que determinan si el f1ujo por un tubo es laminar. Esta combinación es conocida domo el **Número de Reynolds**, N_{Re} y se define como

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta}$$

Donde:
ρ = densidad
$\bar{v}$ = velocidad promedio
η = viscosidad .
D = diámetro de la tubería
El número de Reynolds no tiene dimensiones, por lo tanto, es independiente del sistema de unidades utilizado.
Se observa que hasta el va1or de 2000 el flujo es laminar y para valores mayores de 3000 el flujo es turbulento.

ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD.

De la conservación de la masa del líquido en un tubo del flujo, resulta inmediatamente la ecuación de la continuidad.



Consideremos un tubo de flujo constante de un líquido no viscoso; tal como el mostrado en la figura.
Sean 1 y 2 dos sectores cuyas secciones tienen áreas normales al flujo A_1 y A_2, con velocidades v_1 y v_2 respectivamente.
Considere las porciones sombreadas de los líquidos en 1 y 2. Luego, en un intervalo de tiempo Δt la masa de líquido Δm_1 pasa por la sección 1 y la masa Δm_2 que pasa por la sección 2 deben ser iguales, porque las mismas partículas son las que se mueven

en el tubo de flujo, sin haber ingresado o salido partículas. Tal que $\Delta m_1 = \Delta m_2$.

Pero $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$ y

$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$

Donde ΔV_1 y ΔV_2 son los volúmenes del líquido en las secciones 1 y 2 respectivamente y ρ_1 y ρ_2 son las densidades del líquido en 1 y 2.

De tal manera que: $\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow$

$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

Si consideramos el fluido incompresible o poco incompresible como los líquidos.

$\rho_1 = \rho_2$, y $\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2 \Rightarrow Av = \text{Constante}$

Ahora $Av = \text{Constante}$

$$Av = \text{área} \times \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{Volumen}}{\text{tiempo}} = \text{Gasto } (G)$$

A esta razón de flujo de volumen $G = Av$ = constante, se le conoce con el nombre de GASTO o CAUDAL y sus unidades son m^3/s.

Ejemplo 65. El agua fluye en una manguera de jardín de diámetro interior 2 centímetros a una velocidad de 1,2 m/s. ¿Con qué velocidad emergerá de un eyector del diámetro 0,5 centímetros?

Solución.

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi (0,01)^2}{\pi (0,025)^2}(1,2) = 4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 66. Calcule la velocidad media de la sangre en la aorta (radio 1 centímetro) cuando el caudal es 5 litros/min.

Solución.

$$Caudal = \frac{5 \text{ litros}}{\text{min}} = \frac{5000 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}} = 83,33 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$Caudal = Av$$

$$\Rightarrow v = \frac{Caudal}{A} = \frac{83,33}{\pi (1)^2} = 26,54 \text{ cm/s}$$

Ejemplo 67. Una manguera de 2 cm. de diámetro por la que fluye agua a una velocidad de 3m/s. termina en un tubo cerrado que tiene 50 orificios pequeños de 0,2cm de diámetro. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua en cada agujero?

Solución.

Por la ecuación de la continuidad

$$A_1 v_1 = 50 A_2 v_2 \Rightarrow \pi (1)^2 (3) = 50\pi (0,2)^2 v_2$$

$$v_2 = \frac{3}{50(0,01)} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 68. Cuando se abre poco a poco un caño de agua, se forma un pequeño chorro, un hilo cuyo radio va disminuyendo con la distancia al caño y que al final, se rompe formando gotas.

¿Cuál es la velocidad del agua cuando a recorrido una distancia *h*.?

Solución. La ecuación de continuidad nos proporciona la forma de la superficie del chorrito de agua que cae del grifo, tal como apreciamos en la figura.

La sección trasversal del chorro de agua cuando sale del caño es A_0, y la velocidad del agua es v_0. Debido a la acción de la gravedad la velocidad v del agua se incrementa. A una distancia h del grifo la velocidad es

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

Aplicando la ecuación de continuidad

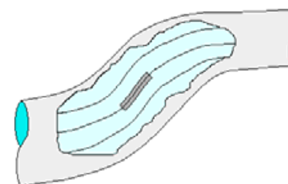
$$A_0 v_0 = Av \Rightarrow \pi r_0^2 v_0 = \pi r^2 v$$

Despejamos el radio r del hilo de agua en función de la distancia h al caño.

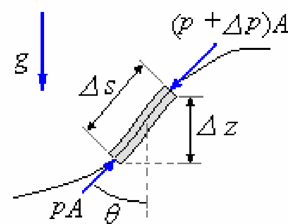
$$r = r_0 \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gh}}$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI.

Al aplicar las leyes de Newton a los fluidos en movimiento se obtiene la ecuación de Bernoulli.



Tomemos una partícula de fluido de forma prismática (sección A largo Δs) que se mueve a lo largo de una línea de flujo en la dirección s. La partícula prismática se muestra en detalle en la siguiente figura.



Considerando un fluido no viscoso, o sea, que no hay pérdidas de energía, aplicamos la segunda ley de Newton

$$\sum F_s = ma_s$$

Las fuerzas que actúan son el peso y las fuerzas debido a las presiones p y $p + dp$, la masa de la partícula es $\Delta m = \rho A \Delta s$

Luego:

$$pA - (p + \Delta p)A - \rho g A \Delta s \cos\theta = \rho A \Delta s\, a_s$$

Simplificando y dividiendo entre Δs :

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} + \rho g \cos\theta + \rho a_s = 0$$

En el límite $\Delta s \to 0$

$$\frac{dp}{ds} + \rho g \cos\theta + \rho a_s = 0 \quad (1)$$

Como

$$\cos\theta = \frac{dz}{ds} \text{ y } a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds}$$

Por consiguiente la ecuación (1) puede escribirse:

$$\frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} + \rho v \frac{dv}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \; dp + \rho g dz + \rho v dv = 0$$

Si ρ constante, integrando obtenemos:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$$

Expresión que es la ecuación de Bernoulli. La misma que puede ser obtenida por la conservación de la energía, siendo por supuesto, equivalente.

Como la ecuación de Bernoulli es válida para cualquier sección, entre dos puntos cualesquiera, se podrá escribir:

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Adicionalmente podemos decir que cuando existen pérdidas por la presencia de fuerzas viscosas, ésta expresión de la ecuación de Bernoulli se modificará escribiéndose.

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \text{pérdidas}$$

APLICACIONES:

Fluido en reposo

$$v_1 = v_2 = 0 \;\rightarrow\; p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

$$p_2 - p_1 = \rho g (y_1 - y_2)$$

Es decir, la presión disminuye con la altura (aumenta con la profundidad).

Fórmula de Torricelli: Permite calcular la velocidad v_2 con que sale un líquido de un recipiente con un agujero a una distancia h de la superficie.

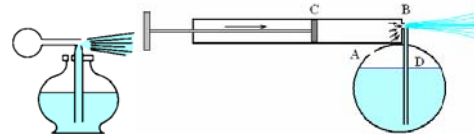
$$p_1 = p_2 = p_a,\; y_1 = 0,\; y_2 = -h \text{ y } v_1 \approx 0$$

$$p_a = p_a - \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \;\Rightarrow\; v_2 = \sqrt{2gh}$$

que es la misma velocidad que tendría en caída libre desde una altura h .

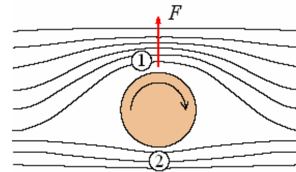
El atomizador.

La presión en el aire soplado a alta velocidad a través de la parte superior del tubo vertical de **atomizador.** Un atomizador de perfume o de un rociador de insecticida es menor que la presión normal del aire que actúa sobre la superficie del líquido en el frasco, así el perfume es empujado hacia arriba del tubo debido a la presión reducida en la parte superior.



EFECTO MAGNUS.

Consideremos un cilindro (o una esfera) en un fluido en movimiento. Si el cilindro rota en torno a un eje perpendicular a la corriente del fluido, y además hay roce viscoso entre le cilindro y el fluido, entonces el cilindro arrastrará al fluido haciendo que las velocidades del fluido a ambos lados del cilindro no sean iguales. En el caso mostrado en la figura adjunta, la velocidad es mayor arriba que abajo.

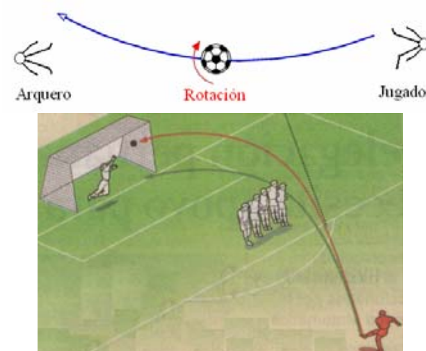


De acuerdo a la ecuación de Bernoulli, la presión en el lugar 1 serán inferior que en el lado 2 $(p_1 < p_2)$.

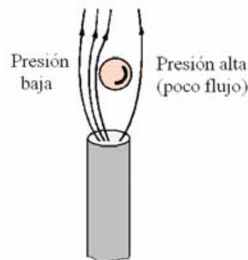
Esta diferencia de presión genera una fuerza neta sobre el cilindro hacia arriba.

Es este efecto, llamado efecto Magnus, el responsable de los así llamados “efectos” que pueden observarse en numerosos juegos de pelota.

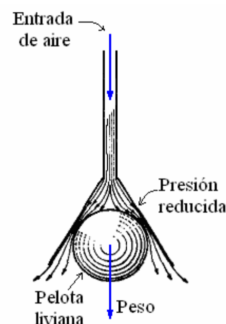
Suponga que una bola es pateada de tal manera que va rotando a la derecha sobre un perpendicular del eje a su dirección móvil durante su movimiento a la izquierda (véase la figura). Entonces la bola experimentaría la fuerza de Magnus. Así la bola se mueve con una trayectoria curvada hacia la derecha del arquero.



Una bola en un chorro de aire.
Una bola ligera se puede mantenido en un chorro de aire como se muestra en la figura. Una pelota de ping-pong puede hacerse flotar sobre un chorro de aire (algunas aspiradoras pueden soplar aire), si la pelota comienza a dejar el chorro de aire, la presión más alta de afuera del chorro empuja la pelota de nuevo hacia éste como se muestra en la figura siguiente.



Levantar una bola con un embudo.
En el espacio entre la superficie del embudo y la superficie de la bola la presión es menor que la presión atmosférica, y esta diferencia de presión soporta la bola contra la acción de la gravedad.



Una bola ligera apoyada por un jet del aire. La presión sobre la bola es menos que debajo de ella.

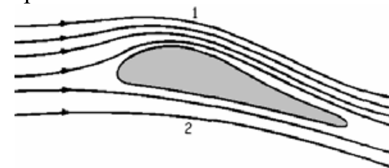
Efecto chimenea.
¿Por qué sube el humo por una chimenea? En parte se debe a que el aire caliente se eleva (es decir, debido a la densidad). Pero el principio de Bernoulli también tiene un lugar importante. Debido a que el viento sopla a través de la parte superior de la chimenea, la presión es menor ahí que dentro de la casa. Por eso el aire y el humo son empujados hacia arriba de la chimenea. Incluso en una noche calmada, existe el flujo de aire suficiente en el ambiente en el extremo superior de 1 chimenea para permitir el flujo ascendente del humo.
Si las tuzas, perros de la pradera, conejos y otros animales que viven bajo el no se asfixian, el aire debe circular en sus madrigueras. Estas siempre tienen por lo menos dos entradas. La velocidad del flujo del aire a través de los diferentes hoyos por lo regular será un poco distinta. Esto conduce a una pequeña diferencia de presión que fuerza al flujo de aire a través de la madriguera por el principio de Bernoulli. El flujo de aire se intensifica si un hoyo está más arriba que el otro (lo que a menudo hacen los animales) puesto que la velocidad del viento tiende a incrementarse con la altura.

La ventilación en una mina.



La ventilación en una mina responde a tres propósitos principales: para proporcionar el aire fresco para la respiración de los mineros, diluir los gases nocivos que puedan ser formados subterráneamente.
En un túnel horizontal simple de minería generalmente es suficiente la ventilación natural utilizando la diferencia en la presión de aire asociada a la diferencia en nivel entre dos aberturas, la entrada de la mina y la parte superior de un eje de ventilación (efecto chimenea).

Empuje sobre las alas de un avión.
Una superficie aerodinámica como el ala de un avión se diseña de tal modo que perturba las líneas de corriente del fluido en una región de espacio, dejando la otra no perturbada.

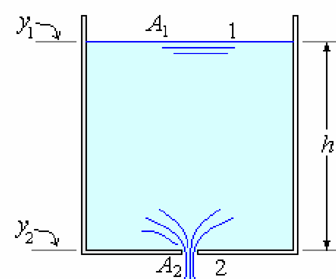


Las, líneas de corriente encima del ala son comprimidas y las que se encuentran debajo del ala permanecen no perturbadas, resultando el flujo mayor en la parte superior.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como $v_1 > v_2$, resulta $p_2 > p_1$
Produciendo una fuerza de empuje hacia arriba.
En realidad, el principio de Bernoulli es sólo un aspecto de la sustentación de un ala. Las alas se inclinan un poco hacia arriba, de modo aire que choca contra la superficie inferior se desvíe hacia abajo; el cambio en la cantidad de movimiento de las moléculas de aire que rebotan deviene en una fuerza ascendente adicional sobre el ala. De igual modo la turbulencia desempeña una función de gran importancia.

Ejemplo 69. Velocidad de salida de un líquido
Velocidad de salida de un líquido a través de un orificio



Solución. Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2 tenemos

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como en 1 y 2 la presión es la presión atmosférica, la expresión se reduce a

$$\rho g y_1 - \rho g y_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow$$

$$g(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad (1)$$

Por la ecuación de la continuidad $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 \quad (2)$$

Como $(y_1 - y_2) = h$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$gh = \frac{1}{2}\left[v_2^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}v_2\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow gh = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]v_2^2$$

Finalmente:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

Si $A_1 >> A_2$:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Resultado que es igual al caso de un orificio lateral.

Tiempo de vaciado. Podemos calcular el tiempo de vaciado.

Para este cálculo usaremos la velocidad con que baja el fluido, es decir v_1

Como $v_1 = \frac{dy}{dt} = \frac{A_2}{A_1}v_2$

$$v_1 = \frac{dy}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{\frac{2gy}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

$$dt = -\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g}}\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

Integrando: $t = -\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g}}\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{y}}$

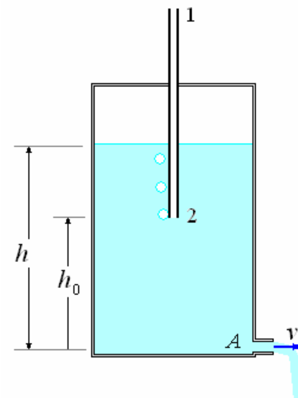
$$= \frac{2A_1}{A_2}\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g}}h^{1/2}$$

El frasco de Mariotte.

La velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en su fondo es la misma que la que adquiere un cuerpo que cayese libremente en el vacío desde una altura *h*, siendo *h* la altura de la columna de fluido.

$$v = \sqrt{2gh}$$

A medida que el fluido sale por el orificio, la altura *h* de fluido en el depósito va disminuyendo. Si *A* es la sección del orificio, el gasto $G = Av$, o volumen de fluido que sale por el orificio en la unidad de tiempo no es constante. Si queremos producir un gasto constante podemos emplear el denominado frasco de Mariotte.



Consiste en un frasco lleno de fluido hasta una altura h_0, que está cerrado por un tapón atravesado por un tubo cuyo extremo inferior está sumergido en el líquido. El fluido sale del frasco por un orificio practicado en el fondo del recipiente. En el extremo inferior 2 del tubo, la presión es la atmosférica ya que está entrando aire por el tubo, a medida que sale el líquido por el orificio.

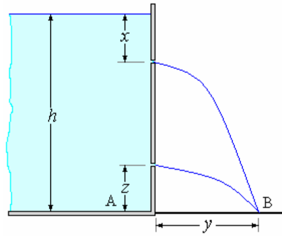
La velocidad de salida del fluido no corresponderá a la altura h_0 desde el orificio a la superficie libre de fluido en el frasco, sino a la altura *h* o distancia entre el extremo inferior 2 del tubo y el orificio.

Dado que *h* permanece constante en tanto que el nivel de líquido esté por encima del extremo inferior del tubo, la velocidad del fluido y por tanto, el gasto se mantendrán constantes. Cuando la altura de fluido en el frasco h_0 es menor que *h*, la velocidad de salida *v* del fluido deja de ser constante.

La velocidad de salida *v* puede modificarse subiendo o bajando el extremo inferior 2 del tubo en el frasco.

Ejemplo 70. En la pared vertical de un depósito hay dos pequeños orificios, uno está a la distancia *x* de la superficie del líquido, y el otro está a una altura *z* sobre el fondo. Los chorros de líquido que salen

encuentran el suelo en el mismo punto, en que relación está *x* y *z*.



Solución.

Si v_1 es la velocidad por la salida superior y t_1 el tiempo que se tarda en alcanzar el punto B:

$$\left.\begin{array}{l} y = v_1 t_1 \\ v_1 = \sqrt{2gx} \\ h - x = \dfrac{1}{2} g t_1^2 \end{array}\right\} h - x = \frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_1^2} = \frac{y^2}{4x}$$

Análogamente, para el orificio inferior:

$$\left.\begin{array}{l} y = v_2 t_2 \\ v_1 = \sqrt{2g(h-z)} \\ z = \dfrac{1}{2} g t_2^2 \end{array}\right\} z = \frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_2^2} = \frac{y^2}{4(h-z)}$$

Eliminando y se tiene:

$$x(h-x) = z(h-z)$$

Por lo tanto: $x = z$

Ejemplo 71. Cuando el viento sopla entre dos edificios grandes, se puede crear una caída significativa de presión. La presión del aire normalmente es una atmósfera dentro del edificio, así que la caída de la presión en el exterior puede hacer que una placa de vidrio de la ventana estalle hacia fuera del edificio y estrellarse en la calle abajo.¿Qué diferencia de presión resultaría de un viento de 27 m/s? ¿Qué fuerza sería ejercida sobre la placa de vidrio de 2 x 3 m de una ventana? La densidad del aire es 1,29 kg/m^3 a 27° C y 1 atmósfera.

Solución.

Alejado de los edificios la presión es 1 atmósfera, y la velocidad del viento es aproximadamente cero. Así

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_a + 0$$

$$p - p_a = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}(1{,}29)(27)^2 = 470 \text{ Pa}$$

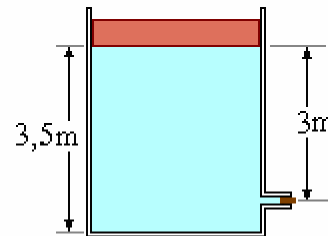
y $F = pA = (470)(2 \times 3) = 2820$ N

Ejemplo 72. Un depósito de agua está cerrado por encima con una placa deslizante de 12 m^2 y 1200 kg.

a) El nivel del agua en el depósito es de 3,5 m de altura. Calcular la presión en el fondo.

b) Si se abre un orificio circular de 5 cm de radio a medio metro por encima del fondo, calcúlese el volumen de agua que sale por segundo por este orificio. (Se considera que el área del orificio es muy pequeña frente al área del depósito).

Considere la presión atmosférica como 10^5 Pa, $g \approx 10\, m/s^2$



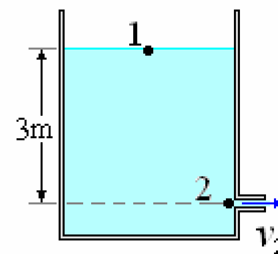
Solución.

a) Presión en el fondo = p atmosférica + p ejercida por la placa + p columna de fluido

$$p = 10^5 + \frac{1200 \times 10}{12} + 1000 \times 10 \times 3{,}5$$

= 1,36 x 10^5 Pa

b) Ecuación de bernoulli



$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

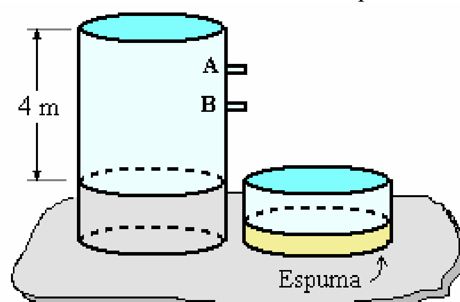
$$p_1 = 10^5 + \frac{1200 \times 10}{12} = 1{,}01 \text{ x } 10^5 \text{ Pa}$$

y_1 = 3m, y_2 = 0, $v_1 \approx 0$, ρ = 1000 kg/m^3

$$31000 = \frac{1}{2} 1000 v_2^2 \Rightarrow v_2 = 7{,}87 \text{ m/s}$$

Gasto $= A_2 v_2 = \pi\,(0{,}05)^2(7{,}87) = 0{,}062$ m^3/s

Ejemplo 73. Un tanque cilíndrico de radio 1 m y altura 4 m, lleno de agua, puede desaguar sobre un recipiente, como se muestra en la figura. El recipiente receptor se encuentra sobre una espuma de 10 cm de espesor y módulo de Young 0,79 x 10 N/m^2. El tanque posee 2 agujeros, el primero A de área 5 cm^2 ubicado a 3H/4 de su base y el segundo agujero B de 3 cm^2 de área a H/2 de la base del tanque.



a) Calcule la velocidad de salida del agua por cada uno de los agujeros suponiendo abierto solo uno a la vez.
b) Si se permite desaguar al tanque durante 3 minutos por sólo uno de los agujeros, determine en que caso el esfuerzo de compresión sobre la espuma será mayor. Justifique su respuesta
Solución.

a) La velocidad de salida está dada por: $v = \sqrt{2gh}$

$$v_A = \sqrt{2g(1)} = 4{,}43\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_B = \sqrt{2g(2)} = 6{,}26\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

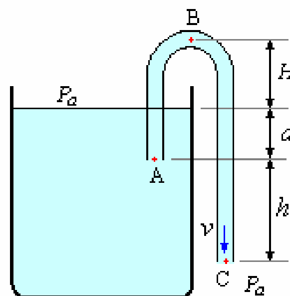
b) El esfuerzo de compresión depende del peso al que esté expuesto la espuma.

$$G_A = A_A v_A = \left(5\times10^{-4}\right)\left(4{,}43\right)$$
$= 22{,}15 \times 10^{-4}$ m^3/s

$$G_B = A_B v_B = \left(3\times10^{-4}\right)\left(4{,}43\right)$$
$= 13{,}29 \times 10^{-4}$ m^3/s

Con estos valores obtenemos para un tiempo de 3 min = 180 segundos:
$V_A = 0{,}3987$ m^3 y $V_B = 0{,}2392$ m^3
Luego $S_A > S_B$

Ejemplo 74. Un sifón es un dispositivo para sacar el líquido de un envase que sea inaccesible o que no pueda ser inclinado fácilmente. La salida C debe estar más baja que la entrada A, y el tubo se debe llenar inicialmente del líquido (esto generalmente se logra aspirando el tubo en el punto C). La densidad del líquido es ρ.
a) ¿Con qué velocidad el líquido fluye hacia fuera en el punto C?
b) ¿Cuál es la presión en el punto B?
c) ¿Cuál es la altura máxima H que el sifón puede levantar el agua?



Solución.
a) Compare la superficie (donde la presión es la presión atmosférica p_a y la velocidad es aproximadamente cero) con el punto C.
Aplicando la ecuación de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{Constante}:$$

$$p_a + 0 + \rho g(h+d) = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2g(h+d)}$$

b) Compare la superficie con el punto B.

$$p_a + 0 + \rho g(h+d) = p_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(h+d+H)$$

$$\Rightarrow p_B = p_a - \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho g H$$

Reemplazando el valor de v, hallado en (a).

$$p_B = p_a - \frac{1}{2}\rho\left[2g(h+d)\right] - \rho g H$$
$$= p_a - \rho g(h+d+H)$$

c) Cuando H es un máximo, la velocidad y la presión en ese punto se aproxima a cero, así que comparando la superficie y el punto B obtenemos:

$$p_a + 0 + \rho g(h+d) = 0 + 0 + \rho g(h+d+H)$$

$\Rightarrow p_a = \rho g H$, de donde obtenemos:

$$H = \frac{p_a}{\rho g} = \frac{1{,}013\times10^5\ N/m^2}{\left(1000\,kg/m^3\right)\left(9{,}8\,m/s^2\right)} = 10{,}3\text{ m}$$

Ejemplo 75. Un tanque de almacenaje abierto grande se llena de agua. Se hace un agujero pequeño en un lado del tanque a una profundidad h debajo de la superficie del agua. ¿Con qué velocidad el agua fluirá del agujero?
Solución.
En la superficie $p = p_a$ y $v \approx 0$. En el agujero $p = p_a$ y $v = v$, tal que

$$p_a + 0 + \rho g h = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\rho g h}$$

Ejemplo 76. Los bomberos utilizan una manguera del diámetro interior 6,0 centímetros para entregar 1000 litros de agua por minuto. Un inyector se une a la manguera, y se quiere lanzar el agua hasta una ventana que está 30 m sobre el inyector.
a) ¿Con qué velocidad debe el agua dejar el inyector?
b) ¿Cuál es el diámetro interior del inyector?
c) ¿Qué presión en la manguera se requiere?
Solución.

$$G = 1000\frac{\text{litros}}{\text{minuto}} = 1000\frac{10^{-3}\,\text{m}^3}{60\,\text{s}} = 0{,}017$$
m^3/s

a) Cuando el agua deja el inyector, $p = p_a$ y $v = v$, en el punto más alto $v = 0$, tal que aplicando la ecuación de Bernoulli:

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + o = p_a + 0 + \rho g h$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8)(30)}$$
$= 24{,}2$ m/s

b) El caudal $G = Av = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 v$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{4G}{\pi v}} = \sqrt{\frac{4(0{,}017\text{ m}^3/\text{s})}{\pi(24{,}2\, m/s)}}$$

= 0,03 m

c) La velocidad en la manguera es v_m,

$$A_m v_m = G \Rightarrow$$

$$v_m = \frac{G}{A_m} = \frac{4G}{\pi D_m^2} = \frac{4(0{,}017)}{\pi(0{,}06)^2}$$

= 6,02 m/s

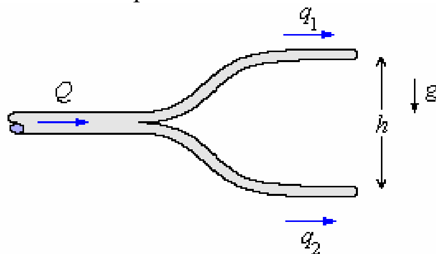
$$p_m + \frac{1}{2}\rho v_m^2 + 0 = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0$$

$$\Rightarrow p_m - p_a = \frac{1}{2}\rho\left(v^2 - v_m^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1000)\left(24{,}2^2 - 6{,}02^2\right)$$

= 2,75 x 10^5 Pa = 2,71 atm

Ejemplo 77. Un tubo horizontal por el que fluye líquido de densidad ρ_0 a razón de Q m^3/s, se bifurca en dos ramas en el plano vertical, una superior y otra inferior, de secciones transversales $a_1 = a_2 = a$, abiertas a la atmósfera (ver figura). Si la distancia entre las ramas es h, determinar:
a) Las cantidades q_1 y q_2 de líquido (en m^3/s) que fluyen por ambas ramas.
b) La condición que debe cumplir Q para que haya flujo en la rama superior.

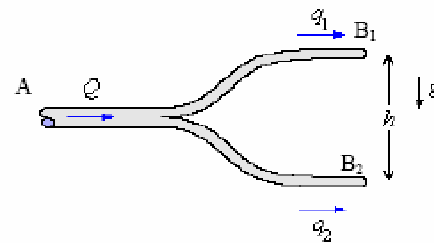


Solución.
a) La relación de Bernoulli se puede aplicar entre los puntos A y B_1 y también entre A y B_2. Por transitividad, la relación de Bernoulli también es valida entre los puntos B_1 y B_2. Se tiene

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Pero $p_1 = p_2 = p_a$ (la presión atmosférica), $h_1 = h$ y $h_2 = 0$, luego

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



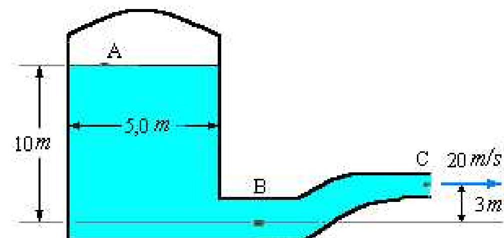
Los flujos que circulan por la rama superior e inferior vienen dados por $q_1 = av_1$ y $q_2 = av_2$, respectivamente. También se tiene que $Q = q_1 + q_2$. De las relaciones anteriores se deduce que

$$q_1 = \frac{Q^2 - 2a^2 gh}{2Q} \text{ y } q_2 = \frac{Q^2 + 2a^2 gh}{2Q}$$

b) Para que circule líquido por la rama superior se debe tener que

$$Q > a\sqrt{2gh}.$$

Ejemplo 78. El tanque cilíndrico presurizado de 5,0 m de diámetro, contiene agua la que sale por el tubo en el punto C, con una velocidad de 20 m/s. El punto A está a 10 m sobre el punto B y el punto C está a 3 m sobre el punto B. El área del tubo en el punto B es 0,03 m^2 y el tubo se angosta a un área de 0,02 m^2 en el punto C. Asuma que el agua es un líquido ideal en flujo laminar. La densidad del agua es 1000 kg/m^3.



a) ¿Cuál es el gasto o flujo en el tubo ?:
b) ¿A que razón está bajando el nivel de agua del tanque?
c) ¿Cuál es la presión en B?
d) ¿Cuál es la presión absoluta del aire encerrado en el tanque?

Solución.

a) El gasto o flujo en el tubo:

$$G = A_C v_C = \pi R^2 v_C = (0{,}02)(20) = 0{,}4\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

b) La razón a la que está bajando el nivel de agua del tanque:

$$A_A v_A = G = 0{,}4\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$A_A = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 19{,}625\text{m}^2$$

$$v_A = \frac{G}{A_A} = \frac{0{,}4}{19{,}625} = 0{,}02\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) La presión en B:
Por Bernoulli

$$p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \rho g h_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

$$p_B = ?$$

$$h_B = 0$$

$$v_B = \frac{0,4}{0,03} = 13,33\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_C = p_a = 1,013\times10^5\,\text{Pa}$$

$$h_C = 3\text{m}$$

$$v_C = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_B + \frac{1}{2}(1000)(13,33)^2$$

$$= 1,013\times10^5 + (1000)(9,8)(3) + \frac{1}{2}(1000)(20)^2$$

$$\Rightarrow p_B = \frac{1}{2}(1000)\left[(20)^2 - (13,33)^2\right]$$

$$+1,013\times10^5 + (1000)(9,8)(3)$$

$\Rightarrow p_B$ = 2,418 x 10^5 Pa

d) ¿Cuál es la presión absoluta del aire encerrado en el tanque (en atmósferas)?

$$p_A + \rho g h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v_B$$

$$\Rightarrow p_A = p_B + \rho g\left(hB_B - h_A\right) + \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$\Rightarrow p_A = 2,418\times10^5 + (1000)(9,8)(-10)$$

$$+ \frac{1}{2}(1000)\left(13,33^2 - 0,02^2\right)$$

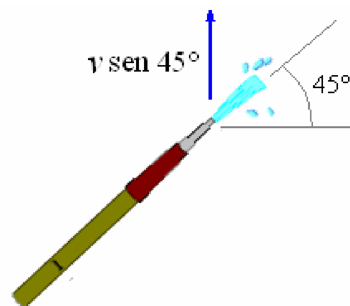
$\Rightarrow p_A$ = 2,32644 Pa

Ejemplo 79. Un bombero lanza agua con su manguera hacia un incendio formando un ángulo de 45º con la horizontal. El agua que emerge del pitón penetra horizontalmente por una ventana del tercer piso que se encuentra a una altura h = 10 m.
La manguera que transporta el agua desde el carro bomba tiene un diámetro D de 6 cm y concluye en un pitón cuya abertura tiene un diámetro d de 1,5 cm.
a) ¿Cuantos litros de agua emergen del pitón por minuto?
b) ¿Cuál es la presión p que debe soportar la manguera (en atmósferas)?



Solución.

a) Sea v la velocidad con que emerge el agua del pitón.



La velocidad hacia arriba será:

$$v_v = v\text{sen}45° = v\frac{\sqrt{2}}{2}$$

El agua alcanza a subir una altura h = 10 m, luego su velocidad es:

$$v_v = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

Luego: $v\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2gh} \Rightarrow$

$$v\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2(9,8)(10)} \Rightarrow v = 19,8\,\text{m/s}$$

El volumen de agua que emerge del pitón por minuto:

$$V = vt\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = (19,8)(60)\pi\left(\frac{0,015}{2}\right)^2$$

= 0,212 m^3 =212 litros.

b) A la salida del pitón la presión es la atmosférica



Aplicando el principio de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho g v_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho g v^2$$

Aplicando la ecuación de la continuidad:

$$A_1 v_1 = Av \Rightarrow v_1 = v\frac{A}{A_1} = v\left(\frac{1,5}{6}\right)^2 = \frac{v}{16}$$

Luego tenemos:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho g\left(\frac{v}{16}\right)^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho g v^2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_a = \frac{1}{2}\rho g v^2\left(1 - \frac{1}{16^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1000)(9,8)(19,8)^2(0,996)$$

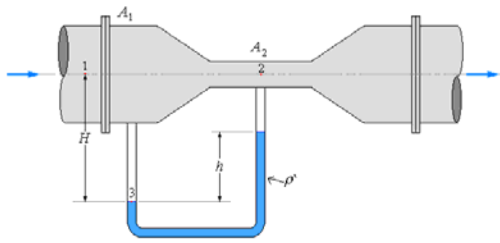
= 1913312,16 Pa

Como p_a = 101325 Pa

p_1 = 2014637,16 Pa
Aproximadamente 2 atm.

Ejemplo 80. El medidor de venturi, es un manómetro colocado en el tubo para medir la velocidad de flujo líquido

Un líquido de densidad ρ fluye por un tubo de sección transversal A_1. En el cuello el área se reduce a A_2 y se instala el tubo manométrico como se indica en la figura.



Solución.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como están a la misma altura

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Por la ecuación de la continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

Luego

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right) \qquad (1)$$

Por otra parte, la presión en el, nivel 3 por la rama 1 es

$$p_3 = p_1 + \rho g H$$

y por la rama 2 es

$$p_3 = p_2 + \rho g (H - h) + \rho' g h$$

Luego

$$p_1 + \rho g H = p_2 + \rho g (H - h) + \rho' g h \qquad (2)$$

y $p_1 - p_2 = gh(\rho' - \rho)$

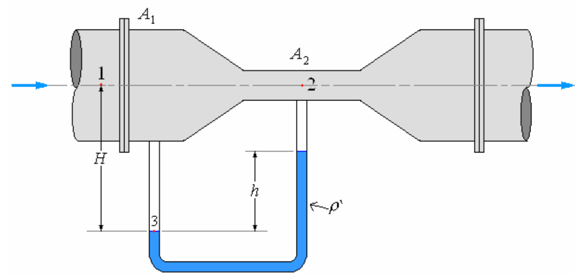
igualando las expresiones (1) y (2)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right) = gh(\rho' - \rho)$$

Finalmente

$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2gh(\rho' - \rho)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}}$$

Ejemplo 81. La sección transversal del tubo de la figura tiene 8 cm^2 en las partes anchas y 4 cm^2 en el estrechamiento. Cada segundo salen del tubo 4 litros de agua a la atmósfera.



a) ¿Cuál es la velocidad en A_1 ?

b) El agua proviene de un gran depósito abierto. ¿A qué altura se encuentra el nivel de agua?

c) ¿Cuál es la diferencia de presión entre 1 y 2?

d) ¿Cuál es la diferencia de alturas entre las columnas de mercurio del tubo en U?

Solución.

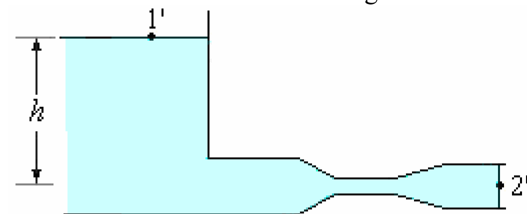
a) $G = 4\dfrac{\text{litros}}{\text{s}} = 4\dfrac{\text{dm}^3}{\text{s}}$ = 4 x 10^{-3} m^3/s

$$A_1 = 8\,\text{cm}^2 = 8\times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

$$G = Av \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{G}{A_1} = \frac{4\times 10^{-3}}{8\times 10^{-4}} = 5 \text{ m/s}$$

b) El agua proviene de un gran depósito abierto. ¿A qué altura se encuentra el nivel de agua?



$$p_{1'} + \rho g y_{1'} + \frac{1}{2}\rho v_{1'}^2 = p_{2'} + \rho g y_{2'} + \frac{1}{2}\rho v_{2'}^2$$

$$p_{1'} = p_{2'} = p_a,\ y_{1'} = h,\ y_{2'} = 0.\ v_{1'} = 0,$$

$$v_{2'} = v_2 = \frac{4\times 10^{-3}}{8\times 10^{-4}} = 5$$

Reemplazando:

$$p_a + \rho h + \frac{1}{2}\rho v (0)^2 = p_a + \rho g (0) + \frac{1}{2}\rho (5)^2$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho (5)^2 \Rightarrow h = \frac{25}{2g} = 1{,}28 \text{ m.}$$

c)

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$y_1 = y_2 = 0,$$

$$v_1 = 5\,\text{m/s},\ v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{8}{4} 5 = 10 \text{ m/s}$$

$$p_1 + \rho g (0) + \frac{1}{2}\rho (5)^2 = p_2 + \rho g (0) + \frac{1}{2}\rho (10)^2$$

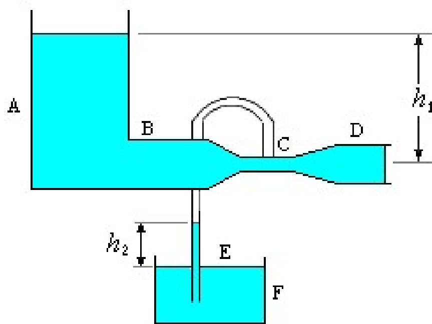
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(100-25) = \frac{1000}{2}(75)$$
= 37500 Pa

d) ¿Cuál es la diferencia de alturas entre las columnas de mercurio del tubo en U?

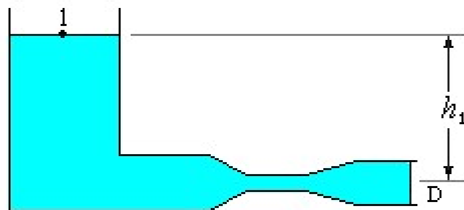
$$p_1 - p_2 = \rho_{Hg} g \Delta y$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{p_1 - p_2}{\rho_{Hg} g} = \frac{37500}{(13600)(9,8)} = 0,28 \text{ m.}$$

Ejemplo 82. Dos depósitos abiertos muy grandes A y F, véase la figura, contienen el mismo líquido. Un tubo horizontal BCD que tiene un estrechamiento en C, descarga agua del fondo del depósito A, y un tubo vertical E se abre en C en el estrechamiento y se introduce en el líquido del depósito F. Si la sección transversal en C es la mitad que en D, y si D se encuentra a una distancia h_1 por debajo del nivel del líquido en A.
a) ¿Cuál es la velocidad de salida del líquido?
b) ¿Cuál es la presión en el estrechamiento (C)?
c) ¿A qué altura h_2 alcanzará el líquido en el tubo E? Expresar la respuesta en función de h_1.



Solución.
a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y D:



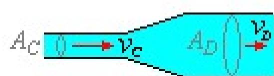
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Con $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $h_2 = 0$, $\Rightarrow$

$$v_1 \approx 0 \quad p_{atm} + \rho g h_1 + 0 = p_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho v_D^2$$

$$v_D = \sqrt{2gh_1}$$

b) Por la ecuación de continuidad entre las secciones C y D



:

$$A_C v_C = A_D v_D$$

Como $A_D = 2A_C \Rightarrow v_C = 2v_D$

Por la ecuación de Bernoulli:

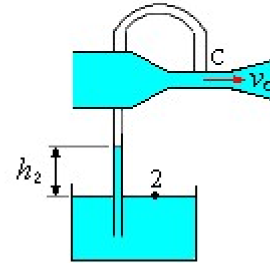
$$p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_D^2$$

$$p_C = p_{atm} - \frac{1}{2}\rho(4v_D^2 - v_C^2) \Rightarrow$$

$$p_C = p_{atm} - \frac{3}{2}\rho v_D^2$$

Finalmente $p_C = p_{atm} - 3\rho g h_1$

c) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre 2 y C:

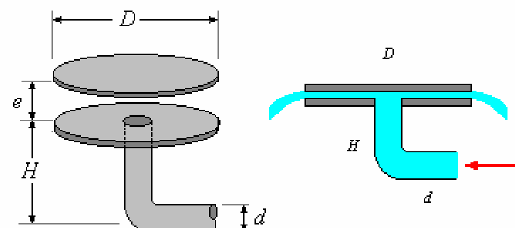


Como $p_{atm} = p_C + \rho g h_2$

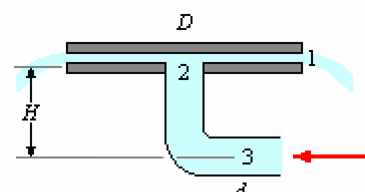
Comparando con $p_C = p_{atm} - 3\rho g h_1$

Obtenemos $h_2 = 3h_1$

Ejemplo 83. Una regadera de jardín tipo hongo de las características mostradas en la figura, tiene la velocidad de salida del agua de 1m/s. El diámetro del hongo *D* es de 30cm, el diámetro de la tubería horizontal *d* es de 5 cm, la altura *H* del tramo vertical es de 20 cm, y el espacio entre los platos del hongo *e* es igual a 2 cm.
a) Encontrar el caudal de agua en la tubería horizontal.
b) Calcular la velocidad en el tramo horizontal
c) Calcular la presión en la parte más alta del tubo vertical
d) Calcular la presión en cualquier punto del tramo horizontal.



Solución.
El gráfico indica los puntos de interés del problema.



a) El caudal de agua en la tubería horizontal.

$G = A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3$

$A_1 v_1 = \pi De = (\pi 0{,}3)(0{,}02)$

$= 0{,}019$ m^3/s

b) La velocidad en el tramo horizontal

Como $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{0{,}006\pi}{0{,}025^2 \pi} = 9{,}6 \text{ m/s}$$

Siendo $A_2 = A_3 \Rightarrow$

$v_3 = v_2 = 9{,}6$ m/s

c) La presión en la parte más alta del tubo vertical

Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$y_1 = y_2$

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\Rightarrow \ p_2 = p_a - \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$v_1 = 1\,\text{m/s}$, $v_2 = 9{,}6\,\text{m/s}$, $p_a = 1{,}013 \times 10^5$ Pa

Reemplazando valores:

$$p_2 = 1{,}013 \times 10^5 - \frac{1}{2}10^3\left(9{,}6^2 - 1^2\right)$$

$= 0{,}5572 \times 10^5$ Pa

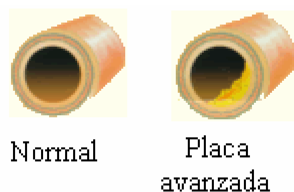
d) La presión en cualquier punto del tramo horizontal.

$p_3 = p_2 + \rho g H = 0{,}5572 \times 10^5 - 10^3 (9{,}8)(0{,}20)$

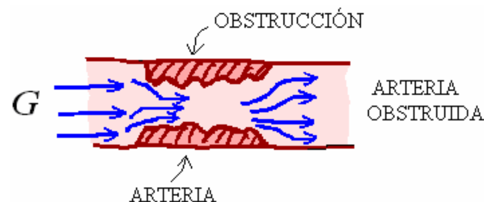
$= 0{,}5376 \times 10^5$ Pa

ARTERIA O VENA CON UNA OBSTRUCCIÓN

Parece que en la medicina es bastante común que las arterias o las venas se taponen con cosas tipo colesterol y demás.



Concretamente la situación es esta:



Si se le pregunta a una persona que cree que va a ocurrir con la arteria cuando se obstruye, la respuesta más común es esta: La sangre se va a frenar al chocar con la obstrucción, y va a empezar a presionar hacia fuera porque quiere pasar. Por lo tanto la arteria se va a dilatar y se va a formar como un globo.

Este razonamiento es muy lindo y muy intuitivo pero está MAL. Lo que pasa es justo al revés. El caudal que manda el corazón es constante. Este caudal no se frena por ningún motivo.

Para poder pasar por la obstrucción lo que hace la sangre es aumentar su velocidad.

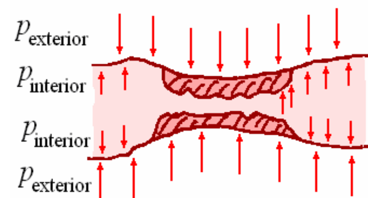
(La velocidad aumenta porque el diámetro de la arteria disminuye).

Al aumentar la velocidad dentro de la arteria, la presión adentro tiene que disminuir. Pero afuera de la arteria la presión sigue siendo la misma. Entonces la presión de afuera le gana a la presión de adentro y la arteria se comprime.

¿Y qué pasa al comprimirse la arteria?

La obstrucción se cierra más. Esto provoca un aumento de la velocidad dentro de la obstrucción, lo que a su vez obliga a la arteria a cerrarse más todavía. De esta manera, la arteria se va cerrando más y más hasta que sobreviene el COLAPSO.

Esto significa que la arteria tiende a cerrarse del todo e impide el pasaje de sangre.



SITUACIÓN FINAL DE LA ARTERIA OBSTRUIDA

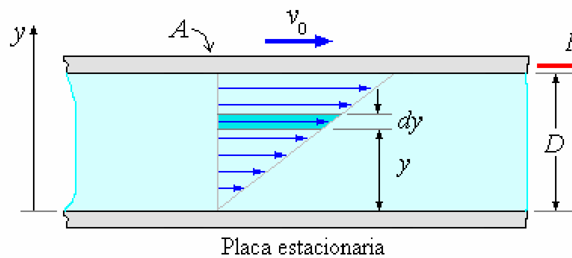
Esto es lo que ocurre cuando una persona tiene un ataque cardíaco. También pasa en el cerebro y en otros lados. Los médicos lo llaman trombosis. Dependiendo del tamaño y localización del trombo pueden variar algunos de los síntomas, dolor, isquemia, frialdad, ausencia de pulso, etc.



VISCOSIDAD

Viscosidad de un fluido es la resistencia de un fluido a una fuerza cortante. Propiedad que se debe fundamentalmente al tipo de interacción entre las moléculas del fluido.

Para poder definirla, debemos considerar el estudio de la ley de Newton de la viscosidad. Consideremos dos placas paralelas muy grandes como se muestra en la figura, el espacio entre las placas esta lleno con un fluido



La placa superior bajo la acción de una fuerza constan te F se mueve con una velocidad constante v_0 . El fluido en contacto con la placa superior se adherirá y se moverá con velocidad v_0 , y el fluido en contacto con la placa fija tendrá velocidad cero si la distancia D y la velocidad v_0 no son muy grandes, la variación de velocidad será lineal.
Experimentalmente se ha demostrado que la fuerza F varía directamente con la superficie A de la placa, con la velocidad v_0 , e inversamente con la distancia D, o sea: $F \propto \dfrac{Av_0}{D}$

Más aún, en general, depende como varía v_0 con respecto a D, esto es: $\dfrac{v_0}{D} \Rightarrow \dfrac{dv}{dy}$

Luego: $F \propto A\dfrac{dv}{dy}$

Aquí introducimos una constante de proporcionalidad η , llamada la viscosidad absoluta (dinámica).

$$F = \eta A\frac{dv}{dy}$$

O sea la fuerza de viscosidad es proporcional al área A y al gradiente (derivada) de la velocidad. Los fluidos que cumplen con esta relación se llaman fluidos newtonianos.

Como $\eta = \dfrac{\frac{F}{A}}{\frac{dv}{dy}}$, sus unidades son: $\dfrac{N.s}{m^2}$

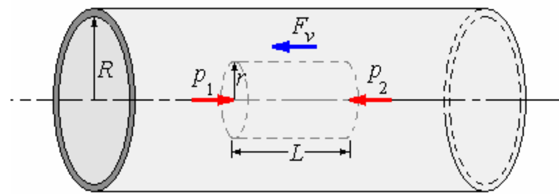
Otra unidad usada para medir la viscosidad es el poise (p): 1 p = 0,1 Ns/m^2
La siguiente tabla da la viscosidad para algunas sustancias:

Fluido	**Temp. ºC**	η **(N.s/m^2)**
Agua	0	1,79 x 10^{-3}
Agua	20	1,00 x 10^{-3}
Agua	100	0,28 x 10^{-3}
Alcohol	20	1,2 x 10^{-3}
Glicerina	0	12,11
Glicerina	20	1,49
Aire	-31,6	1,54 x 10^{-5}
Aire	20	1,83 x 10^{-5}
Aire	230	2,64 x 10^{-5}
Helio	20	1,94 x 10^{-5}

De la tabla se observa que la viscosidad es mucho mayor para los líquidos que para los gases. También se observa una fuerte dependencia de la temperatura. Para los líquidos la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura, mientras que para los gases aumenta.

FLUJO VISCOSO EN UNA TUBERIA CIRCULAR

Para poder encontrar la expresión para la caída de presión en una tubería circular debido a la viscosidad consideremos un elemento de fluido que se desplaza a velocidad constante como se muestra en la figura, corno el fluido no está acelerado, las fuerzas asociadas con la presión y la viscosidad se cancelan.



Aplicando la segunda ley de Newton al elemento, se tiene;

$$\sum F_x = 0$$

$$p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2 - F_v = 0$$

Donde F_v e s la fuerza viscosa (Tangencial).

$$F_V = \left(\frac{F}{A}\right)\times(\text{área})$$

Por viscosidad $\eta = -\dfrac{F/A}{dv/dr} \Rightarrow \dfrac{F}{A} = -\eta\dfrac{dv}{dr}$

El signo menos indica que la velocidad disminuye con un incremento del radio r .
Siendo el área = $2\pi rL$, tenemos:

$$F_v = -\eta 2\pi rL\frac{dv}{dr}$$

Reemplazando

$$p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2 + 2\pi\eta Lr\frac{dv}{dr} = 0$$

Sim1ificando y agrupando términos

$$(p_1 - p_2) = -2\pi\eta Lr\frac{dv}{dr}$$

$$\Rightarrow -dv = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L}rdr$$

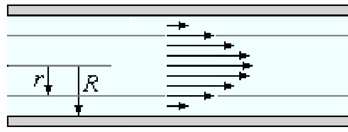
Integrando de r a R,

$$-\int_v^0 dv = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta L}\int_r^R rdr$$

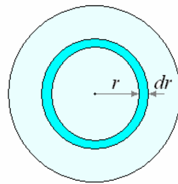
$$\Rightarrow v = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)$$

Esta ecuación corresponde a una parábola.
La velocidad máxima en la parte central (r = 0) es:

$$v_{max} = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta L}$$



Para determinar el gasto Q, consideremos el fluido que pasa por un elemento diferencial de sección como se muestra en la figura siguiente:



El volumen que atraviesa el elemento en un tiempo dt es

$dV = vdAdt$, donde $dA = 2\pi rdr$

Luego

$$dV = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}(R^2 - r^2)(2\pi rdr)dt$$

y el gasto en la sección diferencial es

$$dG = \frac{dV}{dt} = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}(R^2 - r^2)(2\pi rdr)$$

Por lo tanto el gasto total, será

$$G = \int dG = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2)(2\pi rdr)$$

$$= \frac{\pi}{8}\frac{R^4(p_1 - p_2)}{\eta L}$$

Esta expresión podemos escribirla como

$$G = \pi R^2 \frac{\left[\frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta L}\right]}{2}$$

La expresión entre corchetes corresponde a $v_{máx}$, luego

$$G = \pi R^2\left(\frac{v_{máx}}{2}\right)$$

Como la velocidad promedio es $\bar{v} = \frac{v_{máx}}{2}$

Finalmente

$G = \pi R^2 \bar{v}$ = Área de la sección x velocidad promedio

Ejemplo 84. Un oleoducto de 30 cm de diámetro y con seis estaciones de bombeo igualmente espaciadas en sus 7,2 x 10^5 m, la primera estación está al inicio del oleoducto. El petróleo a presión atmosférica pasa en cada una de las estaciones y es lanzado a la siguiente estación a la a la máxima presión permitida, el petróleo finalmente llega al final a la presión atmosférica. La densidad y la viscosidad del petróleo son 850 kg/m^3 1 poise respectivamente, y 10^6 kg de petróleo son conducidos diariamente. ¿Cuál es la presión máxima permitida por el oleoducto?



Solución.

$$G = \frac{10^6\,\text{kg/dia}}{(850\text{kg/m}^3)(24\text{hr/dia})(60\text{min/hr})(66\text{s/min})}$$

$= 1{,}36 \times 10^{-2}$ m^3/s

La fórmula de Poiseuille:

$$G = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}$$

$$\Rightarrow\ p_1 - p_2 = \frac{8G\eta L}{\pi R^4}$$

Entre dos estaciones de bombeo la distancia es:

$$\frac{7{,}2\times 10^5}{6} = 1{,}2 \times 10^5 \text{ m.}$$

1 poise = 0,1 Ns/m^2

Luego la diferencia de presión entre las estaciones de bombeo es:

$$p_1 - p_2 = \frac{8(1{,}36\times 10^{-2}\,\text{m}^3/\text{s})(0{,}1\text{Ns/m})(1{,}2\times 10^5\,\text{m})}{\pi(0{,}15\text{m})^4}$$

$= 8{,}2 \times 10^5$ N/m^2 = 8,1 atm

Como el oleoducto finalmente da el petróleo a presión atmosférica, la presión máxima permisible es 9,1 atm.

FÓRMULA DE STOKES

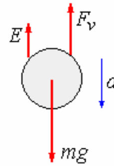
Una burbuja de aire el agua, partículas de polvo cayendo en el aire, objetos que caen en fluidos todos ellos experimentan la oposición de fuerzas viscosas. George Stokes encontró la relación para esta fuerza viscosa sobre un cuerpo en un fluido

$F_v = 6\pi R\eta v$, donde r es el radio, v la velocidad de la esfera y η el coeficiente de viscosidad.

Esta expresión se denomina fórmula de Stokes.

Medida del coeficiente de viscosidad

La fórmula de Stokes permite determinar el coeficiente de viscosidad de un líquido, midiendo la velocidad terminal de esferas cayendo en el fluido.



La esfera se mueve bajo la acción de las siguientes fuerzas: el peso, el empuje (se supone que el cuerpo está completamente sumergido en el seno de un fluido), y una fuerza de viscosidad.
El peso es el producto de la masa por la aceleración de la gravedad *g*. La masa es el producto de la densidad del material ρ' por el volumen de la esfera de radio *R*.

$$mg = \rho'\frac{4}{3}\pi R^3 g$$

De acuerdo con el principio de Arquímedes, el empuje es igual al producto de la densidad del fluido ρ, por el volumen del cuerpo sumergido, y por la aceleración de la gravedad.

$$E = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 g$$

La ecuación del movimiento será, por tanto:

$$mg - E - F_v = ma.$$

La velocidad límite, se alcanza cuando la aceleración sea cero, es decir, cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero.

$$mg - E = F_v$$

$$\rho'\frac{4}{3}\pi R^3 g - \rho\frac{4}{3}\pi R^3 g = 6\pi R\eta v_l$$

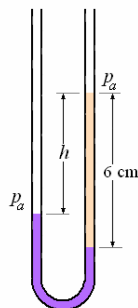
Despejamos la velocidad límite v_l

$$v_l = \frac{2g(\rho' - \rho)R^2}{9\eta}$$

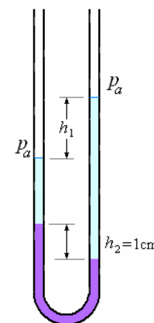
De aquí: $\eta = \dfrac{2g(\rho' - \rho)R^2}{9v_l}$, ecuación que permite determinar el coeficiente de viscosidad de un líquido de densidad ρ, midiendo la velocidad límite de una esfera de radio R y densidad ρ'

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

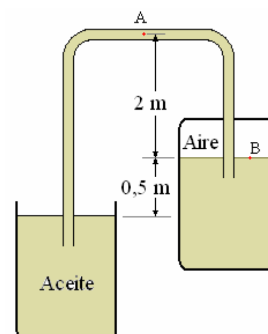
1. Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua. Después se vierte kerosén de densidad 0,82 g/cm^3 en uno de los lados que forma una columna de 6 cm de altura. Determine la diferencia de altura *h* entre las superficies de los dos líquidos.



2. Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con mercurio. Después se vierte agua en ambos lados obteniéndose una situación de equilibrio ilustrada en la figura, donde h_2 = 1 cm. Determine la diferencia de altura h_1 entre las superficies de los dos niveles de agua.



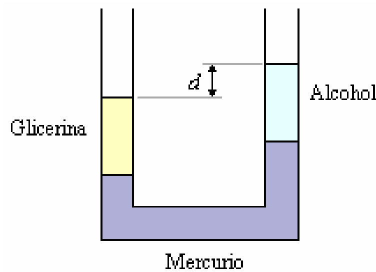
3. Considere el sistema de la figura donde el tubo está lleno de aceite de densidad ρ = 0,85gcm^3. Uno de los recipientes está abierto a la atmósfera y el otro está cerrado y contiene aire. Determine la presión en los puntos A y B.



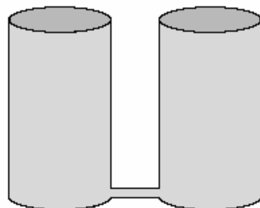
Respuesta.
P_A = 82475 Pa

$P_B = 99135$ Pa

4. Considere un vaso comunicante de 2 cm^2 de sección transversal que contiene mercurio ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3). A un lado se echan 360 gramos de glicerina ρ_{gl} = 1,2 g/cm^3) y en el otro 1/4 de litro de alcohol ρ_{al} = 0,8 g/cm^3). Encuentre el desnivel *d* que existe entre los niveles superiores de la glicerina y el alcohol. Haga un grafico cualitativo de la presión “hidrostática” en función de la profundidad para cada uno de los dos “brazos” del vaso comunicante (grafique las dos curvas en el mismo grafico).

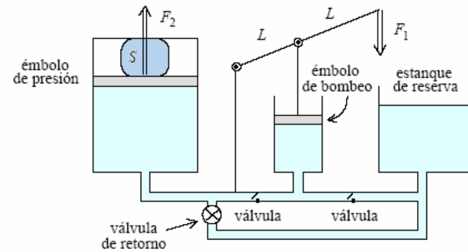


5. Considere un sistema de vasos comunicantes formado por dos tubos de sección transversal de 50 cm^2 que están unidos por un tubito corto de sección transversal muy pequeña (o sea, para efectos de este problema podemos despreciar la cantidad de fluido que se encontrará en el tubito). Inicialmente en este sistema de vasos comunicantes se encuentran dos litros de agua.



a) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos se le agregan 2 litros de un líquido cuya densidad es 0,8 g/cm^3.
b) Para la situación descrita en la parte a), encuentre la presión en el fondo de los vasos comunicantes.
c) Encuentre la altura en que se encontrarán las interfases entre los líquidos y el aire en cada uno de los tubos si en uno de los tubos, en lugar de 2, se le agregan 3 litros de un líquido cuya densidad es 0,8 g/cm^3.

6. Considere una prensa hidráulica (ver figura adjunta). Sean R_1 = 25 cm y R_2 = 150 cm los radios de los émbolos de bombeo y de presión, respectivamente.
Si de la palanca que actúa sobre el embolo de bombeo se tira con una fuerza F_1 = 100 N, ¿qué fuerza ejercerá el émbolo de presión sobre el objeto S?



7. Un cuerpo de material desconocido pesa 4N en el aire y 2,52 N sumergido en agua. Encuentre la densidad del material.

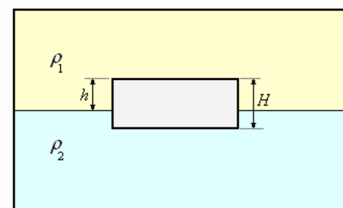
8. Una balsa de área *A*, espesor *h* y masa 400kg flota en aguas tranquilas con una inmersión de 5cm. Cuando se le coloca una carga sobre ella, la inmersión es de 7,2 cm. Encuentre la masa de la carga.

9. Un cuerpo homogéneo prismático de 20cm de espesor, 20 cm de ancho y 40 cm de longitud se mantiene en reposo sumergido en agua a 50cm de profundidad a aplicar sobre él una tensión de 50 N. ¿Cuánto pesa en aire y cuál es su densidad relativa?

10. ¿Qué fracción del volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa al agua 7,25 flotará sobre un mercurio de densidad relativa 13,57?

11. Un tarro cilíndrico de 20cm de diámetro flota en agua con 10cm de su altura por encima del nivel del agua cuando se suspende un bloque de hierro de 100 N de peso de su fondo. Si el bloque se coloca ahora dentro del cilindro ¿qué parte de la altura del cilindro se encontrará por encima de la superficie del agua? Considere la densidad del hierro 7,8gcm^3.

12. Un bloque con una sección transversal de área *A*, altura *H* y densidad ρ , está en equilibrio entre dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2 con $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Suponga que los fluidos no se mezclan. Determine la fuerza de empuje sobre el bloque y encuentre la densidad del bloque en función de ρ_1 , ρ_2 , *H* y *h*.

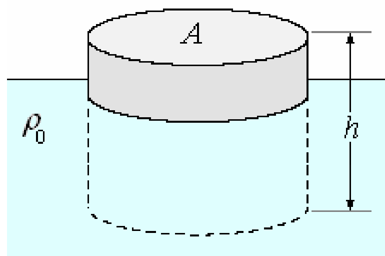


13, En una piscina se encuentra flotando una balsa que tiene forma de un paralelepípedo de densidad relativa (al agua) de 0,3 y cuyas dimensiones son 120 cm de largo, 100 cm de ancho y 25 cm de alto. Determine
a) La fuerza de empuje.
b) La altura medida desde el fondo de la balsa a la que se encuentra la línea de flotación.
c) El peso que debería colocarse sobre la balsa para que esta se hundiera 6cm más.

14. El rey Hierón de Siracusa pidió a Arquímedes que examinara una corona maciza que había ordenado hacer de oro puro. La corona pesaba 10 kg en el aire y 9,375 kg sumergida en agua. Arquímedes concluyó que la corona no era de puro oro. Asumiendo que en su interior contenía plata, ¿cuánto oro tenia la corona de Hierón? La densidad del oro es 19,3 g/cm^3; la de la plata, 10,5 g/cm^3.

15. Considere un vaso de agua lleno hasta el borde, con un trozo de hielo flotando en el. Por supuesto que el hielo, al flotar, sobrepasará por encima del borde del vaso. A medida que el hielo se derrite. ¿Se derramará el vaso?
Suponga ahora que en el mismo vaso flota un pequeño barco de juguete hecho de latón. Suponga además que el barquito tiene un pequeño orificio por el cual penetra agua, haciendo que el barquito lentamente se llene de agua. Durante este proceso, o sea mientras el barco se llena de agua pero aún no se hunde, el nivel del agua del vaso ¿baja, queda a igual altura o sube? Cuando finalmente el barquito se hunde, que pasa con el nivel del agua?

16. Considere un cilindro de masa *M*, área *A* y altura *h*, que flota "parado" en un liquido de densidad ρ_0.
a) ¿Hasta qué alguna estará sumergido el cilindro en el líquido?
b) Si el recipiente que contiene le líquido es muy grande (por ejemplo, un lago), ¿qué trabajo debe realizarse para sacar el cilindro del líquido?
c) ¿Varía la respuesta si el recipiente que contiene el líquido es un tambor cilíndrico de área A_0?

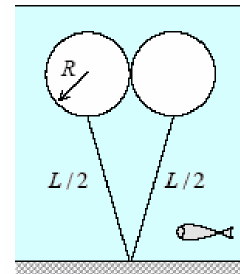


17. Considere una varilla de madera muy liviana, de largo *L*, sección transversal *A* y densidad ρ, que se hace flotar en el agua (designe la densidad del agua por ρ_0).
a) Convénzase de que no es posible que la varilla flote "parada".
b) Para lograr que la varilla flote parada, agreguémosle una masa puntual m en el extremo inferior.
¿Cual es la mínima masa *m* que debe agregarse para lograr el objetivo?

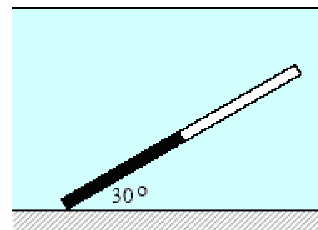
18. ¿Qué volumen de helio se requiere si debe elevarse un globo con una carga de 800 kg (incluido el peso del globo vacío)? Las densidades del aire y del helio, a la presión de una atmósfera, son ρ_{aire} = 1,29 kg/m^3 y ρ_{He} = 0,18 kg/m^3, respectivamente.

21. Se quiere confeccionar aluminio poroso (algo así como queso suizo) que se mantenga en suspensión en agua. Determine la razón entre el volumen de los poros y el volumen del aluminio poroso. (La densidad del aluminio 2700 kg/m^3).

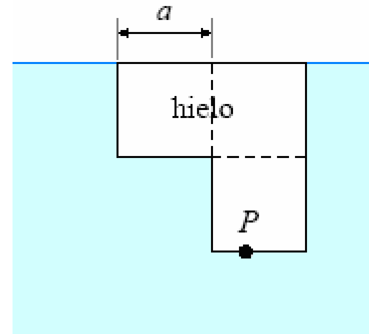
22. Dos globos esféricos inflados con aire, ambos de radio R, se unen mediante una cuerda de longitud L. Los dos globos se mantienen bajo el agua con el punto medio de la cuerda fijo al fondo. Calcular la fuerza de contacto entre los globos.



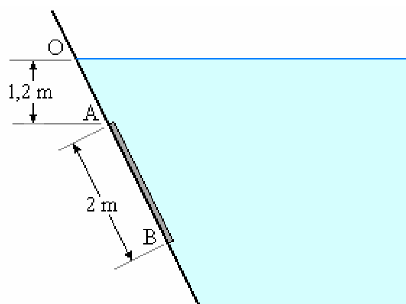
23. Una varilla yace en el fondo de un recipiente con agua formando un ángulo de 60º con la vertical. La varilla es de sección uniforme y está formada por dos pedazos iguales en longitud pero de distinta densidad. La densidad de una de las porciones de la varilla es la mitad de la del agua. Determine la densidad de la otra porción.



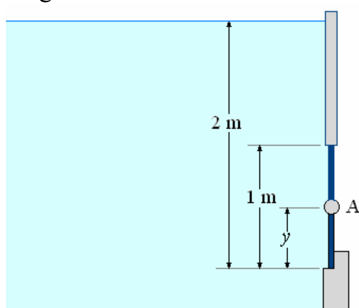
24. Considere un bloque de hielo (densidad = 920 kg/m^3) en forma de "L", formado de tres cubos de 25 cm por lado. Mediante un peso se desea sumergir el hielo en agua como se indica en la figura.
Determine la masa del peso y la ubicación en el hielo donde debería adherirse de modo que el hielo se mantenga justo sumergido lo más estable posible.



25. Repita el problema anterior si la línea OAB forma un ángulo de 30° respecto a la vertical.



26. Determine la ubicación "*y* "del pivote fijo A de manera que justo se abra cuando el agua está como se indica en la figura.

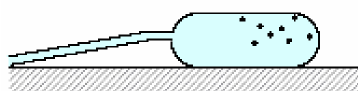


27. Una gotita de agua de 1 mm de radio se pulveriza en gotitas de 10^{-4} mm de radio. ¿En qué factor aumenta la energía superficial (debido a la tensión superficial)?

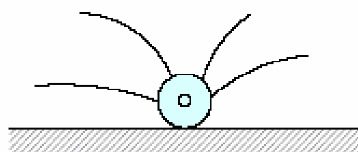
28. Considere dos placas planas de vidrio, separadas por una distancia de 0,1 mm, con un extremo sumergidas en agua en forma vertical. ¿Qué distancia se elevará el agua entre las placas debido a la capilaridad?

29. Un jardín es regado con un regador casero que consiste en una botella plástica, con numerosos agujeros de 1 mm de diámetro, acostada sobre el jardín y conectada aun a manguera. Asuma que una bomba de agua se encarga de generar un flujo de agua constante de 0,2 litros por segundo. ¿Cuántos agujeros debe tener la botella para que el agua llegue a mojar el prado a 8 metros de distancia de la botella? ¿Cuál es la presión al interior de la manguera si ésta tiene una sección transversal de 4 cm^2?

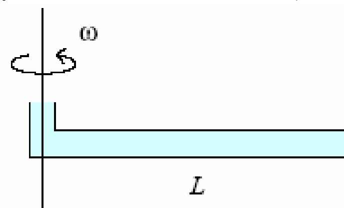
Vista lateral



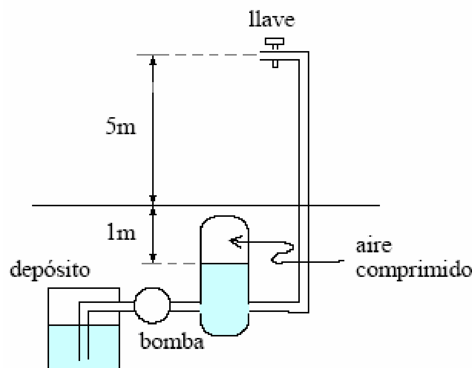
Vista frontal



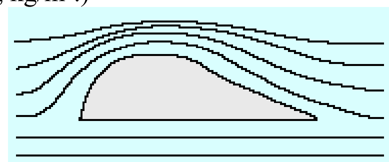
30. Un tubo de largo *L*, lleno de agua, gira en el plano horizontal en torno a un eje vertical que pasa por uno de sus extremos. En el extremo junto al eje, el tubo está abierto, coincidiendo por lo tanto la presión del fluido con la presión atmosférica. El tubo gira con velocidad angular constante ω. Si en el otro extremo, en cierto instante, se abre un pequeño orificio, ¿con qué velocidad emergerá el agua del tubo? (Especifique la rapidez y dirección de la velocidad.)



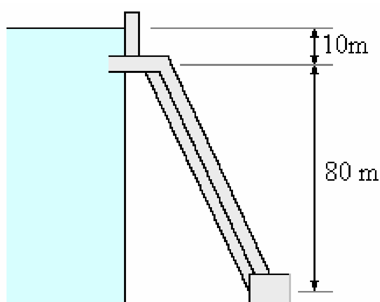
31. Para abastecer de agua a una casa de dos pisos se recurre a un "hidropack".
Este sistema consiste en un depósito subterráneo, una bomba y un cilindro con agua y aire. La bomba inyecta agua a presión al cilindro, que en su parte superior queda con aire comprimido. Un medidor de presión detiene la bomba cuando la presión del cilindro alcanza el valor deseado (el mismo medidor vuelve a encender la bomba cuando la presión baja de cierto nivel). Si el nivel del agua en el cilindro se sitúa 1 metro por debajo del suelo, calcule la presión necesaria en el aire comprimido para que una llave de 1 cm^2 de sección, a una altura de 5 metros sobre el suelo, entregue un caudal de 12 litros por minuto. (La sección transversal del cilindro es grande respecto a la de la llave.)
También encuentre la presión del aire al interior del cilindro.



32. La fuerza de sustentación de un avión moderno es del orden de 1000 N por metro cuadrado de ala. Suponiendo que el aire es un fluido ideal y que la velocidad del aire por debajo del ala es de 100 m/s, ¿cuál debe ser la velocidad requerida por sobre el ala para tener la sustentación deseada? (La densidad del aire es 1, kg/m^3.)

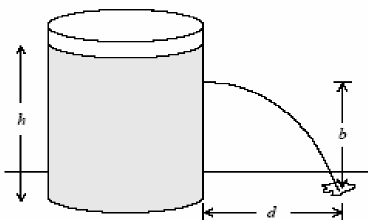


33. Considere la tubería que lleva el agua de una represa hacia una turbina. Suponga que la bocatoma se encuentra a 10 metros bajo el nivel de las aguas y que la turbina se encuentra 80 metros por debajo de ese nivel. Al inicio, es decir a la salida de la represa, la tubería tiene un diámetro de 40 cm. Suponga que el fluido se comporta como un fluido ideal.
a) ¿Cuál es el diámetro máximo que puede tener la tubería en su extremo inferior para que no se produzcan cortes de la columna de agua al interior de la tubería?
b) ¿Cual sería la cantidad de agua que pasaría en ese caso por la tubería y cuál la velocidad del agua emergente?
c) Si el proceso de generación de energía eléctrica usando la presente turbina fuese 100% eficiente, ¿cuál sería la potencia de esta central? ¿Esto corresponde al consumo promedio de cuántas casas?
d) Haga un grafico cualitativo de la presión al interior de la tubería en función de la altura. ¿Cómo cambia esta presión si la sección de la tubería, en el punto emergente, se disminuye a la mitad? ¿A la centésima parte?



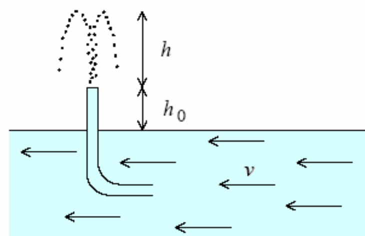
34. Considere una tubería de una calefacción. En el sótano su diámetro es de 4,0 cm y en el segundo piso, 5 metros más arriba, la tubería tiene un diámetro de sólo 2,6 cm. Si en el sótano una bomba se encarga de bombear el agua con una velocidad de 0,5 m/s bajo una presión de 3,0 atmósferas, ¿cuál será la rapidez de flujo y la presión en el segundo piso?

35. Suponga que el nivel de un líquido (agua) en un tambor tiene una altura *h*. A una altura *b* se hace una pequeña perforación lateral que permite que el agua emerja horizontalmente. ¿A qué altura debe hacerse la perforación para que el alcance *d* del agua se máximo?



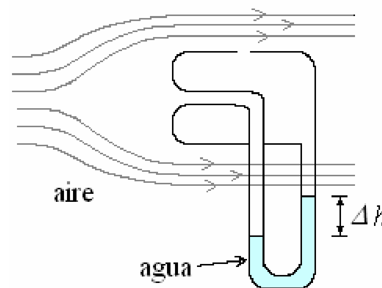
Respuesta. $b = h/2$.

36. En un torrente de agua se sumerge un tubo doblado, tal como se muestra en la figura adjunta. La velocidad de la corriente con respecto al tubo es v = 2,5 m/s.
La parte superior del tubo se encuentra a h_0 = 12 cm sobre el nivel del agua del torrente y tiene un pequeño agujero.
¿A qué altura *h* subirá el chorro de agua que sale por el agujero?



Respuesta. Llegará a 20 cm.

37. La figura muestra un tubo de Pitot, instrumento que se usa para medir la velocidad del aire. Si el líquido que indica el nivel es agua y Δh = 12 cm, encuentre la velocidad del aire. La densidad del aire es 1,25 kg/m^3.



Respuesta. 43, m/s = 156 km/h.

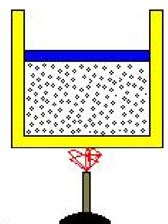
38. Considere un oleoducto de 5 km y 50 cm de diámetro por el cual se desea bombear 1 m^3 por segundo. Si uno de los extremos está abierto a la presión atmosférica, ¿qué presión p_1 debe existir en el otro extremo? Suponga que la densidad del petróleo es 950 kg/m^3 y el coeficiente de viscosidad es 0,2 Pa s aproximadamente. ¿Cual es la potencia dW/dt (energía por unidad de tiempo) disipada por la fricción interna originada por la viscosidad?
Respuesta. p_1 7,5 atm; potencia 650 kW.

39. Un líquido viscoso, teniendo una viscosidad del equilibrio 80 poises, está entre dos placas separadas 4,0 centímetros. Ambas placas están en el movimiento, en direcciones opuestas, con velocidades de 3,0 centímetros/s, y el líquido entre ellas está en flujo laminar. El esfuerzo cortante aplicado al líquido, en unidades SI, es:
Respuesta. 12

40. Encuentre la velocidad terminal que adquiere una esfera de cobre de 0,5 cm de diámetro, cuando cae en agua (ρ_{Cu} = 8,92 g/cm^3). ¿En qué factor disminuye la velocidad terminal si el diámetro se achica en un factor 10?

CAPÍTULO 5. Termodinámica

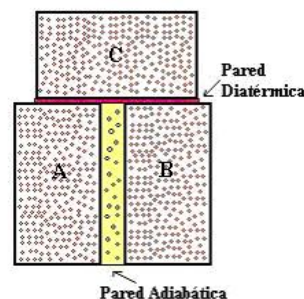
INTRODUCCION.
Sistemas Termodinámicos
Variables termodinámicas macroscópicas.
Consideremos un gas encerrado en un tubo cilíndrico cerrado a uno de sus extremos y provisto de una tapa deslizante (pistón) en el otro. Como se muestra en la figura.



El sistema descrito ocupa determinado **volumen** el cuál puede conocerse en determinado momento por la posición del pistón, otra cantidad indispensable para la descripción del sistema es la **presión** del gas en el cilindro, que también se puede conocer, mediante un manómetro. Finalmente, para tener una idea completa de lo que sucede en el cilindro hay que conocer la **temperatura**, la cual puede medirse en forma simple al igual que las otras dos cantidades. Estas cantidades obtenidas por medición directa, que describen al sistema, nos proporcionarán lo que se conoce como la **Descripción microscópica** del sistema.
Otro punto de vista de describir el sistema es asumiendo que el gas esta formado por un gran número de partículas, moléculas o átomos, todos de igual masa y cada uno moviéndose con una velocidad independiente de las otras es imposible aplicar las leyes de Newton del movimiento a cada molécula por separado e incluso tabular las coordenadas de cada molécula, en este caso es necesario usar métodos estadísticos las cantidades que lo especifican no están directamente asociadas, con nuestro sentido de percepción, esta descripción es conocida como **Descripción microscópica del Sistema.**
La descripción macroscópica o sea las propiedades apreciadas por nuestros sentidos son el punto de partida para todas las investigaciones y aplicaciones prácticas. Por ejemplo, en la mecánica do un cuerpo rígido, considerando los aspectos, externos, especificamos su centro de masa con referencia a un eje de coordenadas en un tiempo particular.
La posición y e1 tiempo y la combinación de ambos, tal como la. Velocidad, constituyen algunas de las cantidades macroscópicas usadas en mecánica y son llamadas coordenadas mecánicas y estas sirven para determinar la energía potencial y cinética del cuerpo rígido. Estos dos tipos de energía, constituyen la energía mecánica o externa del cuerpo rígido. El propósito de la mecánica es encontrar relaciones entre las coordenadas de posición y el tiempo consistentes con las leyes de Newton del movimiento.
En la termodinámica la atención se dirige al exterior del sistema. Se determinan experimentalmente: las cantidades macroscópicas que son necesarias y suficientes para describir el estado interno del sistema, estas son llamadas coordenadas termodinámicas.
El propósito de la termodinámica es encontrar las relaciones entre las coordenadas termodinámicas consistentes con las leyes fundamentales de la termodinámica.
Finalmente, puntualizaremos que dentro de la física, las leyes que relacionan las cantidades macroscópicas, se denomina termodinámica clásica o simplemente termodinámica y, las fórmulas matemáticas que relacionan las cantidades microscópicas, constituyen la Mecánica Estadística, o Teoría atómica del calor, o bien, cuando se usan técnicas simples estadístico-matemáticas se le llama teoría cinética.

LEY CERO DE LA TERMODINÁMICA Y EQUILIBRIO TÉRMICO.
Supongamos que tenemos dos sistemas A y B, separados cada uno y definidos por las coordenadas (presión y temperatura) p, T y p', T'
respectivamente.
El estado de un sistema en el cual las velocidades macroscópicas tienen valores que permanecen constantes mientras que las condiciones externas no se cambien, se conoce como estado de equilibrio térmico.

Equilibrio térmico. Los experimentos demuestran que la existencia de un estado de equilibrio depende de la proximidad de otros sistemas y de la naturaleza de la pared que los separa. Si cuando un sistema está en un estado de equilibrio y este no cambia con cualquier cambio en el ambiente, el sistema se dice que está "Aislado" o rodeado por una pared "Pared Adiabática". Cuando las variables macroscópicas de dos sistemas que se encuentran conectadas por una pared diatérmica no varían, se dice que se encuentran equilibrios térmicos entre ellas.
Imaginemos a los sistemas A y B separados en contacto, o separados por una pared diatérmica, con un sistema C.



El sistema A estará en equilibrio con el sistema C y el sistema B también estará en equilibrio con el sistema C, luego los sistemas A y B estarán en equilibrio térmico uno con el otro.
Esto se conoce como la **Ley cero de la termodinámica**,
"Si dos sistemas se encuentran en equilibrio térmico con un tercer sistema, los dos sistemas se encuentran en equilibrio entre sí".
Esta ley está de acuerdo a nuestra experiencia diaria de nuestros sentidos, es sencilla pero no obvia, es un hecho que sucede pero podría no haber sido así. Nos expresa la idea fundamental de temperatura. Cuando decimos que las variables macrosc6picas no varían, nos hace falta definir una propiedad que asegure esto.
Esta propiedad la llamaremos **Temperatura**. Nosotros queremos asignar un número de cada estado de equilibrio de un sistema que tenga la propiedad que dos sistemas con el mismo número estén en equilibrio térmico entre ellos.
"La temperatura de un sistema es una propiedad que determina si un sistema está en equilibrio o no con otros sistemas".

TEMPERATURA Y ESCALAS
La temperatura se determina por la medición de alguna cantidad mecánica, eléctrica u óptica cuyo valor se correlaciona con la temperatura.
Generalmente la temperatura de una sustancia, sino en el termómetro el cual, se pone en contacto íntimo con la instancia y adquiere la misma temperatura.
Se llama TERMOMETRO, a un aparato que permite medir la temperatura por medio de su propiedad termométrica o variable macroscópica que es sensible al estado térmico de la sustancia. Los principales termómetros y sus propiedades termométricas se muestran en la tabla.

TERMOMETRO	PROPIEDAD TERMOMETRICA
Gas a volumen constante	Presión
Gas a presión constante	Volumen
Resistencia eléctrica	Resistencia eléctrica
Termocupla	Fuerza electromotriz
Columna líquida en un tubo capilar	Longitud

Construyamos una escala de temperatura, para esto tomemos como termómetro una columna líquida de mercurio en un tubo capilar de vidrio, observamos que la columna de mercurio aumentará cuando aumenta la temperatura, como la compresibilidad del mercurio es tan pequeña podemos considerar como si fuera a presión constante. La relación más simple entre temperatura y longitud de la columna que podemos elegir, es una relación lineal de y.

$$t_{(y)} = ay + b$$

Donde las constantes *a* y *b* se evalúan de acuerdo a un conjunto definido de reglas. Asignemos números arbitrarios a dos puntos fijos.

Escala Celsius o centígrada.
En la escala Celsius o centígrada uno de ellos el punto de congelación del agua, es decir el punto en que el agua y el hielo están en equilibrio a la presión atmosférica, a esta temperatura le damos el valor cero grados Celsius o grados centígrados (0°C).

$$t = ay_c + b = 0^o \mathrm{C}$$

El otro punto, el de ebullición del agua a presión atmosférica, a este le llamamos Cien grados (100°C).

$$t = ay_e + b = 100^o \mathrm{C}$$

Al resolver las dos ecuaciones simultáneamente encontramos los valores de *a* y *b*.

$$a = \frac{100^o \mathrm{C}}{y_e - y_c} \quad \text{y} \quad b = -\frac{100^o \mathrm{C}}{y_e - y_c} y_c$$

Sustituyendo la expresión original

$$t = 100^o \mathrm{C} \frac{(y - y_c)}{(y_e - y_c)}$$

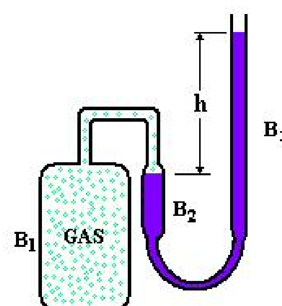
Para un termómetro a gas a Volumen Constante la expresión sería

$$t = 100^o \mathrm{C} \frac{(p - p_c)}{(p_e - p_c)}$$

y para un termómetro a gas a presión constante la expresión sería

$$t = 100^o \mathrm{C} \frac{(V - V_c)}{(V_e - V_c)}$$

El termómetro a gas a volumen constante consiste en un balón B_1 lleno de gas (hidrógeno por ejemplo) ligado a un tubo en forma de U lleno de mercurio, el volumen de gas en el balón se mantiene constante subiendo o bajando B_3 hasta que el mercurio en B_2 se encuentra en la marca cero.



La presión p que equilibra la presión del gas es

$$p = 76 \text{ cm} + h$$

La experiencia muestra que la dependencia de la presión con relación a la temperatura es lineal con esto se obtiene la escala de un termómetro colocando el balón en un baño de hielo en fusión, marcando p_c y después repitiendo la operación con vapor de agua, marcando p_e.

La distancia entre esos dos puntos se toma, por convención igual a 100°.
Medidas usando el gas hidrógeno como sustancia termométrica muestra que

$$\frac{p_e}{p_c} = 1{,}366$$

o sea que la relación con la temperatura, sería:

$$t = 100^o C \frac{\left(\frac{p}{p_c} - 1\right)}{\left(\frac{p_e}{p_c} - 1\right)} = \frac{100^o C}{(1{,}366 - 1)}\left(\frac{p}{p_c} - 1\right)$$

$$t = 273{,}15\left(\frac{p}{p_c} - 1\right)^o \mathrm{C}$$

En esta expresión se ve que cuando la temperatura es -273.15 la presión es Cero. Como no es posible para la presión tomar valores menores que cero, a este valor de la temperatura se le torna como origen de una nueva escala de temperatura, escala ABSOLUTA de Temperaturas en grados KELVIN.

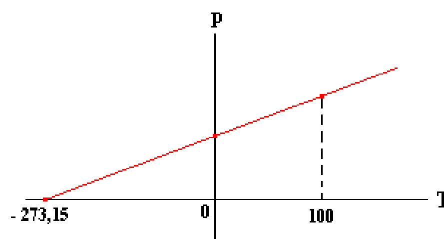
$$T(\mathrm{K}) = t(^o\mathrm{C}) + 273{,}15^o \mathrm{C}$$

En realidad para calibrar el termómetro, no se toma como referencia el punto de fusión del hielo, sino que se especifica corno "punto fijo patrón" al llamado "Punto triple de agua", único punto en el que coexisten en equilibrio hielo, líquido y vapor de agua, dándose solamente a la presión de 4,58 mm Hg.
Obteniéndose:
t = 0,01 °C
T = 273,16 K

$$T = 273{,}16 \frac{p}{p_c} \mathrm{K}$$

El termómetro de gas a volumen constante se toma como standard porque es el que experimentalmente mas nos conviene, pues es el que nos da las variaciones más pequeñas y también porque cuando el termómetro contiene gas a baja presión, la diferencia de lectura en temperatura usando diferentes gases es reducida.

Ejemplo 1. Cuando el bulbo de un termómetro de gas a volumen constante se coloca en un recipiente con agua a 100 °C, la presión del gas es 227 mm de Hg. Cuando el bulbo se mueve a una mezcla de hielo - sal la presión del gas cae a 162 mm de Hg. Asumiendo el comportamiento ideal, como en la figura, ¿cuál es la temperatura Celsius de la mezcla de hielo – sal?



Solución.
Considerando el comportamiento del termómetro con la linealidad mostrada en la figura.
Para la presión del gas es 227 mm de Hg corresponde una temperatura 100 + 273,5 =373,15 K
Para la presión 162 mm de Hg corresponde

$$x = \frac{373{,}15}{227}162 = 266{,}30 \text{ K o } -6{,}85°\text{C}$$

Ejemplo 2. En un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm de mercurio introducimos un termómetro centígrado en hielo fundente y luego en vapor de agua hirviendo. El termómetro, mal graduado, marca 2° para el primero y 102,5° para el segundo

a) ¿Qué fórmula de reducción deberemos emplear para calcular la temperatura real en todos los casos? Si el termómetro marca 50°,
b) ¿cuál es la verdadera temperatura?
c) ¿A qué temperatura sería correcta la lectura del termómetro?

Solución.
a) El cero de un termómetro correcto corresponde al 2 del mal graduado, y el 100 corresponde 102,5°.
El intervalo fundamental está, por tanto, dividido en: 102,5 - 2 = 100,5
Llamando A a la temperatura marcada por el incorrecto y C a la del centígrado perfecto, la fórmula será:

$$\frac{C}{100} = \frac{A-2}{100{,}5}$$

b) $\frac{C}{100} = \frac{50-2}{100{,}5} \Rightarrow$

$$C = \frac{48 \times 100}{100{,}5} = 47{,}76^o \mathrm{C}$$

c) Si la indicación fuese correcta, se verificaría:

$$\frac{C}{100} = \frac{C-2}{100{,}5} \Rightarrow 100{,}5C = 100C - 200$$

$$\Rightarrow C = \frac{-200}{0{,}5} = -400^o \mathrm{C}$$

Lo cual es imposible, puesto que el cero absoluto es - 273,16 °C, menor temperatura a la que puede aproximar un sistema.

Ejemplo 3. Un termómetro centígrado mal graduado marca 8° en el punto de fusión del hielo y 99° en el de ebullición del agua, en un lugar en que la presión

atmosférica es 760 mm. Resolver para este termómetro las preguntas del problema anterior.

Solución.

1) El intervalo fundamental será: 99 - 8 = 91

Luego la fórmula de reducción es:

$$\frac{C}{100} = \frac{A-8}{91}$$

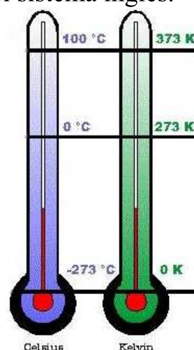
2) $\frac{C}{100} = \frac{50-8}{91} \Rightarrow C = \frac{4200}{91} 46{,}15^o C$

3) $\frac{C}{100} = \frac{C-8}{91} \Rightarrow 91C - 800 = 100C$

$\Rightarrow C = \frac{800}{9} = 88{,}9^o \mathrm{C}$

Otras escalas de temperatura.

Así como la escala Celsius (Centígrado) y su correspondiente en la escala absoluta Kelvin, existen otras escalas en el sistema inglés.



La escala FAHRENHEIT, al cero de la escala Celsius corresponde a 32° F y los 100°C corresponden a 9 divisiones de °F, la relación de equilibrio es:

$$t(°\mathrm{F}) = \frac{9}{5} t\,(°\mathrm{C}) + 32°\mathrm{F}$$

y

$$t(°\mathrm{C}) = \frac{5}{9} t\,(°\mathrm{F}) - 32°\mathrm{F}$$

La escala absoluta correspondiente a la escala Fahrenheit es la escala RANKINE.

$$T(\mathrm{R}) = t(^o\mathrm{F}) + 459{,}67(\mathrm{R})$$

$$T(\mathrm{R}) = \frac{9}{5} T(\mathrm{K})$$

Ejemplo 4. a) La temperatura de la superficie del Sol es de unos 600 ºC. Exprésese esa temperatura en la escala Fahrenheit.

b) Exprese la temperatura normal del cuerpo humano 98,6 ºF, en la escala Celsius.

c) exprese la temperatura de pasteurización, 165 ºF, en la escala Celsius.

d) Exprese el punto normal de ebullición del Oxígeno –183 ºC, en la escala Fahrenheit.

Solución.

a) Como $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$ y

$T_C = T_K - 273{,}15$, igualando ambas expresiones, encontramos para la temperatura Fahrenheit:

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot (T_K - 255{,}37) = 10340{,}33^o\,\mathrm{F}.$$

b) $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) = 37°\mathrm{C}$

c) $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) = 73{,}89^o\,\mathrm{C}$.

d) $T_F = \frac{9}{5} T_C + 32 = -297{,}4^o\,\mathrm{C}$.

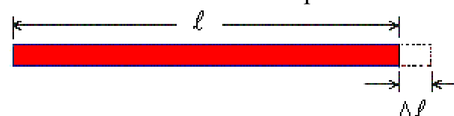
DILATACION TERMICA.

Efectos frecuentes en los materiales al presentarse cambios de temperatura, son variaciones en sus dimensiones y cambios de estado. En primer lugar consideraremos aquí, las variaciones de dimensiones que ocurren sin cambios de estado.

Cuando la temperatura de un cuerpo aumenta, este por lo general se dilata. Una excepción es el agua que se contrae entre 0ºC y 4°C, este comportamiento es crítico en la manera como los lagos y los océanos polares se congelan de la superficie hacia abajo, en lugar de hacerlo del fondo hacia la superficie, ya que el agua mas fría que 4°C se eleva en lugar de hundirse y el agua a 0°C está en la superficie en lugar de estar en el fondo. (La densidad del agua a 4°C es máxima, = 1 g/cm^3).

Expansión lineal.

El cambio de una dimensión lineal de un sólido tal como el largo, el ancho, alto o una distancia entre dos marcas se conoce como la expansión lineal.



Experimentalmente se encuentra, para un amplio rango de temperaturas, que el cambio de longitudes $\Delta\ell$, es proporcional al cambio de temperatura Δt y a la longitud ℓ, de tal manera que podemos escribir: $\Delta\ell = \alpha\ell\Delta t$, donde α es el coeficiente de expansión lineal. Este coeficiente tiene diferentes valores para los diferentes materiales y tiene por unidad l/grado.

O bien,

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha\Delta t$$

Para encontrar la longitud final después de un cambio de temperatura Δt, escribimos $\frac{d\ell}{\ell} = \alpha\, dt$, e integramos considerando la longitud ℓ para $t = t_1$, y ℓ' para $t = t_2$, siendo $t_2 - t_1 = \Delta t$

$$\int_{\ell}^{\ell'} \frac{d\ell}{\ell} = \alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \Rightarrow \ln \ell \Big|_{\ell}^{\ell'} = \alpha t \Big|_{t_1}^{t_2} \Rightarrow$$

$$\ln \frac{\ell'}{\ell} = \alpha (t_2 - t_1) \Rightarrow \ln \frac{\ell'}{\ell} = \alpha \Delta t$$

$$\frac{\ell'}{\ell} = e^{\alpha \Delta t} \Rightarrow \ell' = \ell e^{\alpha \Delta t}$$

Desarrollando $e^{\alpha \Delta t}$ en series de Taylor

$$\left[e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... - \infty < x < \infty \right]$$

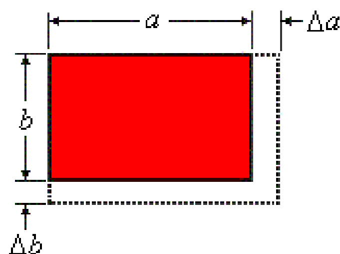
Obtenemos:

$$\ell' = \ell e^{\alpha \Delta t} = \ell \left[1 + \frac{\alpha \Delta t}{1!} + \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2!} + \frac{(\alpha \Delta t)^3}{3!} + ... \right]$$

Como a es una cantidad muy pequeña podemos no considerar los términos con α^2, α^3, …..
y finalmente

$$\ell' = \ell (1 + \alpha \Delta t) = \ell + \Delta \ell$$

Expansión de superficie.
Consideremos ahora el área al elevar la temperatura Δt, para esto tomamos una superficie como se muestra en la figura, antes de la expansión su área es $A = ab$.



a se expande en $\Delta a = \alpha_1 a \Delta t$

b se expande en $\Delta b = \alpha_2 b \Delta t$

Luego $a' = a + \Delta a = a(1 + \alpha_1 \Delta t)$ y

$$b' = b + \Delta b = b(1 + \alpha_2 \Delta t)$$

$$A' = a'b' = a(1 + \alpha_1 \Delta t) b(1 + \alpha_2 \Delta t)$$

$$A' = a'b' = ab\left[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t + \alpha_1 \alpha_2 \Delta t^2\right]$$

En esta expresión el último término se puede despreciar ya que α_1 y α_2 son valores muy pequeños, y $A = ab$ tenemos

$$A' = A\left[1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t\right]$$

En el caso de ser un cuerpo isotrópico, los coeficientes de expansión lineal α_1 y α_2 son iguales a α, luego

$$A' = A(1 + 2\alpha \Delta t)$$

Como $A' = A + \Delta A$, tenemos:

$$\Delta A = 2\alpha A \Delta t = \gamma A \Delta t$$

Donde $\gamma = 2\alpha$ es el coeficiente de expansión de área.

Expansión de volumen.
Usando el mismo argumento se demuestra que el cambio de volumen de un sólido de volumen *V*, al elevarse la temperatura Δt es

$$\Delta V = 3\alpha V \Delta t = \beta V \Delta t$$

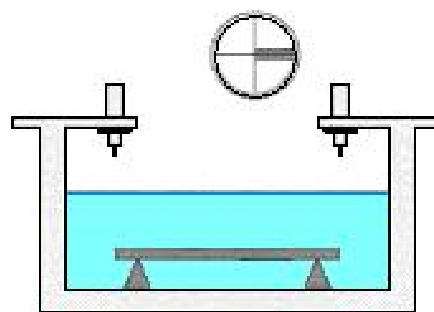
Donde $\beta = 3\alpha$ es el coeficiente de expansión de volumen.

Coeficiente de dilatación lineal de algunos de los materiales más usuales.

Sólidos	α (° C^{-1})
Concreto	0,7 – 1,2 x 10^{-5}
Plata	2,0 x 10^{-5}
Oro	1,5 x 10^{-5}
Invar	0,04 x 10^{-5}
Plomo	3,0 x 10^{-5}
Zinc	2,6 x 10^{-5}
Hielo	5,1 x 10^{-5}
Aluminio	2,4 x 10^{-5}
Latón	1,8 x 10^{-5}
Cobre	1,7 x 10^{-5}
Vidrio	0,4 – 0,9 x 10^{-5}
Hierro	1,2 x 10^{-5}
Cuarzo	0,04 x 10^{-5}
Acero	1,2 x 10^{-5}

Líquidos	β (° C^{-1})
Glicerina	5,1 x 10^{-5}
Alcohol etílico	7,5 x 10^{-5}
Mercurio	1,8 x 10^{-5}
Bisulfuro de carbono	11,5 x 10^{-5}
Agua (20 ° C)	2,0 x 10^{-5}

Ejemplo 5. En el comparador de la figura se mide la dilatación de una barra de hierro, de 1 m de longitud a 0 °C, obteniéndose para los 50 °C una dilatación de 0,06 cm.



Calcular:
a) El coeficiente de dilatación lineal del hierro.
b). Si tiene una sección de 10 cm^2 a 0°C, ¿cuáles son su sección y su volumen a 100 °C?
Solución.

a) $\alpha = \dfrac{L' - L_0}{L_0 \times \Delta T} = \dfrac{0,060}{100 \times 50}$

$= 12 \times 10^{-6} {}^{\circ}C^{-1}$

b) $\gamma = 2\alpha = 24\times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$

Como

$$A' = A_0(1+\gamma\Delta T) = 10(1+24\times 10^{-6}\times 100)$$

$$= 10{,}024\text{cm}^2$$

Siendo $\beta = 3\alpha = 36\times 10^{-6}\,{}^oC^{-1}$

Obtenemos:

$$V' = V_0(1+\beta\Delta T) = 10\times 100(1+36\times 10^{-6}\times 100)$$

$$= 1003{,}6\text{cm}^3$$

Ejemplo 6. Un herrero ha de colocar una llanta circular de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la temperatura ambiente es de 20 °C y su coeficiente de dilatación lineal es 12,2 x 10^{-6} °C^{-1}, calcular la temperatura en grados centígrados a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.

Solución.

$$\ell' = \ell(1+\alpha\Delta T) = 2\pi r'(1+\alpha\Delta T)$$

$$d' = d(1+\alpha\Delta T)$$

Luego

$$\Delta T = \frac{d'-d}{\alpha d} = \frac{4\times 10^{-3}}{12{,}2\times 10^{-6}\times 1} = 327^o\text{C}$$

$$\Rightarrow T = 20+\Delta T = 347^o\text{C}$$

Ejemplo 7. Un anillo de acero, de 75 mm de diámetro interior a 20 °C, ha de ser calentado e introducido en un eje de latón de 75,05 mm de diámetro a 20 °C.

a) ¿A qué temperatura ha de calentarse el anillo?

b) ¿A qué temperatura tendríamos que enfriar el conjunto para que el anillo saliera él solo del eje? (Coeficiente de dilatación del acero: 12 x 10^{-6} °C^{-1}; coeficiente de dilatación del latón: 20 x 10^{-6} °C^{-1})

Solución.

a) $D' = D(1+\alpha\Delta T)$

$$\Rightarrow 75{,}05 = 75(1+12\times 10^{-6}\Delta T)$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{75{,}05-75}{75\times 12\times 10^{-6}} = 55^o\text{C}$$

$$\Rightarrow T' = T+\Delta T = 20+55 = 75^o\text{C}$$

b) Los diámetros a la temperatura que nos piden deberán ser iguales:

$$D(1+\alpha_a\Delta T') = D''(1+\alpha_l\Delta T')$$

D = diámetro del anillo a 20° C;

D''= diámetro del eje a 20 °C;

α_a y α_l, coeficiente de dilatación del acero y del latón, respectivamente). Luego:

$$\Delta T' = \frac{D-D''}{D''\times 20\times 10^{-6} - 75\times 12\times 10^{-6}}$$

$$= -83{,}2^o\text{C}$$

$$T'' = T+\Delta T' = 20-83{,}2 = -63{,}2°\text{C}$$

Ejemplo 8. La varilla de un reloj de lenteja sin compensar, que bate segundos a 0° C, es de latón. Averiguar cuánto se retrasa el reloj en un día si se introduce en un ambiente a 200° C. Coeficiente de dilatación del latón: α = 17 x 10^{-6} °C^{-1}. (Considerar el péndulo como simple, de longitud la misma que la varilla.)

Solución.

A 0° el semiperíodo (1 s) será: $1 = \pi\sqrt{\dfrac{\ell_0}{g}}$

A 200°: $\tau = \pi\sqrt{\dfrac{\ell_0(1+\alpha\Delta T)}{g}}$

Dividiendo:

$$\tau = \sqrt{1+\alpha\Delta T} = \sqrt{1+17\times 10^{-6}\times 200}$$

$$= \sqrt{1{,}0034}s = 1{,}0017 \text{ s}$$

Como un día dura 86400 segundos el péndulo dará

$$\frac{86400}{1{,}0017} = 86253 \text{ semioscilaciones}$$

El péndulo da en 1 día 86 400 - 86 253 = 147 semioscilaciones menos que en su marcha correcta: El reloj se retrasará en 147 s = 2 min 27 s

Ejemplo 9. Una varilla de cobre de densidad uniforme y de sección constante oscila como un péndulo colgada de uno de sus extremos, con un periodo de 1,6 s cuando se encuentra a una determinada temperatura ambiente. Siendo el coeficiente de dilatación lineal del cobre 19 x 10^{-6} °C^{-1}, determínese el incremento de temperatura que habría que darle al ambiente para que el período aumente en 3 milésimas de s.

Solución.

El período a la temperatura inicial T es:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}M\ell^2}{Mg\frac{\ell}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

y a la temperatura T + ΔT será:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell(1+\alpha\Delta T)}{3g}}$$

dividiendo los dos:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{(1+\alpha\Delta T)} \Rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - 1}{\alpha} = \frac{\left(\frac{1{,}603}{1{,}6}\right)^2 - 1}{19\times 10^{-6}} = 197^o\text{C}$$

Ejemplo 10. La densidad del mercurio a 0°C es 13,6 g/cm^3; su coeficiente de dilatación, 182 x 10^{-6} °C^{-1}. Calcular la densidad del mercurio a 100 °C.

Solución.

$$\rho' = \frac{\rho}{1+\beta\Delta T} = \frac{13,6}{1+182\times10^{-6}100}$$

= 13,36 g/cm^3

Ejemplo 11. Una vasija de cinc (coeficiente de dilatación lineal: 29 x 10^{-6} °C^{-1}) está llena de mercurio a 100 °C, teniendo entonces una capacidad de 10 ℓ. Se enfría hasta 0°C. Calcular la masa de mercurio, medida a 0 °C, que hay que añadir para que la vasija quede completamente llena.
Coeficiente de dilatación del mercurio, 182 x 10^{-6} °C^{-1}.
Densidad del mercurio a 0 °C, 13,6 g/cm^3.

Solución.

El volumen de la vasija a 0° quedará determinado por la ecuación:

$$V' = V(1-\beta\Delta T)$$

$$\Rightarrow V = \frac{V'}{(1-\beta\Delta T)},$$

en la que: β = 3 x 29 x10^{-6}°C^{-1} = 87 x10^{-6} °C^{-1}

$V' = 1000\text{ cm}^3$ $\Delta T = (0-100)$ = - 100°C

Por tanto: $V = \dfrac{1000}{1+87\times10^{-6}\times100}$ = 991,38 cm^3

El volumen del mercurio a 0° quedará determinado por la misma ecuación en la que

$\beta_{Hg} = 182\times10^{-6}\,{}^oC^{-1}$:

$$V_{Hg} = \frac{V'}{1+\beta_{Hg}\Delta T} = \frac{1000}{1+182\times10^{-6}\times100} =$$

982,13 cm^3

La diferencia es el volumen que queda por llenar:
V - V_{Hg} = 991,38 – 982,13 = 9,25 cm^3

La masa del mercurio que hay que agregar es:

$\Delta M = \rho_{Hg}\Delta V$ = 13,6 x 9,25 = 125,8 g

Ejemplo 12. Una vasija de Zn está llena de mercurio a 0°C, teniendo una capacidad de 5 ℓ. Calcular el volumen de mercurio que se derrama a 100 °C por efecto de la mayor dilatación de este último. (Tomar los datos necesarios del problema anterior.)

Solución.

β = 87 x10^{-6} °C^{-1}

Vasija: $V' = V(1+\beta\Delta T)$ = 5000(1 + 87x 10^{-6} x 100) = 5043,5 cm^3

El volumen del mercurio a 100 °C es:

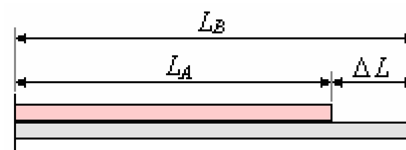
V'_{Hg} = 5000 (1 + 182 x 10^{-6} x 100)
= 5091 cm^3

El volumen del mercurio que se derrama 100 °C es:

$V_x = V' - V'_{Hg}$ = 5091 - 5043,5
= 47,5cm^3

Ejemplo 13. Dos barras de longitudes L_A, L_B coeficientes de dilatación lineal α_A y α_B respectivamente se sujetan en un extremo, existiendo en el extremo libre una diferencia de longitud ΔL. Qué relación debe existir entre sus coeficientes de dilatación lineal tal que dicha diferencia de longitud se mantenga constante cuando el conjunto se somete a una variación de temperatura.

Solución.



Como ΔL = constante

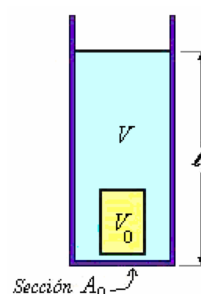
$L_B - L_A = L'_B - L'_A$,

$L_B - L_A = L_B(1+\alpha_B\Delta T) - L_A(1+\alpha_A\Delta T)$

De aquí: $L_B\alpha_B\Delta T = L_A\alpha_A\Delta T$

Finalmente: $\dfrac{\alpha_B}{\alpha_A} = \dfrac{L_A}{L_B}$

Ejemplo 14. Un tubo de acero, cuyo coeficiente de expansión lineal es α = 18 x 10^{-6}, contiene mercurio, cuyo coeficiente de expansión de volumen es β = 180 x 10^{-6} °C^{-1}; el volumen de mercurio contenido en el tubo es 10^{-5} m^3 a 0 °C, se desea que la columna de mercurio permanezca constante para un rango normal de temperaturas. Esto se logra insertando en la columna de mercurio una varilla de silicio, cuyo coeficiente de dilatación es despreciable.
Calcular el volumen de la varilla de silicio.



Solución.

A 0°C, sea V_o el volumen de la varilla de silicio y V el volumen de mercurio, a esta condición tenemos

$\ell_0 A_0 = V + V_0$

A una temperatura t la sección A_o se incrementa a $A_o(1+2\alpha t)$.

Similarmente el volumen de mercurio cambia de V a $V(1+\beta t)$.

Como se requiere que ℓ_o permanezca constante, se tiene

$\ell_o A_o(1+2\alpha t) = (V+V_o)(1+2\alpha t)$

Por otro lado este volumen es: $V(1+\beta t) + V_o$
igualando ambas expresiones
$(V + V_o)(1 + 2\alpha t) = V(1 + \beta t) + V_o$
$\Rightarrow V_o(1 + 2\alpha t - 1) = V(1 + \beta t - 2\alpha t)$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{V(\beta - 2\alpha)t}{2\alpha t} = \frac{V(\beta - 2\alpha)}{2\alpha}$$

$$= \frac{V(180 - 36)10^{-6}}{36x10^{-6}} = 4V$$

$= 4 \times 10^{-5} m^3$

La varilla de silicio ocupa los 4/5 del volumen total a 0°C.

Ejemplo 15.
Una barra de acero, $\alpha_{ACERO} = 11\times10^{-6}\ /^oC$, tiene un diámetro de 3 cm a la temperatura de 25 ºC. Un anillo de bronce, $\alpha_{BRONCE} = 17{,}10^{-6}\ /^oC$, tiene un diámetro interior de 2,992 cm a la misma temperatura. ¿A qué temperatura común entrará justamente el anillo en la varilla?
Solución.
Puesto que los diámetros son cantidades lineales, éstas se dilatarán con la temperatura. Como la temperatura inicial es de 25 ºC y la final T donde los diámetros deben coincidir, se tiene:

$$d_A = d_{0A}\left[1 + \alpha_{ACERO}(T - 25)\right]$$

$$d_B = d_{0B}\left[1 + \alpha_{BRONCE}(T - 25)\right]$$

Despejando T, encontramos:

$$T = \frac{d_{0A}(1 - 25\alpha_A) + d_{0B}(25\alpha_B - 1)}{(d_{0B}\alpha_B - d_{0A}\alpha_A)}$$

= 472,83 ºC.

Ejemplo 16. Un vaso de vidrio de 75 cm^3 se llena completamente de mercurio a la temperatura ambiente de 25 ºC. A la temperatura de 20 ºC, ¿Cuál será el volumen de mercurio derramado?
$\beta_{Hg} = 18{,}21 \times 10^{-5}$ / ºC,
$\alpha_V = 9{,}6 \times 10^{-6}$ / ºC .
Solución.
El volumen derramado V_D corresponde a la diferencia entre el volumen de mercurio V_{Hg} menos el volumen del vaso V_V, es decir:

$$V_D = V_{Hg} - V_V$$

$$= V_0\left(1 + \beta_{Hg}\Delta T\right) - V_0\left(1 + 3\alpha_V\Delta T\right)$$

$$= V_0\Delta T\left(\beta_{Hg} - 3\alpha_V\right)$$

$$= (75)(-5)(18{,}21 - 2{,}88)\times10^{-5}$$

$= -0{,}058\ cm^3$

Se derraman 0,058 cm^3 de mercurio

Ejemplo 17. En el centro de un disco de acero hay un orificio de diámetro $d = 4{,}99$ mm (a 0 °C). ¿Hasta que temperatura hay que calentar al disco para que por el orificio empiece a pasar una bola de diámetro $D = 5{,}00$ mm? El coeficiente de dilatación lineal del acero es $\alpha = 1{,}1 \times 10^{-5}\ K^{-1}$.
Solución.
$d(1 + \alpha\Delta T) = D$, reemplazando valores:

$$4{,}99\left(1 + 1{,}1\times10^{-5}\Delta T\right) = 5{,}00$$

Resolviendo encontramos $\Delta T = 182$, como la temperatura inicial es 0°C, es necesario elevar la temperatura hasta 182°C.

Ejemplo 18. Una bola de vidrio de coeficiente de dilatación cúbica es β, se pesa tres veces en el aire y en un líquido a las temperaturas t_1 y t_2. Las indicaciones de las balanzas para las tres pesadas son: P, P_1 y P_2. Determinar el coeficiente de dilatación cúbica del líquido.
Solución.
Supongamos que el volumen de la bola a la temperatura t_1 es igual a V, entonces a la temperatura t_2 será igual a $V(1 + \beta\Delta t)$, donde $\Delta t = t_2 - t_1$
Escribamos las indicaciones de las balanzas para las tres pesadas:

$$P = \rho V g\ ,$$

$$P_1 = P - \rho_1 V g\ ,$$

$$P_2 = P - \rho_1 V g\frac{(1 + \beta\Delta t)}{(1 + \beta_1\Delta t)}\ .$$

Donde ρ es la densidad del vidrio y ρ_1 la densidad del líquido (ambas a la temperatura t_1).
En la fórmula de P despreciamos la fuerza de empuje por ser pequeña la densidad del aire. Por eso no tiene importancia la temperatura a que hizo esta pesada.
De las tres ecuaciones se obtiene β_1 en función de P, P_1, P_2, t_1, t_2 y β que son conocidos:

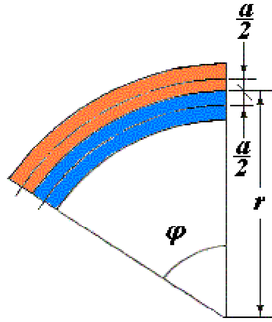
$$\beta_1 = \frac{P_2 - P_1 + (P - P_1)\beta(t_2 - t_1)}{(P - P_2)(t_2 - t_1)}$$

En la práctica se suele utilizar una bola de vidrio de cuarzo cuyo coeficiente de dilatación cúbica es mucho menor que el coeficiente de dilatación cúbica de la inmensa mayoría de los líquidos. En este caso la respuesta se puede simplificar:

$$\beta_1 = \frac{(P_2 - P_1)}{(P - P_2)(t_2 - t_1)}$$

Ejemplo 19. Dos láminas, una de acero y otra de bronce, de igual espesor $a = 0{,}2$ mm, están remachadas entre sí por sus extremos de manera que a la temperatura $T_1 = 293$ K forman una lámina bimetálica plana. ¿Cuál será el radio de flexión de esta lámina a la temperatura $T_2 = 393$ K?
El coeficiente de dilatación lineal:
Acero es $\alpha_1 = 1{,}1\times10^{-5}\ K^{-1}$ y del
Bronce es $\alpha_1 = 2\times10^{-5}\ K^{-1}$.

Solución.



Vamos a suponer que la línea media de cada lámina conserva la longitud que tendría en estado no curvado. El radio *r* se determina por las condiciones

$$\varphi(r-\frac{a}{2})=\ell+\Delta\ell_1,\ \ \Delta\ell_1=\ell\alpha_1\Delta T,$$

$$\varphi(r+\frac{a}{2})=\ell+\Delta\ell_2,\ \Delta\ell_2=\ell\alpha_2\Delta T,$$

$$(1+\alpha_1\Delta T)(r+\frac{a}{2})=(1+\alpha_2\Delta T)(r-\frac{a}{2}),$$

Por consiguiente

$$r=\frac{a\left[2+\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\Delta T\right]}{2(\alpha_2-\alpha_1)\Delta T}=22{,}5\text{cm}$$

FATIGA DE ORIGEN TÉRMICO.

Consideremos una barra de sección A sujeta en ambos extremos



Al aumentar la temperatura Δt, debería producirse un cambio de longitud

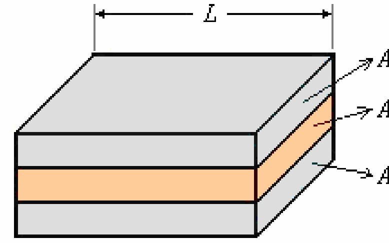
$$\frac{\Delta\ell}{\ell}=\alpha\Delta t$$

pero como no se puede dilatar por estar sujeta, la tensión debe aumentar hasta un valor suficiente para producir el mismo cambio pero de sentido inverso, este esfuerzo es:

$\frac{F}{A}=Y\frac{\Delta\ell}{\ell}$, reemplazando obtenemos:

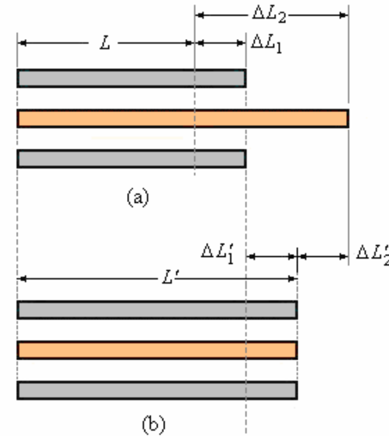
$$\frac{F}{A}=Y\alpha\Delta t$$

Ejemplo 20. Una platina de cobre se suelda con dos platinas de acero, como se muestra en la figura. Las tres platinas son iguales, teniendo exactamente la misma longitud a temperatura ambiente. Calcular las fatigas que se producirán al aumentar la temperatura en Δt grados.



Solución.

En el esquema se muestran las dilataciones que se producirían en cada barra si no estuvieran soldadas (a) y las deformaciones por estarlo (b).



También se tiene que la distribución de fuerzas elásticas que igualan la longitud del sistema, por simetría se puede considerar de la siguiente forma siguiente:

$F_2=2F_1$



De este esquema tenemos las siguientes relaciones geométricas entre las deformaciones:

Dividiendo esta expresión entre L_0, tenemos una relación entre las deformaciones unitarias

$$\frac{\Delta L_2}{L}-\frac{\Delta L'_2}{L}=\frac{\Delta L_1}{L}+\frac{\Delta L'_1}{L}$$

Como:

$$\frac{\Delta L_1}{L}=\alpha_1\Delta t\ \text{ y }\ \frac{\Delta L'_1}{L}=\frac{F_1}{AY_1}$$

$$\frac{\Delta L_2}{L}=\alpha_2\Delta t\ \text{ y }\ \frac{\Delta L'_2}{L}=\frac{F_2}{AY_2}$$

Reemplazando se tiene:

$$\alpha_1\Delta t-\frac{F_1}{AY_1}=\alpha_2\Delta t+\frac{F_2}{AY_2}$$

Con $F_2=2F_1$

$$\alpha_1\Delta t-\frac{F_1}{AY_1}=\alpha_2\Delta t+\frac{2F_1}{AY_2}$$

Despejando F_1/A

$$\frac{F_1}{A}=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1}+\frac{2}{Y_2}\right)}$$

Y las fatigas serán:

$$S_1=\frac{F_1}{A}=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1}+\frac{2}{Y_2}\right)} \text{ y}$$

$$S_2=\frac{F_2}{A}=\frac{2F_1}{A}=\frac{2(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t}{\left(\frac{1}{Y_1}+\frac{2}{Y_2}\right)}$$

Nota: Por sencillez de exposición, se ha omitido precisar que al determinar las deformaciones unitarias $\frac{\Delta L'_1}{L}$ y $\frac{\Delta L'_2}{L}$ se han despreciado los términos de segundo orden.

$$\frac{\Delta L'_1}{L+\Delta L_1}\approx\frac{\Delta L'_1}{L}=\frac{F_1}{AY_1} \text{ y}$$

$$\frac{\Delta L'_2}{L+\Delta L_2}\approx\frac{\Delta L'_2}{L}=\frac{F_2}{AY_2}$$

Debido a $L>>\Delta L_1$ y $L>>\Delta L_2$.

Ejemplo 21. Dos varillas del mismo diámetro, una de bronce de 25 cm. de longitud, y la otra de acero de 50 cm. De longitud se colocan extremo a extremo y aseguradas entre dos soportes rígidos.
La temperatura de las varillas se eleva 40°C.
¿Cuál es el esfuerzo en cada varilla?
Módulo de Young del acero 20 x 10^{11} dina cm^{-2}
Módulo de Young del bronce: 10 x 10^{11} dina cm^{-2}
Coeficiente de dilatación térmica acero 1,2x10^{-5} por °C
Coeficiente de dilatación térmica bronce 1,8x10^{-5} por °C

Solución.
Al elevarse la temperatura las varillas deberían expandirse si les fuera permitido, pero al no ser así sufren esfuerzo de compresión, las fuerzas en las dos varillas debe ser la misma. Por lo tanto, la unión debe de desplazarse hasta alcanzar el equi1ibrio. Entonces los esfuerzos son iguales.

$$\frac{F}{A}=\frac{Y_A\Delta\ell_A}{\ell_A}=\frac{Y_B\Delta\ell_B}{\ell_B} \qquad (1)$$

Pero la longitud $(\Delta\ell_A+\Delta\ell_B)$ es igual a la cantidad que no se deje expandir por dilatación

$$\Delta\ell'_A+\Delta\ell'_B=\ell_A\alpha_A\Delta t+\ell_B\alpha_B\Delta t$$

Luego:

$$\Delta\ell_A+\Delta\ell_B=(\ell_A\alpha_A+\ell_B\alpha_B)40 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos

$$\Delta\ell_A=\frac{(\ell_A\alpha_A+\ell_B\alpha_B)40}{(1+\frac{\ell_B}{\ell_A}\frac{Y_A}{Y_B})}$$

$$\Delta\ell_B=\frac{(\ell_A\alpha_A+\ell_B\alpha_B)40}{(1+\frac{\ell_A}{\ell_B}\frac{Y_B}{Y_A})}$$

Reemplazando valores tenemos:

$\Delta\ell_A = 2{,}1 \text{ x } 10^{-2}$ cm y

$\Delta\ell_B = 2{,}1 \text{ x } 10^{-2}$ cm.

y el esfuerzo en cada varilla

$$\frac{F}{A}=\frac{Y_A\Delta\ell_A}{\ell_A}=\frac{Y_B\Delta\ell_B}{\ell_B}$$

$$=10\text{ x }10^{11}\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}\text{ x }\frac{2{,}1\text{ x }10^{-2}\text{ cm}}{25\text{ cm}}$$

$$=0{,}84\text{ x }10^9\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$$

Ejemplo 22. Una barra de bronce se enfría en nitrógeno líquido hasta la temperatura T_1 = 72 K. Así enfriada, esta barra se introduce ajustadamente en la abertura rectangular de una abrazadera rígida, que está a la temperatura T_2 = 293 K, de manera que la holgura entre los extremos de la barra y los planos correspondientes de la abertura de la abrazadera puede considerarse nula. ¿Qué presión ejercerá la barra sobre la abrazadera cuando se caliente hasta la temperatura T_2 = 293 K? El coeficiente de dilatación lineal del bronce es α = 1,75 x10^{-5} K^{-1} y el módulo de Young Y = 1,04 x 10^{11} Pa.

Solución.
Al enfriarse, la barra se contrae. Su longitud se hace igual a $\ell=\ell_0[1-\alpha(T_2-T_1)]$, de donde

$\frac{(\ell_0-\ell)}{\ell_0}=\alpha(T_2-T_1)$, Después de calentar la barra, apretada en la abrazadera, su longitud sigue siendo ℓ, y la compresión $(\ell-\ell_0)$ estará ahora motivada por las fuerzas elásticas.

Escribamos la ley de Hooke: $\frac{(\ell_0-\ell)}{\ell_o}=\frac{p}{Y}$, donde p es la presión que ejerce 1a abrazadera sobre la barra en la dirección del eje de ésta.

Comparando las expresiones de $\frac{(\ell_0-\ell)}{\ell_o}$ hallamos que 1a presión que buscábamos:

$p=Y\alpha(T_2-T_1)=4\times10^8$ Pa .

Conviene advertir que la presión no depende de la longitud de la barra.

Ejemplo 23. Entre dos paredes se encuentra una barra, de sección A, compuesta de dos partes de

igual longitud $\ell/2$ que tienen los coeficientes de dilatación lineal α_1 y α_2 y los módulos de Young Y_1 y Y_2. A 1a temperatura T_1 los extremos de la barra apenas tocan las paredes.
¿Con qué fuerza presionará dicha barra sobre las paredes si se calienta hasta la temperatura T_2. Despréciese la deformación de las paredes. ¿Cuánto se desplazará la junta de las partes de la barra?

Solución.

Cuando la barra se calienta desde la temperatura T_1 hasta la temperatura T_2, sin paredes que la limiten, se alarga en la magnitud

$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)(\alpha_1 + \alpha_2)(T_2 - T_1).$$

Con las paredes limitadoras la barra calentada resulta comprimida en esta misma magnitud. Por la ley de Hooke (la fuerza compresora F es la misma en ambas partos de la barra)

$$\Delta\ell = \frac{\ell_1 F}{Y_1 S} + \frac{\ell_2 F}{Y_2 S} \approx \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2}\right)\frac{F}{A}$$

Esta relación, en términos generales, es aproximada, ya que las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 de !as partes de la barra a la temperatura T_2 las hemos sustituido por su longitud $\ell/2$ a la temperatura T_1. No obstante, se comprende fácilmente que el error relativo que se comete al determinar $\Delta\ell$ por esta f6rmula será del orden do $\Delta\ell/\ell$ y, por lo tanto, nuestra aproximación es muy buena ($\Delta\ell << \ell$) De las relaciones antes escritas hallamos.

$$F = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{(Y_1 + Y_2)} Y_1 Y_2 A (T_2 - T_1).$$

El desplazamiento $\Delta\ell$ de la junta de las partes de la barra se puedo determinar tomando en consideración que éste se compone del desplazamiento debido a la dilatación (por ejemplo, de la primera parte de la barra) y del desplazamiento inverso causado por compresión:

$$\Delta\ell = \frac{\ell}{2}\left[\alpha_1 (T_2 - T_1) - \frac{F}{Y_1 A}\right]$$

$$= \frac{\ell}{2}\frac{(\alpha_1 Y_1 - \alpha_2 Y_2)}{(Y_1 + Y_2)}(T_2 - T_1)$$

Ejemplo 24. Un anillo de latón de varios centímetros de diámetro se calienta hasta la temperatura T_1 = 573 K y se encaja ajustadamente sobre un cilindro de acero cuya temperatura es T_2 = 291 K. ¿Qué esfuerzo de rotura experimentará el anillo una vez enfriado hasta 291 K? .El coeficiente de dilatación lineal del latón *es* α = 1,84 x 10^{-6} K^{-1} y su módulo de Young Y = 6,47 x 10^{10} Pa. Las dimensiones de la sección del anillo son 2 x 5 mm^2.

Solución.

Al ser calentada, la longitud de la circunferencia interna del anillo aumentó:

$$\ell_1 = \ell_2[1 + \alpha(T_1 - T_2)],\ \frac{(\ell_1 - \ell_2)}{l_2} = \alpha(T_1 - T_2),$$

Donde ℓ_1 y ℓ_2 son las longitudes de la circunferencia interna a las temperaturas T_1 = 573 K y T_2= 291 K. Despreciando la disminución del diámetro del cilindro de acero bajo la acción de los esfuerzos compresoras por parte del anillo, consideraremos que, después de enfriarse el anillo, la longitud do su circunferencia interna sigue siendo igual a ℓ_1 y el anillo resulta estirado por las fuerzas elásticas. Como en nuestro caso el grosor del anillo es pequeño en comparación con su diámetro se puede suponer que el alargamiento relativo de todas sus capas es el mismo e igual a $\dfrac{(\ell_1 - \ell_2)}{\ell_2}$.

Entonces la extensión del anillo se puede relacionar con el esfuerzo de tracción por medio de la ley de Hooke: $\dfrac{(\ell_1 - \ell_2)}{\ell_2} = \dfrac{F}{YA}$, donde F es el esfuerzo do tracción; *A,* la sección del anillo, y *Y,* el módulo de Young. En definitiva se obtiene que
$F = Y\alpha\,(T_1 - T_2) = 3360$ N.

Esta solución no es exacta totalmente debido o sólo a que hemos sustituido la deformación no homogénea del anillo por su alargamiento uniforme, sino también a que las tensiones radiales provocan en el anillo la variación de la longitud de su circunferencia. Cuanto menor sea el espesor del anillo en comparación con su diámetro, tanto menores serán las correcciones a introducir por estas circunstancias.

Ejemplo 25. Un tubo de acero de 28,0 m de longitud, se instaló cuando la temperatura era de 15º C, se usa para transportar vapor sobrecalentado a la temperatura e 110º C. El coeficiente de expansión lineal del acero es 1,2 x 10^{-5} K^{-1}, el módulo de Young es 2,0 x 10^{11} Pa, y el esfuerzo de ruptura es 5,0 x 10^8 Pa.

a) El tubo puede expandirse libremente cuando transporta vapor. ¿En cuánto incrementa su longitud?

b) A la temperatura de 15º C la tubería se aseguró al piso de concreto tal que se impide la expansión lineal. ¿Cuál es la relación entre el esfuerzo térmico en el tubo y el esfuerzo de ruptura del acero, cuando se transporta el vapor?

Solución.

a)

α =1,2 x 10^{-5} K^{-1}, L = 28,0 m

$$\Delta\theta = 110 - 15 = 95^\circ C.$$

$$\Delta L = \alpha L \Delta\theta$$

$$\Rightarrow\ \Delta L = (1,2\times 10^{-5})(28)(95) = 3,192 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

b) $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{F}{YA} = \dfrac{S}{Y}$

$$\Rightarrow\; S = Y\frac{\Delta L}{L} = Y\left(\frac{\alpha L\Delta\theta}{L}\right) = Y\alpha\Delta\theta$$

Este es el esfuerzo térmico

$$S = 2{,}0\times10^{11}\left(1{,}2\times10^{-5}\right)(95) = 2{,}28 \text{ x } 10^8 \text{ Pa}$$

$$\frac{\text{esfuerzo térmico}}{\text{esfuerzo de rúptura}} = \frac{2{,}28\times10^8}{5{,}0\times10^8} = 0{,}456$$

Ejemplo 26. Una esfera hueca del metal está flotando en el agua a 0 ºC. Si la temperatura del agua se eleva a θ ºC, la esfera se sumerge completamente en el agua sin hundirse. Desprecie la expansión de la esfera. Encuentre la expresión para determinar coeficiente de dilatación cúbica del agua.

Solución.

Dados:

ρ_e, la densidad de la esfera,

ρ_0, la densidad del líquido

β, Coeficiente de dilatación cúbica del líquido

$$(\rho_\theta)_{agua} = (\rho_e)_{esfera}$$

Como $V_{a\theta} = V_{a0}(1+\beta\theta) \Rightarrow$

$$\frac{m_a}{\rho_\theta} = \frac{m_a}{\rho_0}(1+\beta\theta) \Rightarrow \frac{1}{\rho_\theta} = \frac{1}{\rho_0}(1+\beta\theta) \Rightarrow$$

$$\rho_\theta = \rho_0(1-\beta\theta)$$

Igualando $\rho_0(1-\beta\theta) = \rho_e$

Finalmente $\beta = \dfrac{\rho_0 - \rho_e}{\theta\rho_e}$

CALOR Y TRABAJO

Cuando dos sistemas a diferente temperatura se hallan en contacto térmico, el calor fluye del sistema mas caliente al más frío, hasta que alcanzan el equilibrio a una temperatura común, la cantidad de calor que sale de un cuerpo es igual a la cantidad de calor que entra en el otro. Inicialmente se elaboró la teoría del calórico, para explicar este flujo, esta sustancia no podía ser creada ni destruida, pero si transferida de un cuerpo a otro. La teoría del calórico servía para describir la transferencia de calor, pero se descartó al observar que el calórico se creaba por fricción y no habría una desaparición correspondiente de ca1órico en ningún otro sitio.

En 1778 el Conde Rumford, como punto de sus observaciones en el taladro de cañones propuso que él calor debe estar asociado con el movimiento. Pero no se estableció sino hasta medio siglo después de esta observación que había una relación definida entre la cantidad de trabajo hecho contra la fricción y el calor producido.

En 1843 James Prescott Joule empleó un aparato en el cual el agua se agitaba por un conjunto de paletas giratorias y la energía mecánica suministrada para rotar las paletas podía medirse con aproximación. El efecto térmico del trabajo mecánico hecho sobre el agua, era la elevación de la temperatura. El experimento de Joule demostró que la elevación de la temperatura era proporcional a la cantidad de trabajo hecho sobre el agua. Por consiguiente el trabajo realizado en agitar el agua es equivalente al calor añadido al agua.

A pesar de que no necesitamos unidades especiales para el calor, una vez reconocido que es una forma de energía medible en Joules, o cualquier otra unidad de energía, se sigue utilizando la unidad histórica del calor, es decir la CALORIA. La caloría se define cuantitativamente como la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua desde 14,5°C a 15,5°C. La cantidad de energía para elevar la temperatura de un kilogramo de agua desde 14,5°C a 15,5°C es la kilocaloría. La “caloría” utilizada para medir el equivalente energético de los alimentos es realmente la kilocaloría. En el sistema ingles la unidad es el British thermal unit (BTU)

1 BTU = 252 calorías

El equivalente exacto entre el trabajo realizado y el calor añadido está dado por la relación experimental.

1 cal = 4,186 Joules

1 BTU = 778 libra pie

Esta relación es conocida como el EQUIVALENTE MECANICO DE CALOR

CAPACIDAD CALORIFICA. CALOR ESPECÍFICO

La cantidad de calor necesario para producir un aumento de temperatura en una cierta masa depende de la sustancia. Definamos primero:

La CAPACIDAD CALORIFICA. (*C*) de un cuerpo es la cantidad de calor requerido para elevar la temperatura de un cuerpo en un grado,

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

Sus unidades son: Caloría/°C, BTU/°F.

Luego, definamos:

El CALOR ESPECIFICO (*c*) es la capacidad calorífica por unidad de masa:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{dQ/dT}{m} = \frac{dQ}{mdt}$$

Sus unidades son cal/gr x °C ó BTU/libra x °F

Observe que: $1\,\dfrac{\text{kcal}}{\text{kg°C}} = 1\dfrac{\text{cal}}{\text{g°C}}$

Y que:

$$\frac{1\,\text{BTU}}{1\,\text{libra°F}} = \frac{250\,\text{cal}}{453{,}6\,\text{g}\;\;5/9\text{°C}} = 1\frac{\text{cal}}{\text{g°C}} = 1\frac{\text{kcal}}{\text{kg°C}}$$

O sea que el valor numérico del calor específico es el mismo en esas tres unidades.

A pesar que el calor específico de la sustancias varía ligeramente con la temperatura, será adecuado para nuestra discusión, asumir que el calor específico es constante independiente de la temperatura. Luego podemos determinara el calor Q necesario para elevar la temperatura de la masa m de una sustancia Δt grados, de la siguiente manera:

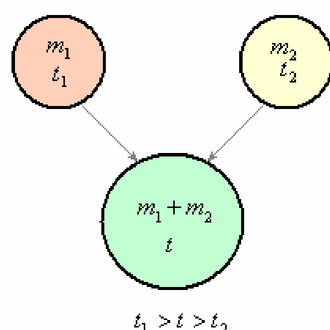
$$Q = m\int_{T_i}^{T_f} c dt = mc\left(T_f - T_i\right)mc\Delta T$$

CALOR ESPECIFICO			
Aluminio	0,212	Hielo	0,48
Acero	0,11	Carbón	0,3
Bronce	0,090	Concreto	0.16
Cobre	0,094	Vidrio	0,12 - 0,20
Oro	0,031	Parafina	0,69
Plata	0,056	Caucho	0,48
Platino	0,032	Madera	0,3 – 0,7
Plomo	0,031	Agua	1,00
Tungsteno	0,032	Alcohol	0,6
Zinc	0,094	Petróleo	0,51
		Agua de mar	0,93

La capacidad calorífica depende del tipo de proceso que se realiza durante la transferencia de calor. Tiene valores definidos solamente para procesos definidos.

En particular manteniendo la presión constante se denomina capacidad calorífica a presión constante *Cp* y si se mantiene el volumen constante se denomina capacidad calorífica a volumen constante *Cv*. En general *Cp* y *Cv* son diferentes y se analizarán con algún detalle más adelante.

Ejemplo 27. Dos sustancias m_1 y m_2 de calores específicos c_1 y c_2 están a temperatura t_1 y t_2 respectivamente ($t_1 > t_2$).
Calcular la temperatura final que alcanzan al ponerlos en contacto, sabiendo que no se presentan cambios de estado.
Solución.



Por conservación de energía:

$$\sum Q = 0$$

Como: $Q = mc\,(t_f - t_f)$
Se tiene:

$$m_1c_1\left(t - t_1\right) = m_2c_2\left(t - t_2\right)$$

o bien

$$-m_1c_1\left(t - t_1\right) + m_2c_2\left(t - t_2\right) = 0$$

o sea: Calor perdido = calor ganado

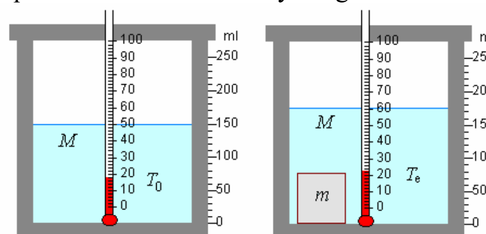
$$m_1c_1t_1 - m_1c_1t = m_2c_2t - m_2c_2t_2$$

$$m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2 = \left(m_1c_1 + m_2c_2\right)t$$

Despejando el valor de la temperatura final t:

$$t = \frac{m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$$

Determinación del calor específico de un sólido
La experiencia se realiza en un calorímetro consistente en un vaso (Dewar) o en su defecto convenientemente aislado. El vaso se cierra con una tapa hecha de material aislante, con dos orificios por los que salen un termómetro y el agitador.



Se pesa una pieza de material sólido de calor específico c desconocido, resultando m su masa. Se pone la pieza en agua casi hirviendo a la temperatura T.
Se ponen M gramos de agua en el calorímetro, se agita, y después de un poco de tiempo, se mide su temperatura T_0. A continuación, se deposita la pieza de sólido rápidamente en el calorímetro. Se agita, y después de un cierto tiempo se alcanza la temperatura de equilibrio T_e.

m_c es la masa del vaso del calorímetro y c_c su calor específico.

m_t la masa de la parte sumergida del termómetro y c_t su calor específico

m_a la masa de la parte sumergida del agitador y c_a su calor específico

M la masa de agua que contiene el vaso, su calor específico es la unidad
Por otra parte:
Sean m y c las masa y el calor específico del cuerpo problema a la temperatura inicial T.
En el equilibrio a la temperatura T_e se tendrá la siguiente relación.

$$\left(M + k\right)\left(T_e - T_0\right) + mc\left(T_e - T\right) = 0$$

La capacidad del calorímetro dada por

$k = m_c c_c + m_t c_t + m_a c_a$, se le denomina equivalente en agua del calorímetro, y se expresa en gramos de agua, y es una constante para cada calorímetro.
El calor específico desconocido del será por tanto

$$c = \frac{(M + k)(T_e - T_0)}{m(T - T_e)}$$

En esta fórmula tenemos una cantidad desconocida k, que debemos determinar experimentalmente.

Determinación del equivalente en agua del calorímetro

Se ponen M gramos de agua en el calorímetro, se agita, y después de un poco de tiempo, se mide su temperatura T_0. A continuación se vierten m gramos de agua a la temperatura T. Se agita la mezcla y después de un poco de tiempo, se mide la temperatura de equilibrio T_e.
Como el calorímetro es un sistema aislado tendremos que

$$(M + k)(T_e - T_0) + m(T_e - T)$$

$$\Rightarrow\ k = \frac{(T - T_e)}{(T_e - T_0)} m - M$$

Ejemplo 28. Calcule el calor específico de un metal con los siguientes datos. Un recipiente ("calorímetro") hecho de metal cuya masa es 3,64 kg contiene 13,6 kg de agua. Un pedazo de metal de 1,82 kg de masa, del mismo material del recipiente y con temperatura de 176,7 ºC se echa en el agua. El agua y el recipiente tienen inicialmente una temperatura de 15,5 ºC y la temperatura final de todo el sistema llega a ser de 18,33 ºC.
Solución.
Debido a que se trata de un problema de intercambio de calor, el calor entregado por el metal = calor recibido por el (agua y recipiente). Llamando Q_1 al calor liberado por el metal, Q_2, Q_3 a los recibidos por el agua y recipiente respectivamente:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.$$

Considerando que el metal y recipiente tienen un calor específico c_m, reemplazando en la expresión anterior:

$$Q_1 = m_{metal} c_m (T_{final} - T_{metal}),$$

$$Q_2 = m_{agua} c_{agua} (T_{final} - T_{agua}) \text{ y}$$

$$Q_3 = m_{recipiente} c_m (T_{final} - T_{recipiente})$$

$$m_m c_m (T_f - T_m) + m_a c_a (T_f - T_a) + m_r c_m (T_f - T_r) = 0,$$

Es decir:

$$c_m = \frac{-m_a c_a (T_f - T_a)}{m_m (T_f - T_m) + m_r (T_f - T_r)}$$

$$= 1{,}38 \times 10^{-2} \left[\frac{\text{cal}}{\text{g °C}}\right].$$

Ejemplo 29. ¿Cuántas calorías se requieren para elevar la temperatura de 3 kg de aluminio de 20ºC a 50ºC?
Solución.
Tomemos como calor específico del aluminio
c = 0,215 cal/g ºC, entonces
$Q = mc\Delta t$ = 3000 x 0,215 x (50 - 20) = 1,935 x 10^4 cal

Ejemplo 30. Un trozo de 300 g de cobre se calienta en un horno y en seguida se deja caer en un calorímetro de 500 g de aluminio que contiene 300 g de agua. Si la temperatura del agua se eleva de 15ºC a 30ºC ¿cuál era la temperatura inicial del cobre? (Suponga que no se pierde calor.) ¿Cuánto calor se debe agregar a 20 g de aluminio a 20ºC para fundirlo completamente?
Solución.
c_{Al} = 0,215 cal/g.ºC
c_{H2O} = 1 cal/g.ºC
c_{Cu} = 0,0924 cal/g.ºC
$Q_{\text{absorbido}}$ = 300 x 1 x (30 - 15) + 500 x 0,215 x (30 - 15)
Q_{cedido} = 300 x 0,0924 x (t_i - 30)
Entonces
300 x 1 x (30 - 15) + 500 x 0,215 x (30 - 15) = 300 x 0,0924 x (t_i - 30), de donde la temperatura inicial del Cobre resulta ser t_i = 250,51 ºC.
Para saber las calorías necesarias para fundir 20 gramos de aluminio a 20 ºC, de las tablas obtenemos para el calor de fusión:
$L_{f(Al)}$ = 3,97x10^5 J/kg a t = 660 ºC, de modo que el calor necesario será
Como 1 J = 0,24 cal de modo que
$L_{f(Al)}$ = 3,97 x 102 x 0,24 = 95,28 cal/g
Entonces $Q = mc\Delta t + mL_f$
Q = 20 x 0,215(660 - 20) + 20 x 95,28 = 4657,6 cal

Ejemplo 31. Una moneda de cobre de 3 g a 25ºC, cae al piso desde una altura de 50 m.
a) Sí 60% de su energía potencial inicial se gasta en aumentar su energía interna, determine su temperatura final.
b) ¿Depende el resultado de la masa del centavo? Explique.
Solución.
c_{Cu} = 0,0924 cal/g ºC
m_{Cu} = 3 g
a) La energía potencial será
$U = mgh$ = 0,003 x 9,8 x 50 = 1,47 J = 0,35 cal
Entonces

$$t_f = t_i + \frac{Q}{mc_{Cu}} = 25 + \frac{0{,}6 \times 0{,}35}{3 \times 0{,}0924} = 25{,}76\ \text{ºC}$$

b) No depende de m: porque Q es proporcional m y el aumento de temperatura es inversamente proporcional a m.

Ejemplo 32. Para medir el calor específico de un líquido se emplea un calorímetro de flujo. Se añade calor en una cantidad conocida a una corriente del líquido que pasa por el calorímetro con un volumen conocido. Entonces, una medición de la diferencia de temperatura resultante entre los puntos de entrada y salida de la corriente de líquido nos permite

calcular el calor específico del líquido. Un líquido de 0,85 g/cm^3 de densidad fluye a través de un calorímetro a razón de 8,2 cm^3/s. Se añade calor por medio de un calentador eléctrico en espiral de 250 W, y se establece una diferencia de temperatura de 15°C en condiciones de estado estacionario entre los puntos de entrada y salida del flujo. Halle el calor específico (c) del líquido.

Solución.

El flujo de calor $\dot{Q} = 250\text{W}$ que se pone produce una elevación de temperatura ΔT = 15°C.

El calor absorbido por una masa m es $Q = mc\Delta T$,

Como es masa que fluye y la entrada de calor es estacionariamente

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = \frac{dm}{dt} c\Delta T .$$

De aquí

$$c = \frac{\dot{Q}}{\Delta T \frac{dm}{dt}} \text{, como } m = \rho V ,$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = 0,85 \times 8,2 = 6,97 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

Reemplazando valores, tenemos:

$$c = \frac{250}{15^o C \times 6,97 \times 10^{-3}} = 2391 \frac{\text{J}}{\text{kg}^o\text{C}}$$

FASES DE LA MATERIA

Otro de los efectos comunes de los cambios de temperatura son los cambios de estado de los materiales (sólido, líquido, gaseoso, plasma y CBE).

SÓLIDO. Manteniendo constante la presión, a baja temperatura los cuerpos se presentan en forma sólida tal que los átomos se encuentran entrelazados formando generalmente estructuras cristalinas, lo que confiere al cuerpo la capacidad de soportar fuerzas sin deformación aparente. Son, por tanto, agregados generalmente rígidos, duros y resistentes. El estado sólido presenta las siguientes características:

Fuerza de cohesión (atracción).

Vibración.

Tiene forma propia.

Los sólidos no se pueden comprimir.

Resistentes a fragmentarse.

Volumen definido.

Puede ser orgánico o inorgánico



LÍQUIDO. Incrementando la temperatura el sólido se va "descomponiendo" hasta desaparecer la estructura cristalina alcanzándose el estado líquido, cuya característica principal es la capacidad de fluir y adaptarse a la forma del recipiente que lo contiene. En este caso, aún existe una cierta ligazón entre los átomos del cuerpo, aunque de mucha menor intensidad que en el caso de los sólidos. El estado líquido presenta las siguientes características:

Fuerza de cohesión menor (regular)

Movimiento-energía cinética.

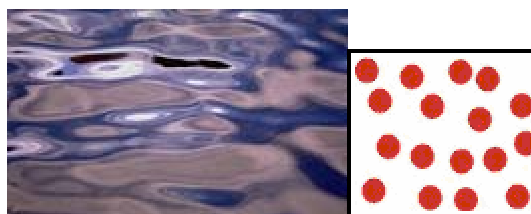
Sin forma definida.

Toma el volumen del envase que lo contiene.

En frío se comprime.

Posee fluidez.

Puede presentar fenómeno de difusión.



Gaseoso. Por último, incrementando aún más la temperatura se alcanza el estado gaseoso. Los átomos o moléculas del gas se encuentran virtualmente libres de modo que son capaces de ocupar todo el espacio del recipiente que lo contiene, aunque con mayor propiedad debería decirse que se distribuye o reparte por todo el espacio disponible. El estado gaseoso presenta las siguientes características:

Fuerza de cohesión casi nula.

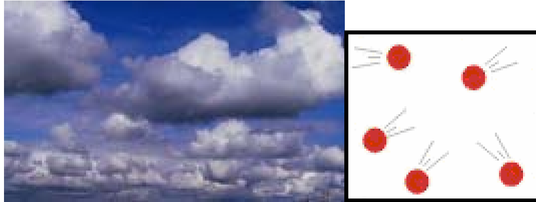
Sin forma definida.

Sin volumen definido.

Se puede comprimir fácilmente.

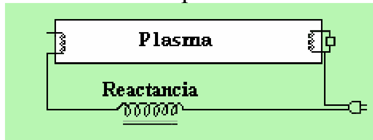
Ejerce presión sobre las paredes del recipiente que los contiene.

Los gases se mueven con libertad.



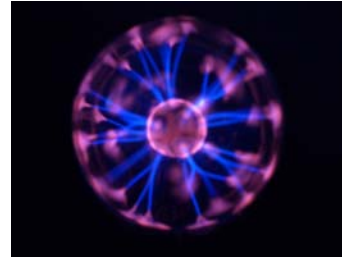
PLASMA. Al plasma se le llama a veces "el cuarto estado de la materia", además de los tres "clásicos", sólido, líquido y gas. Es un gas en el que los átomos se han roto, que está formado por electrones negativos y por iones positivos, átomos que han perdido electrones y han quedado con una carga eléctrica positiva y que están moviéndose libremente.

La lámpara fluorescente, muy usada en el hogar y en el trabajo, contiene plasma (su componente principal es el vapor de mercurio) que calienta y agita la electricidad, mediante la línea de fuerza a la que está conectada la lámpara.



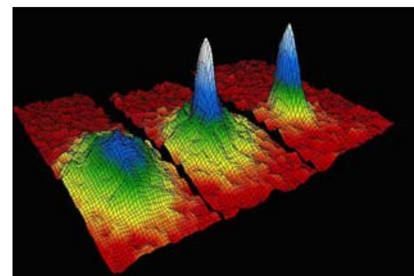
La línea hace positivo eléctricamente a un extremo y el otro negativo causa que los iones (+) se aceleren hacia el extremo (-), y que los electrones (-) vayan hacia el extremo (+). Las partículas aceleradas ganan energía, colisionan con los átomos, expulsan electrones adicionales y así mantienen el plasma, incluso aunque se recombinen partículas. Las colisiones también hacen que los átomos emitan luz y, de hecho, esta forma de luz es más eficiente que las lámparas tradicionales. Los letreros de neón y las luces urbanas funcionan por un principio similar y también se usan (o usaron) en electrónica.

La lámpara de plasma (también llamada "globo de plasma" o "esfera de plasma") es un objeto novedoso, que alcanzó su popularidad en los años 1980. Fue inventada por Nikola Tesla tras su experimentación con corrientes de alta frecuencia en un tubo de cristal vacío con el propósito de investigar el fenómeno del alto voltaje.

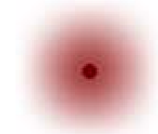


CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN (CBE). Otro estado de la materia es el condensado de Bose-Einstein (CBE), predicho en 1924 por Satyendra Nath Bose y Albert Einstein, y obtenido en 1995 (los físicos Eric A. Cornell, Carl E. Wieman y Wolfgang Ketterle compartieron el Premio Nobel de Física de 2001 por este hecho). Este estado se consigue a temperaturas cercanas al cero absoluto y se caracteriza porque los átomos se encuentran todos en el mismo lugar, formando un superátomo.

La figura siguiente muestra la Condensación de Bose-Einstein a 400, 200, y 50 nano-Kelvins



El Condensado de Bose-Einstein se ve como una pequeña masa en el fondo de una trampa magnética. Esta masa de condensado es como una gota de agua que se condensa del aire cuando éste es enfriado. Cuando se forma inicialmente, el condensado está rodeado todavía de átomos normales de gas, así que parece la semilla dentro de una cereza.



¿Para qué sirve la Condensación de Bose-Einstein? Es muy reciente y sabemos muy poco a cerca de ella para dar una respuesta. Es algo así como si viviéramos en una isla tropical hace 400 años y un pedazo de iceberg llegara a la costa. Sin que nadie hubiera visto hielo antes, pasaría algún tiempo antes de que alguien se diera cuenta de que puede usarse para hacer helados.



También hay ciertos problemas de ingeniería que deben ser resueltos antes de que la CBE pueda usarse para mucho.
Sin embargo las similitudes entre CBE y la luz de láser sugieren que probablemente lo sea.



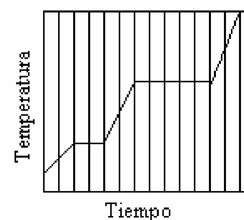
CAMBIOS DE ESTADO - CALOR LATENTE
Cuando la temperatura de un cuerpo aumenta por causa de un calor suministrado, se origina un aumento de la energía cinética del movimiento de las moléculas. Cuando un material pasa de la forma líquida a la fase gaseosa, las moléculas, que, por causa de sus atracciones naturales se mantenían originalmente en contacto, se alejan más de las otras. Esto requiere se realice un trabajo en contra de las fuerzas de atracción, es decir hace falta que se suministre una energía a las moléculas para separarlas. De este modelo podemos deducir que un cambio de fase de líquido a gas requiere calor aún cuando no se produzca elevación de la temperatura, lo mismo sucede para sólido a líquido.
Para sustancias puras", los cambios de fase se producen a cualquier presión, pero a determinadas temperaturas. Se requiere una determinada cantidad de calor para cambios de fase de una cantidad de sustancia dada.
Esto es, el calor es proporcional a la masa de la sustancia.

$$Q = mL$$

Donde L es una constante característica de la sustancia y de cambio de fase que se produce.
Si el cambio es de sólido a líquido, será L_f (calor latente de fusión) y si el cambio el de líquido a gas, será L_v (calor latente de vaporización).
En el caso del agua a presión atmosférica la fusión se produce a 0°C y L_f vale 79,7 cal/gr. Y la vaporización se produce a 100°C y L_v vale 539.2 cal/gr.
Similarmente ocurre para los procesos inversos de solidificación y condensación.

Sublimación.
También bajo ciertas condiciones de temperatura y presión se puede pasar directamente de sólido a gas son pasar por líquido y se denomina sublimación, L_s (calor de sublimación).

Ejemplo 33. Se añade calor a una sustancia pura en un recipiente cerrado a una razón constante. El gráfico muestra la temperatura de la sustancia como una función del tiempo. Si L_f es el calor latente de fusión y L_v es el calor latente de vaporización. ¿Cuál es el valor de la relación L_v/L_f para esta sustancia?



Solución.
La relación de los tiempos empleados en absorber calor para la vaporización y la fusión es 5/2, como se trata de la misma masa en ambos casos, esta relación será igual a la relación de los calores latentes; esto es: $\frac{L_V}{L_F} = \frac{5}{2}$

Ejemplo 34. Determinar el calor necesario para vaporizar 200 gr. De hielo que se encuentra a la temperatura de –5°C.
Solución.
Como ocurren cambios de estado debemos calcular las calorías requeridas en cada proceso.
Utilicemos los siguientes valores:
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g°C
Calor específico del agua: 1 cal/g°C
Calor de fusión del agua: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g

Calor para elevar la temperatura del hielo de –5°C a 0°C
$Q_1 = m \times c \times \Delta t = m \times 0{,}5 \times [0 - (-5)]$
$= m \times 2{,}5$ cal

Calor para pasar de hielo a agua (fusión)
$Q_2 = m \times L = m \times 80$ cal

Calor para elevar la temperatura del Agua de 0°C a 100°C
$Q_3 = m \times c \times \Delta t = m \times 1 \times (100-0)$
$= m \times 100$ cal

Calor para pasar de Agua a Vapor (vaporización)
$Q_4 = m \times 540$ cal

Finalmente,
$Q = \sum Q = Q_2 + Q_2 + Q_3 + Q_4$
$= m(2{,}5+80+100+540) = 200 \times 722{,}5$
$= 144500$ cal.

Ejemplo 35. Calcular la temperatura final cuando se mezclan 2 kg. de hielo a -20°C con 10 kg. de agua a 60°C.

Solución.

Como ocurren cambios de estados es preciso primero, hacer un balance de energía para determinar si el agua se convierte en hielo o el hielo en agua, u ocurre una conversión parcial.

Trabajemos en Kilocalorías utilizando los siguientes valores:

Calor específico del hielo : 0,55 kcal/kg °C
Calor específico del agua : 1 kcal/kg °C
Calor de fusión del agua : 80 kcal/kg

Calor necesario para convertir el hielo en agua a 0 °C.

$Q_1 = m_H \text{ x } c_H \text{x} \Delta t = 2 \text{ x } 20 = 22$ kcal

$Q_2 = m_H \text{ x } L = 2 \text{ x } 80 = 160$ kcal

$Q_H = \sum Q = Q_1 + Q_2 = 182$ kcal (1)

Calor liberado al llevar el agua de 60°C a 0ºC.

$Q'_1 = m_a \text{x } c_H \Delta t = 10 \text{ x } 1 \text{ x } 60 = 600$ kcal

$Q_a = \sum Q' = Q'_1 = 600$ kcal (2)

Comparando (1) y (2), como $Q_a > Q_H$, nos indica que el agua dispone de las calorías necesarias para convertir todo el hielo en agua y más aún elevar su temperatura a más de 0°C. Esto es, la temperatura final t estará entre, $0°C < t < 60°C$ y se determinará igualando el calor ganado al calor perdido.

Calor ganado

$Q_1 = 22$ (valor ya determinado)

$Q_2 = 160$ (valor ya determinado)

$Q_3 = m\,c\,\Delta t = 2 \text{ x } 1 \text{ x } (t\text{-}0) = 2t$

$Q_G = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$= 22 + 160 + 2t = 182 + 2t$ (3)

Calor perdido

$Q_P = m\,c\,\Delta t$

$= 10 \text{ x } 1\text{x } (60\text{-}t) = 10(60 - t)$ (4)

Finalmente, igualando (3) y (4)

$Q_G = Q_P$

$182 + 2t = 10(60 - t)$

Despejando t, se obtiene la temperatura final de la mezcla (agua)

$T = 34{,}8°C$

Ejemplo 36. Determinar la temperatura final cuando se mezclan 1/2 kg de hielo a -16°C con 1 kg de agua a 20°C que se encuentra contenida en un recipiente o calorímetro de cobre de 1/2 kg.

Solución.

Como en el ejemplo anterior es necesario hacer un balance de energía.

Nuevamente trabajando en kilocalorías y con Calor específico del cobre = 0,09 kcal/kg °C

Calor necesario para convertir el Hielo en Agua a °C.

$Q_1 = m_H \text{ x } c_H \text{ x } \Delta t = 0{,}55 \text{ x } 16 = 4{,}4$ kcal

$Q_2 = m_H \text{ x } L = 0{,}5 \text{ x } 80 = 40{,}0$ kcal

$Q_H = \sum Q = Q_1 + Q_2 = 44{,}4$ kcal (1)

Calor liberado para llevar el Agua a °C (incluyendo el recipiente)

$Q'_1 = m_a \text{ x } c_a \text{ x } \Delta t = 1 \text{ x } 1 \text{ x } 20 = 20{,}0$ kcal

$Q'_2 = m_c \text{ x } c_c \text{ x } \Delta t = 0{,}5 \text{ x } 0{,}09 \text{ x } 20 = 0{,}9$ kcal

$Q_{ac} = \sum Q' = Q'_1 + Q'_2 = 20{,}9$ kcal (2)

Comparando (1) y (2), como $Q_{ac} < Q_H$, nos indica que no se dispone de las calorías necesarias para convertir el hielo en agua a °C. Pero, como $Q_{ac} > Q_1$ si se elevara la temperatura del hielo a 0°C y solo parte del hielo se podrá convertir en agua.

Luego, la temperatura final es 0°C, $t = 0°C$

¿Cuáles serán las masas finales de hielo y Agua?

La energía que resta después de elevar la temperatura del hielo a 0°C es:

$Q_{ac} - Q_1 = 20{,}9 - 4{,}4 = 16{,}5$ kcal.

Con estas calorías se convertirá en agua:

$Q = M \text{ x } L$

$\Rightarrow 16{,}5 = M \text{ x } 80 \Rightarrow M = 0{,}21$ Kg.

y se quedarán como hielo a 0°C:

$(0{,}50 - 0{,}21) = 0{,}29$ kg.

Por lo tanto, se tendrá finalmente,

1,21 kg. de Agua y 0,29 kg. de Hielo

Por supuesto todo a 0°C, incluyendo el calorímetro.

Ejemplo 37. Un trozo de hielo de 10 g y temperatura –10 ºC se introducen en 1,5 kg de agua a 75 ºC. Determine la temperatura final de la mezcla.

$c_{hielo} = 0{,}45\,\text{cal/g°C}$,

$L_{fusión,hielo} = 80\,\text{cal/g}$

Solución.

El calor cedido por el agua es igual al ganado por el hielo. El hielo gana una porción calor desde la temperatura –10 ºC hasta 0 ºC, otra para cambiar de estado manteniendo la temperatura constante de 0 ºC y otra cuando se ha convertido en agua al cambiar la temperatura de 0 ºC hasta la temperatura de equilibrio T_e. De este modo:

$$m_h c_h [0 - (-10)] + m_h L_f$$
$$+ m_h c_a (T_e - 0) + m_a c_a (T_e - 75) = 0.$$

Despejando T_e encontramos:

$T_e = 73{,}94°C$

Ejemplo 38. Un recipiente de cobre de masa 0.5 kg contiene 1 kg de agua a 20°**C** se le añade 0,5 kg de hielo a –16°C

a) encontrar la temperatura de equilibrio

b) Cuanto hielo y cuanta agua quedan.

$c_{cobre} = 390 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$, $c_{agua} = 4190 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$

$c_{hielo} = 2100 \dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$, $L_{fusión\ hielo} = 334x10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$

Solución.

Calor cedido por el agua y el calorímetro al llevarlo de 20ºC a 0ºC

$$Q_1 = (m_c c_c + m_a c_a)\Delta\theta$$
$$= (0{,}5 \times 390 + 1{,}0 \times 4190)20 = 87700 \text{ J}$$

Calor para llevar el hielo -18ªC a 0ºC

$$Q_2 = m_h c_h \Delta\theta = 0{,}5\text{x}2100\text{x}16 = 16800 \text{ J}$$

Calor para fundir el hielo

$$Q_3 = L_f m_h = 334\text{x}10^3\text{x}0{,}5 = 167\text{x}10^3 \text{ J}$$

Análisis:

Tenemos 87700 J , esa cantidad puede elevar la temperatura del hielo hasta los 0ºC

Nos quedan 87700 -16800 = 70900 J

Esto no puede fundir todo el hielo, solamente alcanza para fundir $\dfrac{70{,}900 \times 10^3 \text{ J}}{334 \times 10^3 \text{ J/kg}} = 0{,}212$ kg

a) Temperatura de equilibrio 0ºC

b) Finalmente quedan 1 + 0,212 = 1,212 kg de agua y 0,5 – 0,212 = 0,288 kg de hielo

Ejemplo 39. Un recipiente metálico de masa 200 g, aislado del exterior, contiene 100 g de agua en equilibrio térmico a 22º C. Un cubo de hielo de 10 g, en el punto de fusión, se suelta en el agua, cuando se alcanza el equilibrio térmico la temperatura es 15º C. Asumir que no hay intercambio de calor con el exterior.

Para el agua el calor específico es 4190 J/kg K y el calor de fusión es 3,34 x 10^5 J/kg.

¿Cuál es el calor específico del metal?

Solución.

Calor cedido = Calor ganado

$$c_x(0{,}2)(22-15) + 4190(0{,}1)(22-15)$$
$$= 0{,}01(3{,}34 \times 10^5) + 4190(0{,}01)(15-0)$$
$$\Rightarrow c_x = 739{,}64 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Ejemplo 40. Determine el estado final cuando se mezclan 20 g de hielo a 0 ºC con 10 g de vapor a 100 ºC.

Solución.

C_{agua} = 1 cal/g. ºC

L_f = 3,33 x 10^5 J/kg = 80 cal/g

L_v = 2,26 x 10^6 J/kg = 542,4 cal/g

M_{hielo} = 20 g

M_{vapor} = 10 g

Si se condensa todo el vapor cede 5424 cal.

Si se funde todo el Hielo absorbe 80x20 = 1600 cal quedando agua que para ser llevada a 100 ºC absorbería a lo más 20 x 100 = 2000 cal.

De aquí se concluye que no puede condensarse todo el vapor, pero sí fundirse todo el Hielo. De modo que la temperatura final, en presencia de vapor debe ser t_F = 100 ºC: Supongamos entonces que condensa m gramos de vapor

Q_{cedido} = 542,4 x m cal

$Q_{absorbido}$ = 20 x 80 + 20 x 1 x 100 = 3600 cal

542,4 x m = 3600 $\Rightarrow$ $m = \dfrac{3600}{542{,}4} = 6{,}6$ g

Luego el estado final consiste en una mezcla a 100 ºC de 4,4 g de vapor y 26,6 g de agua líquida.

Ejemplo 41. Un recipiente de cobre de 0,1 kg contiene 0,16 kg de agua y 0,018 kg de hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica. Si se introduce un trozo de plomo de 0,75 kg de masa a 255°C, ¿qué temperatura final de equilibrio se alcanza? (Considere que no hay intercambio de calor con el entorno)

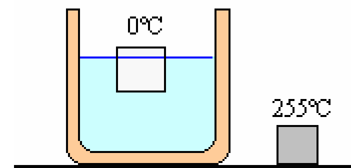
c_{Pb} = 130 J/kgK

c_{Cu} = 390 J/kgK

c_{agua} = 4190 J/kgK

$c_{fusión\ agua}$ = 334×10^3 J/kg

Solución.



Cobre $\begin{cases} m_{cu} = 0{,}1\text{kg} \\ t_{cu} = 0^\circ\text{C} \end{cases}$, Agua $\begin{cases} m_{agua} = 0{,}16\text{kg} \\ t_{cu} = 0^\circ\text{C} \end{cases}$,

Hielo $\begin{cases} m_{hielo} = 0{,}018\text{kg} \\ t_{cu} = 0^\circ\text{C} \end{cases}$

Plomo $\begin{cases} m_{Pb} = 0{,}75\text{kg} \\ t_{Pb} = 255^\circ\text{C} \end{cases}$

Para fundir el hielo = 334x10^3 (0,018) = 6012 J

m_{agua} = 0,16 + 0,018 = 0,178 kg

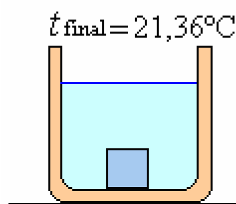
El plomo puesto a 0ºC nos proporciona = 130 (0,75)(255) = 24862,5 J

Nos quedarían 24862,5 – 6012 = 18850,5 J

Los que se emplearía para elevar la temperatura del sistema:

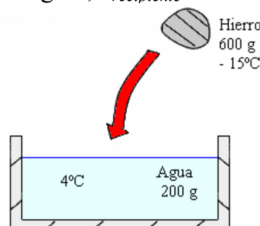
$$(mc + mc + mc)\Delta t = Q_{disponible}$$
$$(0{,}178 \times 4190 + 0{,}1 \times 390 + 0{,}75 \times 130)\Delta t = 18850{,}5$$

$$\Delta t = \frac{18850{,}5}{(745{,}82 + 39 + 97{,}5)}$$
$$= \frac{18850{,}5}{882{,}32} = 21{,}36^\circ\text{C}$$



Ejemplo 42. Un trozo de hierro se deja caer en agua tal como se muestra en la figura. Determine la temperatura y fase del agua en el equilibrio. En caso de coexistir 2 fases del agua determine la masa final en cada fase.

c_{hierro} = 0,107 cal/g ºC, $c_{recipiente} \approx 0$



Solución.

Agua de 4ºC a 0ºC $\Rightarrow$

$Q_1 = 200 \times 1 \times 4 = 800$ calorías

Hierro de – 15ºC a 0ºC $\Rightarrow$

$Q_2 = 600 \times 0{,}107 \times 15 = 963$ calorías

En el balance 963 – 800 = 163 calorías, las que convertirán en hielo a una parte del agua

$$m = \frac{163}{80} = 2{,}04 \text{ gramos}$$

La temperatura de equilibrio es 0ºC, 2,04 gramos de hielo y 197,6 gramos de agua.

Ejemplo 43. Dilatación térmica y equilibrio térmico.

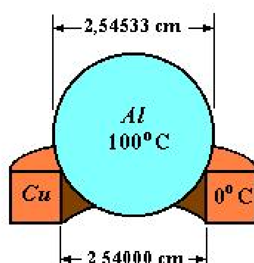
Un anillo de cobre de 21,6 g tiene un diámetro de 2,54000 cm a la temperatura de 0ºC. Una esfera de aluminio tiene un diámetro de 2,54533 cm a la temperatura de 100ºC. La esfera se sitúa sobre el anillo, y se deja que ambos lleguen al equilibrio térmico, sin que se disipe calor alguno al entorno. La esfera pasa justamente a través del anillo a la temperatura de equilibrio. Halle la masa de la esfera.

Calor específico del aluminio: 0,212 cal/gºC

Calor específico del cobre: 0,094 cal/gºC

Coeficiente de dilatación del aluminio: 24 x 10^{-6} ºC^{-1}

Coeficiente de dilatación del cobre: 17 x 10^{-6} ºC^{-1}



Solución.

La temperatura final de equilibrio del sistema es *t*.

Calor cedido por el aluminio = Calor ganado por el cobre

$$m_{aluminio} \times c_{aluminio}(100 - t) = m_{cobre} \times c_{cobre}(t - 0)$$

Poniendo valores

$$m_{aluminio} \times 0{,}212(100 - t) = 21{,}6 \times 0{,}094t$$

Diámetro final de la esfera de aluminio = diámetro final del anillo de cobre

$$D_{aluminio}\left[1 - \alpha_{aluminio}(100 - t)\right] = D_{cobre}\left[1 + \alpha_{cobre}(t - 0)\right]$$

Poniendo valores

$$2{,}5433\left[1 - 24 \times 10^{-6}(100 - t)\right] = 2{,}54\left[1 + 17 \times 10^{-6} t\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2{,}5433}{2{,}54} = \frac{\left[1 + 17 \times 10^{-6} t\right]}{\left[1 - 24 \times 10^{-6}(100 - t)\right]}$$

El primer término por el binomio de Newton se puede escribir como:

$$\frac{2{,}5433}{2{,}54} = \frac{2{,}54}{2{,}54} + \frac{0{,}0033}{2{,}54} = 1 + 2{,}1 \times 10^{-3}$$

El segundo término por el binomio de Newton se puede escribir como:

$$\left[1 + 17 \times 10^{-6} t\right]\left[1 + 24 \times 10^{-6}(100 - t)\right]$$

$$\left[1 + 17 \times 10^{-6} t\right]\left[1 + 24 \times 10^{-6}(100 - t)\right] = 1 + 2{,}4 \times 10^{-3} - 7 \times 10^{-6} t$$

Luego:

$$1 + 2{,}1 \times 10^{-3} = 1 + 2{,}4 \times 10^{-3} - 7 \times 10^{-6} t$$

Resolviendo *t*:

$$t = \frac{0{,}3 \times 10^{-3}}{7 \times 10^{-6}} = 42{,}2^{o}\mathrm{C}$$

Finalmente la masa de la esfera de aluminio será

$$m_{aluminio} = \frac{21{,}6 \times 0{,}094t}{0{,}212 \times (100 - 42{,}8)} = 7{,}17 \text{ gramos}$$

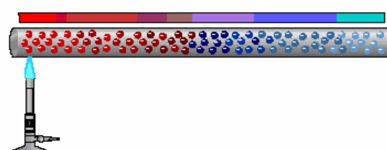
Es una esfera hueca.

TRANSFERENCIA DE CALOR

En este capítulo veremos en forma breve las formas en la cual la energía térmica fluye de u punto a otro en un medio dado, existen tres modos de transferencia, conducción, convección y radiación.

CONDUCCIÓN.

Cuando hay transporte de energía entre elementos de volumen adyacentes en virtud a la diferencia de temperatura entre ellas, se conoce como conducción de calor.



La expresión matemática fundamental de la conducción de calor es la generalización de los resultados de los experimentos en el flujo lineal de calor a través de una lámina de material de espesor Δx y de área A, una de las caras se mantienen a temperatura $\theta + \Delta\theta$, los resultado muestran que Q es proporcional al tiempo Δt.

$$Q \propto A\frac{\Delta\theta}{\Delta x}\Delta t$$

Este resultado podemos generalizar, en el límite:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = -kA\frac{d\theta}{dx}$$

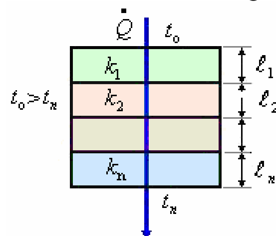
Donde k es la CONDUCTIVIDAD TERMICA del material.

El signo menos se introduce dado que Q fluye en la dirección de la disminución de la temperatura (del lado caliente al lado frío).

VALORES DE LA CONDUCTIVIDAD TERMICA	
Sustancias	k en $\dfrac{\text{kilocal}}{\text{s m °C}}$
Acero	0,011
Bronce	0,026
Aluminio	0,040
Ladrillo	$1,7 \times 10^{-4}$
Concreto	$4,1 \times 10^{-4}$
Madera	$0,3 \times 10^{-4}$
Vidrio	$1,4 \times 10^{-4}$
Hielo	$5,3 \times 10^{-4}$
Lana de vidrio o mineral	$0,09 \times 10^{-4}$
Caucho	$0,10 \times 10^{-4}$
Agua	$1,43 \times 10^{-4}$
Aire	$0,056 \times 10^{-4}$

Ejemplo 44. Flujo estacionario a través de una pared compuesta. Capas en "serie"

Determinación de la cantidad de calor que fluye en la dirección normal a través de un medio de capas múltiples entre las temperaturas externas t_0 y t_n constantes, como se muestra en la figura.



Solución.

Sea t_1 la temperatura entre la capa 1 y 2, t_2 la temperatura entre las capas 2 y 3 y así sucesivamente, luego tenemos:

En la primera capa

$$\dot{Q} = -k_1 A\frac{(t_1 - t_0)}{\ell_1} \Rightarrow t_0 - t_1 = \frac{\ell_1 \dot{Q}}{k_1 A}$$

En la segunda capa

$$\dot{Q} = -k_2 A\frac{(t_2 - t_1)}{\ell_2} \Rightarrow t_1 - t_2 = \frac{\ell_2 \dot{Q}}{k_2 A}$$

En la Capa n

$$\dot{Q} = -k_n A\frac{(t_n - t_{n-1})}{\ell_n} \Rightarrow t_{n-1} - t_n = \frac{\ell_n \dot{Q}}{k_n A}$$

Sumando miembro a miembro

$$t_o - t_n = \left(\frac{\ell_1}{k_1} + \frac{\ell_2}{k_2} + \ldots . \frac{\ell_n}{k_n}\right)\frac{\dot{Q}}{A}$$

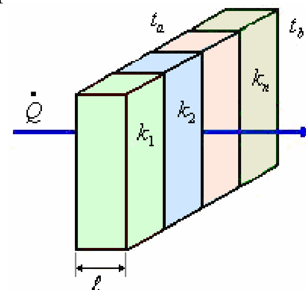
Luego

$$\dot{Q} = \frac{A(t_o - t_n)}{\dfrac{\ell_1}{k_1} + \dfrac{\ell_2}{k_2} + \ldots + \dfrac{\ell_n}{k_n}}$$

$$\dot{Q} = \frac{A(t_o - t_n)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\ell_i}{k_i}\right)}$$

Ejemplo 45. Flujo estacionario a través de una pared compuesta. Capas en "paralelo"

Determinación de la cantidad de calor $\dot{Q}$ que fluye en la dirección normal a un medio múltiple formado por placas paralelas como se muestra en la figura.



Solución.

El Flujo $\dot{Q}$ es la suma de los flujos $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_2$, ….. $\dot{Q}_n$ a través de cada una de las placas, de tal modo

$$\dot{Q} = -\frac{(k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots k_nA_n)(t_b - t_a)}{\ell}$$

$$\dot{Q} = -\frac{(t_b - t_a)\sum_{i=1}^{n} k_iA_i}{\ell}$$

Ejemplo 46. Dos cuartos comparten una pared de ladrillos de 12 cm de grosor, pero están perfectamente aislados en las demás paredes. Cada cuarto es un cubo de 4,0 m de arista. Si el aire de

uno de los cuartos está a 10 ºC y el otro a 30 ºC. ¿Cuántos focos de 100 W se necesitarán tener encendidas en el cuarto más caliente para mantener la misma diferencia de temperatura?

Solución.

Coeficiente de conductividad térmica del ladrillo k = 1,0 W/(m K).

$$\dot{Q} = -kA\frac{\Delta\theta}{L} = (1)(4{,}0\times 4{,}0)\frac{(30-10)}{0{,}12}$$

$$= (1)(4{,}0\times 4{,}0)\frac{20}{0{,}12} = 2666{,}67 \text{ W}$$

Número de focos de 100 W que se necesitarán tener encendidos en el cuarto más caliente para mantener la misma diferencia de temperatura

$$\frac{2666{,}67}{100} = 26{,}7$$

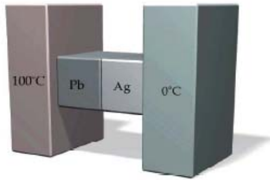
Se necesitan 27 focos de 100 W.

Ejemplo 47. Dos barras metálicas, cada una de longitud 5 cm y sección transversal rectangular de lados 2 y 3 cm, están encajadas entre dos paredes una a 100 ºC y otra a 0 ºC. Las barras son de Pb y Ag. Determinar:

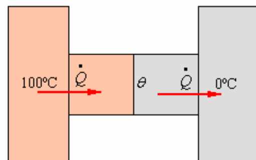
a) El flujo térmico total a través de las barras y

b) La temperatura en la interfase.

DATOS: $k(Pb)$ = 353 W/m K; $k(Ag)$ = 430 W/m K.



Solución.



Pb

$A = 6 \times 10^{-4}$ m, $L = 5\text{x}10^{-2}$ m k = 353 W/m K;

Ag

$A = 6 \times 10^{-4}$ m, $L = 5\text{x}10^{-2}$ m k = 453 W/m K;

Flujo de calor en el plomo

$$\dot{Q} = 353\left(\frac{6\times 10^{-4}}{5\times 10^{-2}}\right)(100-\theta)$$

$$= 4{,}236(100-\theta)$$

Flujo de calor en la plata.

$$\dot{Q} = 453\left(\frac{6\times 10^{-4}}{5\times 10^{-2}}\right)(\theta-0)$$

$$= 5{,}436\theta$$

Igualando los flujos

$$4{,}236(100-\theta) = 5{,}436\theta$$

$$423{,}6 - 4{,}236\theta = 5{,}436\theta$$

$$9{,}672\theta = 423{,}6$$

$$\theta = 43{,}79^{\circ}\text{C}$$

El flujo es;

$$\dot{Q} = 5{,}436\theta = 5{,}436 \text{ x } 43{,}79 = 238{,}1 \text{ W}$$

Ejemplo 48.- Un excursionista usa prendas de vestir de 3,5 cm de grueso, cuya área superficial total es de 1,7 m^2. La temperatura de la superficie de las prendas es de –20 ºC y la de la piel de 34 ºC. Calcular el flujo de calor por conducción a través de la ropa

a) Suponiendo que ésta está seca y que la conductividad térmica k es la del plumón igual a $0{,}06\text{x}10^{-4}$ kcal/s m K

b) Suponiendo que la ropa está mojada, de modo que k es la del agua ($1{,}4\text{x}10^{-4}$ kcal/s m K) y que la ropa se ha comprimido hasta un espesor de 0,50 cm.

Solución.

a) $$\dot{Q} = -kA\frac{\Delta\theta}{L} = 0{,}06\times 10^{-4}(1{,}7)\frac{(34+20)}{3{,}5\times 10^{-2}}$$

$$= 0{,}01{,}5737 \text{ W}$$

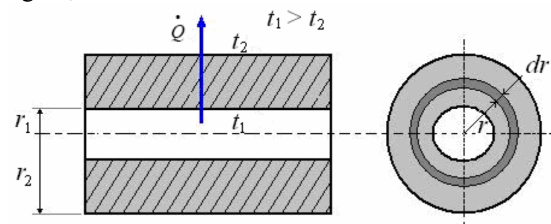
b) $$\dot{Q} = -kA\frac{\Delta\theta}{L} = 1{,}4\times 10^{-4}(1{,}7)\frac{(34+20)}{0{,}50\times 10^{-2}}$$

$$= 2{,}5704 \text{ W}$$

Ejemplo 49. Flujo a través de un cilindro de radio interior r_1 y radio exterior r_2, conductividad térmica k, temperatura interior t_1 y temperatura exterior t_2.

Solución.

Tomemos una longitud L, y a una distancia r un elemento diferencial dr como se muestra en la figura,



El flujo a través del elemento diferencial es

$$\dot{Q} = -kA\frac{dt}{dr}$$

$\dot{Q}$ es constante a través de cualquier sección cilíndrica coaxial.

$A = 2\pi r L$

Luego

$$\dot{Q} = -k2\pi rL\frac{dt}{dr}$$

Despejando dt

$$dt = -\frac{\dot{Q}}{2\pi kL}\frac{dr}{r}$$

Integrando

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{\dot{Q}}{2\pi kL}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

$$t_1 - t_2 = -\frac{\dot{Q}}{2\pi kL}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

De aquí

$$\dot{Q} = \frac{2\pi kL}{\ln\frac{r_2}{r_1}}(t_1 - t_2)$$

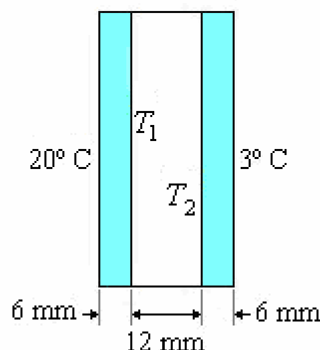
Ejemplo 50. Una ventana de un metro de alto por 2 de ancho tiene un vidrio cuyo espesor es de 0,006 m, conduce calor desde el interior a 20 ºC al exterior de 3 ºC. Encuentre la diferencia porcentual de la conducción del calor, cuando se pone dos vidrios del mismo espesor anterior, dejando una separación de aire entre los vidrios de 0,012 m. Considere que:

$k_{Vidrio} = k_V = 2\times 10^{-6}$ kcal/smºC ,

$k_{Aire} = k_A = 6\times 10^{-6}$ kcal/smºC .

Solución.

a) Al poner los dos vidrios:



Sean T_1 y T_2 las temperaturas a la derecha del vidrio izquierdo e izquierda del vidrio derecho, respectivamente:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = k_V A\frac{(20 - T_1)}{0{,}006}, \quad (1)$$

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = k_A A\frac{(T_1 - T_2)}{0{,}012}, \quad (2)$$

$$\frac{\Delta Q_3}{\Delta t} = k_V A\frac{(T_2 - 3)}{0{,}006}. \quad (3)$$

En el estado de régimen estable, es decir, cuándo la temperatura en cada punto es constante en el transcurso del tiempo, por lo cuál $\Delta Q/\Delta t$ es la misma en todas las secciones transversales:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_3}{\Delta t}.$$

Igualando ecuaciones (1) y (2), encontramos:

$$T_2 = T_1\left(1 + \frac{2}{3}\right) - \frac{40}{3}. \quad (4)$$

De la igualación de (2) y (3) tenemos:

$$T_2 = \frac{\frac{3}{2}T_1 + 3}{5/2}. \quad (5)$$

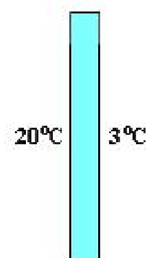
Por otro lado, de la diferencia de las ecuaciones (4) y (5), hallamos:

$T_1 = 13{,}63^\circ C$ y $T_2 = 13{,}63^\circ C$.

Reemplazando en ecuación (1):

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_V A\frac{(20 - T_1)}{0{,}006} = 4{,}25\frac{\text{cal}}{\text{s}}$$

b) Si la ventana está formada por un solo vidrio:



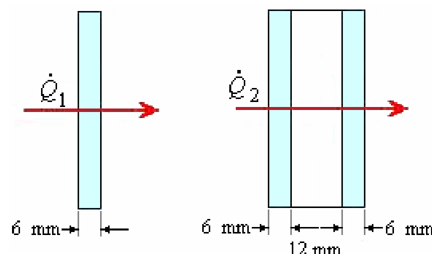
$$\frac{\Delta Q'}{\Delta t} = k_V A\frac{(30 - 3)}{\Delta X} = 11{,}3\frac{\text{cal}}{\text{s}},$$

Es decir, la diferencia con respecto a $\Delta Q/\Delta t = 7{,}05$ cal/s. De este modo hay una diferencia de un 62,4%, con lo cuál, cuándo se coloca aire entre los dos vidrios se pierde un 62,4% menos de energía calórico que cuándo se usa un solo vidrio.

Ejemplo 51. Una ventana de un metro de alto por dos de ancho, está construida con láminas de vidrio cuyo espesor es de 0,006 m. La ventana puede ser ensamblada con un solo vidrio en ese caso el flujo de calor es $\dot{Q}_1$ o puede construirse con dos vidrios dejando una separación de 0,012 m de aire confinado entre las dos láminas de vidrio, en este caso el flujo de calor es $\dot{Q}_2$. Encontrar la relación entre los flujos de calor.

$k_{vidrio} = 2\times 10^{-6}$ kcal/s m°C ,

$k_{\text{aire confinado}} = 6\times 10^{-6}$ kcal/s m°C



Solución.

Al poner los dos vidrios:

$$\dot{Q}_1 = -\frac{A}{\left(2\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}\right)}\Delta\theta$$

Al poner un solo vidrio

$$\dot{Q}_2 = -\frac{A}{\left(\frac{L_1}{k_1}\right)}\Delta\theta$$

La relación entre los flujos de calor es:

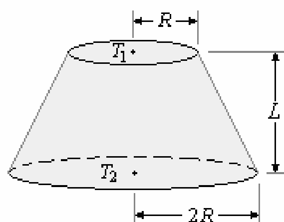
$$\frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} = \frac{-\frac{A}{\left(\frac{L_1}{k_1}\right)}\Delta\theta}{-\frac{A}{\left(2\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}\right)}\Delta\theta}$$

$$\frac{\dot{Q}_2}{\dot{Q}_1} = \frac{\left(2\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}\right)}{\left(\frac{L_1}{k_1}\right)} = 2 + \frac{L_2 k_1}{L_1 k_2}$$

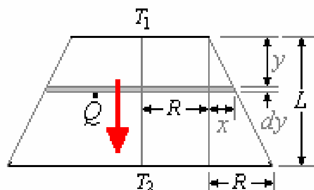
$$= 2 + \left(\frac{12}{6}\right)\left(\frac{2\times10^{-6}}{6\times10^{-6}}\right)$$

$$= 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}66$$

Ejemplo 52. El sólido de la figura tiene bases circulares de radio R y $2R$, altura L y conductividad térmica k. Si las bases se ponen en contacto con reservorios de temperatura T_1 y T_2 .Determine la corriente calorífica cuando el flujo es estacionario. Considere las paredes laterales forradas con un aislante térmico.



Solución.



El flujo a través de la porción de ancho dy y área

$A = \pi r^2 = \pi(R+x)^2$, es también igual a $\dot{Q}$

$$\dot{Q} = -kA\frac{dT}{dy} = -k\pi(R+x)^2\frac{dT}{dy}$$

Por semejanza de triángulos: $\frac{x}{R} = \frac{y}{L} \Rightarrow x = \frac{R}{L}y$

Luego: $\dot{Q} = -k\pi\left(R + \frac{R}{L}y\right)^2\frac{dT}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{(y+L)^2} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q}L^2}dT$$

Integrando $\int_0^L \frac{dy}{(y+L)^2} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q}L^2}\int_{T_1}^{T_2} dT$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(y+L)}\Bigg|_0^L = -\frac{k\pi R^2}{\dot{Q}L^2}T\Big|_{T_1}^{T_2}$$

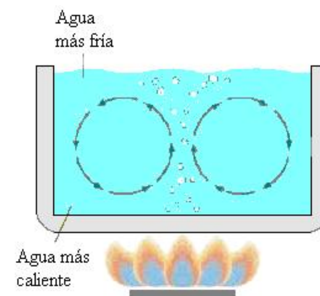
$$\Rightarrow -\frac{1}{(L+L)} + \frac{1}{(0+L)} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q}L^2}(T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2L} = \frac{k\pi R^2}{\dot{Q}L^2}(T_1 - T_2)$$

Finalmente: $\dot{Q} = \frac{2k\pi R^2}{L}(T_1 - T_2)$

CONVECCION.

Es el proceso de transferencia de calor de un lugar a otro por el movimiento de la masa calentada.



Las leyes que rigen el flujo de calor por convección son muy complejas porque involucra fenómenos de fluidos en movimiento y el cual todavía puede ser forzado o natural por diferencia de densidades. Sin embargo, se tiene una relación empírica dada por Newton, para un cuerpo dado:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = hA\Delta\theta$$

Donde h es el coeficiente de convección, A es el área de la pared, $\Delta\theta$ es la diferencia de temperatura entre la superficie de la pared y el fluido.

EL COEFICIENTE DE CONVECCION h depende de la posición de la pared y de las características del fluido y su movimiento.

COEFICIENTE DE CONVECCION EN AIRE A PRESION ATMOSFERICA

DISPOSICION	$h\left(\dfrac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\ °\text{C}}\right)$
Pared horizontal Mirando arriba	$0{,}576\text{x}10^{-3}(\Delta t)^{1/4}$
Pared horizontal Mirando abajo	$0{,}314\text{x}10^{-3}(\Delta t)^{1/4}$
Pared vertical	$0{,}424\text{x}10^{-3}(\Delta t)^{1/4}$
Tubo horizontal o vertical	$1{,}00\text{x}10^{-3}\left(\dfrac{\Delta t}{D}\right)^{1/4}$

Ejemplo 53. Una pared plana se mantiene a temperatura constante de 100°C, y el aire sobre ambas cara está a la presión atmosférica y a 20°C. ¿Cuánto calor se pierde por convección de un metro cuadrado de superficie en ambas caras en 1 hora?

a) Si la pared es vertical

b) Si la pared e horizontal

Solución.

a) Si la pared es vertical.

El flujo de calor de ambas caras es

$$\dot{Q} = -2hA\Delta t$$

Donde

$$h = 0{,}42\times10^{-3}(\Delta t)^{1/4}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,{}^\circ C}$$

$$\Delta t = 80 \text{ y } (\Delta t)^{1/4} = 2{,}98$$

$A = 1$ m^2

de aquí

$$h = 0{,}42\times10^{-3}\times2{,}98$$

$$= 1{,}12\times10^{-3}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,{}^\circ C}$$

$$\dot{Q} = 2\times1{,}12\times10^{-3}\times80$$

$$= 0{,}179\frac{\text{kcal}}{\text{s}}$$

EL calor que se pierde en una hora será

Q = 0,179 x 3600 = 645 kcal

b) Si la pared es horizontal.

En este caso tenemos los valores para h:

Para la cara que mira arriba

$$h_1 = 0{,}596 \text{ x } 10^{-3}\ (\Delta t)^{1/4}$$

$$= 1{,}77 \text{ x } 10^{-3}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,{}^\circ C}$$

Para la cara que mira abajo

$$h_2 = 0{,}314 \text{ x } 10^{-3}\ (\Delta t)^{1/4}$$

$$= 0{,}94 \text{ x } 10^{-3}\ \frac{\text{kcal}}{\text{s m}^2\,{}^\circ C}$$

Luego: $\dot{Q} = -h_1\ A\,\Delta t\ - h_2\ A\,\Delta t$

$$\Rightarrow \dot{Q} = -(h_1 + h_2)\ A\,\Delta t$$

$$\dot{Q} = (2{,}71\times10^{-3})(1)(80) = 0{,}217\frac{\text{kcal}}{\text{s}}$$

y el calor que se pierde en una hora será:

Q = 0,217 x 3600 = 782 cal

Ejemplo 54. El aire sobre la superficie de un lago está a una temperatura θ_A mientras que el agua está en su punto de congelación θ_c ($\theta_A < \theta_C$).

¿Cuál es el tiempo T que ha de transcurrir para que se forme una capa de hielo de espesor y

Asumir que el calor liberado cuando el agua se congela fluye a través del hielo por conducción y de la superficie al aire por convección natural.

DATOS:

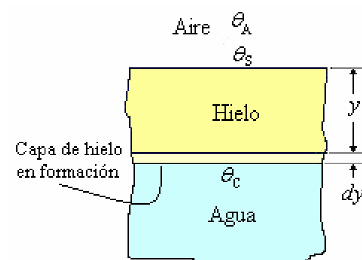
h = coeficiente de convección del hielo

ρ = densidad del hielo

L = calor de fusión del hielo

k = conductividad térmica del hielo

Solución.



En la figura observamos como se va formando la capa de hielo

Calor de solidificación de la capa de hielo en formación de área A y espesor dy.

$$dQ = dmL = \rho AdyL \qquad (1)$$

Éste calor se conduce a la superficie

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{(\theta_C - \theta_S)}{y}$$

$$dQ = kA\frac{(\theta_S - \theta_C)}{y}dt \qquad (2)$$

Igualando calores (1) y (2)

$$\rho AdyL = kA\frac{(\theta_S - \theta_C)}{y}dt$$

$$\int_0^Y ydy = \frac{k}{\rho L}(\theta_S - \theta_C)\int_0^T dt$$

$$\frac{Y^2}{2} = \frac{k}{\rho L}(\theta_S - \theta_C)T$$

$$\frac{Y^2\rho L}{2k} = (\theta_S - \theta_C)T \qquad (3)$$

El flujo de calor de la superficie al medio ambiente se produce por convección, o sea

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = -hA(\theta_S - \theta_A)$$

$$dQ = hA(\theta_A - \theta_S)dt$$

Este es el mismo calor y por lo tanto

$$\rho A dy L = hA(\theta_A - \theta_S)dt$$

$$dy = \frac{h}{\rho L}(\theta_A - \theta_S)dt$$

Integrando

$$\int_0^Y dy = \frac{h}{\rho L}(\theta_A - \theta_S)\int_0^T dt$$

$$Y = \frac{h}{\rho L}(\theta_A - \theta_S)T$$

$$\frac{Y\rho L}{h} = (\theta_A - \theta_S)T \qquad (4)$$

Sumando las expresiones (3) y (4) obtenemos

$$\left(\frac{Y^2}{2k} + \frac{Y}{h}\right)\rho L = (\theta_A - \theta_C)T$$

Finalmente,

$$T = \frac{\rho L}{(\theta_A - \theta_C)}\left(\frac{Y^2}{2k} + \frac{Y}{h}\right)$$

Ejemplo 55. El interior del ser humano se encuentra a 37°C, el espesor efectivo de la piel puede considerarse como de 3cm.

a) Para una persona cubierta de pies a cabeza por un vestido de lana de 0,5cm de espesor. Calcular el flujo de calor que pierde en Lima (t_{amb} = 15°C) y en las madrugadas de Puno (t_{amb} = -20°C).

b) ¿Cuál debería ser el grosor de su vestido de la persona en Puno para tener la misma pérdida de calor que una persona en Lima?

Datos:

k_{piel} = 0,01W/m°C

Área del cuerpo humano persona promedio = 1,5m^2

k_{lana} = 0,0209 W/ºC

h (del cuerpo vestido) = 9 W/m^2·K,

Solución.

a) El flujo de calor atraviesa la piel y el vestido por conducción y de la superficie del vestido al ambiente por convección.

Este flujo a través de este conjunto es:

$$\dot{Q} = \frac{A(t_{piel} - t_{ambiente})}{\frac{L_{piel}}{k_{piel}} + \frac{L_{lana}}{k_{lana}} + \frac{1}{h}}$$

En Lima: $\dot{Q} = \dfrac{1,5(37-15)}{\frac{0,03}{0,01} + \frac{0,005}{0,0209} + \frac{1}{9}} = 9,85$ W

En Puno: $\dot{Q} = \dfrac{1,5(37+20)}{\frac{0,03}{0,01} + \frac{0,05}{0,0209} + \frac{1}{9}} = 23,74$ W

c) Para encontrar el grosor de su vestido de la persona en Puno para que tenga la misma pérdida de calor que una persona en Lima, aplicamos la misma ecuación.

$$9,85 = \frac{1,5(37+20)}{\frac{0,03}{0,01} + \frac{e}{0,0209} + \frac{1}{9}} \Rightarrow$$

$$e = 0,0209\left[\frac{1,5(57)}{9.85} - \frac{0,03}{0,01} - \frac{1}{9}\right] = 0,116 \text{ m}$$

Ejemplo 56. Se construye un iglú en forma de hemisferio con un radio interno de 1,8 m y paredes de nieve compactada de 0,5 m de espesor. En el interior del iglú el coeficiente de transferencia de calor por convección es 6 W/m^2·K; en el exterior, en condiciones normales de viento, es 15 W/m^{2}K. La conductividad térmica de la nieve compactada es 2,33 W/m K. La temperatura de la capa de hielo sobre la que se asienta el iglú es de -20 ºC y tiene la misma conductividad térmica que la nieve compactada.

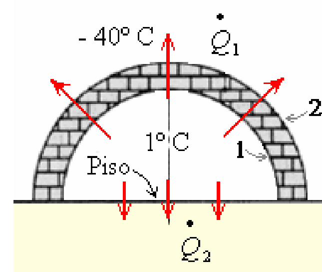
a) Que calor debe proporcionar una fuente continua dentro del iglú, para que la temperatura del aire interior sea 1º C cuando la del aire exterior es - 40 ºC. Considere las pérdidas de calor a través del suelo.

b) ¿Cómo afecta el duplicar el espesor de las paredes?



Solución.

a)



Pérdida por convección en el piso

$$\dot{Q}_2 = -h_i A_p(\theta_p - \theta_i),\ A_p = \pi R_1^2$$

$$\dot{Q}_2 = -h_i(\pi R_1^2)(\theta_p - \theta_i)$$

$$\dot{Q}_2 = -[6](\pi 1,8^2)(-20-1) = 1388,02\text{W}$$

Pérdida de calor por el domo

Por convección del aire interior a la pared interior

$$\dot{Q}_1 = -h_i A_1(\theta_1 - \theta_i)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}4\pi R_1^2$$

$$\dot{Q}_1 = -h_i\left(2\pi R_1^2\right)\left(\theta_1 - \theta_i\right)$$

$$\dot{Q}_1 = -6\left(2\pi 1{,}8^2\right)\left(\theta_1 - 1\right) = -122{,}08\left(\theta_1 - 1\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - 1\right) = \frac{\dot{Q}_1}{122{,}08} \qquad (1)$$

Por conducción en la pared del iglú:

$$A = \frac{1}{2}4\pi r^2$$

$$\dot{Q}_1 = -k2\pi r^2 \frac{d\theta}{dr} \Rightarrow d\theta = -\frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = -\frac{\dot{Q}}{2\pi k}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi(2{,}33)}\left(\frac{1}{1{,}8} - \frac{1}{2{,}3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{120{,}93} \qquad (2)$$

Por convección de la pared exterior al aire exterior

$$\dot{Q}_1 = -h_e A_2\left(\theta_e - \theta_2\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}4\pi R_2^2 .$$

$$\dot{Q}_1 = -h_e\left(2\pi R_2^2\right)\left(\theta_e - \theta_2\right)$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_1 = -(15)\left(2\pi 2{,}3^2\right)\left(-40 - \theta_2\right)$$
$$= (15)\left(2\pi 2{,}3^2\right)\left(\theta_2 + 40\right)$$
$$= 498{,}32\left(\theta_2 + 40\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_2 + 40\right) = \frac{\dot{Q}_1}{498{,}32} \qquad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3):

$$\left(40 - 1\right) = \frac{\dot{Q}_1}{122{,}08} + \frac{\dot{Q}_1}{120{,}93} + \frac{\dot{Q}_1}{498{,}32}$$

$$\Rightarrow 39 = \dot{Q}_1\left(0{,}008 + 0{,}008 + 0{,}002\right)$$

$$= 0{,}018\dot{Q}_1$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_1 = \frac{39}{0{,}029} = 2166{,}67 \text{ W}$$

Salida total de calor
1388,02 + 2166.67 = 3554,69 W

La fuente debe proporcionar 3,554 kW

b) Si se duplica el espesor de la pared del domo

$$\left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi k}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{2\pi(2{,}33)}\left(\frac{1}{1{,}8} - \frac{1}{2{,}8}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\theta_1 - \theta_2\right) = \frac{\dot{Q}_1}{31{,}65} \qquad (2a)$$

Sumando (1), (2a) y (3):

$$\left(40 - 1\right) = \frac{\dot{Q}_1}{122{,}08} + \frac{\dot{Q}_1}{31{,}65} + \frac{\dot{Q}_1}{498{,}32}$$

$$\Rightarrow$$

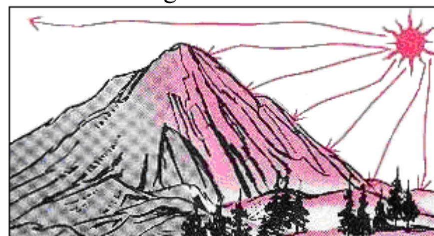
$$39 = \dot{Q}_1\left(0{,}008 + 0{,}032 + 0{,}002\right) = 0{,}042\dot{Q}_1$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_1 = \frac{39}{0{,}042} = 928,\ 57 \text{ W}$$

Salida total de calor 1388,02 + 928,57 = 2316,59 W

La fuente debe proporcionar 2,316 kW

RADIACION.
Es el proceso de transferencia de calor por medio de ondas electromagnéticas durante el cual la masa del medio no interviene puesto que no se refiere a la convección, ni a la conducción, por ejemplo la transferencia de energía del sol de la tierra.



Una sustancia puede ser estimulada a emitir radiación electromagnética en varias formas, como por ejemplo un conductor eléctrico con corriente alterna de alta frecuencia emite ondas de radio, una placa bombardeada por electrones con alta velocidad emite rayos X, un líquido o sólido caliente emite radiación térmica, etc.

En esta parte trataremos solamente la radiación térmica.
Experimentalmente STEFAN y BOLTZMAN encontraron la ley que rige la radiación, mostraron que la radiación emitida, energía por unidad de tiempo y por unidad de área, por un cuerpo negro (Sustancia Capaz de absorber toda la energía que llega a él) a una temperatura *T* (Temperatura absoluta) θ es $R = \sigma T^4$
Donde σ es la llamada constante de Boltzman.

$$\sigma = 4{,}88 \times 10^{-8} \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{ hora K}^4}$$

$$= 5{,}67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}^4}$$

El calor transferido por radiación de un cuerpo a una temperatura T al medio que lo rodea a una temperatura T_0, es:

$$\dot{Q} = Ae\sigma\left(T^4 - T_0^4\right)$$

Donde *e* es el factor de emisividad del cuerpo a temperatura T, siendo igual a 1 para el cuerpo negro.

Ejemplo 57. La temperatura de trabajo del filamento de tungsteno de una lámpara incandescente es 2450 K, y su emisividad es 0,30. ¿Cuál es la superficie del filamento de una lámpara de 25 watts?
Solución.

Como $\dot{Q} = Ae\sigma T^4 \Rightarrow A = \dfrac{\dot{Q}}{e\sigma T^4}$

Donde: $\dot{Q} = 25\,W$, $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8} \dfrac{W}{m^2.K}$,

$e = 0{,}30$ y $T = 2450$ K

Reemplazando valores obtenemos la superficie:

$$A = \frac{25}{5{,}67 \times 10^{-8}(2450)^4} = 0{,}408 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

$= 0{,}408\ \text{cm}^2$

Ejemplo 58. Una persona desvestida tiene una superficie de 1,5 m^2 expuesta a un ambiente y a unos alrededores de 27 ºC. La temperatura de su piel es de 33 ºC y se puede considerar un emisor de radiación perfecto. Si el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 9 W/m^{2}K, hállese:
a) Las pérdidas de calor por convección y por radiación.
b) El gasto energético en kcal/día.
Solución.

a) $\dot{Q}_{conv} = -hA\Delta\theta$
= (9)(1,5)(33-27) = 81 W.

$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$
= (5,67x10^{-8})(1)(1,5)(306^4-300^4)
= (5,67x10^{-8})(1)(1,5)(6,68x10^8)
= 56,8 W

b) 2,846 kcal/día.
El gasto energético por día es:
(56,8 + 81) J/s x 3600x24 s/día = 4907520 J
Como 1 kcal = 4186 J
El gasto energético en kcal/día:
4907520 J/día x 1 kcal /4186 J = 2,846 kcal/día.

Ejemplo 59. Calcular la pérdida neta de energía radiante de una persona desnuda en una habitación a 20 ºC, suponiendo que la persona se comporta como un cuerpo negro. El área del cuerpo es igual a 1,4 m^2 y la temperatura de su superficie es de 33 ºC.
Solución.

$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$ = (5,67x10^{-8} W/m^2·K^4)(1)(1,4 m^2)(306^{4}K-293^{4}K) = (5,67x10^{-8} W/m^2·K^4)(1)(1,4 m^2)(13,98x10^{8}K) = 110, 97 W

Ejemplo 60. Los cables de calefacción de una estufa eléctrica de 1kW se encuentran al rojo a una temperatura de 900 K. Suponiendo que el 100% del calor emitido es debido a la radiación y que los cables actúan como radiadores ideales. ¿Cuál es el área efectiva de la superficie radiante? Suponer la temperatura ambiente de 20 ºC.
Solución.

$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$
1000 = (5,67 x 10^{-8})(1)(A)(1173^4-293^4) $\Rightarrow$
1000 = (5,67 x 10^{-8})(1)(A)(1885 x 10^8) $\Rightarrow$
1000 = 10687,95 A $\Rightarrow$

$$A = \frac{1000}{10687{,}95} = 0{,}094\ \text{m}^2$$

Ejemplo 61. a) ¿Cuánta potencia irradia una esfera de tungsteno (emisividad = 0,35) de 18 cm de radio a una temperatura de 25 º?
b) Si la esfera está encerrada en un recinto cuyas paredes se mantienen a –5 ºC ¿Cuál es el flujo neto de la energía liberada de la esfera?
Solución.

a) $A = \pi R^2 = \pi(0{,}18)^2 = 0{,}101736\text{m}^2$

$\dot{Q}_{rad} = \sigma eAT^4$
= (5,67x10^{-8})(0,35)(0,10173)(298^4)
= 15,92 W

b)
$\dot{Q}_{rad} = \sigma eA\left(T_C^4 - T_A^4\right)$
= (5,67x10^{-8})(0,35)(0,10173)(298^{4}K-278^4)
= 3,86 W

Ejemplo 62. La Tierra recibe aproximadamente 430 W/m^2 del Sol, promediados sobre toda su superficie, e irradia una cantidad igual de regreso al espacio (es decir la Tierra está en equilibrio). Suponiendo nuestro planeta un emisor perfecto (e = 1,00), estime su temperatura superficial promedio.

Solución.

$A = \pi R^2 = \pi(0{,}18)^2 = 0{,}101736\text{m}^2$

$\dfrac{\dot{Q}_{rad}}{A} = \sigma e T^4 = (5{,}67\text{x}10^{-8})(1)(T^4) = 430$

$T = \sqrt[4]{\dfrac{430}{5{,}67\times 10^{-8}}} = 295K$, $t =$ 22,1ºC

Ejemplo 63. a) Encontrar la potencia total radiada al espacio por el Sol. Suponiendo que éste es un emisor perfecto con T = 5500 K. El radio del Sol es 7,0x10^8 m.

b) A partir del resultado anterior, determinar la potencia por unidad de área que llega a la Tierra, que se encuentra a una distancia del Sol de 1,5x10^{11} m.

Solución.

a)

$A = \pi R^2 = \pi(7{,}0\times 10^8)^2 = 153{,}86\times 10^{16}\text{m}^2$

$\dot{Q}_{rad} = \sigma e A T^4$

$= (5{,}67\text{x}10^{-8})(1)(153{,}86\text{x}10^{16})(5500^4)$

$= 79{,}83\text{x}10^{24}$ W

b) $\dfrac{Potencia}{Area} = \dfrac{79{,}83\times 10^{24}}{4\pi(1{,}5\times 10^{11})^2}$

$= 282{,}48$ W/m^2

DEFINICIÓN DE UN GAS IDEAL.

Los gases juegan un rol muy importante en muchos procesos termodinámicos, y antes de ir más allá, es importante considerar una forma ingeniosa de comprender las propiedades de los gases. Esta idea es llamada la teoría cinética de los gases, trata de explicar las propiedades macroscópicas de un gas examinando el comportamiento de los átomos y moléculas que forman un gas. A simple vista esto parece ser imposible porque el número de átomos involucrados es demasiado grande, alrededor de 10^{27} átomos llenan una habitación. Sin embargo utilizando la estadística, se puede predecir con mucha precisión las características de un gas. En lo siguiente asumiremos que estamos trabajando con un **gas ideal** con las propiedades siguientes:

Un gas está formado por partículas llamadas moléculas.

Las moléculas se mueven irregularmente y obedecen las leyes de Newton del movimiento.

El número total de moléculas es grande.

El volumen de las moléculas mismas es una fracción inapreciablemente pequeña del volumen ocupado por el gas.

Entre moléculas no obran fuerzas de consideración, salvo durante los choques.

Los choques son perfectamente elásticos y de duración insignificante.

Los gases reales no siguen exactamente este comportamiento, pero es una buena forma para comenzar.

El comportamiento de las masas encerradas de gases ideales se determina por las relaciones entre p, V o p, T, o V, T cuando la tercera cantidad T o V o p respectivamente, es mantenida constante; estas relaciones fueron obtenidas experimental por Boyle, Gay-Lussac y Charles respectivamente.

LEY DE BOYLE. La presión (p) de un gas ideal varía inversamente a su volumen (V) si la temperatura (T) se mantiene constante.

$p \propto \dfrac{1}{V}$ con T constante $\Rightarrow$ $pV =$ Constante

$p_1V_1 = p_2V_2$

LEY DE GAY-LUSSAC. La presión (p) de un gas ideal varía directamente a su temperatura (T) si el volumen (V) se mantiene constante.

$p \propto T$ con V constante $\Rightarrow$ $\dfrac{p}{T} =$ Constante

$\dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_2}$

Nota: Esta ley se deduce con el termómetro de gas a volumen constante

$t = 273{,}15\left(\dfrac{p}{p_C} - 1\right)^o C \Rightarrow \dfrac{t}{273{,}15} + 1 = \dfrac{p}{p_C}$

$\Rightarrow \dfrac{t + 273{,}15}{273{,}15} = \dfrac{p}{p_C} \Rightarrow \dfrac{T}{T_C} = \dfrac{p}{p_C}$

o $\dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_2}$

LEY DE CHARLES. El volumen (V) de un gas ideal varía directamente a su temperatura (T) si la presión (p) se mantiene constante.

$V \propto T$ con p constante $\Rightarrow$ $\dfrac{V}{T} =$ Constante

$\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$

Nota: Esta ley se deduce con el termómetro de gas a presión constante

$$t = 273,15\left(\frac{V}{V_C} - 1\right)°C \Rightarrow \frac{t}{273,15} + 1 = \frac{V}{V_C}$$

$$\Rightarrow \frac{t + 273,15}{273,15} = \frac{V}{V_C} \Rightarrow \frac{T}{T_C} = \frac{V}{V_C}$$

o $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL.

El comportamiento de gases ideales se caracteriza en términos de p, V y T. Tal ecuación se llama la ecuación del gas ideal. El comportamiento de cualquier estado de la materia se puede caracterizar generalmente por una cierta relación entre la presión (p) y la densidad (ρ) que por supuesto corresponde al volumen (V). La ecuación de los gases ideales puede obtenerse por la combinación de dos de las tres leyes de los gases indicadas anteriormente.

Sea el gas encerrado con condiciones iniciales p_1, V_1 y T_1, llevado a un estado final p_2, V_2 y T_2 como sigue:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

o $\frac{pV}{T} = \text{Constante}$

Nota: Se encontró que el valor de la constante es dependiente en la masa del gas dado y también se encontró que no es igual para una unidad de masa de diferentes gases. Sin embargo, se encuentra que si lo es para 1 mol de masa (la masa numéricamente equivalente en gramos al peso molecular, ejemplo, 2 g para H_2, 32 g para el O_2, 28 g para el N_2, etc.) de cualquier gas ideal entonces el valor de la constante es igual para todos los gases. Esta constante igual para todos los gases es denotada generalmente por "R" y llamada la constante universal de los gases.

$$R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 1,986 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

La ecuación del gas ideal por lo tanto se escribe normalmente como

$$pV = nRT$$

Donde n = número de moles.

El número de moles se define como, el cociente de la masa de gas M a su peso molecular (M_0)

$$n = \frac{M}{M_0}$$

Si es m la masa de cada molécula de un gas y N es el número de las moléculas que hacen la masa total M.

N_A. = número de Avogadro = número de moléculas en 1 mol de gas (cualquier gas).

Entonces $M = mN$ y $M_0 = mN_A$.

Por lo tanto $n = \frac{N}{N_a}$

Luego $pV = nRT = \frac{M}{M_0}RT = \frac{N}{N_a}RT$

Ahora, $pV = \frac{M}{M_0}RT \Rightarrow pV = \frac{mN}{mN_A}RT$

$$\Rightarrow pV = N\frac{R}{N_A}T$$

El cociente entre las dos constantes R y N_A es la constante que designamos por k_B, la constante de Boltzmann.

$$k_B = \frac{8,314 \text{J/mol K}}{6,022 \times 10^{23}/\text{mol}} = 1,38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Ejemplo 64. Un conductor inicia su viaje en una mañana fría cuando la temperatura es 4ºC, y mide la presión de la llanta y ve que el manómetro lee 32 psi (2,2 x 10^5 Pa). Después de manejar todo el día, las llantas se han calentado, y por la tarde la temperatura de las llantas se ha elevado a 50ºC. Asumiendo que el volumen es constante , ¿a que presión se habrá elevado el aire en las llantas?

1 atm = 1,013 Pa = 14,7 psi

Solución.

Tomar en cuenta que un manómetro mide la presión manométrica ($p_m = p - p_a$). Luego la presión inicial es

$$p_1 = p_m + p_a \Rightarrow p_1 = 32 + 14,7 = 46,7 \text{ psi}$$

$$T_1 = 4 + 273,15 = 277,15 \text{ K} \text{ y}$$

$$T_2 = 50 + 273,15 = 323,15 \text{ K}$$

$$p_1 V_1 = nRT_1 \text{ y } p_2 V_2 = nRT_2, V_1 = V_2$$

Dividiendo estas ecuaciones:

$$\frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{nRT_1}{nRT_2} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 = \left(\frac{323,15}{277,15}\right)(46,7) = 54,5 \text{ psi}$$

absoluta
o 54,5 – 14,7 = 39,8 psi, presión manométrica.

Ejemplo 65. Un gas ideal ocupa un volumen de 100 cm^3 a 20 ºC y a una presión de 100 Pa. Determine el número de moles de gas en el recipiente.
Solución.
p = 100 Pa = 9,8692 x 10^{-4} atm
V = 100 x 10^{-6}m^3 = 0,1 litros
t = 20 °C
T = 293,15 K
R = 0,082 litro atm/mol K = 8,31 J/mol K
Se puede hacer el cálculo en los dos sistemas de unidades usando

$$n = \frac{pV}{RT}$$

$$n = \frac{9,8692\times10^{-4}\times0,1}{00,082\times293,15} = 4,11 \text{ x } 10^{-6} \text{ mol}$$

$$n = \frac{100\times100\times10^{-6}}{8,31\times293,15} = 4,11 \text{ x } 10^{-6} \text{ mol}$$

Ejemplo 66. Se mantiene un gas ideal en un recipiente a volumen constante.
Inicialmente, su temperatura es 10ºC y su presión es 2,5 atmósferas ¿Cuál será la presión cuando la temperatura sea de 80ºC?
Solución.
p_1 = 2,5 atm, t_1 = 10 ºC, T_1 = 283,15K,
t_2 = 80 ºC, T_2 = 353,15 K

$$n = \frac{p_1V}{RT_1} = \frac{p_2V}{RT_2} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{p_1T_2}{T_1}$$

$$= \frac{2,5\times353,15}{283,15} = 3,118 \text{ atm}$$

Ejemplo 64. Un cilindro con un émbolo móvil contiene un gas a una temperatura de 127 ºC, una presión de 30 kPa y un volumen de 4 m^3 ¿Cuál será su temperatura final si el gas se comprime a 2,5 m^3 la presión aumenta a 90 kPa?
Solución.
p_1 = 30 x 10^3 Pa, V_1 = 4m^3, t_1 = 127 ºC,
T_1 = 400,15K
p_2 = 90 x 10^3 Pa, V_2 = 2,5m^3

De $n = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{p_2V_2}{RT_2}$

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{p_1V_1}T_1 = \frac{90\times10^3\times2,5}{30\times10^3\times4}400,15$$

= 750,28K = 477,13 ºC

Ejemplo 67. Se encuentra contenido un gas en una vasija de 8 L, a una temperatura de 20ºC y a una presión de 9 atmósferas:
a) Determine el número de moles en la vasija.
b) ¿Cuántas moléculas hay en la vasija?
Solución.
p = 9 atm, V = 8 litros, t = 20 ºC, T = 293,15K

a) $n = \frac{pV}{RT} = \frac{9\times8}{0,082\times293,15}$
= 3,0 mol
b) N_A = 6,0221367 x 10^{23} / mol
$N = n\,N_A$ = 3 x 6,0221367 x 10^{23}
= 1,81 x 10^{24} moléculas

Ejemplo 68. Se infla la llanta de un automóvil con aire inicialmente a 10 ºC y a presión atmosférica normal. Durante el proceso, el aire se comprime a 28% de su volumen inicial y su temperatura aumenta a 40 ºC. ¿Cuál es la presión del aire?
Después de manejar el automóvil a altas velocidades, la temperatura del aire de las ruedas aumenta a 85 ºC y el volumen interior de la rueda aumenta 2 %. ¿Cuál es la nueva presión en la rueda? Exprese su respuesta en Pa (absoluta) y en psi (lb/pulg^2) (manométrica).
(1 atm = 14,70 psi)
Solución.
Primera parte
p_1 = 1 atm, $V_1 = V$, t_1 = 10 ºC, T_1 = 283,15K
V_2 = 0,28V, t_2 = 40 ºC, T_2 = 313,15K
De $pV = nRT$ como la masa no varía

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow p_2 = p_1\frac{V_1T_2}{V_2T_1} = 1\times\frac{V\times313,15}{0,28V\times283,15}$$

= 3,95 atm = 4,0 x 10^5 Pa
Nota la presión manométrica p'_2, es la presión relativa a la atmosférica, es decir
p'_2 = 3,95 – 1 = 2,95 atm
= 2,95 x 14,7 = 43,365 psi

Segunda parte
t_2 = 85 ºC, T_2 = 358,15 K, V_2 = 1,02 x 0,28V

$$p_2 = p_1\frac{V_1T_2}{V_2T_1} = 1\times\frac{V\times358,15}{1,02\times0,28V\times283,15}$$

= 4,43 atm = 4,42884 x 10^5 Pa
y la manométrica será
p'_2 = 4,43 -1 = 3,43 atm = 3,43 x 14,7 = 50,42 psi

Ejemplo 69. Una caja cúbica metálica de 20 cm de lado, contiene aire a la presión de 1 atm y a 300 K

de temperatura. Se cierra herméticamente, de forma que el volumen sea constante y se calienta hasta 400 K. Hallar la fuerza neta desarrollada sobre cada pared de la caja.

Solución.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_a}{300} = \frac{p_2}{400} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{400}{300} p_a = \frac{4}{3}\left(1{,}013x10^5\right) = 1{,}35 \text{ x } 10^5 \text{ Pa}$$

Fuerza neta desarrollada sobre cada pared de la caja

$$\left(p_1 - p_a\right)A = \left(1{,}35x10^5 - 1{,}013x10^5\right)\left(0{,}2\right)^2$$

$$= 1{,}348\text{x}10^3 = 1348 \text{ N}$$

Ejemplo 70. Una campana de buzo cilíndrica de 3 m de diámetro y 4 m de altura con el fondo abierto se sumerge a una profundidad de 220 m en el océano. La temperatura en la superficie es de 25 ºC y en el fondo, a los 220 m, es de 5 ºC. La densidad del agua de mar es de 1025 kg/m^3. ¿Cuánto subirá el nivel del agua adentro de la campana cuando se sumerge?

Solución.

Sea h esa altura.

p_1 = 1 atm = 101325 Pa,

$V_1 = \pi r^2 H$, r = 1,5m, H = 4m

t_1 = 25 ºC, T_1 = 298,15 K

t_2 = 5 ºC, T_2 = 278,15 K

$V_2 = \pi r^2 \left(H - h\right)$

La campana está a una profundidad h' = 220m

El nivel del agua en la campana está a profundidad $h' - h$

La presión es $p_2 = p_1 + \rho g\left(h' - h\right)$

g = 9,8 m/s^2

ρ = 1025 kg/m^3

Donde tenemos $\frac{p_1 V_1}{R T_1} = \frac{p_2 V_2}{R T_2}$

o sea

$$\frac{p_1 H}{T_1} = \frac{\left(p_1 + \rho g\right)\left(h' - h\right)\left(H - h\right)}{T_2}$$

Poniendo los valores:

$$\frac{101325 \times 4}{298{,}15} = \frac{\left[101325 + 1025 \times 9{,}8\left(220 - h\right)\left(4 - h\right)\right]}{278{,}15}$$

Ecuación que tiene por solución

h = 3,834m

Ejemplo 71. Sube una burbuja de gas desde el fondo en un lago con agua limpia a una profundidad de 4,2 m y a una temperatura de 5 ºC hasta la superficie donde la temperatura del agua es de 12ºC. ¿Cuál es el cociente de los diámetros de la burbuja en los dos puntos?

(Suponga que la burbuja de gas está en equilibrio térmico con el agua en los dos puntos.)

Solución.

si p_a indica la presión atmosférica

h = 4,2m

$p_1 = p_a + \rho g h$

t_1 = 5 ºC, T_1 = 278,15 K

$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$

$p_2 = p_a$

t_2 = 12 ºC, T_2 = 285,15 K

$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T} \Rightarrow \frac{\left(p_a + \rho g h\right)d_1^2}{T_1} = \frac{b d_2^2}{T}$$

Supondremos que

p_a = 1 atm = 101325 Pa

ρ = 1025 kg/m^3

g = 9,8m/s^2

Entonces

$$\frac{\left(101325 + 1025 \times 9{,}8 \times 4{,}2\right)d_1^2}{278{,}15} = \frac{101325 d_2^2}{285{,}15}$$

o bien $\frac{d_2}{d_1} = 1{,}13$

Ejemplo 72. Una campana de buzo en forma de cilindro con una altura de 2,50 m está cerrada en la parte superior y abierta en la parte inferior. La campana se baja desde el aire al agua de mar (ρ = 1,025 gm/cm^3). El aire encerrado en la campana inicialmente está a 20ºC. La campana se baja a una profundidad (medida desde el nivel del agua dentro de la campana) de 82,3 m. A esta profundidad la temperatura del agua es de 4ºC, y la campana está en equilibrio térmico con el agua.(sugerencia: trate al aire como un gas ideal y al mar como un líquido en reposo)

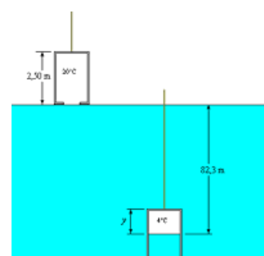
a) ¿Cuánto subirá el nivel del agua dentro de la campana?

b) ¿A qué presión se deberá someter el aire dentro de la campana para sacar el agua que entró?

Dato: la presión atmosférica es 1,013x10^5 Pa.

Solución.

a)



$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} V_1$$

p_1 = 1,013x10^5 Pa.

p_2 = 1,013x10^5 + 1025x9,8x82,3 = 9,28x10^5 Pa

T_1 = 20 + 273 = 293 K,

T_2 = 4 + 273 = 277 K

Con los datos:

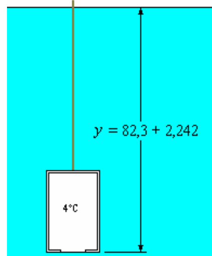
$$V_2 = \frac{(1{,}013x10^5)(277)}{(9{,}28x10^5)(293)}V_1 = 0{,}103V_1$$

Como también $V_2 = Ay$:

$$Ay = 0{,}103A(2{,}5) \Rightarrow y = 0{,}258\text{ m}$$

El nivel del agua dentro de la campana subirá (2,50 – 0,258) = 2,242 m

b)



Para que el volumen sea igual que en la superficie la presión interior debe de igualar a la presión en esa profundidad

p = 1,013x10^5 + 1025x9,8x(82,3 + 2,242)
= 9,505x10^5 Pa

Ejemplo 73. Un globo poroso tiene un volumen de 2 m^3 a una temperatura de 10ºC y a una presión de 1,1 atm. Cuando se calienta a 150ºC el volumen se expande a 2,3 m^3 y se observa que se escapa el 5% del gas.

a) ¿Cuánto gas había en el globo a 10ºC?

b) ¿Cuál es la presión en el globo a 150ºC?

$$R = 0{,}082\frac{\text{atmlitro}}{\text{molK}}$$

Solución.

$p_1 = 1{,}1\text{atm}$, V_1 = 2 m^3,

t_1 = 10ºC, T_1 = 283,15K, n_1 = ?

$p_2 = ?$, V_2 = 2,3 m^3,

t_2 = 150ºC, T_2 = 423,15 K, n_2 = 0,95 n_1.

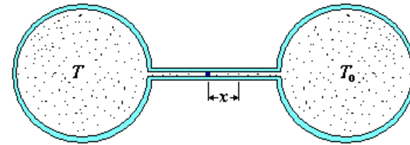
a) $n_1 = \dfrac{p_1V_1}{RT_1} = \dfrac{1{,}1\times 2000}{0{,}082\times 283{,}15}$ = 94,8 mol

b) $p_2 = \dfrac{n_2RT_2}{V_2}$

$= \dfrac{0{,}95\times 94{,}8\times 0{,}082\times 423{,}15}{2300}$

= 1,387 atm

Ejemplo 74. El termómetro de gases consta de dos recipientes idénticos con gas de volumen V_0 cada uno, unidos por un tubo do longitud ℓ y sección A. Una gota de mercurio obstruye el tubo. Si las temperaturas do los gases en los volúmenes son iguales, el mercurio se encontrará en el centro del tubo. El volumen derecho se coloca un termostato con temperatura T_0. Gradúese el termómetro, buscando la dependencia entre la temperatura del gas en el volumen izquierdo y el desplazamiento x del mercurio con respecto a la posición de equilibrio.



Solución.

Como la cantidad de gas en los dos lados es igual, podemos escribir, cuando la temperatura del lado izquierdo sea T. La gota de mercurio se desplaza x, hasta que las presiones en ambos depósitos sea igual (p_0).

$$\frac{p_o\left[V_o + A\left(\frac{\ell}{2}+x\right)\right]}{T} = \frac{p_o\left[V_o + A\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\right]}{T_o}$$

$$\Rightarrow T = T_o\frac{2V_o + S(\ell + 2x)}{2V_o + S(\ell - 2x)}$$

Ejemplo 75. Un pez que se encuentra a 63,25m de profundidad en el mar donde la temperatura es 2° C produce burbujas de aire de 1 cm de radio aproximadamente. Determine el radio de las burbujas al llegar estas a la superficie del mar donde la temperatura es de 27° C. Considere que la densidad del agua de mar no varía con la profundidad y tiene un valor de 1,035 g/cm^3.

Solución.

h = 63,25 m

$p_1 = p_a + \rho gh$

t_1 = 2 ºC, T_1 = 275,15 K

$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$

$p_2 = p_a$

t_2 = 27 ºC, T_2 = 300,15 K

$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T} \Rightarrow \frac{(b+\rho gh)r_1^3}{T_1} = \frac{br_2^3}{T}$$

Supondremos que

p_a = 1 atm = 101325 Pa

ρ = 1035 kg/m^3

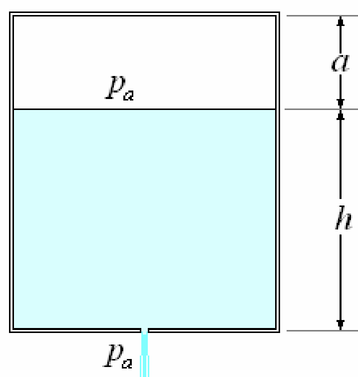
g = 9,8m/s^2

Entonces

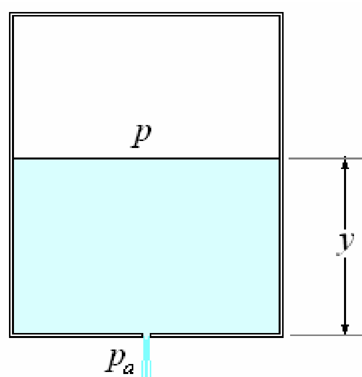
$$\frac{(101325 + 1035\times 9{,}8\times 63{,}25)r_1^3}{275{,}15} = \frac{101325r_2^3}{300{,}15}$$

o bien $\dfrac{r_2}{r_1} = 2 \Rightarrow r_2$ = 2 cm

Ejemplo 76. Un depósito cerrado contiene agua hasta una altura h = 2,24 m, y por encima a = 1m, aire a la presión del exterior p_a = 1 atm. Por un pequeño orificio de fondo se deja salir el agua. Calcular el descenso de nivel, suponiendo invariable la temperatura del agua.



Solución.
Sea y la distancia desde la superficie de nivel al fondo y p la presión del aire; se tiene:



$$p_a a = p(a + h - y)$$

Transformación isotérmica

El equilibrio se establecerá cuando

$$p + \rho g y = p_a \Rightarrow p = p_a - \rho g y$$

De aquí resulta

$$p_a a = (p_a - \rho g y)(a + h - y)$$

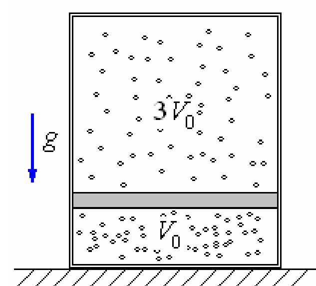
Reemplazando valores:

$$(1{,}033 \times 10^4)(1) = (1{,}033 \times 10^4 - 0{,}98 \times 10^4 y)(3{,}24 - y)$$

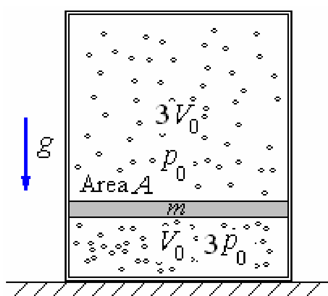
$$y = \begin{cases} 0{,}64 \\ 3{,}64 \end{cases}$$

La respuesta posible es y = 0,64 m.

Ejemplo 77. En un recipiente cilíndrico se encuentra en equilibrio un émbolo pesado. Por encima del émbolo y por debajo de él se hallan masas iguales de gas a temperatura idéntica. La relación entre el volumen superior y el inferior es igual a 3. ¿Cuál será la relación de los volúmenes si aumentamos la temperatura del gas al doble?



Solución.
Inicialmente



Arriba : $3V_0$, T_0, p_0

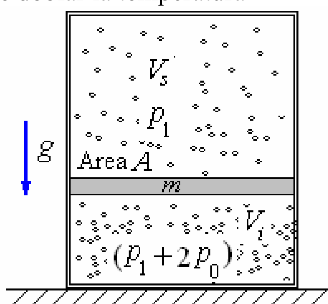
Abajo: V_0, T_0, $p_0 + \dfrac{mg}{A}$

Como las masas son iguales

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \dfrac{mg}{A}\right)V_0}{T_0} \Rightarrow \frac{mg}{A} = 2p_0$$

Luego $p_0 + \dfrac{mg}{A} = 3p_0$

Después de doblar la temperatura



Arriba : V_s, $2T_0$, p_1

Abajo: V_i, $2T_0$, $p_1 + 2p_0$

El volumen total es el mismo

$$V_i + V_s = 3V_0 + V_0 = 4V_0$$

En la parte superior

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_s}{2T_0} \Rightarrow p_1 = \frac{6p_0 V_0}{V_s}$$

En la parte inferior

$$\frac{3p_0 V_0}{T_0} = \frac{(p_1 + 2p_0)V_i}{2T_0} \Rightarrow V_i = \frac{6p_0 V_0}{(p_1 + 2p_0)}$$

$$V_i = \frac{6p_0V_0}{\left(\dfrac{6p_0V_0}{V_s} + 2p_0\right)} = \frac{3p_0V_0V_s}{(3V_0 + V_s)}$$

Como $V_i = 4V_0 - V_s$

Tenemos:

$$4V_0 - V_s = \frac{3p_0V_0V_s}{(3V_0 + V_s)}$$

$$\Rightarrow (4V_0 - V_s)(3V_0 + V_s) = 3p_0V_0V_s$$

$$\Rightarrow 12V_0^2 + 4V_0V_s - 3V_0V_s - V_s^2 = 3p_0V_0V_s$$

$$\Rightarrow 12V_0^2 - 2V_0V_s - V_s^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_s^2 + 2V_0V_s - 12V_0^2 = 0$$

Resolviendo:

$$V_s = -V_0 \pm \sqrt{V_0^2 + 12V_0^2} =$$

$$-V_0 \pm 3{,}6V_0 = \begin{cases} -4{,}6V_0 \\ 2{,}6V_0 \end{cases}$$

La respuesta posible es $V_S = 2{,}6V_0$, luego

$$V_i = 4V_0 - 2{,}6V_0 = 1{,}4V_0$$

Finalmente:

$$\frac{V_s}{V_i} = \frac{2{,}6V_0}{1{,}4V} = 1{,}86$$

Ejemplo 78. Una esfera de 20 cm de diámetro contiene un gas ideal a una presión de 1 atm y a 20 ºC. A medida que se calienta la esfera hasta 100 ºC se permite el escape de gas. Se cierra la válvula y se coloca la esfera en un baño de hielo a 0 ºC.

a) ¿cuántos moles de gas se escapan de la esfera al calentarse?

b) ¿Cuál es la presión en la esfera cuando está en el hielo?

Constante de los gases R = 0,082 litro atm/mol K

Respuesta. a) 0,04 moles; b) 0,695 atm

Solución.

a) 0,04 moles

$$V = \frac{4}{3}\pi(0{,}10)^3 = 4{,}19\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

p_1 = 1 atm = 1,033 x 10^5 Pa

T_1 = 20 ºC + 273,15 ºC = 293,15 K

$$n_1 = \frac{p_1V}{RT_1} = \frac{(1{,}033\times10^5)(4{,}19\times10^{-3})}{(8{,}314)(293{,}15)} = 0{,}178$$

moles

$p_2 = p_1$ = 1 atm = 1,033 x 10^5 Pa

T_2 = 100 ºC + 273,15 ºC = 373,15 K

$$n_2 = \frac{p_1V}{RT_2} = \frac{(1{,}033\times10^5)(4{,}19\times10^{-3})}{(8{,}314)(373{,}15)} =$$

0,139 moles

Escapan 0,1788 – 0,139 = 0,04 moles.

b) 0,695 atm

T_3 = 0 ºC + 273,15 ºC = 273,15 K

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \Rightarrow p_3 = \frac{T_3}{T_2}p_2 =$$

$$\frac{273{,}15}{373{,}15}1{,}033\times10^5 = 0{,}756 \text{ x } 10^5 = 0{,}732 \text{ atm}$$

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES IDEALES.

El concepto de los átomos y de las moléculas que eran los últimos bloques de edificio de la materia fue restablecido por Dalton para explicar las tres leyes de combinaciones químicas. En mediados del siglo diecinueve, estos conceptos, junto con ciertas asunciones con respecto la naturaleza, el tamaño, la distribución y a los movimientos de las moléculas y de los átomos, fueron sintetizados con la mecánica Newtoniana, para explicar el comportamiento de los gases ideales. Este trabajo realizado por Maxwell, Boltzman y otros, condujo al desarrollo de lo qué se conoce como la teoría cinética de gases.

Las asunciones de la teoría cinética son:

Cualquier gas se compone de un número muy grande de moléculas.

Las moléculas de un gas son idénticas, con respecto a la forma, tamaño y masa.

Las moléculas son esferas perfectamente rígidas del radio insignificante.

Las moléculas están en un estado incesante del movimiento caótico en todas las velocidades y direcciones posibles.

La distribución de moléculas es homogénea e isotrópica en cualquier envase que encierre el gas.

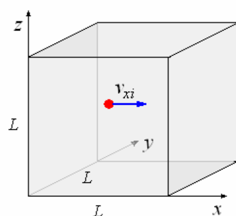
Las moléculas ejercen fuerzas una sobre otra solamente cuando chocan entre ellas o con las paredes del envase.

La colisión entre las moléculas o las moléculas y las paredes del envase son colisiones perfectamente elásticas, es decir, sólo tales colisiones pueden cambiar las direcciones del movimiento pero no de sus velocidades.

Entre las colisiones sucesivas las moléculas viajan libremente con velocidades constantes; la distancia viajada libremente se llama trayectoria libre. En promedio, la trayectoria libre media de todas las moléculas es igual.

La energía cinética media de una molécula es proporcional a la temperatura absoluta del gas.

Expresión para la presión ejercida por un gas.



Sea N el número de moléculas del gas ideal de masa M, encerrado en un cubo de lado L La molécula i se mueve con velocidad v_i, con v_{xi}, v_{yi} y v_{zi} son sus componentes x, y y z respectivamente.

Luego $v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$

Consideremos solamente la componente en x de la molécula i.

La fuerza ejercida por esta molécula a causa de sus colisiones periódicas con la pared cada $\Delta t = \dfrac{2L}{v_{xi}}$, y el cambio de cantidad de movimiento $-2mv_{xi}$ es:

$$f_{xi} = \frac{2mv_{xi}}{\Delta t} = \frac{2mv_{xi}}{2L/v_{xi}} = \frac{mv_{xi}^2}{L}$$

La fuerza sobre la pared debido a las N moléculas es:

$$F_x = \sum_{i=1}^{N} f_{xi} = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_{xi}^2}{L}$$

La presión sobre la pared es:

$$p_x = \frac{F_x}{L^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{mv_{xi}^2}{L}}{L^2} = \left(\frac{m}{L^3}\right)\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2$$

$$p_x = \left(\frac{m}{V}\right)\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2, \quad (V = L^3 = \text{volumen del gas}).$$

$$p_x = \left(\frac{m}{V}\right)N\overline{v_x^2}, \text{ con } \begin{cases} V = L^3 \\ N\overline{v_x^2} = \sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2 \end{cases}$$

Siendo $v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$

Podemos promediar esta relación para todas las moléculas:

$$\overline{v_x} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

y como en nuestro modelo no hay una diferencia real entre las direcciones x, y y z debido a que las rapideces son muy altas en un gas típico, así que los efectos de la gravedad son despreciables. Se sigue que $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. Por lo tanto:

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$$

Con esta relación obtenemos:

$$p = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{V}\right)N\overline{v^2}$$

Ecuación del gas Ideal gas de la Teoría Cinética.

Considerando $p = \dfrac{1}{3}\dfrac{mN}{V}\overline{v^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{N}{V}\right)\left(\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}\right)$

Pero

$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}$ = Energía Cinética promedio de una molécula $\propto T$

Por consiguiente $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \dfrac{3}{2}k_B T$

La elección de la constante como $\dfrac{3}{2}k_B$ es mandataria para obtener la ecuación del gas ideal similar a la ya encontrada.

$$p = \frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{3}{2}k_B T\right) = \frac{Nk_B T}{V}$$

$$\Rightarrow \qquad pV = Nk_B T$$

Y también:

$$pV = Nk_B T = N\left(\frac{R}{N_a}\right)T = nRT$$

$$pV = nRT$$

La asunción $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \dfrac{3}{2}k_B T$ implica la interpretación de la energía térmica como energía mecánica de las moléculas, no obstante como concepto estadístico solamente; es decir, la temperatura es la manifestación del movimiento medio de una gran cantidad de moléculas; es absurdo decir $\dfrac{1}{2}m\overline{v_i^2} = \dfrac{3}{2}k_B T$ para cualesquier i.

ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL

Cuando añadimos calor a un cuerpo poniéndolo en contacto térmico con un cuerpo a mayor temperatura puede elevar su temperatura, fundirse o vaporizarse. Se pueden efectuar estos mismos cambios realizando trabajo que resulta en la disipación de energía mecánica por fricción.

Añadir calor y realizar trabajo sobre el cuerpo en tal forma de disipar energía son equivalentes en lo que concierne a efectos térmicos. Ambos, involucran una transferencia de energía.
La energía mecánica que se añade no desaparece, permanece dentro del cuerpo en forma de energía potencial y cinética asociada con los movimientos al azar de los átomos del cuerpo.
A esta energía térmica se le conoce como ENERGÍA INTERNA, a la que vamos a denotar con la letra U.

Como vimos anteriormente $\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T$ indica que la energía cinética traslacional media por molécula depende solo de la temperatura; no de la presión, el volumen ni el tipo de molécula. Podemos obtener la energía cinética por mol multiplicando la ecuación por el número de Avogadro y usando la relación $M = N_A m$:

$N_A \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}M\overline{v^2} = \frac{3}{2}RT$ (energía cinética media por mol de gas)

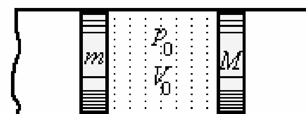
Esta ecuación ilustra un resultado general llamado el teorema del equipartición de la energía que dice que cada "grado de libertad" de un gas contribuye una cantidad de ½ $k_B T$ a la energía interna total. Un grado de libertad es un movimiento independiente que puede contribuir a la energía total. Por ejemplo, una molécula tal como O_2 tiene, en principio, 7 grados de libertad. Tres se asocian a la traslación a lo largo de los ejes x, y, y z, tres se asocian a rotaciones sobre los ejes x, y, y z , y uno se asocia a las vibraciones de la molécula a lo largo del eje de O-O (como las masas que vibran en los extremos de un resorte). Sin embargo, desde el momento de la inercia I para las rotaciones sobre el eje O-O es aproximadamente cero, las rotaciones sobre este eje no agrega casi nada a la energía $\left(K = 1/2\, I\omega^2\right)$.
Además, la mecánica cuántica demuestra que los modos vibratorios no están excitados apreciablemente sino hasta que la temperatura del gas es alta, así que para la mayoría de los propósitos asumimos que una molécula diatómica tiene 5 grados de libertad. Un gas monatómico como el helio tiene 3 grados de libertad.
La energía interna total de n moles de un gas monoatómico (con tres grados de libertad) es:

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

La energía interna total de n moles de un gas diatómico (con cinco grados de libertad) es:

$$U = \frac{5}{2}nRT$$

Ejemplo 79. En un tubo termo aislado liso e infinito se encuentran dos émbolos con masas M y m, entre los cuales hay un gas monoatómico de volumen V_0 a presión p_0. Los émbolos se dejan libres. Estímese sus velocidades máximas. Menospréciese la masa del gas en comparación con las masas de los émbolos.



Solución.
La energía interna del gas es

$$U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}p_0 V_0$$

Cuando se expande se convierte en energía cinética de los émbolos



$$K = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 \qquad (1)$$

Cantidad de movimiento inicial: 0
Cantidad de movimiento final: $Mv_M - mv_m$
Cantidad de movimiento inicial = Cantidad de movimiento final.

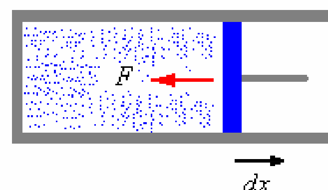
$$0 = Mv_M - mv_m \Rightarrow Mv_M = mv_m \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$v_M = \sqrt{\frac{3p_0V_0 m}{M(M+m)}}, \quad v_m = \sqrt{\frac{3p_0V_0 M}{m(M+m)}}$$

TRABAJO REALIZADO POR UN GAS

Consideremos, por ejemplo, un gas dentro de un cilindro. Las moléculas del gas chocan contra las paredes cambiando la dirección de su velocidad, o de su momento lineal. El efecto del gran número de colisiones que tienen lugar en la unidad de tiempo, se puede representar por una fuerza F que actúa sobre toda la superficie de la pared



Si una de las paredes es un pistón móvil de área A, y éste se desplaza dx, el intercambio de energía del sistema con el mundo exterior puede expresarse como el trabajo realizado

$$dW = Fdx \text{ y } F = pA$$

Se tiene:

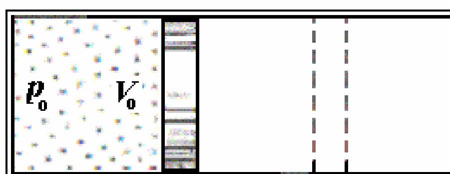
$$dW = (pA)dx = p(Adx) \Rightarrow dW = pdV$$

Siendo dV el cambio del volumen del gas.

Expresión que nos permite al integrarla, calcular e trabajo entre dos estados, conociendo la relación entre la presión y el volumen.

$$W_{A\to B} = \int_A^B pdV$$

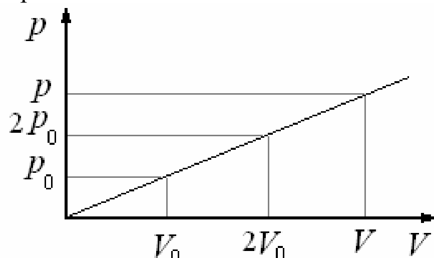
Ejemplo 76. En cierto cilindro un émbolo móvil encierra un volumen V_o con presión p_o. El émbolo se deja libre. ¿Qué trabajo ejecutará el gas sobre el émbolo?, si el volumen del gas, al desplazarse el émbolo, aumenta al doble, en tanto que la presión del gas en este caso:
a) permanece constante;
b) crece linealmente hasta la presión $2p_o$ a medida que aumenta el volumen.



Solución.
a) p = constante

$$W = \int pdV \;\Rightarrow\; W = p_o\int_{V_o}^{2V_o} dV = p_o V\Big|_{V_0}^{2V_0}$$
$$= W = p_0\left(2V_0 - V_0\right) = p_0 V_0$$

b) El gráfico muestra la relación lineal de la presión y la temperatura.



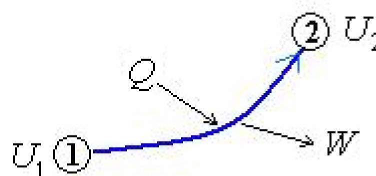
$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = \frac{2p_0 - p_0}{2V_0 - V_0} = \frac{p_0}{V_0} \Rightarrow p = \frac{p_0}{V_0}V$$

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{p_0}{V_0} VdV$$

$$= \frac{p_0}{V_0}\frac{V^2}{2}\Bigg|_{V_0\;\;0}^{2V_0} = \frac{p_0}{2V_0}\left(4V_0^2 - V_0^2\right)$$

$$= \frac{3}{2}p_0 V$$

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA.
Como ya hemos dicho la transferencia de calor y la realización de trabajo constituyen dos formas o métodos de transferir, suministrar o quitar, energía a una sustancia, o sea, representa energía en tránsito y son los términos utilizados cuando la energía está en movimiento. Una vez que la transferencia de energía termina se dice que el sistema ha experimentado un cambio de energía interna.
Supongamos un sistema al que se hace pasar del estado de equilibrio 1 al 2, mediante un determinado proceso termodinámico y durante el cual medimos el calor absorbido Q y el trabajo realizado W.



Estas cantidades dependen no solamente de las características de los estados inicial y final, sino también de los estados intermedios del camino en particular seguido en el proceso. Sin embargo, si calculamos la diferencia $Q - W$ para ir del estado de equilibrio y al 2 por diferentes caminos, encontramos siempre el mismo valor.
Por consiguiente la diferencia $Q - W$ representa la variación de energía interna del sistema, si asociamos un número con cada estado de equilibrio de tal modo que sirva como medida de esta cantidad, podemos escribir

$$U_2 - U_1 = Q - W$$

Expresión que constituye el primer principio de la termodinámica.

o $Q = \left(U_2 - U_1\right) + W$

Tenga en cuenta que Q y W deben expresarse en las mismas unidades, ya sean de calor o trabajo.
También que Q es positivo cuando el sistema recibe (entra) calor y W es positivo cuando el sistema realiza (sale) trabajo.
Note que la convención de signos que estamos utilizando aquí en este capítulo para el trabajo es opuesta a la utilizada en la Mecánica., donde W es positivo cuando es hecho sobre el sistema. Este cambio obedece a la costumbre o tradición, dado que el. Propósito de las máquinas as hacer trabajo y a este 1o llamamos en la vida diaria trabajo útil o positivo. Por otro lado la convención de signos de: Q es consistente con este hecho, cuando una máquina disipa o pierde calor es indeseable o negativo.
La forma descrita se aplica cuando los valores de la presión, volumen y temperatura correspondientes a los estados 1 y 2 difieren en cantidades finitas. Si los estados 1 y 2 varían infinitesimalmente, el primer principio toma la forma

$$dQ = dU + dW$$

Si el sistema de tal naturaleza que el único trabajo se realiza mediante una expansión o compresión

$$dQ = dU + pdV$$

Dado que: $dW = pdV$

CALOR ESFECÍFICO DEL GAS IDEAL
Antes de ver las principales transformaciones de los gases veamos el calor específico de un gas ideal a volumen constante y a presión constante.

Las capacidades caloríficas mas importantes son las que se determinan cuando los procesos se realizan a volumen constante (C_V) o a presión constante (C_p)

Calor específico a volumen constante.

Sea $(dQ)_V$ una pequeña cantidad de calor que absorbe un gas a volumen constante $(dV = 0)$. Por lo tanto no se realiza trabajo $(dW = 0)$, aplicando el primer principio de la termodinámica,

$dQ = dU + dW$, obtenemos:

$$(dQ)_V = dU$$

Como: $C_V = \frac{(dQ)_V}{dT}$

De aquí la capacidad calorífica a volumen constante,

$$C_V = \frac{(dQ)_V}{dT} = \frac{dU}{dT}$$

Para un gas ideal monoatómico:

$U = \frac{3}{2}nRT$, luego,

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}nR$$

Calor específico a presión constante.

De igual modo si $(dQ)_p$ es una pequeña cantidad de calor que absorbe un gas a presión constante, aplicando el primer principio de la termodinámica

$$(dQ)_p = dU + (dW)_p$$

Donde $(dW)_p = pdV \Rightarrow$

$$(dQ)_p = dU + pdV$$

Como $C_p = \frac{(dQ)_p}{dT}$

De esto obtenemos: $C_p = \frac{dU}{dT} + p\frac{dV}{dT}$

y como $C_V = \frac{dU}{dT}$, $C_p = C_V + p\frac{dV}{dT}$

para un gas ideal $pV = nRT$

A presión constante, $dp = 0$, luego

$$pdV = nRdT \Rightarrow p\frac{dV}{dT} = nR$$

Luego, $C_p = C_V + nR$

Para un gas monoatómico:

$$C_p = \frac{3}{2}nR + nR = \frac{5}{2}nR$$

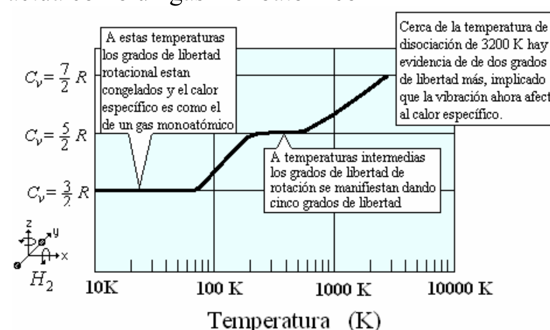
También como $C_p = C_V + nR$,

La capacidad calorífica por mol

$$c_p = c_V + R$$

Calor específico del hidrógeno

El comportamiento del calor específico del hidrógeno con el cambio de temperatura es sumamente desconcertante a inicios del siglo XX. En bajas temperaturas que se comporta como un gas monoatómico, pero a temperaturas más altas su calor específico asume un valor similar a otras moléculas diatómicas. Tomó el desarrollo de la teoría cuántica para demostrar que el hidrógeno diatómico, con su pequeña inercia de rotación, requiere una gran cantidad de energía para excitar su primera rotación molecular de estado cuántico. Dado que no puede obtener esa cantidad de energía a bajas temperaturas, actúa como un gas monoatómico



PROCESOS TERMODINÁMICOS.

El estado de un gas cualquiera o una mezcla de gases está determinado por su temperatura, su presión y su volumen. En el caso del gas ideal estas variables se unen por la relación para un mol de gas.

$$pV = RT$$

La especificación del estado de un gas presupone:

a) Equilibrio térmico. La temperatura es uniforme en todo el sistema e igual a la del recipiente;

b) Equilibrio mecánico. La fuerza ejercida por el sistema sobre el recipiente es uniforme en toda su superficie y es contrabalanceada por tuerzas externas;

c) Equilibrio químico. La estructura interna del sistema y su composición química no varían de un punto a otro.

Un estado que satisfaga estas condiciones se denomina estado de equilibrio termodinámico y sus variables satisfacen la ecuación anterior. Si queremos usar la ecuación de estado durante una transformación, es necesario que el sistema no se aleje mucho de las condiciones de equilibrio; esto se consigue procurando que la transformación se realice en una sucesión de estados de equilibrio poco diferentes entre sí; este proceso se llama cuasi estático; durante la transformación, el sistema está en todos los instantes en una proximidad infinita al estado de equilibrio. Esto se consigue, en general, haciendo los cambios en forma suficientemente lenta para que el sistema entre en equilibrio después de cada modificación (en rigor, una transformación exigiría un tiempo infinito para su realización).

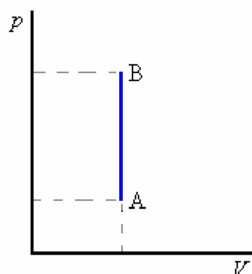
La energía interna U del sistema depende únicamente del estado del sistema, en un gas ideal depende solamente de su temperatura. Mientras que la transferencia de calor o el trabajo mecánico dependen del tipo de transformación o camino seguido para ir del estado inicial al final.

Isocórico o a volumen constante

No hay variación de volumen del gas, luego

$W = 0,\ Q = nc_V(T_B - T_A)$

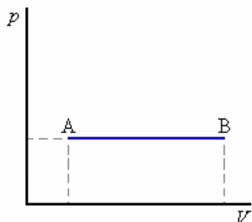
Donde c_V es el calor específico a volumen constante



Isobárico o a presión constante

$W = p(V_B - V_A),\ Q = nc_p(T_B - T_A)$

Donde c_p es el calor específico a presión constante



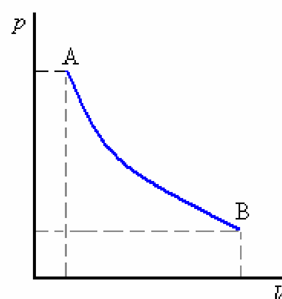
Isotérmico o a temperatura constante

$pV = nRT$

La curva $p = \dfrac{\text{constante}}{V}$, representa la transformación en un diagrama $p - V$ es una hipérbola cuyas asíntotas son los ejes coordenados

$$W = \int_{V_A}^{V_B} pdV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$\Delta U = 0,\ Q = W$



Ejemplo 80. Expansión libre de un gas.
Un recipiente de paredes rígidas y completamente aisladas está dividido en dos por medio de una pared. Una parte contiene gas y la otra está evacuada. Si la pared que los separa se rompe súbitamente, mostrar que la energía interna final y la inicial son iguales.

Solución.
Según el primer principio de la termodinámica:

$Q = (U_2 - U_1) + W$

Como el sistema está aislado Q es cero, o sea

$(U_2 - U_1) + W = 0$

el trabajo W realizado sobre el sistema también es cero. Note que el gas inicialmente tenía un volumen V y una presión p y finalmente un volumen V y una presión $p/2$.
Luego:

$(U_2 - U_1) = 0 \Rightarrow U_2 = U_1$

Ejemplo 81. Una cámara al vacío hecha de materiales aislantes se conecta a través de una válvula a la atmósfera, donde la presión es p_o. Se abre la válvula y el aire fluye a la cámara hasta que la presión es p_0. Probar que $u_f = u_0 + p_o V_0$, donde u_0 y V_0 es la energía interna molar y volumen molar de temperatura y presión de la atmósfera.
u_f es la energía interna molar del aire en la cámara.

Solución.
Inicialmente la cámara tenía un volumen cero de aire, al final se encuentra llena de aire y el trabajo por mol realizado sobre el sistema sería $-p_o V_0$.
Como está aislado no ha habido pérdida ni ganancia de calor.
Aplicando el primer principio de la termodinámica:

$Q = (U_2 - U_1) + W$

Obtenemos por mol

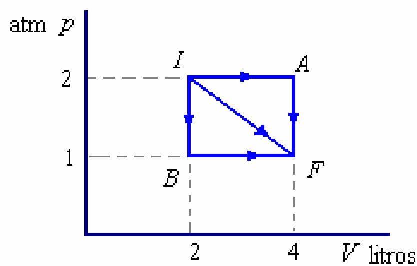
$0 = (u_f - u_0) - p_o V_0$

Finalmente:

$u_f = u_0 + p_o V_0$

Ejemplo 82. Un gas se expande desde I a F por tres posibles trayectorias como se indica en la figura.

Calcule el trabajo realizado por el gas a lo largo de las trayectorias *IAF*, *IF* y *IBF*.



Solución.

a) $W_{IAF} = \int_i^f pdV = 2 \text{ x } (4 - 2)$

$= 4$ litro atm $= 4$ x $101{,}33$ J $= 405{,}32$ J

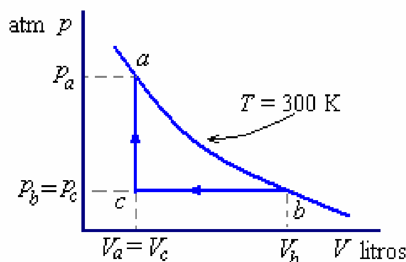
b) $W_{IF} = \int_i^f pdV = 2\times 1 + \frac{1}{2}(1\times 2)$

$= 3$ litro atm $= 3$ x $101{,}33$ J $= 304$ J

c) $W_{IBF} = \int_i^f pdV = 2\times 1$

$= 2$ litro atm $= 2$ x $101{,}33$ J $= 202{,}7$ J

Ejemplo 83. Una muestra de un gas ideal de 1 mol se lleva a través de un proceso termodinámico cíclico, como se muestra en la figura. El ciclo consta de tres partes, una expansión isotérmica (*a* - *b*), una compresión isobárica (*b* - *c*) y un aumento de la presión a volumen constante (*c* -*d*). Si $T = 300$ K, $p_a = 5$ atm, $p_b = p_c = 1$ atm, determine el trabajo realizado por el gas durante el ciclo.



Solución.

$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca}$

Para una expansión isotérmica *ab*

$$W_{ab} = \int_a^b pdV = \int_a^b nRT\frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_a}{V_b}$$

$$= nRT\ln\frac{p_a}{p_b}$$

Para la compresión isobárica *bc*

$W_{bc} = p_b(V_c - V_a)$

Para la compresión isocórica *ca* no hay trabajo.

$W_{ca} = 0$

De tal manera:

$$W = nRT\ln\frac{p_a}{p_b} + p_c(V_c - V_a)$$

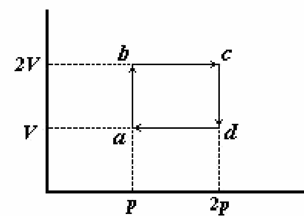
$$= nRT\ln\frac{p_a}{p_b} + p_b\left(\frac{nRT}{p_a} - \frac{nRT}{p_b}\right)$$

$$= nRT\left[\ln\frac{p_a}{p_b} + \left(\frac{p_b}{p_a} - 1\right)\right]$$

$$= RT\left[\ln 5 + \left(\frac{1}{5} - 1\right)\right]$$

$= 19{,}9$ l atm $= 2017{,}5$ J

Ejemplo 84. La figura muestra un ciclo donde *a* es el estado inicial del sistema.
Las energías internas de los estados son: $U_a = 10$ J, $U_b = 35$ J, $U_d = 39$ J.
En el proceso $b \rightarrow c$, el trabajo realizado por el gas es + 91 J.



Encontrar:
a) El calor añadido al sistema durante el proceso $b \rightarrow c$.
b) El calor removido en el proceso $d \rightarrow a$.

Solución.

Usando la ley del gas ideal $\frac{pV}{T} = \text{constante}$, podemos encontrar una relación entre las temperaturas en *a, b, c* y *d*.
Si $T_a = T$, $T_b = 2T$, $T_c = 4T$ y $T_d = 2T$

a) $Q_{bc} = C_p(T_c - T_b)$

$= C_p(4T - 2T) = 2C_pT$

Por la segunda ley de la termodinámica:

$U_c - U_b = Q_{bc} - W_{bc} \Rightarrow$

$U_c - 35 = Q_{bc} - 91$

Por otra parte en el proceso $a \rightarrow b$:

$U_b - U_a = Q_{ab} - W_{ab}$

$\Rightarrow 35 - 10 = Q_{ab} - 0$

y $Q_{ab} = 25$ J y también

$Q_{ab} = C_V(T_b - T_a) = C_V(2T - T) = C_VT$

luego $C_VT = 25$ J

En el proceso $c \rightarrow d$:

$U_d - U_c = Q_{cd} - W_{cd} \Rightarrow 39 - U_c = Q_{cd} - 0$

Como

$Q_{cd} = C_V(T_d - T_c) \Rightarrow$

$Q_{cd} = C_V(2T - 4T) = -2C_VT$

y $Q_{cd} = -2\times 25 = -50$ J

con lo que encontramos

$U_c = 39 - Q_{cd} = 39 + 50 = 89$ J

Finalmente:

$Q_{bc} = U_c - 35 + 91 = 89 - 35 + 91 = 145$ J

$Q_{bc} = 145$ J

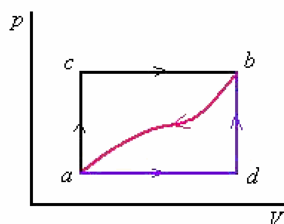
b) $Q_{da} = U_a - U_d + W_{da}$

$Q_{da} = C_p(T_a - T_d) = C_p(T - 2T) = -C_p T$

Como $Q_{bc} = 145J = 2C_p T$

Luego $Q_{da} = -C_p T = -\frac{145}{2} = -72,5$ J

Ejemplo 85. En la figura se muestran diversas trayectorias entre los estados de equilibrio *a*, *b*, *c* y *d*, en un diagrama *p*-*V*.



a) Cuando el sistema pasa de1 estado *a* al *b* a lo largo de la trayectoria *a*, *c*, *b* recibe 20000 calorías y realiza 7500 cal de trabajo. Calcular el cambio de energía interna $(U_b - U_a)$.

b) ¿Cuánto calor recibe el sistema a lo largo de la trayectoria *adb*, si el trabajo realizado es 2500 cal?

c) Cuando el sistema vuelve de b hacia a, a lo largo de la trayectoria curva *ba*, el trabajo realizado es 5000 cal. ¿Cuánto calor absorbe o libera el sistema?

d) Si $U_a = 0$ y $U_d = 10000$ cal., hállese el calor absorbido en los procesos *ad* y *db*.

Solución.

a) Por la trayectoria *acb*, se tiene:

Q = 20000 cal.

W = 7500 cal.

Luego,

$U_b - U_a = Q - W \Rightarrow$

$U_b - U_a$ = 20000 – 7500 = 12500 cal.

b) Por la trayectoria *adb*, W = 2500 cal.

$Q = (U_b - U_a) + W$

Q = 12500 + 2500

Q_{adb} = 15000 cal. (absorbido)

c) Para la trayectoria *ba*,

W = + 5000 cal.

Luego,

$Q = (U_a - U_b) + W$

Q = - 12500 + 5000

Q_{ba} = - 7,500 cal. (libera)

d) Si $U_a = 0$ y U_d = 10,000 cal,

$U_d - U_a$ = 10000 cal. Además, observe que al ir por la trayectoria *adb* solo se hace trabajo en *ad* y no en *db*, o sea, se tiene que:

$W_{ad} = W_{adb}$ = 2500 cal.

Luego

$Q_{ad} = (U_d - U_a) + W_{ad}$

Q_{ad} = 10000 + 2500 = 12500 cal. (absorbido)

Como encontramos que

Q_{adb} = 15000 y $Q_{adb} = Q_{ad} + Q_{db}$

Obtenemos

Q_{db} = 15000 – 12500 = 2500 cal. (Absorbido)

Esta última cantidad también podría encontrarse teniendo en cuenta que:

$W_{db} = 0$

Y como en (a) hemos determinado que

$U_b - U_a$ = 12,500 cal.

Si $U_a = 0$, se tiene que U_b = 12500, luego

$U_b - U_d$ = 12500 – 10000 = 2500 cal.

Finalmente

$Q_{db} = (U_b - U_d) + W_{db}$ = 2500 cal.

Ejemplo 86. Un mol de un gas ideal se encuentra en un estado inicial p = 2 atm y V = 10 litros indicado por el punto *a* en el diagrama *pV* de la figura. El gas se expande a presión constante hasta el punto *b*, cuyo volumen es 30 litros y luego se enfría a volumen constante hasta que su presión es de 1 atm en el punto *c*.

Entonces se comprime a presión constante hasta alcanza su volumen original en el punto *d* y finalmente se calienta a volumen constante hasta que vuelve a su estado original.

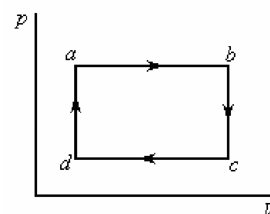
a) Determinar la temperatura de cada estado *a*, *b*, *c* y *d*.

b) Determinar el calor añadido a lo largo de cada una de las etapas del ciclo.

c) Calcular el trabajo realizado a lo largo de cada trayectoria.

d) Determinar la energía de cada estado *a*, *b*, *c* y *d*.

e) ¿Cuál es el trabajo neto realizado por el gas en el ciclo completo?



Solución.

a) Por la ley del gas ideal: $pV = nRT \Rightarrow$

$$T = \frac{pV}{nR}$$

$n = 1$, $R = 0{,}0821 \dfrac{\text{litro.atm}}{\text{mol.K}}$

En a $\begin{cases} p_a = 2\,\text{atm} \\ V_a = 10\,\text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{2 \times 10}{0{,}0821}$ = 243,6 K

En b $\begin{cases} p_b = 2\,\text{atm} \\ V_b = 30\,\text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{2 \times 30}{0{,}0821}$ = 730,8 K

En c $\begin{cases} p_c = 1\,\text{atm} \\ V_c = 30\,\text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{1 \times 30}{0{,}0821}$ = 365,4 K

En d $\begin{cases} p_d = 1\,\text{atm} \\ V_d = 10\,\text{litros} \end{cases}$ Luego $T = \dfrac{1 \times 10}{0{,}0821}$ = 121,8 K

b)

De $a \rightarrow b$ (presión constante)

El calor suministrado es $Q = C_p \Delta T$

Siendo gas ideal (gas monoatómico)

$$C_p = \frac{5}{2} nR$$

Como $n = 1$, y $R = 2 \dfrac{\text{cal}}{\text{mol K}} \Rightarrow C_p = 5 \dfrac{\text{cal}}{\text{K}}$

ΔT = 730,8 – 243,6 = 487,2 K

$Q = (5)(487{,}2)$ = 2436 calorías

De $b \rightarrow c$ (volumen constante)

El calor suministrado es $Q = C_V \Delta T$

Siendo gas ideal (gas monoatómico)

$$C_p = \frac{3}{2} nR$$

Como $n = 1$, y $R = 2 \dfrac{\text{cal}}{\text{mol K}}$

$\Rightarrow C_p = 3 \dfrac{\text{cal}}{\text{K}}$

ΔT = 365,4 – 730,8 = -365,4 K

$Q = (3)(-365{,}4)$ = -1096,2 calorías

De $c \rightarrow d$ (presión constante)

El calor suministrado es $Q = C_p \Delta T$

ΔT = 121,8 – 365,4 = - 243,6 K

$Q = (5)(-243{,}6)$ = -1218 calorías

De $d \rightarrow a$ (volumen constante)

El calor suministrado es $Q = C_V \Delta T$

ΔT = 243,6 – 121,8 = 121,8 K

$Q = (3)(121{,}8)$ = 365,4 calorías

c)

De $a \rightarrow b$ (presión constante)

El trabajo es $W = p(V_b - V_a)$

$W = 2(30 - 10)$ = 40 litro atm

Como 1 litro-atm = 101,3 J = 24,2 cal:

W = 4052 J = 968 calorías (trabajo del sistema)

De $b \rightarrow c$ (volumen constante)

El trabajo es $W = 0$, (no hay trabajo).

De $c \rightarrow d$ (presión constante)

El trabajo es $W = p(V_d - V_c)$

$W = 1(10 - 30)$ = - 20 litro atm

W = - 2026 J = - 484 calorías (trabajo sobre el sistema)

De $d \rightarrow a$ (volumen constante)

El trabajo es $W = 0$, (no hay trabajo).

d) Como

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

$$= \frac{3}{2}(1\text{mol})\left(2 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}\right) T$$

$= 3T$

$U_a = 3T_a = 3(243{,}6K)$ = 730,8 cal

$U_b = 3T_b = 3(730{,}8K)$ = 2192,4 K

$U_c = 3T_c = 3(365{,}4K)$ = 1096,2 K

$U_d = 3T_d = 3(121{,}8K)$ = 365,4 K

e) Trabajo neto = $W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$

= 4052 + 0 – 2026 + 0 = 2026 J

= 487 cal

Calor absorbido = $Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{cd} + Q_{da}$

= 2436 – 1096,2 – 1218 +365,4

= 487 cal

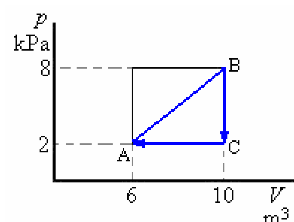
Trabajo neto = calor absorbido

= Calor que entra – calor que sale.

Ejemplo 87. Considere el proceso cíclico descrito en la figura. Si Q es negativo para el proceso BC y ΔU es negativo para el proceso CA:

a) determine los signos de Q asociados a cada proceso.

b) determine los signos de W asociados a cada proceso.



Solución.

a) Q_{AB} = positivo

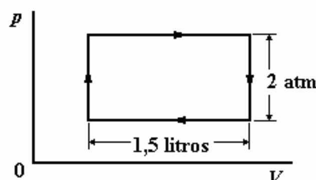
Q_{BC} = negativo (Dato)

$(U_C - U_B) = Q_{BC} - W_{BC} = Q_{CA}$ = negativo

$(U_A - U_B) = Q_{CA} - W_{CA} \Rightarrow = Q_{CA} = (U_A - U_C) +$ W_{CA} = (-) + (-) = negativo

b) W_{AB} = positivo
W_{BC} = 0 (A volumen constante)
W_{CA} = 2 (6-10) = -8 = negativo

Ejemplo 88. Un cilindro contiene un gas ideal a una presión de 2 atmósferas, el volumen es de 5 1itros a una temperatura del gas de 250 K. El gas se calienta a volumen constante hasta una presión de 4 atmósferas, y luego a presión constante hasta una temperatura de 650 K. Calcular el calor total recibido durante estos procesos. Para el gas el c_v es 21,0 J /mol K
Luego el gas entonces es enfriado a vo1umen constante hasta su presión original y después a presión constante se lleva el gas hasta su volumen original.
a) Encuentre la salida de calor total durante estos procesos y
b) el trabajo total hecho por el gas en el proceso cíclico del conjunto.
Solución.

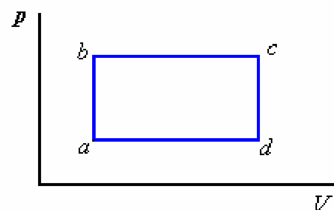


La ecuación del gas ideal permite el cálculo del número de los moles originalmente presentes.

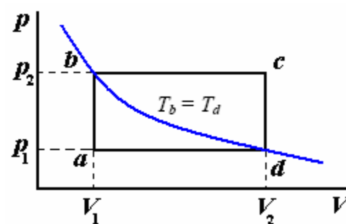
$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{2\text{atm}\times 5\text{litro}}{0{,}0821\,\text{litro atm/mol.K}}$$
= 0,487 mol

También $C_p = C_V + nR$, la capacidad calorífica por mol $c_p = c_v + R$.
a) $c_p = c_v + R$ = (21,0+ 8,317)J/mol K
= 29,317 J/mol K
En el primer cambio p/T es constante y luego, como p se duplica, T se duplica también a 500 K. La entrada de calor por lo tanto es:
$Q_1 = nc_v(T_2 - T_1)$
= 0,487 mol x 21,0 J/ mol K x (500 – 250)K
= 2558 J.
En el Segundo cambio V/T es constante y, como T *se* incrementa en la razón 650/500, entonces V se hace 6,5 1itros. La entrada de calor por lo tanto es:
$Q_2 = nc_p(T_3 - T_2)$
= 0,487 mol x 29,317 J/mol K x(650 – 500)K
= 2143 J.
La entrada de calor total durante estos dos procesos es $Q = Q_1 + Q_2$ = 4701 J.
Durante el primer proceso de enfriamiento p se hace la mitad, y T también se hace la mitad 325 K. La salida de calor es
$Q'_1 = nc_v (T_3 - T_4)$
= 0,487 mol x 21,0 J /mol K x (650- 325)K
= 3325 J.
En el Segundo proceso de enfriamiento V se reduce en la razón de 5/6,5, y T se hace 250K, la temperatura original, como se esperaba. La salida de calor es por lo tanto:
$Q'_2 = nc_p(T_4 - T_1)$
= 0,487 mol x 29,317 J/ mol K (325 – 250)K
= 1072 J.
La salida de calor total durante el proceso de enfriamiento es.
$Q' = H'_1 + H'_2$= 4397 J.
La diferencia entre el calor de entrada y el de salida es 304 J. Esto debe aparecer como trabajo hecho por el gas, puesto que la energía interna del gas debe ser igual al principio y en el final de un proceso de cíc1ico.
b) La cantidad 304 J debería estar de acuerdo con el valor del área dentro de la curva del ciclo, que representa el trabajo hecho por el gas. Es un rectángulo de alto 2 atm y largo1,5 litros. El área bajo ésta curva es:
W = 2 x1,013 x 10^6dinas/cm x 1,5 x 10^3 cm^3
= 3,04 x 109 ergios = 304 J,
Lo que esta de acuerdo con el ingreso.

Ejemplo 89. Sobre un mol de gas se realiza un ciclo cerrado que consta de dos isócoras y dos isóbaras. Las temperaturas en los puntos a y c son T_a y T_c. Determínese el trabajo que efectúa el gas durante dicho ciclo, si se sabe que los puntos b y d yacen en una isoterma



Solución.



$$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$$
$$W_{ab} = 0,\ W_{bc} = p_2(V_2 - V_1),\ W_{cd} = 0,$$
$$W_{da} = -p_1(V_2 - V_1),$$
$$W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$$
$$W = p_2V_2 - p_2V_1 - p_1V_2 + p_1V_1$$
Por la de los gases ideales $p_2V_2 = RT_c$.
$$p_2V_1 = RT_b,\ p_1V_2 = RT_d,\ p_1V_1 = RT_a$$
$$W = R(T_c - T_b - T_d + T_a)$$
Como $T_b = T_d$
$$W = R(T_c + T_a - 2T_b)$$
De las relaciones

$$\frac{p_1}{T_a} = \frac{p_2}{T_b} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_a}{T_b} \text{ y}$$

$$\frac{p_1}{T_d} = \frac{p_2}{T_c} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_d}{T_c}$$

$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{T_d}{T_c} \rightarrow T_a T_c = T_b T_d$$

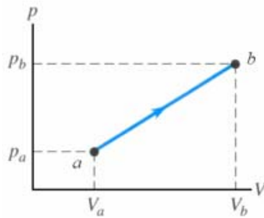
Con $T_b = T_d \Rightarrow T_a T_c = T_b^2$

Finalmente $\sqrt{T_a T_c} = T_b$

Con lo que obtenemos

$$W = R\left(T_c + T_a - 2\sqrt{T_a T_c}\right)$$
$$= R\left(\sqrt{T_c} - \sqrt{T_a}\right)^2$$

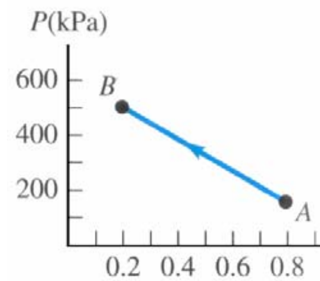
Ejemplo 90. Una cantidad de aire se lleva del estado *a* al *b* siguiendo una trayectoria recta en una gráfica *pV*.
a) En este proceso ¿la temperatura del gas: aumenta, disminuye o no cambia? Explique.
b) Si $V = 0{,}0700$ m^3, $V_b = 0{,}1100$ m^3, $p_a = 1{,}00 \times 10^5$ Pa y $p_b = 1{,}40 \times 10^5$ Pa, ¿cuánto trabajo efectúa el gas en este proceso. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal.



Solución.
a) El producto pV se incrementa, y aun para un gas no ideal, esto indica un incremento de temperatura.
b) El trabajo es el área encerrada bajo la línea que representa el proceso y las verticales en V_a y V_b. El área del trapezoide es:

$$\frac{1}{2}(p_b + p_a)(V_b - V_a)$$
$$= \frac{1}{2}(2{,}40 \times 10^5)(0{,}0400) = 400 \text{ J}$$

Ejemplo 91. Cuatro moles de O_2 se llevan de A a B con el proceso que muestra en una gráfica *pV* de la figura. Suponga que el tiene comportamiento ideal. Calcule el flujo de calor *Q* durante este proceso. ¿Entra calor en el gas o sale de él?



Solución.
El trabajo es el área bajo la trayectoria de A a B en el gráfico pV. El volumen disminuye, tal que $W <$ 0.

$$W = -\tfrac{1}{2}(500 \times 10^3 + 150 \times 10^3)(0{,}60)$$
$$= -1{,}95 \times 10^5 \text{ J}$$

$$\Delta U = nC_V \, \Delta T$$

Con $T_1 = \dfrac{p_1 V_1}{nR}, T_2 = \dfrac{P_2 V_2}{nR}$

$$\Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{nR}$$

$$\Delta U = \left(\frac{C_V}{R}\right)(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

$$\Delta U = \left(\frac{20{,}85}{8{,}315}\right)\left[\left(5 \times 10^5\right)(0{,}20) - \left(1{,}5 \times 10^5\right)(0{,}80)\right]$$
$$= -5{,}015 \times 10^4 \text{ J}$$

Luego $\Delta U = Q - W$

$$\Rightarrow Q = \Delta U + W = -0{,}5015 \times 10^5 - 1{,}95 \times 10^5$$
$$= -2{,}45 \times 10^5$$

Q es negativo, el calor fluye fuera del gas.

Ejemplo 92. Sea 20,9 J el calor añadido a determinado gas ideal. Como resultado, su volumen cambia de 63,0 a 113 cm^3 mientras que la presión permanece constante a 1,00 atm.
a) ¿En cuánto cambió la energía interna del gas?
b) Si la cantidad de gas presente es de $2{,}00 \times 10^{-3}$ mol, halle la capacidad calorífica molar a presión constante.
c) Halle la capacidad calorífica molar a volumen constante.

Solución.
a) $\Delta U = Q - W$

$Q = 20{,}9$ J,

$$W = p(V_2 - V_1) \Rightarrow$$

$$W = 1{,}013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}(113 - 63) \times 10^{-6} m^3$$

$W = 5{,}06$ J

b) $Q = nC_p(T_2 - T_1)$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1{,}013 \times 10^5 \times 63 \times 10^{-6}}{2{,}00 \times 10^{-3} \times 8{,}31} = 384 \text{ K}$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1{,}013\times10^5\times113\times10^{-6}}{2{,}00\times10^{3}\times8{,}31} = 689\text{ K}$$

$$20{,}9 = 2{,}00\times10^{-3}C_p(689-384)$$

$$C_p = \frac{20{,}9\times10^3}{2\times305} = 34{,}3\frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

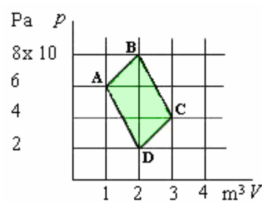
$$C_p = \frac{20.9\times10^3}{2\times305} = 34{,}3\frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

c)

$$C_V = C_p - R \Rightarrow$$

$$C_V = 34{,}3 - 8{,}31 = 26\frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

Ejemplo 93. Una mol de un gas ideal monoatómico es llevado cuasiestáticamente desde el estado A recorriendo el ciclo ABCDA, tal como se muestra en la figura.
Hallar:
a) La temperatura en A
b) El trabajo total.



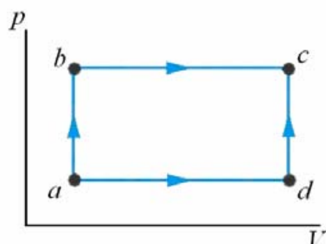
Solución.

a) $pV = nRT$, y $T = \frac{pV}{nR}$, en el punto A:

$$T_A = \frac{6\times10^3\times1}{1\times8{,}31} = 722\text{ K}$$

b) Trabajo total = Area ABCDA
= (3,5 + 3 – 2 – 1,5)2 = 6,0 kJ

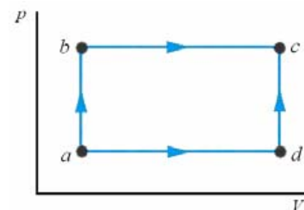
Ejemplo 94. Un sistema termodinámico se lleva del estado *a* al estado *c* de la figura siguiendo la trayectoria *abc* o bien la trayectoria *adc*. Por la trayectoria *abc*, el trabajo *W* efectuado por el sistema es de 450 J. Por la trayectoria *adc*, *W* es de 120 J. Las energías internas de los cuatro estados mostrados en la figura son: U_a = 150 J, U_b = 240 J, U_c = 680 J y U_d = 330 J. Calcule el flujo de calor *Q* para cada uno de los cuatro procesos: *ab*, *bc*, *ad* y *dc*. En cada proceso, ¿el sistema absorbe o desprende calor?



Solución.

Para cada proceso, $Q = \Delta U + W$. No se realiza trabajo en los procesos *ab* y *dc*, también $W_{bc} = W_{abc}$ y $W_{ad} = W_{adc}$.
El calor para cada proceso es,
para *ab* $Q_{ab} = 90\text{ J}$,
para *bc* $Q_{bc} = 440\text{ J} + 450\text{ J} = 890\text{ J}$,
para *ad* $Q_{ad} = 180\text{ J} + 120\text{ J} = 300\text{ J}$,
para *dc* $Q_{dc} = 350\text{ J}$, el calor es absorbido en cada proceso. Las flechas representadas en los procesos indican la dirección del incremento de la temperatura (incrementando *U*).

Ejemplo 95. La figura muestra cuatro estados de un sistema termodinámico: *a, b, c* y *d*. El volumen del sistema es V_a tanto en el estado *a* como en el *b*, y es V_c tanto en el estado *c* como en el *d*. La presión del sistema es p_a tanto en el estado *a* como en el *d*, y es p_c tanto en el estado *b* como en el *c*. Las energías internas de los cuatro estados son: U_a, U_b, U_c y U_d. Para cada uno de los procesos: *ab*, *bc*, *ad* y *dc*, calcule:
a) el trabajo efectuado por el sistema;
b) el flujo de calor al sistema durante el proceso;
c) El sistema se puede llevar del estado al c siguiendo la trayectoria *abc* o bien la *adc*. Calcule el flujo neto de calor al sistema y el trabajo neto efectuado por el sistema en cada trayectoria. ¿Por cuál trayectoria es mayor el flujo neto de calor? ¿Por cuál es mayor el trabajo neto?
d) Un amigo le dice que las cantidades de flujo de calor deben ser iguales para la trayectoria *abc* y la trayectoria *adc*, porque el estado inicial (a) y el final (c) del sistema son los mismos por ambas trayectorias. ¿Cómo respondería a esta afirmación?



Solución.

Vamos a usar las ecuaciones, $W = p(V_2 - V_1)$ y $\Delta U = Q - W$.

a) El trabajo hecho por el sistema durante el proceso:
A lo largo de *ab* o *cd*, *W* = 0. A lo largo de *bc*, $W_{bc} = p_c(V_c - V_a)$ A lo largo de *ad*, $W_{ad} = p_a(V_c - V_a)$.

b) El calor que ingresa al sistema durante el proceso:
$Q = \Delta U + W$.

$\Delta U_{ab} = U_b - U_a$, tal que,

$Q_{ab} = U_b - U_a + 0$.

$\Delta U_{bc} = U_c - U_b$, tal que

$Q_{bc} = (U_c - U_b) + p_c(V_c - V_a)$.

$\Delta U_{ad} = U_d - U_a$, tal que

$Q_{ad} = (U_d - U_a) + p_a(V_c - V_a)$.

$\Delta U_{dc} = U_c - U_d$, tal que

$Q_{dc} = (U_c - U_d) + 0$.

c) Del estado *a* al estado *c* a lo largo de la trayectoria *abc*.

$W_{abc} = p_c(V_c - V_a)$. Q_{abc}

$= U_b - U_a + (U_c - U_b) + p_c(V_c - V_a)$

$= (U_c - U_a) + p_c(V_c - V_a)$

Del estado *a* al estado *c* a lo largo de la trayectoria *adc*.

$W_{adc} = p_a(V_c - V_a)$.

$Q_{adc} = (U_c - U_a) + p_a(V_c - V_a)$

Asumiendo $p_c > p_a, Q_{abc} > Q_{adc}$ y

$W_{abc} > W_{adc}$.

d) Para entender esta diferencia, comenzar por la relación $Q = W + \Delta U$. El cambio de la energía Interna ΔU es independiente de la trayectoria de tal manera que es igual para la trayectoria *abc* y para la trayectoria *adc*. El trabajo hecho por el sistema es el área bajo los caminos en el diagrama *pV*- no es igual para las dos trayectorias. De hecho, es más grande para la trayectoria *abc*. Puesto que ΔU es igual y *W* es diferente, *Q* debe ser diferente para las dos trayectorias. El flujo del calor *Q* es dependiente de la trayectoria.

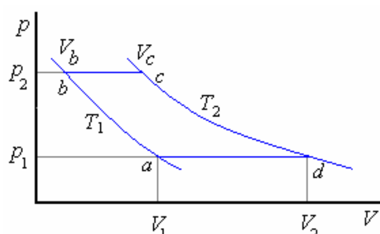
Ejemplo 96. Un motor térmico funciona con un gas ideal que se somete a un ciclo termodinámico que consta de dos etapas isotérmicas y dos etapas isobáricas de presiones p_1 y p_2 ($p_2 > p_1$). Si las dos isotermas cortan la isobárica de presión p_1 en los volúmenes V_1 y V_2 ($V_2 > V_1$)

a) Grafique el proceso en los ejes *pV*.

b) Determine el trabajo neto realizado en función de p_1, p_2, V_1 y V_2

Solución.

a)



b) $W_{ab} = nRT_1 \ln\frac{V_b}{V_1} = p_1V_1 \ln\frac{V_b}{V_1}$

$W_{bc} = p_2(V_c - V_b) = p_1(V_2 - V_1)$

$W_{cd} = nRT_2 \ln\frac{V_2}{V_c} = p_1V_2 \ln\frac{V_2}{V_c}$

$W_{da} = p_1(V_1 - V_2)$

$W_{neto} = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$

W_{bc} se anula con W_{cd}

$W_{neto} = p_1V_1 \ln\frac{V_b}{V_1} + p_1V_2 \ln\frac{V_2}{V_c}$

$p_1V_1 = p_2V_b \Rightarrow V_b = \frac{p_1V_1}{p_2}$, $p_1V_2 = p_2V_c$

$\Rightarrow V_c = \frac{p_1V_2}{p_2}$

Reemplazando los valores de V_b y V_c respectivamente:

$W_{neto} = p_1V_1 \ln\frac{p_1V_1/p_2}{V_1} + p_1V_2 \ln\frac{V_2}{p_1V_2/p_2}$

$W_{neto} = p_1V_1 \ln\frac{p_1}{p_2} + p_1V_2 \ln\frac{p_2}{p_1}$

$= -p_1V_1 \ln\frac{p_2}{p_1} + p_1V_2 \ln\frac{p_2}{p_1}$

$= p_1(V_2 - V_1)\ln\frac{p_2}{p_1}$

PROCESO ADIABATICO:

Es un proceso termodinámico importante en el cual al cambiar, el sistema de estado de equilibrio no intercambia calor con el ambiente, *Q* = 0. En este caso, de acuerdo al primer principio, se tiene:

$U_2 - U_1 = -W$.

Es importante hacer notar que este trabajo, denominado TRABAJO ADIABATICO (W_{ad}), hecho para cambiar el sistema desde un estado inicial a un final, depende solo de los estados de equilibrio dados. Conociendo W_{ad} se puede determinar la trayectoria. Cuando se realiza un trabajo que no es adiabático, entre los dos estados dados, la cantidad en exceso o defecto comparado con el trabajo adiabático es calor y es lo que realmente lo define como otra forma de trabajo.

Ecuación del proceso adiabático

Cuando un gas ideal va en un proceso adiabático, la presión volumen y temperatura cambian de forma tal que es descrito solamente por una relación entre *p* y *V*, *T* y *V*, o *p* y *T*, en función de las capacidades caloríficas. Esta relación puede calcularse aplicando el primer principio de la termodinámica y utilizando la ecuación del gas ideal.

Según el primer principio tenemos:

$dQ = dU + dW = dU + pdV$

Como $dU = C_V dT$ (aunque este resultado se obtuvo considerando un proceso a volumen constante, relación solamente las variables U y T y por lo tanto, es válido independientemente del proceso considerado), luego podemos escribir:

$$dQ = C_V dT + pdV$$

Como $dQ = 0$ en un proceso adiabático, se tiene:

$$C_V dT + pdV = 0$$

$$dT = -\frac{pdV}{C_V} \qquad (1)$$

De la ecuación del gas ideal

$$pV = nRT$$

$$pdV + Vdp = nRdT \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2); para eliminar dT :

$$pdV + Vdp = -nR\frac{p}{C_V}dV$$

$$pC_V dV + VC_V dp = -nRpdV$$

$$(C_V + nR)pdV + C_V Vdp = 0$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{C_p}{C_V}\frac{dV}{V}$$

Llamando a la relación $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$. Para gas ideal:

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1{,}67$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma\frac{dV}{V}$$

Integrando

$$\ln p = -\gamma \ln V + \ln \text{const.}$$

$$pV^{\gamma} = \text{constante}$$

Utilizando la ecuación de los gases ideales $pV = nRT$ se pueden encontrar las siguientes relaciones:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}, \quad \frac{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = \text{constante}$$

La curva de un proceso adiabático, en un diagrama pV cae más rápidamente con el aumento de V que la curva de un proceso isotérmico.

Ejemplo 97. Demostrar que el trabajo realizado por un gas ideal, con capacidades caloríficas constantes, durante una expansión adiabática es igual a:

a) $W = C_V(T_1 - T_2)$

b) $W = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$

c) $W = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$

Solución.

a) Por el principio de la termodinámica

$$dQ = dU + dW$$

Como el proceso es adiabático $dQ = 0$

Luego $dW = -dU$

Pero $\frac{dU}{dT} = C_V \Rightarrow dU = C_V dT$

Y $dW = -C_V dT$

Integrando de 1 a 2:

$$W_{1\to 2} = -C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = -C_V(T_2 - T_1)$$

$$W = C_V(T_1 - T_2)$$

b) Tenemos que $dW = pdV$

Por ser proceso adiabático $pV^{\gamma} = C$

$$\Rightarrow p = \frac{C}{V^{\gamma}}$$

Luego $dW = C\frac{dV}{V^{\gamma}}$

Integrando: $W = C\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^{\gamma}} = C\left.\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_1}^{V_2} =$

$$\frac{CV_1^{-\gamma+1} - CV_2^{-\gamma+1}}{\gamma - 1}$$

Como $p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} = C$

Reemplazando C en la expresión de W en las formas arriba puestas, obtenemos finalmente:

$$W = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$$

c) De la expresión anterior

$$W = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{p_2V_2}{p_1V_1}\right]$$

pero $V_1 = \left(\frac{C}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ y $V_2 = \left(\frac{C}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

de allí

$$W = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{p_2\left(\frac{C}{p_2}\right)^{1/\gamma}}{p_1\left(\frac{C}{p_1}\right)^{1/\gamma}}\right]$$

$$= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

Ejemplo 98. Encontrar el módulo de compresibilidad elástica en un proceso adiabático ($B_{adiabático}$).
Se conoce la relación de capacidades caloríficas $\left(\gamma = \frac{c_p}{c_V}\right)$.

Solución.
Tenemos:

$$B = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}} \Rightarrow dp = -B\frac{dV}{V} \qquad (1)$$

También, en un proceso adiabático:

$$pV^{\gamma} = \text{constante}$$

derivando

$$dpV^{\gamma} + p\gamma V^{\gamma-1}dV = 0$$

de aquí

$$dp = -\gamma p\frac{dV}{V} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$-B\frac{dV}{V} = -\gamma p\frac{dV}{V}$$

de aquí obtenemos:

$$B_{adiabático} = \gamma p$$

El sonido en el aire se propaga en un proceso adiabático
La velocidad de un gas está dada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Para el aire:

$$B_{adiabático} = \gamma p = 1{,}4\left(1{,}013\times 10^5\right)$$

$$\rho_{aire} = 1{,}28 \text{ kg/m}^3$$

$$v = \sqrt{\frac{1{,}4(1{,}013\times 15)}{1{,}28}} = 333 \text{ m/s}$$

Ejemplo 99 . Dos moles de un gas ideal se expanden cuasiestática y adiabáticamente desde una presión de 5 atm y un volumen de 12 litros a un volumen final de 30 litros. (γ= 1,40)
(a) ¿Cuál es la presión final del gas?
(b) ¿Cuáles son las temperaturas inicial y final?

Solución.
n = 2 mol, $\gamma = 1{,}4$, $p_i = 5$ atm, $V_i = 12$ litros, $V_f = 30$ litros

a) Para una expansión adiabática

$$pV^{\gamma} = cte$$

Entonces: $p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma}$

$$\Rightarrow 5(12)^{1,4} = p_f(30)^{1,4}$$

De donde

$$p_f = 1{,}39 \text{ atm}$$

b) $T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{5\times 12}{2\times 0{,}082} = 365{,}9$ K

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{1{,}39\times 30}{2\times 0{,}082} = 254{,}3 \text{ K}$$

Ejemplo 100. Un mol de un gas ideal monoatómico inicialmente a 300 K y a 1 atm se comprime cuasiestática y adiabáticamente a un cuarto de su volumen inicial. Encuentre la presión y temperatura final. (γ= 1,67)

Solución.
n = 1mol
γ = 1,67
T_i = 300 K
p_i = 1 atm

$$V_f = \frac{1}{4}V_i$$

$$pV^{\gamma} = \text{cte}, \; pV = nRT$$

Bien

$$\left.\begin{array}{l} p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma} \\ \frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f} \end{array}\right\} \Rightarrow V_i^{\gamma-1}T_i = V_f^{\gamma-1}T_f$$

De la última

$$T_f = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} T_i = (4)^{0,67}300$$

$$= 459{,}15 \text{ K}$$

También

$$p_f = \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma} p_i = (4)^{1,67}\times 1 = 10{,}1 \text{ atm}$$

Ejemplo 101. Durante el tiempo de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1 a 20 atm. Suponiendo que el proceso es adiabático y el gas es ideal con γ = 1,40.
a) ¿en qué factor cambia el volumen? y
b) ¿en qué factor cambia la temperatura?

Solución.
γ = 1,40, p_i = 1 atm, p_f = 20 atm

a) $p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma} \Rightarrow$

$$\frac{V_f}{V_i} = \left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 0{,}12$$

b) $\dfrac{T_f}{T_i} = \left(\dfrac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} = \left(\dfrac{1}{0{,}12}\right)^{0{,}4} = 2{,}33$

CICLOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES

Supongamos que ocurre un proceso en que el sistema va de un estado inicial (*i*) a otro final (*f*) en el que se realiza un trabajo *W* y se produce una transferencia de calor *Q* a una serie de reservorios de calor. Si al final de este proceso, el sistema puede ser restaurado a su estado inicial se dice que es REVERSIBLE. Un proceso que no llena este requisito se dice que es IRREVERSIBLE.

Las condiciones para un proceso reversible son:

1) No debe existir trabajo realizado por fricción, fuerzas debidas a la viscosidad u otros efectos disipativos.

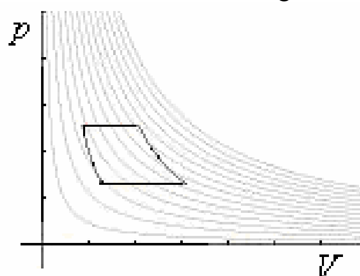
2) El proceso debe ser tal que el sistema se encuentre siempre en estado de equilibrio o infinitamente próximo a él (cuasiestático - por ejemplo, si el pistón de un cilindro se mueve lentamente dando tiempo para que el sistema pueda interactuar con el ambiente y alcanzar un estado de equilibrio en todo instante).

Cualquier proceso que viole una de estas condiciones es irreversible. La mayoría de los procesos en la naturaleza son irreversibles. Si queremos conseguir un proceso reversible debemos eliminar las fuerzas disipativas y el proceso sea cuasiestático, en la práctica esto es imposible. Sin embargo nos podemos aproximar mucho a un proceso reversible.

CICLOS TERMODINÁMICOS. MÁQUINAS TERMODINÁMICAS.

Una máquina que realiza esta conversión, lo hace mediante "PROCESOS" que llevan a la sustancia de trabajo nuevamente a su estado original, al conjunto de estos procesos se conoce como "CICLO" una vez completado el ciclo, los procesos se vuelven a repetir.

Una máquina térmica se puede representar en forma idealizada como se muestra en la siguiente figura.



Repitiendo el ciclo se puede obtener cualquier cantidad de trabajo.

Damos la siguiente notación, refiriéndonos a un ciclo completo.

Q_1 = calor absorbido por el sistema del reservorio a θ_1.

Q_2 = calor liberado por el sistema al reservorio a θ_2 Donde $\theta_1 > \theta_2$.

$W = Q_1 - Q_2$ trabajo neto hecho por el sistema.

Eficiencia térmica.

Observe que el enunciado que hemos dado del segundo principio de la termodinámica establece que la máquina térmica perfecta en la que todo calor suministrado se convierte en trabajo sin perder calor, **no existe**. Nos gustaría tenerla, pues no viola la primera ley, pero no se ha obtenido.

Dado que el trabajo neto en el ciclo es lo que obtenemos, y el calor absorbido por la sustancia de trabajo es lo que ponemos. Luego la eficiencia térmica de la máquina está definida por:

Eficiencia térmica $= \dfrac{\text{Trabajo obtenido}}{\text{calor puesto}}$

$$e = \frac{W}{Q_1}$$

Aplicando la primera ley a un ciclo completo.

Como los estados inicial y final son los mismos la energía interna final debe ser igual a la inicial, obteniéndose

$$Q_1 - Q_2 = W$$

de aquí

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Tenga en cuenta que en esta expresión Q_1 y Q_2 deben ser tomados en valor absoluto, como positivos, dado que al haber aplicado la primera ley $(W = Q_1 - Q_2)$ ya se ha considerado su propio signo.

Observe que la eficiencia sería 100% (*e* = 1) si $Q_2 = 0$ es decir sin ceder nada de calor, esto es completamente imposible en la práctica y lo establece el segundo principio que veremos más adelante (e < 1). En cambio, si $Q_2 = Q_1$ se tendrá $e = 0$ y $W = Q_1 - Q_2 = 0$.

Ejemplo 102. Cierta máquina tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, encuentre:

a) el calor absorbido en cada ciclo y

b) el tiempo para cada ciclo.

Solución.

a) $e = \dfrac{W}{Q_1} = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow 0{,}25 = 1 - \dfrac{8000}{Q_1} \Rightarrow$

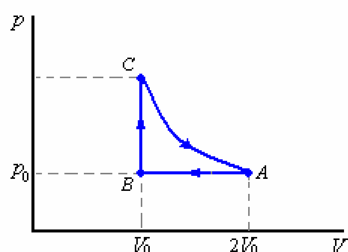
$Q_1 = 10666{,}67 J$

b) $W = eQ_1 = 2666{,}67 J$

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow t = \frac{W}{P} = \frac{2666{,}67}{5000} = 0{,}53 \text{ s}$$

Ejemplo 103. En cierto proceso industrial se somete un gas al siguiente ciclo termodinámico:
1-compresión isobárica hasta la mitad de su volumen inicial,
2-calentamiento isocórico,
3-expansión isotérmica hasta la presión y el volumen inicial.
El control de calidad requiere que la eficiencia del proceso sea mayor al 11%. Determine la eficiencia del ciclo para un gas monoatómico y para un gas diatómico, y en cada caso indique si aprueba o no el control de calidad.

Solución.



1-compresión isobárica hasta la mitad de su volumen inicial,

$$Q_{AB} = C_p(T_B - T_A) = -\frac{C_p}{nR} p_0 V_0$$

2-calentamiento isocórico,

$$Q_{BC} = C_V(T_C - T_B) = C_V(T_A - T_B)$$

Por la ly del gas ideal:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{2p_0 V_0}{nR}$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{p_0 V_0}{nR}$$

Luego

$$Q_{BC} = \frac{C_V}{nR} p_0 V_0$$

3-expansión isotérmica hasta la presión y el volumen iniciales.

$$Q_{CA} = W_{CA} = nRT_A \ln \frac{2V_0}{V_0}, \text{ como}$$

$$T_A = \frac{2p_0 V_0}{nR} \Rightarrow Q_{CA} = 2p_0 V_0 \ln 2$$

De aquí deducimos que:

$$Q_1 = 2p_0 V_0 \ln 2 + \frac{C_V}{nR} p_0 V_0 \text{ y } Q_2 = C_p \frac{p_0 V_0}{nR}$$

La eficiencia del ciclo es:

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_p \dfrac{p_0 V_0}{nR}}{2p_0 V_0 \ln 2 + \dfrac{C_V}{nR} p_0 V_0}$$

$$= 1 - \frac{\dfrac{C_p}{nR}}{2\ln 2 + \dfrac{C_V}{nR}}$$

Si es gas monoatómico

$$C_V = \frac{3}{2} nR \text{ y } C_p = \frac{5}{2} nR$$

$$e = 1 - \frac{\dfrac{5}{2}}{2\ln 2 + \dfrac{3}{2}} = 0{,}1338 = 13{,}38\%$$

Si es gas diatómico

$$C_V = \frac{5}{2} nR \text{ y } C_p = \frac{7}{2} nR$$

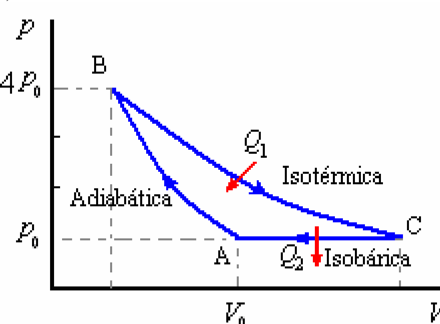
$$e = 1 - \frac{\dfrac{7}{2}}{2\ln 2 + \dfrac{5}{2}} = 0{,}09939 = 9{,}94\%$$

Se aprueba el control de calidad para gas monoatómico.

Ejemplo 104.
Un gas ideal monoatómico se somete a un ciclo termodinámico que consta de 3 procesos:
A $\longrightarrow$ B Compresión adiabática desde (V_0, p_0) hasta cuadriplicar la presión.
B $\longrightarrow$ C Expansión isotérmica hasta la presión inicial.
C $\longrightarrow$ A Compresión isobárica hasta el volumen inicial.
a) Presente un gráfico *p* versus *V* para el ciclo.
b) Determine las variables termodinámicas *p*, y, *T* para cada estado A, B, C.
c) Calcule la eficiencia del ciclo.

Solución:

a)



b)

Estado A: $p_A = p_0$, $T_A = \dfrac{p_A V_A}{nR} = \dfrac{p_0 V_0}{nR}$

Estado B: $p_B = 4p_0$,

$$T_B = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_A = (4)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{p_0 V_0}{nR} = 4^{2/5} \frac{p_0 V_0}{nR}$$

Estado C: $p_C = p_0$, $= T_C = T_B = 4^{2/5} \dfrac{p_0 V_0}{nR}$

c)

Calor en A $\rightarrow$ B: $Q_{AB} = 0$

Calor en B $\rightarrow$ C: $Q_{BC} = nRT_B \ln \dfrac{V_C}{V_B}$

Calculo de V_B : $p_B V_B^\gamma = p_A V_A^\gamma \Rightarrow$

$$V_B = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_A = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{5}} V_0$$

Cálculo de V_C : $\dfrac{V_C}{T_C} = \dfrac{V_A}{T_A} \Rightarrow$

$$V_C = \left(\frac{T_C}{T_A}\right) V_A = 4^{2/5} V_0$$

Luego

$$Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{4^{2/5} V_0}{(1/4)^{3/5} V_0} =$$

$$nR\left(4^{2/5} \frac{p_0 V_0}{nR}\right) \ln\left(4^{2/5} \times 4^{3/5}\right) = 2,41 p_0 V_0$$

Calor en C $\rightarrow$ A:

$$Q_{CA} = C_p (T_A - T_C) = \frac{5}{2} nR\left(\frac{p_A V_A}{nR} - \frac{p_C V_C}{nR}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(p_0 V_0 - 4^{2/5} p_0 V_0\right) = -1,85 p_0 V_0$$

La eficiencia es

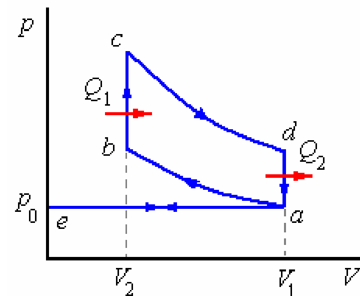
$e = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}$, $Q_1 = 2,41 p_0 V_0$ y $Q_2 = 1,85 p_0 V_0$

Luego:

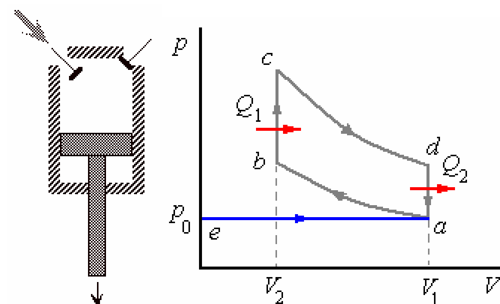
$$e = 1 - \frac{1,85 p_0 V_0}{2,41 p_0 V_0} = 1 - 0,7676 = 0,2324$$

$e = 23,23\%$

CICLO DE OTTO.
El funcionamiento de un motor a gasolina puede idealizarse considerando que la sustancia de trabajo es aire, el cual se comporta como un gas ideal y que no hay fricción. En base a esto el ciclo de Otto está compuesto por seis procesos simples mostrado en el diagrama *p*-*V* de la figura.

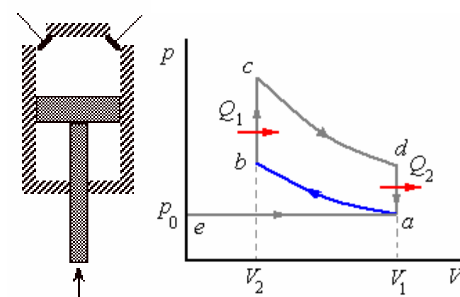


$e \rightarrow a$ Entrada isobárica (presión constante), el volumen varía de cero a V_1 , a1 igual que el número de moles de cero a n , de acuerdo a la ecuación $p_0 V = nRT_a$

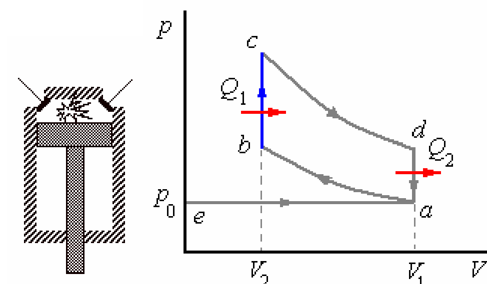


$a \rightarrow b$ Compresión adiabática, de acuerdo a la ecuación

$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}$

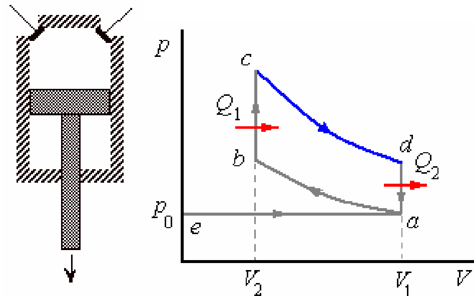


$b \rightarrow c$ Compresión isocórica (volumen constante) la temperatura cambia de T_b a T_c . Este proceso es aproximado a la explosión en el motor de gasolina.

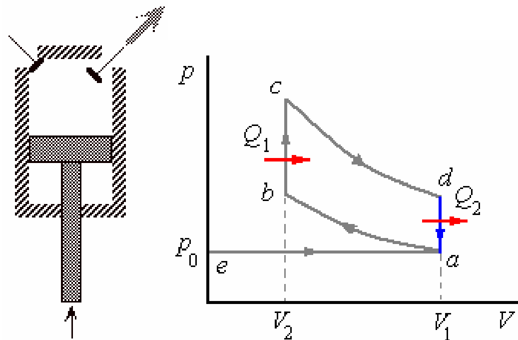


$c \rightarrow d$ Descompresión adiabática de acuerdo a la ecuación.

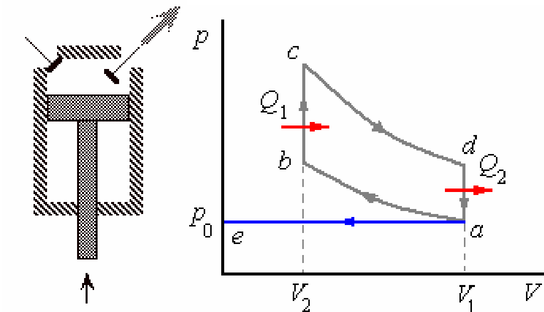
$T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}$



$d \to a$ Descompresión a volumen constante, la temperatura cambia de T_d a T_a. Este proceso es aproximado a la apertura de la válvula en el motor a gasolina.



$a \to e$ Proceso isobárico a presión atmosférica, el volumen varía de V_1 a cero, a temperatura constante.



$$Q_1 = \int_{T_b}^{T_c} C_V dT = C_V (T_c - T_b)$$

El calor liberado Q_2, a volumen constante

$$Q_2 = \int_{T_d}^{T_a} C_V dT = -C_V (T_d - T_a)$$

La eficiencia es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)}$$

De los procesos adiabáticos tenemos

$T_d V_1^{\gamma-1} = T_c V_2^{\gamma-1}$ y $T_a V_1^{\gamma-1} = T_b V_2^{\gamma-1}$

restando

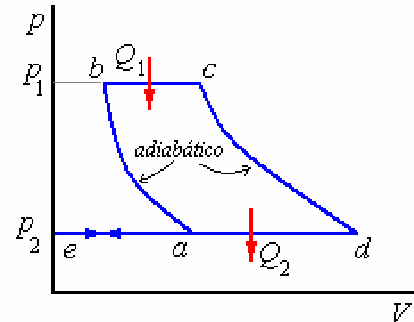
$$(T_d - T_a) V_1^{\gamma-1} = (T_c - T_b) V_2^{\gamma-1}$$

o $$\frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

finalmente

$$e = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

Ejemplo 105. La figura representa un diagrama *p-V* del ciclo Joule de gas ideal, C_p es constante. ¿Cuál es su eficiencia térmica?



Solución.

En este ciclo, el ingreso de calor se produce en el proceso adiabático $b \to c$ y la salida de calor en el proceso isobárico $d \to a$.

Luego $Q_1 = \int_{T_b}^{T_c} C_p dT = C_p (T_c - T_b)$ y

$$Q_2 = \int_{T_d}^{T_a} C_p dT = C_p (T_a - T_d)$$

Luego la eficiencia

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)}$$

Por la trayectoria adiabática $a \to b$:

$$\frac{p_2^{\gamma-1/\gamma}}{T_a} = \frac{p_1^{\gamma-1/\gamma}}{T_b}$$

ó $T_b p_2^{\gamma-1/\gamma} = T_a p_1^{\gamma-1/\gamma}$ (1)

Por la trayectoria adiabática $c \to d$:

$$\frac{p_2^{\gamma-1/\gamma}}{T_d} = \frac{p_1^{\gamma-1/\gamma}}{T_c}$$

ó $T_c p_2^{\gamma-1/\gamma} = T_d p_1^{\gamma-1/\gamma}$ (2)

Restando (1) de (2):

$$(T_c - T_b) p_2^{\gamma-1/\gamma} = (T_d - T_a) p_1^{\gamma-1/\gamma}$$

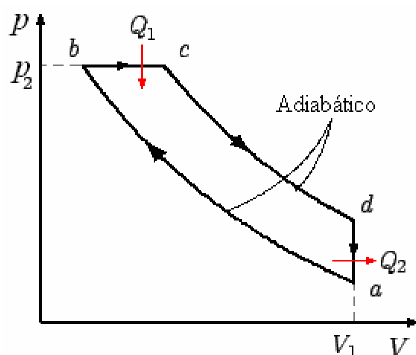
De aquí: $$\frac{(T_d - T_a)}{(T_c - T_b)} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Finalmente: $$e = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

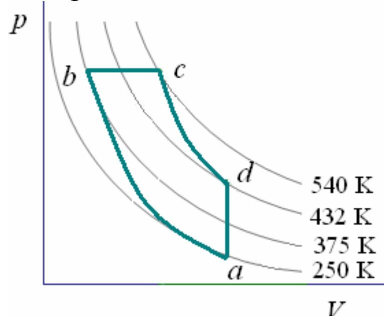
CICLO DIESEL

Este ciclo también se inicia con una compresión adiabática, ocurre la explosión manteniéndose constante la presión, aunque no es necesario introducir una chispa, ya que la combustión se produce de manera espontánea. Nuevamente la etapa

de trabajo se corresponde con una expansión adiabática y finalmente se realiza un enfriamiento isócoro del fluido en el motor.



Ejemplo 106. Un motor diesel opera en el ciclo reversible *abcda*, con 9,0 moles de un gas ideal. Los procesos *ab* y *cd* son adiabáticos. Las temperaturas de los puntos *a*, *b*, *c* y *d* del ciclo son 250 K, 375 K, 540 K, 432 K, respectivamente. La constante adiabática del gas es 1,50.



a) Calcule el calor absorbido durante la expansión isobárica.
b) Calcule el calor rechazado en el proceso de isocórico.
c) Calcule el cambio de energía interna del gas, en la compresión adiabática.
d) Calcule el trabajo realizado por el motor, en la expansión adiabática.
e) Calcule la eficiencia térmica del motor, en porcentaje.
Solución.
a) Cálculo previo de las capacidades caloríficas

$$C_p = C_V + nR \quad \gamma = 1 + \frac{nR}{C_V}$$

$$1{,}5 = 1 + \frac{9{,}0(8{,}31)}{C_V} \quad C_V = \frac{74{,}79}{0{,}5} = 149{,}58 \text{ J/K}$$

$$C_p = 149{,}58 + 74{,}79 = 224{,}37 \text{ J/K}$$

$$C_p = 149{,}58 + 74{,}79 = 224{,}37 \text{ J/K}$$

El calor absorbido (Q_1) durante la expansión isobárica

$$Q_1 = C_p(T_c - T_b) = 224{,}37(540 - 373)$$

$= 37469{,}79$ J = 37 kJ

b) El calor rechazado (Q_2) en el proceso de isocórico

$$Q_2 = C_V(T_d - T_c) = 149{,}58(250 - 432) =$$

27223,56 J = 27 kJ

c) El cambio de energía interna del gas, en la compresión adiabática

$$\Delta U = U_b - U_a = C_V(T_b - T_a)$$

$$= 149{,}58(375 - 250)$$

$= 18697{,}5$ J = 19 kJ

d) El trabajo realizado por el motor, en la expansión adiabática es igual al negativo del cambio de energía interna en el proceso.

$$W = -\Delta U = U_d - U_c = C_V(T_d - T_c)$$

$$= 149{,}58(432 - 540)$$

= - 16154,64 J = - 16 kJ

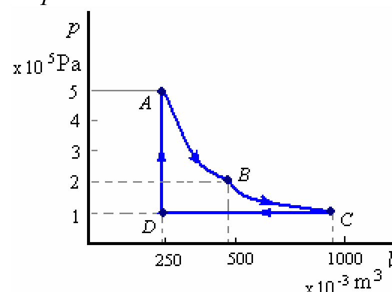
e) La eficiencia térmica del motor.

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \frac{27223{,}56}{37469{,}79} = 1 - 0{,}73 = 0{,}27$$

La eficiencia es el 27 por ciento.

Ejemplo 107. 10 moles de un gas diatómico ($C_v = 5R/2$) se encuentran inicialmente a una presión de $p_A = 5 \times 10^5$ Pa y ocupando un volumen de $V_A = 249 \; 10^{-3}$ m^3. Se expande adiabáticamente (proceso *AB*) hasta ocupar un volumen $V_B = 479 \times 10^{-3}$ m^3. A continuación el gas experimenta una transformación isoterma (proceso *BC*) hasta una presión $p_C = 1 \times 10^5$ Pa. Posteriormente se comprime isobáricamente (proceso *CD*) hasta un volumen $V_D = V_A = 249 \; 10^{-3}$ m^3. Por último, experimenta una transformación a volumen constante (proceso *DA*) que le devuelve al estado inicial.
a) Representar gráficamente este ciclo en un diagrama *p-V*.
b) Calcular el valor de las variables termodinámicas desconocidas en los vértices *A*, *B*, *C* y *D*.
c) Hallar el calor, el trabajo, la variación de energía interna, en Joules, de forma directa y/o empleando el Primer Principio, en cada etapa del ciclo.
d) Calcular el rendimiento.
R= 0,082 atm litro/mol K = 8,314 J/mol K ;
1 cal = 4,186 J; 1atm = 1,013 10^5 Pa
Solución.
a) Representar gráficamente este ciclo en un diagrama *p-V*.



b) Calcular el valor de las variables termodinámicas desconocidas en los vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

$C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$,

$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4$

Vértice A $p_A V_A = nRT_A \Rightarrow$

$T_A = 1447,5$ K

$A \rightarrow B$ $p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma \Rightarrow$

$p_B = 2\times 10^5$ Pa

Vértice B $p_B V_B = nRT_B \Rightarrow$

$T_B = 1152,7$ K

$B \rightarrow C$ $p_B V_B = p_C V_C \Rightarrow$

$$\begin{cases} V_C = 958,3\times 10^{-3} \\ T_C = 1152,7\ \text{K} \end{cases}$$

Vértice D $p_D V_D = nRT_D \Rightarrow$

$T_D = 299,5$ K

c) Hallar el calor, el trabajo, la variación de energía interna, en Joules, de forma directa y/o empleando el Primer Principio, en cada etapa del ciclo.

Proceso $A \rightarrow B$ (adiabático)

$Q = 0$

$\Delta U = nC_V(T_B - T_A) =$

$10\left(\frac{5}{2}8,314\right)(1152,7 - 1447,5) = 71166,7$ J

$$W = \int_{V_A}^{V_B} pdV = \text{cte}\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V^\gamma}$$

$$= \frac{(p_A V_A - p_B V_B)}{\gamma - 1}$$

$$= \frac{(5\times 10^5\times 249\times 10^{-3} - 2\times 10^5\times 479\times 10^{-3})}{1,4-1}$$

= 71750 J

Comprobación, $\Delta U \approx Q - W$

Proceso $B \rightarrow C$ (Isotérmico)

$\Delta = 0$ (no hay cambio de temperatura)

$$W = \int_{V_B}^{V_C} pdV = nRT\int_{V_B}^{V_C}\frac{dV}{V}$$

$$= nRT\ln\frac{V_C}{V_B} = nR(1152,7)\ln\frac{958\times 10^{-3}}{479\times 10^{-3}}$$

= 66458,1 J

$Q = W = 66458,1$ J

Proceso $C \rightarrow D$ (Isobárico)

$\Delta U = nC_V(T_D - T_C)$

$$= 10\left(\frac{5}{2}8,314\right)(299,5 - 1132,7)$$

= - 177337,6 J

$Q = nC_p(T_D - T_C)$

$$= 10\left(\frac{7}{2}8,314\right)(299,5 - 1132,7)$$

= - 248272,7 J

$W = p(V_D - V_C)$

$$= 10^5(249\times 10^{-3} - 958\times 10^{-3})$$

= - 70930 J

Comprobación, $\Delta U \approx Q - W$

Proceso $D \rightarrow A$ (Isocórico)

$W = 0$ no hay cambio de volumen

$Q = nC_V(T_A - T_D)$

$$= 10\left(\frac{5}{2}8,314\right)(1447,5 - 299,5)$$

= 249004,3 J

$\Delta U = Q$ = 249004,3 J

En el ciclo completo

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ W = 67278,1\ \text{J} \\ Q_{absorbido} = 315462,4\ \text{J}\ (+) \\ Q_{cedido} = 248272,7\ \text{J}\ (-) \end{cases}$$

Podemos ver que $W \approx Q_{abs} + Q_{ced}$

	ΔU (J)	Q (J)	W (J)
$A \rightarrow B$	- 71666,7	0	71750
$B \rightarrow C$	0	66438,1	66458,1
$C \rightarrow D$	- 177337,6	-248272,7	-70930
$D \rightarrow A$	249004,3	249004,3	0
	0		67278,1

d) Calcular el rendimiento.

$$e = \frac{W}{Q_{abs}} = 0,21 = 21\%$$

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA.

La experiencia nos dice que a pesar de que es muy fácil convertir energía mecánica completamente en energía térmica (como en la fricción), hay muchas restricciones para efectuar La transformación inversa. La única forma en que somos capaces de efectuar la transformación continua de energía térmica en energía mecánica es teniendo "reservorios de calor" a dos temperaturas diferentes, e interactuando entre ellas una máquina que transforme una parte del calor que fluye del reservorio caliente al frío en trabajo (máquina térmica) . El segundo principio de la termodinámica: se refiere a este hecho y se establece cualitativamente como sigue:

"Es imposible construir una máquina de funcionamiento continuo que produzca trabajo mecánico derivado de la extracción de calor de un

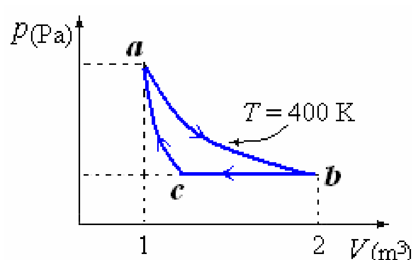
reservorio simple, sin dar calor, a un reservorio a temperatura más baja”

En resumen, la segunda ley establece los procesos que sin violar la primera ley no ocurren en la naturaleza. La primera Ley establece simplemente la conservación de energía.

Reservorio de calor. Se define como un cuerpo de masa tal que es capaz de absorber o liberar calor en cantidad ilimitada sin sufrir apreciable cambio de su estado, temperatura u otra variable termodinámica.

Ejemplo 108. Una mol de un gas monoatómico se lleva por un ciclo ***abca*** como se muestra en la figura. El proceso $a \rightarrow b$ es un proceso isotérmico a 400 K y el proceso $c \rightarrow a$ es un proceso adiabático.

a) Hallar la presión, el volumen y la temperatura para los puntos ***a***, ***b*** y ***c***.
b) Hallar el trabajo total en el ciclo.
c) Hallar los calores en cada uno de los procesos (Q_{ab}, Q_{bc} y Q_{ca}).
d) Hallar la eficiencia del ciclo.



Solución.
a) Cálculo de las presiones:

$p_a V_a = p_b V_b = nRT$ = 1 x 8,31 x 400

$$p_a = \frac{3324}{1} = 3324\frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$p_b = \frac{3324}{2} = 1662\frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$p_c = p_a = 1662\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Cálculo de los volúmenes:

$V_a = 1\text{m}^3$, $V_b = 2\text{m}^3$,

Como $p_a V_a^{\gamma} = p_b V_b^{\gamma}$,

con $\gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$$3324(1)^{5/3} = 1662(V_c)^{5/3}$$

$$\therefore V_c = (2)^{3/5} = 1{,}51\text{m}^3$$

Cálculo de las temperaturas:

$T_a = T_b$, = 400 K,

Como $p_c V_c = nRT_c \Rightarrow$

$$T_c = \frac{p_c V_c}{nR} = \frac{1662 \times 1{,}51}{1 \times 8{,}31} = 302 \text{ K}$$

	p (N/m^2)	V (m^3)	T (K)
a	3324	1	400
b	1662	2	400
c	1662	1,51	302

b)

$$W_{ab} = nRT\ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$$

$$= (8{,}31)(400)\ln 2 = 2304 \text{ J}$$

$$W_{bc} = p(V_c - V_b)$$

$$= (1662)(1{,}51 - 2) = -814 \text{ J}$$

$$W_{ca} = -\Delta U = -nC_V\Delta T = -1222 \text{ J}$$

W_{Total} = 268 J

c)

$Q_{ab} = W_{ab}$ = 2304 J

$Q_{bc} = nC_p\Delta T$ = - 2036 J

$Q_{ca} = 0$

e) $e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{2036}{2304} = 0{,}11$

Ejemplo 109. Una maquina tiene una potencia de salida de 2 kW, si su eficiencia es del 40% y cede un calor de 3000 calorías por ciclo.
a) Determine el trabajo realizado por ciclo.
b) El tiempo de duración de cada ciclo.

Solución.
a) Determine el trabajo realizado por ciclo.

$e = 40\%$, Q_2 = 3000 calorías

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{W}{Q_1}$$

$$Q_1 = \frac{Q_2}{1-e} = \frac{3000}{0{,}6} = 5000 \text{ calorías}$$

Y el trabajo es:

$W = Q_1 - Q_2$ = 5000 – 3000 = 2000 calorías.

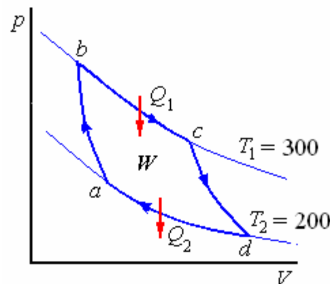
b) 1 cal = 4,186 Joules
Como la potencia es 2000 J/s
2000 J (1 caloría/4,186 J) = 477,78 calorías
El tiempo de duración de cada ciclo es:

$$t = \frac{2000}{477{,}78} = 4{,}2 \text{ s}$$

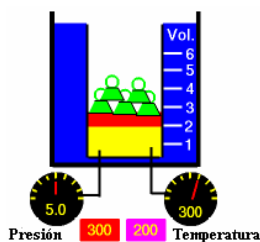
EL CICLO CARNOT

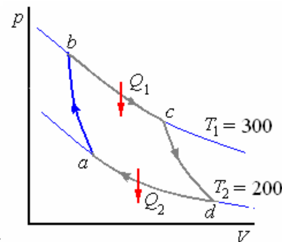
Vamos a estudiar ahora una máquina térmica altamente idealizada conocida como la máquina de Carnot. Nos muestra como es posible obtener trabajo por medio de una sustancia de trabajo que es llevada a través de un proceso cíclico y también nos permitirá establecer la escala absoluta termodinámica de temperatura.

Un ciclo de Carnot es un conjunto de procesos, la sustancia de trabajo se imagina primero en equilibrio térmico con un reservorio frío a la temperatura T_2. Se realiza cuatro procesos, por ejemplo sobre un gas, como se muestra en el diagrama *p-V* de la figura..

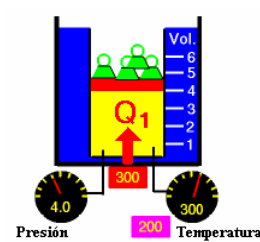


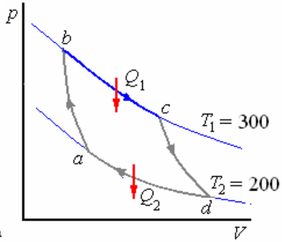
$a \rightarrow b$ Compresión adiabática reversible hasta que la temperatura se eleve a T_1.



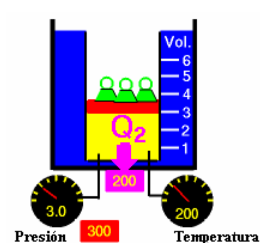


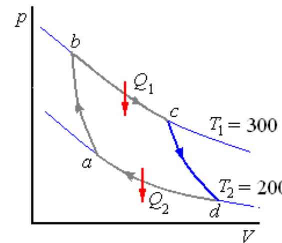
$b \rightarrow c$ Expansión isotérmica reversible hasta un punto c.



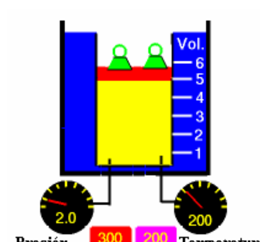


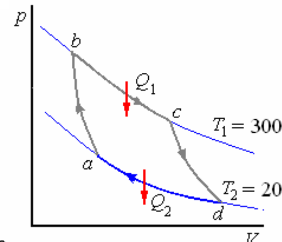
$c \rightarrow d$ Expansión adiabática reversible hasta que la temperatura baje a T_2.





$d \rightarrow a$ Compresión isotérmica reversible hasta que se alcanza el estado original.





En este ciclo se tendrá:

$\Delta U = 0$

(Por ser un ciclo en que estado final = estado inicial)

$W = Q_2 - Q_2 = \Delta Q$ (Calor total absorbido por el sistema enunciado)

W = Trabajo neto entregado

Durante la expansión isotérmica $b \rightarrow c$ ingresa calor Q_1.

Como la energía interna de un gas ideal depende solo de su temperatura

$$Q_1 = W_1 = \int_{V_b}^{V_c} pdV = RT_1 \int_{V_b}^{V_c} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_c}{V_b}$$

Del mismo modo durante la comprensión isotérmica $d \rightarrow a$ en que se realiza calor Q_2.

$$Q_2 = W_2 = \int_{V_d}^{Va} pdV = RT_2 \int_{V_d}^{V_a} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \frac{V_a}{V_d}$$

Siendo $V_d > V_a$ $\ln \frac{V_a}{V_d}$ es una cantidad negativa, como debemos de poner como cantidad positiva escribimos $Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_d}{V_a}$

En la expansión adiabática $e \rightarrow d$

$$T_1 V_c^{\gamma - 1} = T_2 V_d^{\gamma - 1} \Rightarrow \left(\frac{V_d}{V_c} \right)^{\gamma - 1} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1)$$

En la comprensión adiabática $a \rightarrow b$

$$T_2 V_a^{\gamma - 1} = T_1 V_b^{\gamma - 1} \Rightarrow \left(\frac{V_a}{V_b} \right)^{\gamma - 1} = \frac{T_1}{T_2} \quad (2)$$

de (1) y (2)

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{V_d}{V_c} \Rightarrow \frac{V_d}{V_a} = \frac{V_c}{V_b} \quad (3)$$

Entonces $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{T_2 \ln \frac{V_d}{V_a}}{T_1 \ln \frac{V_c}{V_b}} = \dfrac{T_2}{T_1}$

La relación entre las temperaturas absolutas de reservorios de calor en los que trabaja la máquina de Carnot tiene la misma relación que los calores rechazado y absorbido.

La eficiencia térmica es

$$e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

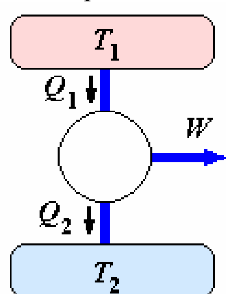
Reemplazando $\dfrac{Q_2}{Q_1}$ por su valor, obtenemos:

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

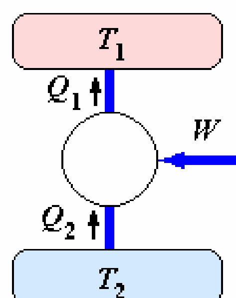
Para que una máquina Carnot tenga una eficiencia de 100 por ciento es claro que e debería ser cero. Como en la práctica no es posible tener $e = 1$, es imposible obtener el cero absoluto de temperatura. Estos resultados que se han obtenido usando un gas ideal como sustancia de trabajo, sin embargo, son independientes de este hecho y en general la eficiencia de una máquina térmica reversible es independiente del material usado como sistema, dependiendo únicamente de las temperaturas de los reservorios.

MOTOR Y REFRIGERADOR

Un motor de Carnot es un dispositivo ideal que describe un ciclo de Carnot. Trabaja entre dos focos, tomando calor Q_1 del foco caliente a la temperatura T_1, produciendo un trabajo W, y cediendo un calor Q_2 al foco frío a la temperatura T_2.
En un motor real, el foco caliente está representado por la caldera de vapor que suministra el calor, el sistema cilindro-émbolo produce el trabajo, y se cede calor al foco frío que es la atmósfera.



La máquina de Carnot también puede funcionar en sentido inverso, denominándose entonces refrigerador o frigorífico. Se extraería calor Q_2 del foco frío aplicando un trabajo W, y cedería Q_1 al foco caliente.
En un refrigerador real, el motor conectado a la red eléctrica produce un trabajo que se emplea en extraer un calor del foco frío (la cavidad del refrigerador) y se cede calor al foco caliente, que es la atmósfera



La segunda Ley establecería que no existe el Refrigerador perfecto. No es posible transportar calor de un cuerpo a otro de más alta temperatura, sin efectuar trabajo sobre el sistema. También, nos gustaría tenerla, puesto viola la primera Ley, pero tampoco se ha obtenido nunca.
Coeficiente de rendimiento de un refrigerador:

$$\eta = \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q_2}{W}$$

Ejemplo 110. La eficiencia de una máquina de Carnot es de 30%. La maquina absorbe 800 J de calor por ciclo de una fuente caliente a 500 K. Determine
a) el calor liberado por ciclo y
b) la temperatura de la fuente fría.
Solución.
$T_2 = 500$ K
$Q_2 = 800$ J
$e = 0,3$

a) $e = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

$$0,3 = 1 - \frac{Q_2}{800} \Rightarrow Q_2 = 560 \text{ J}$$

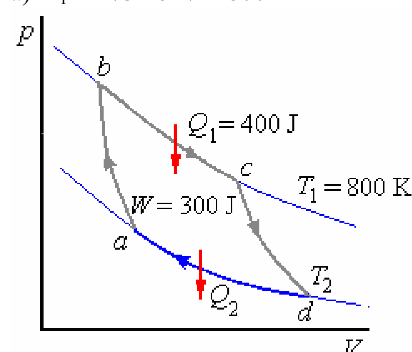
b) $e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$0,3 = 1 - \frac{T_2}{500} \Rightarrow T_2 = 350 \text{ K}$$

Ejemplo 111. Una máquina de Carnot opera con 2 moles de un gas ideal. En el proceso cíclico, la temperatura máxima que alcanza el gas es de 527°C y la presión máxima es de 5 atm. En un ciclo, el calor suministrado es de 400 J y el trabajo realizado por dicha máquina es de 300 J.
a) Calcular la temperatura del depósito frío y la eficiencia porcentual.
b) Si empleando únicamente el calor expulsado por la máquina se logra derretir totalmente un bloque de hielo de 10 kg a 0°C, ¿Durante cuántos ciclos debe operar esta máquina?

$$c_{fusión\ agua} = 334 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

c) ¿Cual debería ser la temperatura del depósito caliente sin modificar la del depósito frío para elevar la eficiencia hasta el 80%?
Solución.
a) $T_1 = 273 + 527 = 800$ K



$$W = Q_1 - Q_2 \Rightarrow$$

$Q_2 = Q_1 - W$ = 400 – 300 = 100 J

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \frac{Q_2}{Q_1} = 800 \frac{100}{400} = 200 \text{ K}$$

T_2 = 200 - 273 = - 73 ºC

La eficiencia es:

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{200}{800} = 0{,}75 = 75\ \%$$

b) Para derretir los 10 kg de hielo se necesitan 10 (334x10^3) = 334x10^4 J

Si en cada ciclo el calor expulsado por la máquina es 100 J

Esta máquina debe operar

$$\frac{334 \times 10^4}{100} = 33400 \text{ ciclos.}$$

c) ¿Cual debería ser la temperatura del depósito caliente sin modificar la del depósito frío para elevar la eficiencia hasta el 80%?

$$e' = 1 - \frac{T_2}{T'_1} \Rightarrow$$

$$T'_1 = \frac{T_2}{1 - e'} = \frac{200}{1 - 0{,}8} = \frac{200}{0{,}2} = 1000 \text{ K}$$

t'_1 = 1000 – 273 = 727 ºC.

Ejemplo 112. Se ha propuesto una planta de potencia que haga uso del gradiente de temperatura en el océano. El sistema se diseñó para operar entre 20 ºC (temperatura de la superficie del agua) y 5 ºC (temperatura del agua a una profundidad de casi 1 km).

a) ¿Cuál es la máxima eficiencia de dicho sistema?

b) Si la potencia de salida de la planta es de 7,5 MW, ¿cuánta energía térmica se absorbe por hora?

c) En vista de los resultados de la parte (a), ¿piensa que se deba tomar en cuenta dicho sistema?

Solución.

t_1 = 5 ºC, T_1 = 278,15K

t_2 = 20 ºC, T_2 = 293,15 K

P = 7,5 MW

a) $e = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{278{,}15}{293{,}15} = 0{,}051 = 51\%$

b) $e = \frac{W}{Q_1} = \frac{P}{P_1} \Rightarrow P_1 = \frac{P}{e}$

o sea la potencia absorbida será

$$P_2 = \frac{7{,}5}{0{,}051} = 147 \text{ MW}$$

En una hora

Q_2 = 147 x 3600 x 10^6 J = 5,292 x 10^{11} J

c) Se recomienda que no.

Ejemplo 113. Un aparato de aire acondicionado absorbe calor de su embobinado de enfriamiento a 13 ºC y libera calor al exterior a 30 ºC.

a) ¿Cuál es el máximo rendimiento del aparato?

b) Si el rendimiento real es de la tercera parte del valor máximo y si el aparato remueve 8 x 10^4 J de energía calórica cada segundo, ¿qué potencia debe desarrollar su motor?

Solución.

Q_1 calor transferido a la fuente caliente

Q_2 calor absorbido de la fuente fría

W trabajo gastado por la bomba

$$\eta = \frac{Q_2}{W}$$

a) Si el refrigerador es una máquina de Carnot funcionando a la inversa

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{273{,}15 + 13}{273{,}15 + 30} = 0{,}943922$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{273{,}15 + 30}{273{,}15 + 13} = 1{,}06$$

entonces

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{\frac{Q_1}{Q_2} - 1} = 16{,}7$$

b) Si $\eta_{real} = \frac{16{,}7}{3} = 5{,}56$ y P_1 = 8 x 10^4 J / s,

entonces.

$$\eta_{real} = \frac{Q_2}{W} = \frac{P_2}{P_1 - P_2} \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta_{real}} + P_2$$

$$P_1 = P_2\left(\frac{1}{\eta_{real}} + 1\right) = 8 \times 10^4 \left(\frac{5{,}56 + 1}{5{,}56}\right)$$

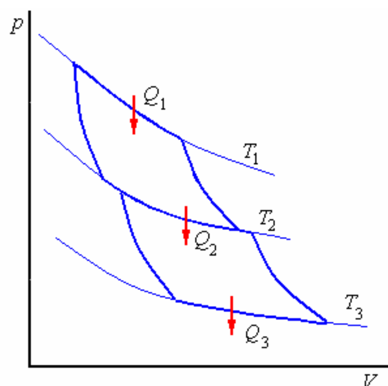
= 8x10^4 (1,18) = 9,44x10^4 W.

Ejemplo 114. Se dan dos máquinas de Carnot acopladas, la máquina A opera entre los reservorios T_1 = 1000 K y T_2 = 800 K y la máquina B entre T_2 = 800 K y T_3 = 400 K. Sabiendo que el reservorio T_1 suministra 1500 Joules de calor al sistema, calcular:

a) La eficiencia de cada máquina y del sistema.

b) El trabajo de cada máquina y el total del sistema.

Solución.



a) $e_A = 1 - \dfrac{T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{800}{1000} = 20\ \%$

$e_B = 1 - \dfrac{T_3}{T_2} = 1 - \dfrac{400}{800} = 50\ \%$

Eficiencia del sistema

$e_S = 1 - \dfrac{T_3}{T_1} = 1 - \dfrac{400}{1000} = 60\ \%$

b) Cálculo de W_A

$\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{T_2}{T_1} \Rightarrow$

$Q_2 = \dfrac{T_2}{T_1} Q_1 = \dfrac{800}{1000}(1500) = 1200\ \text{J}$

Luego $W_A = Q_1 - Q_2 = 1500 - 1200 = 300\ \text{J}$

Cálculo de W_B

$\dfrac{Q_3}{Q_2} = \dfrac{T_3}{T_2} \Rightarrow$

$Q_3 = \dfrac{T_3}{T_2} Q_2 = \dfrac{400}{800}(1200) = 600\ \text{J}$

Luego $W_B = Q_2 - Q_3 = 1200 - 600 = 600\ \text{J}$

y el trabajo total del sistema

$W_S = Q_1 - Q_3 = 1500 - 600 = 900\ \text{J}$

Nota: observe que:

$W_S = W_A + W_B$ y $e_S \neq e_A + e_B$

Ejemplo 115. Una casa cerca de un lago se calefacciona mediante una motor térmico. En invierno, el agua debajo del hielo que cubre el lago se bombea por medio del motor térmico. Se extrae el calor hasta que el agua está en el punto de congelar cuando se expulsa. El aire exterior se utiliza como enfriador. Asuma que temperatura del aire es -15°C y la temperatura del agua del lago es 2°C. Calcule la razón en la cual el agua se debe bombear al motor. La eficiencia del motor es un quinto que el de un motor de Carnot y la casa requiere 10 kilovatios.

Solución.

La eficiencia de un motor Carnot es $[1 - (T_1/T_2)]$.

Para éste problema,

$$e = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{1}{5}\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)$$

El calor se toma del agua del lago mientras que se enfría de 2°C a 0°C antes de la eyección. La temperatura media del reservorio caliente es 274 K. Si m es la masa del agua que fluye en el tiempo t, el calor tomado adentro del reservorio caliente por unidad de tiempo es $Q_2/t = (m/t)c$ x 2°C, donde c está la capacidad específica de calor del agua.

El calor que sale al aire como reservorio frío a una temperatura de -15°C = 258 K, por la cantidad infinita de aire disponible se asume que la temperatura permanece constante.

Además, el trabajo realizado (Q_2 - Q_1) es 10 kilovatio = 104 J/ s. Así, de la primera ecuación, tenemos

$$\frac{10^4\ \text{J/s}}{\left(m/t\right)\left(4{,}18\text{J/g}^\circ\text{C}\right)\left(2^\circ C\right)} = \frac{1}{5}\frac{(274 - 258)\text{K}}{274\text{K}}$$

$$\therefore\ \frac{m}{t} = \frac{5 \times 274 \times 10^4}{2 \times 4{,}18 \times 16}\frac{\text{g}}{\text{s}} = 102{,}4 \times 10^3\ \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

La razón del flujo de agua necesario es 102,4 litros/s

Ejemplo 116. Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30%. Para cada ciclo de operación,

a) ¿cuánto calor se absorbe?, y

b) ¿cuánto calor se libera?

Solución.

Q_1 calor absorbido de la fuente caliente

Q_2 calor cedido a la fuente fría

W = 200 J

$e = \dfrac{W}{Q_1} = 0{,}3$

entonces

a) $Q_1 = \dfrac{200}{0.3} = 666{,}7\ \text{J}$

b) $Q_2 = Q_1 - W = 666{,}7 - 200 = 466{,}7\ \text{J}$

Ejemplo 117. En un determinado refrigerador las serpentinas de baja temperatura están a -10°C y el gas comprimido en el condensador tiene una temperatura de + 30°C. Considerando que trabaja con el ciclo Carnot. ¿Cuál es su rendimiento teórico?

Solución.

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1}{\dfrac{Q_1}{Q_2} - 1} = \frac{1}{\dfrac{T_1}{T_2} - 1}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{303}{263} - 1} = \frac{263}{40} = 6{,}58$$

Ejemplo 118. Una máquina térmica absorbe 360 J de calor y realiza un trabajo de 25 J en cada ciclo. Encuentre:
a) la eficiencia de la máquina y
b) el calor liberado en cada ciclo.
Solución.
$Q_1 = 360$ J
$W = 25$ J
a) $e = \dfrac{W}{Q_1} = \dfrac{25}{360} = 0{,}069 = 6{,}9\%$
b) $Q_{Liberado} = Q_1 - W = 335$ J

Ejemplo 119. Una máquina térmica realiza 200 J de trabajo en cada ciclo y tiene una eficiencia de 30%. Para cada ciclo de operación,
a) ¿cuánto calor se absorbe?, y
b) ¿cuánto calor se libera?
Solución.
Q_1 calor absorbido de la fuente caliente
Q_2 calor cedido a la fuente fría
$W = 200$ J
$e = \dfrac{W}{Q_1} = 0{,}3$
Entonces
a) $Q_1 = \dfrac{200}{0{,}3} = 666{,}7$ J
b) $Q_2 = Q_1 - W = 666{,}7 - 200 = 466{,}7$ J

Ejemplo 120. Un refrigerador tiene un coeficiente de operación igual a 5. Sí el refrigerador absorbe 120 J de calor de una fuente fría en cada ciclo, encuentre:
a) el trabajo hecho en cada ciclo y
b) el calor liberado hacia la fuente caliente.
Solución.
$\eta = 5$
$Q_1 = 120$ J
a) $\eta = \dfrac{Q_1}{W} = \dfrac{W + Q_2}{W}$
De donde $5 = \dfrac{W + 120}{W} \Rightarrow W = 30$ J
b) $Q_2 = W + Q_1 = 30 + 120 = 150$ J

Ejemplo 121. Cierta máquina tiene una potencia de salida de 5 kW y una eficiencia de 25%. Si la máquina libera 8000 J de calor en cada ciclo, encuentre:
a) el calor absorbido en cada ciclo y
b) el tiempo para cada ciclo.
Solución.
P = potencia = 5 kW = 5 x 10^3W
$e = 25\ \% = 0{,}25$
$Q_1 = 8000$ J
Si t es el tiempo de un ciclo

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{W}{W + Q_1} = \frac{Pt}{Pt + Q_1}$$

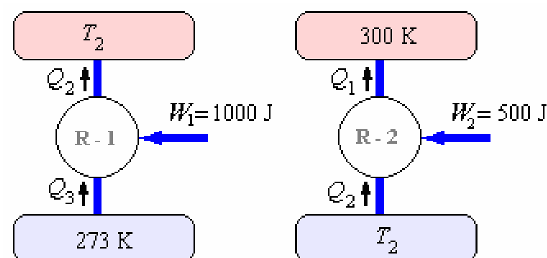
o bien

$$0{,}25 = \frac{5\times10^2 t}{5\times10^2 t + 8000}$$

De donde se obtiene $t = 0{,}53$ s el tiempo para cada ciclo.
El calor absorbido en cada ciclo será
$Q_1 = 5\times10^2 t + 8000$
$= 5\times10^2(0{,}53) + 8000 = 1{,}065 \text{ x } 10^4$ J

Ejemplo 122. El calor absorbido por una máquina es el triple del trabajo que realiza.
a) ¿Cuál es su eficiencia térmica?
b) ¿Qué fracción del calor absorbido se libera a la fuente fría?
Solución.
$Q_1 = 3W$
a) $e = \dfrac{W}{Q_1} = \dfrac{1}{3} = 0{,}33 = 33\%$
b) $Q_2 = Q_1 - W = Q_1 - \dfrac{Q_1}{3} = \dfrac{2}{3}Q_1$
Fracción del calor absorbido que se libera:
$\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{2}{3} = 0{,}66$

Ejemplo 123. Dos máquinas frigoríficas de Carnot trabajan en serie la primera extrae calor de una fuente a 0°C y consume 1000 J. La segunda maquina consume 500 J. y entrega calor a una fuente a 27ºC Considere que el calor que la primera cede a una fuente intermedia es íntegramente absorbido por la segunda.
a) ¿Cuál es el calor que la primera maquina extrae?
b) ¿Cuál es la temperatura de la fuente intermedia?
c) ¿Qué calor intercambian las máquinas con la fuente de temperatura intermedia?
Solución.



a) Para el conjunto

$$\eta = -\frac{Q_3}{Q_3 - Q_1} = -\frac{Q_3}{W_1 + W_2} = -\frac{1}{1-\frac{Q_1}{Q_3}} = -\frac{1}{1-\frac{T_1}{T_3}}$$

$$\Rightarrow -\frac{Q_3}{-(1000+500)} = -\frac{1}{1-\frac{300}{273}}$$

$$Q_3 = \frac{1500\times 273}{27} = 15166{,}7 \text{ J}$$

b) Para R – 1

$$\eta_1 = -\frac{Q_3}{Q_3 - Q_2} = -\frac{Q_3}{W_1} = -\frac{1}{1-\frac{Q_2}{Q_3}} = -\frac{1}{1-\frac{T_2}{T_3}}$$

$$\Rightarrow -\frac{15166{,}7}{-1000} = -\frac{1}{1-\frac{T_2}{273}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{273} - 1 = 0{,}066 \Rightarrow T_2 = 290{,}1 \text{ K}$$

c) Q_3 = 15166,7 J,

$Q_2 = Q_3 - W_1$ = 15166,7 – (-1000) = 16166,7 J

ENTROPIA

Recordemos para el ciclo reversible de Carnot,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ o } \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Es posible aproximar cualquier ciclo reversible por una serie de ciclos de Carnot, y éste nos conduce a la conclusión que

$\oint \frac{dQ}{T} = 0$ para un ciclo reversible.

Esto recuerda a las fuerzas conservativas, donde

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$ para una trayectoria cerrada. Que nos llevó a definir la energía potencial U donde

$U_B - U_A = \int_A^B \vec{F}.d\vec{s}$. En este caso un estado del sistema fue caracterizado por un valor definido de U, la energía potencial. De la misma manera, definimos una nueva variable del estado, la entropía S, tal que

$$dS = \frac{dQ}{T} \text{ y } S_{(B)} - S_{(A)} = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

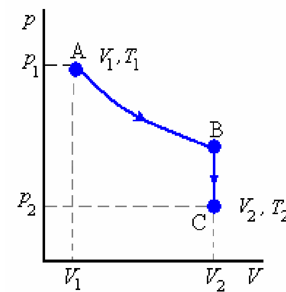
Note que aunque un valor definido de Q no caracteriza un estado (es decir, un punto en un diagrama p V), cada punto en el diagrama p V tiene un valor definido de S. Es curioso que aunque el flujo del calor en un sistema depende de la trayectoria seguida entre los dos estados, el cambio en S es independiente de la trayectoria. Decimos que dQ es un diferencial inexacto, y dS es un diferencial exacto.

La ecuación anterior es cierta para un ciclo reversible. Uno puede razonar que $\oint (dQ/T) > 0$ para un ciclo irreversible. Además, es posible ampliar este razonamiento a cualquier proceso que lleve un sistema del estado A al estado B, con el resultado que. $\Delta S = S_{(B)} - S_{(A)} = \oint (dQ/T)$.

Para un sistema aislado, esto se convierte $\Delta S = 0$ para un ciclo reversible y $\Delta S > 0$ para un ciclo irreversible.

Esto significa que la entropía de un sistema aislado sigue siendo constante o aumenta. Puesto que los procesos verdaderos son todos irreversibles, esto significa que la entropía del universo aumenta siempre en cada proceso.

Ejemplo 124. Calcular el cambio en la entropía para un gas ideal siguiendo un proceso en el cual lo lleve de p_1, T_1, V_1 a p_2, T_2, V_2 según se muestra en la figura.



Solución.

No importa qué trayectoria siga, el cambio de la entropía será igual puesto que S es una función del estado. Para simplificar el cálculo, elegiremos la trayectoria reversible mostrada, primero viajando a lo largo de una trayectoria isotérmica, y luego a lo largo de una trayectoria a volumen constante. A lo largo de la isoterma la temperatura no cambia, por lo tanto no hay cambio en energía interna.

$(U = nC_V T)$

Así $dQ = dW$ para este proceso, y

$$S_{(B)} - S_{(A)} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dW}{T_1}$$

$pV = nRT$, tal que $S_{(B)} - S_{(A)} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRTdV_1}{VT_1}$

$$S_{(B)} - S_{(A)} = nR\ln\frac{V_1}{V_2}$$

Para $B \rightarrow C$, no se realiza trabajo, luego

$dQ = dU = nC_V dT$:

$$S_{(C)} - S_{(B)} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dQ}{T} = nC_V \ln\frac{T_2}{T_1}$$

El cambio total de la entropía es

$\Delta S = S_{(B)} - S_{(A)} + S_{(C)} - S_{(B)}$:

$\Delta S = S(p_2, V_2, T_2) - S(p_1, V_1, T_1)$

$$= nC_V \ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Ejemplo 125. Un kilogramo de agua a temperatura de 280 K se mezcla con 2 kilogramos de agua a 310 K en un recipiente aislado térmicamente. Determine el cambio en la entropía del Universo.
Solución.
Aquí, un proceso de mezclado

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln\frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln\frac{T_f}{T_2}$$

donde (por calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

siendo
$m_1 = 1000$ g
$T_1 = 280 + 273{,}15 = 553{,}15$K
$m_2 = 2000$ g
$T_2 = 310 + 273{,}15 = 583{,}15$K
entonces

$$T_f = \frac{553{,}15 + 2\times 583{,}15}{3} = 573{,}15 \text{ K}$$

y $\Delta S = 1000\ln\frac{573{,}15}{553{,}15} + 2000\ln\frac{573{,}15}{583{,}15}$

$$= 0{,}92\frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

Ejemplo 122. Una masa *m* de líquido a temperatura T_1 se mezcla con una igual cantidad del mismo líquido a temperatura T_2 en un recipiente aislado térmicamente. Demuestre que el cambio de entropía del Universo es $2mc_p \ln\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$ y pruebe que es necesariamente positivo.
Solución.
El cambio de entropía del Universo será el cambio de entropía de la mezcla, es decir

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln\frac{T_f}{T_1} + m_2 c_2 \ln\frac{T_f}{T_2}$$

donde (calorimetría) se tiene que

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

pero $m_1 = m_2 = m$ y $c_1 = c_2 = c$ por lo cual resulta

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Y

$$\Delta S = mc\ln\frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 2mc\ln\frac{T_f}{\sqrt{T_1 T_2}} =$$

$$2mc\ln\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$$

Para probar que es positivo, debemos demostrar que en general

$$\frac{x + y}{2\sqrt{xy}} > 1$$

y esto se deduce de

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 > 0 \Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} > 0 \Rightarrow$$

$$x + y > 2\sqrt{xy}$$

Finalmente: $\frac{x + y}{2\sqrt{xy}} > 1$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un termómetro de gas a volumen constante se calibra en hielo seco (dióxido de carbono en estado sólido, temperatura de -80 ºC) y en alcohol etílico en ebullición (temperatura de 78 ºC).
Los valores de las presiones son 0,9 atm y 1,635 atm, respectivamente.
Determine:
a) El valor del cero absoluto obtenido de la calibración;
b) El valor de la presión en el punto de congelación del agua;
c) El valor de la presión en el punto de ebullición del agua.

2. En un termómetro de resistencia la propiedad usada para medir a temperatura es la resistencia eléctrica de un conductor. Las temperaturas medidas por este termómetro (en Kelvin o en grados Celsius) pueden ser directamente relacionadas con la resistencia *R*, medida en ohms. Un cierto termómetro de resistencia tiene una resistencia *R* = 90,35 cuando su bulbo se coloca en agua, a temperatura del punto triple (273,16 K). Determine a temperatura indicada por el termómetro cuando su bulbo se coloca en un medio tal que a su resistencia sea igual a:
a) 105, b) 96,28 .

3. Un recipiente de vidrio está lleno hasta el borde de mercurio a la temperatura de 0º y masa 1 kg. El recipiente vacío tiene una masa de 0,1 kg. Calcular la cantidad de mercurio a 100 ºC que puede contener este recipiente. El coeficiente de dilatación cúbica del mercurio es $1{,}8\text{x}10^{-4}$ ºC^{-1} y el del vidrio $3\text{x}10^{-5}$ ºC^{-1}.
$\rho_{Hg} = 13{,}6$ g/cm^3 a 0 ºC.
Respuesta. 887 g de Hg.

4. Un vástago de latón AB tiene una longitud de 200,1 mm y ha de encajarse exactamente en el hueco BC, de hierro que tiene la forma del esquema. Al intentarlo queda AB como se indica en la figura, siendo AC = 4 mm. Calcular el descenso de la temperatura para lograr el encaje. Los coeficientes de dilatación del latón y del hierro valen respectivamente,
$\alpha = 19,9\ x10\ ºC^{-1}$ y $\alpha' = 12,1x10^{-6}\ ºC^{-1}$.



Respuesta. 25,6 ºC.

5. Un anillo de latón de varios centímetros de diámetro se calienta hasta la temperatura t_1 = 300 ºC y se encaja ajustadamente sobre un cilindro de acero cuya temperatura es t_2 = 18 ºC. ¿Qué esfuerzo de rotura experimentará el anillo una vez enfriado hasta 18 ºC? El coeficiente de dilatación lineal del latón es $\alpha = 1,84x10\text{-}5\ ºC^{-1}$ y su módulo de Young $Y = 6,47x10^{10}\ Nm^{-2}$. Las dimensiones de la sección del anillo son 2x5 mm.
Respuesta. 3,364 N.

6. Con una regla métrica de latón cuyas dimensiones son exactas a 0 ºC, se ha medido la longitud de una barra de hierro, encontrándose ℓ = 1,4996 m a 38 ºC. Siendo $\alpha = 12,1x10^{-6}\ ºC^{-1}$ el coeficiente de dilatación lineal del hierro y $\beta = 19,9x10^{-6}\ ºC^{-1}$ el del latón, calcular la longitud a 0 ºC de la barra de hierro.
Respuesta. 1,500 m.

7. Si la temperatura del ambiente en que se encuentra un reloj de péndulo que bate segundos se modifica en 20 ºC, ¿qué le pasará al reloj al cabo de 30 días si el coeficiente de dilatación lineal del péndulo es $20x10^{-6}\ ºC^{-1}$?
Respuesta. 8 min. 38 s. se atrasa.

8. Una bola de acero de 6 cm de diámetro tiene 0,010 milímetros más de diámetro que el correspondiente al orificio de una plancha de latón donde se debe alojar cuando tanto la bola como la plancha están a una temperatura de 30 ºC. A qué temperatura, tanto de la bola como de la plancha, podrá pasar la bola por el orificio.
El coeficiente de dilatación lineal del acero vale $12x10^{-6}\ ºC^{-1}$ y el del latón $19x10^{-6}\ ºC^{-1}$.
Respuesta. 54 ºC.

9. Una vasija de vidrio está llena justamente con 1 litro de terpentina a 50 ºF. Hallar el volumen de líquido que se derrama si se calienta hasta 86 ºF.
El coeficiente de dilatación lineal del vidrio vale $9x10^{-6}\ ºC^{-1}$ y el de dilatación cúbica de la terpentina $97x10^{-5}\ ºC^{-1}$.
Respuesta. 18,86 cm^3.

10. Se ha de introducir un remache de hierro en una placa también de hierro y para conseguir un ajuste lo más perfecto posible se introduce el remache, antes de meterlo en la placa, en aire líquido (-187 ºC). El diámetro del orificio es de 10 mm. ¿Que diámetro tendrá que tener el remache a la temperatura ambiente (20 ºC) para que después de meterlo en aire líquido entre justamente por el orificio de la placa?
Coeficiente de dilatación lineal del hierro:
$\alpha = 12x10^{-6}\ ºC^{-1}$.
Respuesta. 10,025 mm.

11. Un recipiente a 0 ºC contiene la tercera parte de su volumen de mercurio.
Se calienta a una cierta temperatura y entonces el mercurio ocupa el 34,37 por 100 del volumen del vaso. ¿Cuál es dicha temperatura?
Coeficiente de dilatación del mercurio
$\gamma = 18x10^{-5}\ ºC^{-1}$.
Coeficiente de dilatación del recipiente
$\gamma' = 25x10^{-6}\ ºC^{-1}$.
Respuesta. 202 ºC.

12. ¿Que fuerzas hay que aplicar a los extremos de una barra de acero, cuya sección transversal tiene el área S = 10 cm^2, para impedir que se dilate cuando se calienta desde t_1= 0 ºC hasta t_2 = 30 ºC?
Respuesta. 68,688 N.

13. De un alambre de 1 mm de radio cuelga una carga. Esta carga hace que el alambre se alargue en la misma magnitud que se alargaría sí se elevara 20 ºC su temperatura.
Hallar la magnitud de la carga.
Respuesta. 148 N.
$\alpha = 1,2x10^{-5}\ ºC^{-1}$
$Y = 19,6x10^{10}\ N.m^{-2}$

14. Un alambre de hierro se tendió entre dos paredes fijas resistentes, estando la temperatura a 150 ºC ¿A qué temperatura se romperá el alambre al enfriarse? Suponer que la ley de Hooke se cumple hasta el momento en que se produce la rotura.
$\alpha = 1,2x10^{-5}\ C^{-1}$
Resistencia a la rotura $F/S = 2,94x10^8\ N/m^2$
Módulo de Young Y = 19,6x10^{10} N/m2
Respuesta. 25 ºC.

15. Unos carriles de acero de 18 m de longitud se colocan un día de invierno en que la temperatura es -6 ºC. ¿Qué espacio ha de dejarse entre ellos para que estén justamente en contacto un día de verano en que la temperatura es 40 ºC. Coeficiente de dilatación del acero $\alpha = 12x10^{-6}\ ºC^{-1}$?
Respuesta. $9,936x10^{-6}$ m.

16. La varilla de un reloj de péndulo sin compensar, que bate segundos a 0 ºC
es de latón. Averiguar cuanto se retrasa el reloj en un día si se introduce en un ambiente a 200 ºC.

Coeficiente de dilatación del latón: $17x10^{-6}$ ºC^{-1}
(Considerar el péndulo como simple).
Respuesta. 7 m. 12 s.

17. Un herrero ha de colocar una llanta circular de hierro de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la temperatura ambiente es de 20 ºC y su coeficiente de dilatación lineal $12,2x10^{-6}$ ºC^{-1}.
Calcular:
a) Temperatura en grados centígrados a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.
b) Expresar esta temperatura en grados Fahrenheit y en grados absolutos.
Respuesta. a) 347 ºC; b) 656,6 ºF, 620 K.

18. Una vasija de cinc (coeficiente de dilatación lineal: $29x10^{-6}$ ºC^{-1}), está llena de mercurio a 100 ºC; teniendo entonces una capacidad de 10 litros. Se enfría hasta 0 ºC. Calcular la masa de mercurio a 0 ºC que hay que añadir para que la vasija quede completamente llena
(Coeficiente de dilatación cúbico del mercurio: $182x10^{-6}$ ºC^{-1}). Densidad del mercurio a 0 ºC 13,6 g/cm^3.
Respuesta. 1,258 g.

19. La pared de concreto de un frigorífico mide 3,0 m de alto, 5,0 m de ancho, y 20 cm de espesor. La temperatura se mantiene en –10º C y la temperatura exterior es 20º C. La pared interior está cubierta por una capa de lana para reducir el flujo de calor a través de la pared por 90 %. Las conductividades térmicas del concreto y de la lana son 0,8 y 0,04 W/m.K, respectivamente.
a) ¿Cuál es la diferencia de temperaturas de la capa de lana?
b) ¿Cuál es el espesor de capa de lana requerido?

20. Dos placas paralelas grandes están separadas por 0,5 m. Un círculo de 1,5 m de radio se delinea sobre la placa de la izquierda. Un segundo círculo, del mismo radio y opuesta a la primera, se delinea sobre la placa de la derecha. La temperatura de la placa de la izquierda es 700 K y la emisividad es 1,00. La temperatura de la placa de la derecha es 600 K y la emisividad es 0,80.
a) ¿El calor neto radiado entre los dos círculos es?
b) La temperatura de la placa izquierda se mantiene en 700 k. La temperatura de la placa derecha se cambia, tal que ahora el flujo de calor neto radiado es cero, en el espacio entre los círculos. ¿Cuál es la temperatura de la placa de la derecha?

21. Una esfera de 0,30 m de radio, tiene una emisividad de 0,48 y su temperatura es de 600 K. La esfera se rodea de una cáscara esférica concéntrica cuya superficie interior tiene un radio de 0,90 m y una emisividad de 1,00. La temperatura de la cáscara es 400 K. ¿El calor neto radiado, incluyendo la dirección, en el espacio entre las esferas y la cáscara es?

22. Un proyectil de plomo choca contra un obstáculo. ¿Cuál es la velocidad en el momento del choque sí su temperatura inicial era de 65 ºC y se funde la tercera parte? Se supone el obstáculo inamovible e inalterable. Calor específico del plomo 0,031 cal/g ºC.
Temperatura de fusión: 327,4 ºC; calor de fusión: 5,74 cal/g.
Respuesta. 289,93 m/s.

23 Se lanza una esfera de plomo cuya temperatura inicial es de 36 ºC, verticalmente y hacia abajo con una velocidad v_0; 100 metros más abajo encuentra un plano absolutamente resistente de conductividad calorífica nula. Calcular el valor de v_0 necesario para que la esfera se funda totalmente en el choque. Calor específico del plomo c = 0,031 cal/g ºC.
Temperatura de fusión del plomo t = 327,4 ºC.
Calor de fusión del plomo = 5,74 cal/g;
1 cal = 4,186 J; g = 9,8 m/s^2.
Respuesta. 348,7 m/s.

24. Una masa de plomo igual a 10 g llega horizontalmente, con una velocidad de 250 m/s sobre una esfera de plomo de 450 g, en la cual se incrusta.
a) Estando, al principio, la esfera de plomo inmovilizada, calcular el calentamiento que resultará del choque.
b) Pudiéndose separar la esfera de plomo de la vertical como un péndulo, se comprueba en una segunda experiencia que se eleva 2 metros después del choque. Calcular el calentamiento resultante. C_{Pb}= 0,03 cal/g.
Respuesta. a) 5,4 ºC; b) 5,2 ºC.

25. En un calorímetro sin pérdidas cuyo equivalente en agua es de 101 g y cuya temperatura inicial es de 20 ºC, se añaden 250 cm^3 de agua a 40 ºC, 100 g de hierro a 98 ºC (calor específico = 0,109 cal/g ºC) y 80 g de hielo fundente. Calcular la temperatura de equilibrio.
Respuesta. 15,1 ºC.

26. Dentro de un calorímetro que contiene 1.000 g de agua a 20 ºC se introducen 500 g de hielo a -16 ºC. El vaso calorimétrico es de cobre y tiene una masa de 278 g.
Calcular la temperatura final del sistema, suponiendo que no haya pérdidas.
Calor específico del hielo: 0,55 cal/g ºC
Calor específico del cobre: 0,093 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 539 cal/g
Respuesta. 0 ºC no se funde todo el hielo; 201 g.

27. En un calorímetro de latón sin pérdidas, de 240 g, que contiene 750 cm^3 de agua a 20,6 ºC se echa

una moneda de oro de 100 g a 98 ºC y la temperatura sube a 21 ºC.
Determinar la cantidad de oro y cobre que integra la moneda. Calor específico del latón: 0,09 cal/g ºC; calor específico del cobre: 0,0922 cal/g ºC; calor específico del oro: 0,031 cal/g ºC.
Respuesta. 85,16 g de oro; 14,84 g de cobre.

28. En un calorímetro de cobre se queman exactamente, 3 g de carbón produciéndose CO_2. La masa del calorímetro es de 1,5 kg y la masa de agua del aparato es 2 kg.
La temperatura inicial de la experiencia fue de 20 ºC y la final de 31 ºC. Hallar el poder calorífico del carbón expresándolo en cal/g. El calor específico del cobre vale 0,093 cal/g ºC.
Respuesta. 7,8x103 cal/gr.

29. En un calorímetro cuyo equivalente en agua es despreciable, hay 1 kg de hielo a -10 ºC. ¿Cuantos gramos de agua a 80 ºC hay que introducir en él para que la temperatura final sea de 10 ºC? Sí en lugar de agua a 80 ºC, se introduce vapor de agua a 100 ºC, ¿Cuántos gramos de éste habría que introducir para que la temperatura final sea de 40 ºC? ¿Que volumen ocupa el vapor de agua introducido, si la presión a que se mide es de 700 mm de mercurio? Peso molecular del agua 18.
Calor específico del hielo (de -20 a 0 ºC): 0,5 cal/g ºC
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g
Respuesta. 1,357 g; 208 g; 384 litros.

30. Mezclamos 1 kg de agua a 95 ºC con un kg de hielo a -5 ºC.
¿Dispondremos de suficiente calor para fundir todo el hielo? Sí es así, ¿a qué temperatura queda la mezcla?
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Respuesta. Se funde todo el hielo, 6,25 ºC.

31. Una bola de plomo (calor específico: 0,03 cal/g ºC) de 100 g está a una temperatura de 20 ºC. Se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 420 m/s
y al regresar al punto de partida choca con un trozo de hielo a 0 ºC. ¿Cuanto hielo se funde?
Se supone que toda la energía del choque se convierte íntegramente en calor.
Respuesta. 27 g.

32. Un vaso cuya capacidad calorífica es despreciable contiene 500 g de agua a temperatura de 80 ºC. ¿Cuantos gramos de hielo a la temperatura de -25 ºC han de dejarse caer dentro del agua para que la temperatura final sea de 50 ºC?
Respuesta. 105 gramos de hielo.

33. Una bola, a una velocidad de 200 m/s, choca contra un obstáculo.
Suponiendo que toda la energía cinética se transforma en calor y que éste calienta tan solo la bola, calcular su elevación de temperatura.
Calor específico del metal 0,1 cal/g ºC.
Respuesta. 47,8 ºC.

34. Un calorímetro de latón de M_1= 125 g contiene un bloque de hielo de M_2 = 250 g todo ello a t_1= -15 ºC.
Calcular la cantidad de vapor de agua a 100 ºC y a la presión normal que es necesario para que todo el sistema llegue a la temperatura de t = 15 ºC.
Calor específico del latón: 0,09 cal/g ºC
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 540 cal/g
Respuesta. 41,54 g.

35. En un recipiente de aluminio de 256 g que contiene 206 g de nieve a -11 ºC se introducen 100 g de vapor de agua a 100 ºC. Calcular la temperatura final de la mezcla.
Calor específico del aluminio: 0,219 cal/g ºC
Calor específico del hielo: 0,5 cal/g ºC
Calor de fusión del hielo: 80 cal/g
Calor de vaporización del agua: 539 cal/g
Respuesta: Solo se condensa parte del vapor y la temperatura final será de 100 ºC. Vapor condensado 82,4 gramos.

36. Una bala de plomo atraviesa una pared de madera. Antes de chocar con la pared la velocidad de la bala era v_0 = 400 m/s y después de atravesarla v = 250 m/s. La temperatura de la bala antes del choque era t_0 = 50 ºC. ¿Qué parte de la bala se fundirá?
Calor de fusión del plomo: 5,74 cal/g
Temperatura de fusión del plomo: 327 ºC
Calor específico del plomo: 0,031 cal/g ºC
Suponer que todo el calor que se desprende lo recibe la bala.
Respuesta. 0,53.

37. En un calorímetro sin pérdidas cuyo equivalente en agua es de 500 g, hay 4,500 g de agua a 50 ºC. Se añaden 2 kg de hielo fundente y se introduce 1 kg de vapor de agua a 100 ºC. El calor de fusión vale 80 cal/g y el de vaporización 540 cal/g. Calcular la temperatura de equilibrio.
Respuesta. 91,25 ºC.

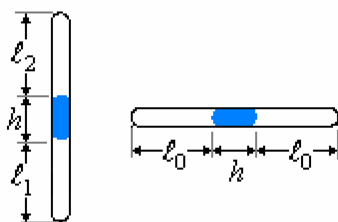
38. Un cubo de hielo de 20 g a 0 ºC se calienta hasta que 15 g se han convertido en agua a 100 ºC y 5 g se han convertido en vapor. ¿Cuanto calor se necesitó para lograr esto?
Respuesta. 6300 cal.

39. En un recipiente se almacenan 2 litros de agua a 20 ºC. Inmersas en el agua se encuentran dos barras: una de latón de 5 cm de largo y 200 g y otra de hierro de idénticas dimensiones y 250 g.
a) Hallar la cantidad de calor necesaria para calentar todo el conjunto (agua y barras) justo hasta que todo el agua se convierta en vapor a 100 ºC (calor

específico del latón y hierro: 0,09 cal/gºC y 0,11 cal/gºC respectivamente).
b) Determinar las longitudes de ambas barras en esas condiciones (coeficiente lineal de dilatación de latón y hierro: $1{,}9\text{x}10^{-5}$ ºC^{-1} y $1{,}2\text{x}10^{-5}$ ºC^{-1} respectivamente).
c) ¿Cuál es más denso a 20 ºC, el latón o el acero? ¿Y a 100 ºC?
Respuesta. a) $Q = 5{,}2\text{x}10^6$ J; b) $L_{latón} = 0{,}050076$ m, $L_{hierro} = 0{,}050048$ m.
c) A 20 ºC y 100 ºC es más denso el hierro.

40. En un recipiente se mezclan 4,5 litros de agua a 20 ºC y 500 g de hielo a 0 ºC. Se introduce en el recipiente una barra de metal, de capacidad calorífica despreciable.
a) ¿Cuál es la temperatura en el equilibrio?
b) El conjunto se calienta en un hornillo que proporciona 5,000 cal/s, ¿cuál es la temperatura a los 100 s? La longitud de la barra a 0 ºC es de 10 cm y su coeficiente de dilatación lineal es de $2\text{x}10^{-5}$ ºC^{-1}.
c) Obtener una expresión de la longitud de la barra en función del tiempo hasta $t = 100$ s.
Respuesta. a) $t = 10$ ºC, b) $t_{final} = 100$ ºC.

41. Un tubo capilar de longitud 50 cm está cerrado en ambos extremos. Contiene aire seco y cada extremo está separado por una columna de mercurio de 10 cm de largo. Con el tubo en posición horizontal, las columnas de aire son de 20 cm de largo, y con el tubo en posición vertical son de 15 cm y 25 cm. ¿Cuál es la presión en el tubo capilar cuando está horizontal?



Solución.
Para el aire del aparte inferior

$$p_0V_0 = p_1V_1 \quad (1)$$

Para el aire del aparte superior

$$p_0V_0 = p_2V_2 \quad (2)$$

En el tubo vertical

$$p_1 = p_2 + \rho gh \quad (3)$$

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad (4)$$

De (1) y (2)

$$(p_2 + \rho gh)A15 = p_2A25 \Rightarrow$$

$$3(p_2 + \rho gh) = 5p_2 \Rightarrow$$

$$p_2 = 1{,}5\rho gh$$

Reemplazando en (2) los valores de p_2

$$V_0 = A20\,,\ V_2 = A25$$

$$p_0A20 = 1{,}5\rho ghA25$$

$$p_0A20 = 1{,}5\rho ghA25$$

$$p_0 = 1{,}875\rho gh$$

$$= 1{,}875(13600)(9{,}80)(0{,}10)$$

= 24990 Pa

42. Un tubo cilíndrico de medio metro de longitud se introduce en mercurio hasta su mitad; después se tapa el extremo superior y se retira. Calcular la longitud de mercurio que quedará en el tubo y la presión del aire encerrado sobre él. La presión atmosférica es de 76 cm de mercurio.
Respuesta. 58,45 cm Hg.

43. El peso de un metro cúbico de cierto gas a la temperatura de $t = 67$ ºC y presión $p = 100$ mm de mercurio es $m = 282{,}32$ g. Calcular la pérdida de peso que experimentaría un cuerpo sumergido en este gas a una cierta presión y temperatura sabiendo que en estas condiciones pierde en el aire 4,839 g.
ρ aire = 1,293 g/litro
Respuesta. 10,001 g.

44. Un depósito contiene 50 kg de oxígeno a la presión p_1= 10 atm y a la temperatura t_1= 27 ºC. Se produce una fuga por donde escapa oxígeno y al cabo de cierto tiempo, localizada y tapada la fuga, la presión y la temperatura del depósito resultan ser p_2= 6 atm y t_2= 20 ºC.
¿Que cantidad de oxígeno ha escapado?
Respuesta. 19,3 kg.

45. Un frasco de 5 litros de volumen se tapa en un recinto cuya presión es de 762 mm de Hg y cuya temperatura es de 27 ºC. Luego se abre en un lugar donde la presión es de 690 mm y la temperatura 9 ºC. ¿Entra o sale aire? Calcular el peso de aire que entra o sale.
Respuesta. 0,1905 salen; 0,2165 g.

46. Calcular en gramos el peso del hidrógeno H_2 contenido en un recipiente de 5 galones que está a la presión de 14 psi y a la temperatura de 86 ºF.
Respuesta: 1,462 g.

47. Un recipiente cuyo volumen es igual a 5 litros, contiene aire a 27 ºC de temperatura y a la presión de 20 atm. ¿Que masa de aire hay que liberar del recipiente, para que la presión de éste caiga a 10 atm?
Respuesta. 59 g.

48. Calcular el trabajo que realiza un gas cuando se calienta isobáricamente desde los 20 ºC hasta 100 ºC, si se encuentra dentro de un recipiente cerrado por medio de un émbolo móvil, cuya sección es igual a 20 cm2 y su peso 5 kgf. Analizar dos casos:
a) cuando el recipiente se encuentra en posición horizontal y
b) cuando el recipiente se encuentra en posición vertical. El volumen inicial del gas es igual a 5 litros, y la presión atmosférica es la normal.
Respuesta. a) 138 J; b) 172 J.

49. Un tubo con su extremo superior cerrado es sumergido completamente en un recipiente que contiene mercurio, después de lo cual, dentro del tubo queda una columna de aire de 10 cm de longitud. ¿A que altura sobre el nivel del mercurio en el recipiente hay que levantar el extremo superior del tubo para que dentro de éste el nivel del mercurio quede igual al nivel del mercurio en el recipiente. La presión atmosférica es la normal. Calcular la masa de aire dentro del tubo, si su sección es igual a 1 cm^2 y la temperatura igual a 27 ºC.
Respuesta. 11,3 cm; 13,3 mg.

50. ¿Que cantidad de calor se desprenderá al comprimir por vía reversible e isoterma 100 litros de un gas ideal a 27 ºC que se encuentran a 71 cm de mercurio de presión, hasta reducir su volumen a la centésima parte?
Respuesta. 10418 cal.

51. Cien litros de oxígeno a 20 ºC y 69 cm de mercurio de presión se calientan a volumen constante comunicando 2555 calorías. Calcular el incremento de la presión en cm de mercurio.
Respuesta. 31,87 cm Hg.

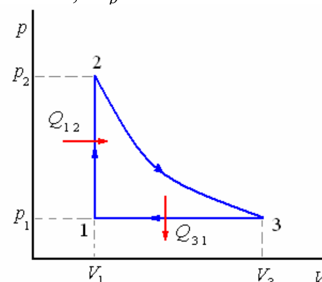
53. Un tanque contiene 2,73 m^3 de aire a una presión de 24,6 kg/cm^2. El aire se enfría hasta ser su presión de 14 kg/cm^2. ¿Cuál será la disminución de su energía interna?
Considérese el aire como gas perfecto biatómico de índice adiabático γ = 1,4.
Respuesta. 1,420x10^6 cal.

53. Cinco moles de un gas perfecto diatómico a 27 ºC se calientan isobáricamente con el calor que se desprende de un mol de otro gas perfecto que se comprime isotérmicamente a 27 ºC hasta triplicar su presión. Calcular la temperatura final del primer gas.
Respuesta. 318,8 K = 45,8 ºC.

54. Se comprime adiabáticamente un mol de cierto gas perfecto (índice adiabático γ= 1,15) que se encuentra a p_1= 1 atm, t_1 = 127 ºC hasta alcanzar una presión p_2.
Después se deja enfriar a volumen constante hasta alcanzar las condiciones p_3 = 10 atm y t_3 = 27 ºC.
Calcular:
a) La presión p_2 en atmósferas.
b) El trabajo en la compresión adiabática.
c) La cantidad de calor en calorías cedidas durante el enfriamiento.
Respuesta. a) 48,7 atm; b) 1,8x10^9 J; b) 4,621 cal.

55. Supóngase que 1 litro de gasolina propulsa un automóvil una distancia de 10 km. La densidad de la gasolina es aproximadamente 0,7 g/cm^3, y su calor de combustión es aproximadamente 4,6 x 10^4 J/g.
a) Si el motor tiene un rendimiento del 25%, ¿qué trabajo total realiza el motor durante los 10 km del recorrido?
b) Si se supone que este trabajo se realiza contra una fuerza resistente constante *F*, hállese la magnitud de *F*.
Respuesta. a) 8,05x10^6 J; b) 0,805 N.

56. En el ciclo que se muestra en la figura, un mol de un gas diatómico ideal (γ = 1,4) se encuentra inicialmente a 1 atm y 0 ºC. El gas se calienta a volumen constante hasta
t_2 = 150 ºC y luego se expande adiabáticamente hasta que su presión vuelve a ser 1 atm.
Luego se comprime a presión constante hasta su estado original. Calcular:
a) La temperatura t_3 después de la expansión adiabática.
b) El calor absorbido o cedido por el sistema durante cada proceso.
c) El rendimiento de este ciclo.
d) El rendimiento de un ciclo de Carnot que operara entre las temperaturas extremas del ciclo.
C_V = 5 cal/molºC; C_p = 7 cal/molºC



Respuesta. a) 373 ºK ; b) -2,93 kJ; c) 6,69 %; d) 35 %

57. Un mol de gas N_2 (C_V= 5/2R; γ = 1,4) se mantiene a la temperatura ambiente (20 ºC) y a una presión de 5 atm. Se deja expandir adiabáticamente hasta que su presión iguala a la ambiente de 1 atm. Entonces se calienta a presión constante hasta que su temperatura es de nuevo de 20 ºC. Durante este calentamiento el gas se expansiona. Una vez que ha alcanzado la temperatura ambiente, se calienta a volumen constante hasta que su presión es de 5 atm. Se comprime entonces a presión constante hasta volver a su estado original.
a) Construir un diagrama *pV* exacto, mostrando cada etapa del ciclo.
b) A partir de este gráfico determinar el trabajo realizado por el gas en todo el ciclo.
c) ¿Cuánto calor fue absorbido o cedido por el gas en el ciclo completo?
R=0,082 litro.atm/mol K = 1,98 cal/mol K
Respuesta. b) -65,1 litro.atm; c) -1.572,5 cal

58. Una máquina de vapor con potencia de 14,7 kW consume durante 1 h de funcionamiento 8,1 kg de carbón, cuyo calor específico de combustión es de 3,3x10^7 J/kg. La temperatura en la caldera es do 200 ºC, en la máquina frigorífica, 58ºC. Hállese el

rendimiento real de la máquina y compárese cl resultado con el rendimiento de una máquina térmica ideal.

Respuesta. $e \approx 19{,}8\%$ $e_o = 30\%$

59. Un cuerpo calentado con temperatura inicial T_1 se aprovecha como calentador en una máquina térmica. La capacidad calorífica del cuerpo no depende de la temperatura y es igual a C. Un medio ilimitado, cuya temperatura es constante e igual a T_0, sirve de máquina frigorífica. Hállese el trabajo máximo que puede obtenerse por cuenta del enfriamiento del cuerpo. Realícese el cálculo para 1 kg de agua hirviendo y de hielo que se derrite.

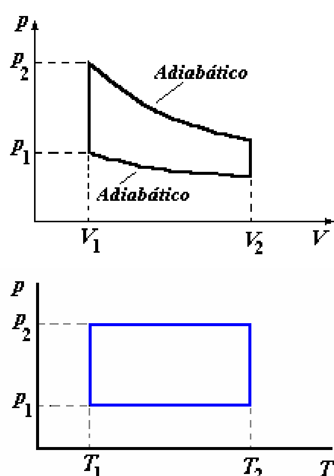
Respuesta.

$$W = C\left[T_1 - T_0 - T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right] \approx 62 \text{ J}$$

60. Con ayuda do un hornillo e1éctrico de potencia. de 1 kW en la habitación se mantiene la temperatura de 17°C siendo la temperatura del aire circundante de –23°C. ¿Qué potencia se necesitaría para mantener en la habitación la misma temperatura con ayuda de una bomba térmica ideal?

Respuesta. $P = 138\text{W}$

61. Hállese el rendimiento de los ciclos mostrados en la figura, sí como agente propulsor se toma un gas monoatómico perfecto.



Respuesta.

$$e = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}$$

$$e = \frac{2(T_2 - T_1)\ln\left(p_2/p_1\right)}{5(T_2 - T_1) + 2T_2 \ln\left(p_2/p_1\right)}$$

62. Un motor térmico funciona mediante un ciclo de Carnot reversible entre las temperaturas $t_1 = 200$ ºC (hogar) y $t_2 = 20$ ºC (refrigerante). El hogar comunica al sistema 60 kcal por minuto. Calcúlese la potencia del motor en caballos de vapor.

Respuesta. 2,16 C.V.

63. 8,1 kg de carbón de valor calorífico igual a 3,3x10[7] J/kg. La temperatura de la caldera es de 200 ºC y la del condensador de 58 ºC. Hallar el rendimiento real de la máquina e_1y compararlo con el rendimiento e_2 de la máquina térmica ideal que funcione según el ciclo de Carnot entre las mismas temperaturas.

Respuesta. 0,20; 0,30.

64. En una nevera de compresión se trata de fabricar 5 kg de hielo cada hora, partiendo de agua a 0 ºC. El ambiente exterior está a 27 ºC.
Calcular:
a) La eficacia de la nevera.
b) La potencia teórica del motor.
c) La potencia real si el rendimiento de la operación es el 75%.
d) El costo de la energía eléctrica necesaria para fabricar 100 kg de hielo a 5 soles el kW h.

Respuesta. a) 10; b) 46 W; c) 61 w; 4d) 6,10 soles.

65. Una cierta máquina térmica ideal en la que se realiza un ciclo de Carnot reversible en cada segundo, tiene el refrigerante a 27 ºC, una potencia de 4,18 kW y en cada ciclo se toman 3 kcal de la caldera. Calcular la temperatura de ésta, el calor que se cede al refrigerante y el rendimiento.

Respuesta. 2,000 cal; 177 ºC; 1/3.

66. En un ciclo de Carnot reversible, descrito por un mol de un gas perfecto diatómico, la temperatura más elevada es de 500 K y el trabajo en la expansión adiabática 4,157 J. Calcular el rendimiento del ciclo.

Respuesta. 0,4.

67. Un refrigerador está impulsado por un pequeño motor cuya potencia útil es de 150 W. Si suponemos que este refrigerador trabaja como un refrigerador ideal de Carnot, y que las temperaturas caliente y fría de los recipientes térmicos son 20 y -5 ºC, ¿cuanto hielo fabricará este refrigerador en 1 h si en el interior se coloca agua a 10 ºC?

Respuesta. 15,4 kg.

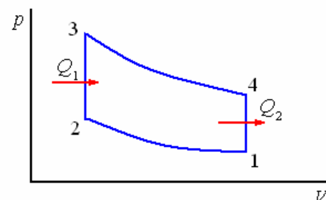
68. Tres kilogramos de agua a 18 ºC, se mezclan con 9 kg a 72 ºC. Una vez establecido el equilibrio, se restituyen las dos cantidades de agua a su estado inicial colocando 3 kg en contacto con una fuente térmica siempre a 18 ºC, y los 9 kg restantes en otra siempre a 72 ºC.
Calcular:
a) El incremento de la entropía del agua como consecuencia del primer proceso y el incremento de entropía del universo.
b) El incremento de entropía del agua producido por todas las operaciones y el del universo.

c) El incremento de entropía del agua debido al segundo proceso y el del universo.
Respuesta. a) 0,0315 kcal/ K que también es la del universo;
b) 0,0653 kcal/ K, la del agua 0;
c) -0,0315 kcal/ K del agua, 0,0338 kcal/ K universo.

69. Un congelador fabrica cubos de hielo a razón de 5 gramos por segundo, comenzando con agua en el punto de congelación. Cede calor a una habitación a 30 ºC. Si el sistema utiliza un frigorífico de Carnot ideal,
a) ¿Qué potencia expresada en watios requiere el motor?;
b) ¿Cuanto calor por unidad de tiempo cede a la habitación?;
c) ¿Cual es la variación de entropía del agua?
Respuesta. a) 184 W; b) 444 cal/s; c) 6,15 J/ K.

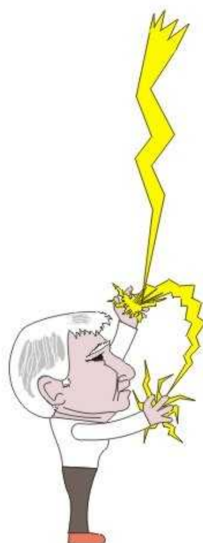
70. Un herrero sumerge una herradura de acero caliente con una masa de 2 kg en una cubeta que contiene 20 kg de agua. La herradura al principio está a una temperatura de 600 ºC y el agua está inicialmente a una temperatura de 20 ºC. Suponiendo que no se evapora el agua, encuentre:
a) la temperatura final del agua,
b) el cambio de entropía de la herradura,
c) el cambio de entropía del agua
d) el cambio global en la entropía del agua y la herradura.
e) Después de cierto tiempo, que es bastante comparado con el tiempo que tarda la herradura en enfriarse, la herradura y el agua se enfrían hasta la temperatura de los alrededores: 20 ºC. Durante este proceso, encuentre los cambios en la entropía del agua, la herradura y sus alrededores.
f) Usando los resultados del inciso d y e, encuentre el cambio en la entropía del universo como resultado de toda la consecuencia de eventos.
Calor específico del acero 0,107 cal/g ºC
Respuesta. a) 26,14 ºC; b) –959 J/ K; c) 1,736 J/K; d) 777 J/ K; e) –1,736 J/ K; -18,6 J/ K; f) 1,754 J/ K

71. Una máquina térmica trabaja con un gas perfecto (γ = 1,4) según el ciclo Otto, motores de explosión.
¿Cuánto vale el rendimiento térmico de este ciclo, para un estado inicial de p_1 = 1 atm. T_1 = 20 ºC y un grado de compresión V_2/V_1 = 1/4, si la combustión aporta Q_1 = 20 kcal/ciclo?
¿Cuánto vale el calor evacuado Q_2?
¿Cuánto valdrá la potencia de la máquina si realiza 300 ciclos por minuto?



72. Se dispone de botellas de 1,5 litros de agua a temperatura ambiente (20 ºC);
a) calcular la temperatura final del conjunto si se mezcla una botella con 100 g de hielo a -5 ºC;
b) calcular el calor necesario para evaporar toda el agua de una botella; hallar el tiempo que requiere este proceso si se usa un microondas de 100 W;
c) hallar la eficiencia de una máquina de Carnot que utiliza el vapor a 100 ºC como foco caliente y agua a 20 ºC como foco frío; dibujar un esquema de una máquina de vapor en el que se explique cómo se obtiene el trabajo mecánico.
Respuesta. a) t = 13,6 ºC;
b) 930,000 cal = 3887,400 J, tiempo = 3.887,4 s;
c) Eficiencia = 21 %.

FISICA 3



Autor: Hugo Medina Guzmán
Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. Electrostática

Introducción Carga eléctrica: formas de electrificación, conductores y dieléctricos, Ley de Coulomb. Fuerza eléctrica y Campo eléctrico: principio de superposición en distribución de carga discreta y continua. Flujo de Campo eléctrico y ley de Gauss. Aplicaciones. Potencial eléctrico: potencial de una distribución de cargas discretas y continuas, campo eléctrico y potencial. Energía electrostática. Condensadores: definición y capacidad, condensadores en serie y paralelo, condensadores de placas paralelas con dieléctricos, aplicaciones

CAPÍTULO 2. Corriente continua

Corriente eléctrica, resistencia y ley de Ohm. Fuerza electromotriz. Circuitos de corriente continua: resistencias en serie y paralelo, leyes de Kirchhoff. Circuito RC: carga y descarga.

CAPÍTULO 3. Campo magnético

Campo magnético y fuerza de Lorentz. Fuerza magnética sobre un conductor con corriente. Torque sobre una espira con corriente. Aplicaciones: espectrómetro de masas, y motor eléctrico. La ley de Biot-Savart. Ley de Ampere. Aplicaciones. Flujo de campo magnético. Ley de Gauss en el magnetismo. Corriente de desplazamiento y la ley de Ampere generalizada.

CAPÍTULO 4. Ley de Faraday e inductancia

Ley de inducción de Faraday. Ley de Lenz. Aplicaciones. Autoinductancia. Circuito RL en corriente continua. Energía de una autoinductancia. Densidad de energía magnética. Aplicaciones.

CAPÍTULO 5. Corriente alterna

Generador de corriente alterna. Circuitos de corriente alterna con una resistencia, inductancia y capacitancia. Reactancia. Impedancia. Fasores. Circuito RLC en serie y en paralelo. Resonancia. Valores medios y eficaces. Potencia en corriente alterna. Transformador ideal.

CAPÍTULO 6. Ondas electromagnéticas

.Ondas electromagnéticas planas. Vector de Poynting. Presión de radiación. El espectro electromagnético.

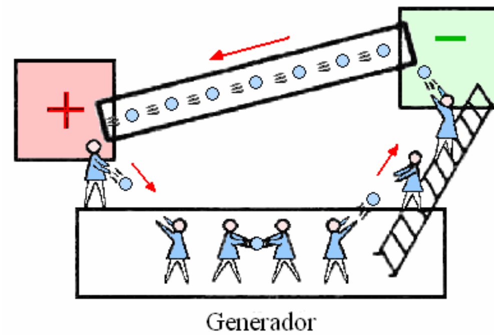
CAPÍTULO 1

Electrostática



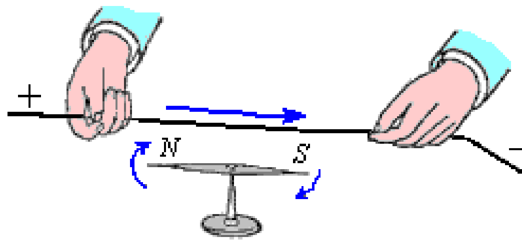
CAPÍTULO 2

Corriente continua



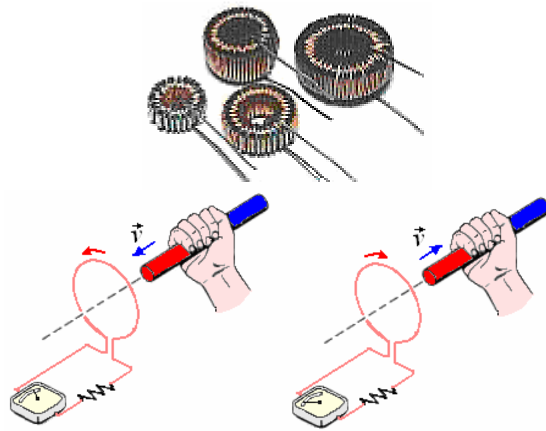
CAPÍTULO 3

Campo magnético

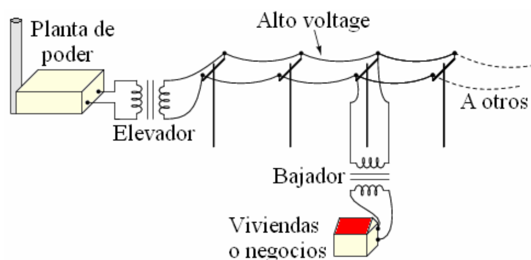


CAPÍTULO 4

Ley de Faraday e inductancia



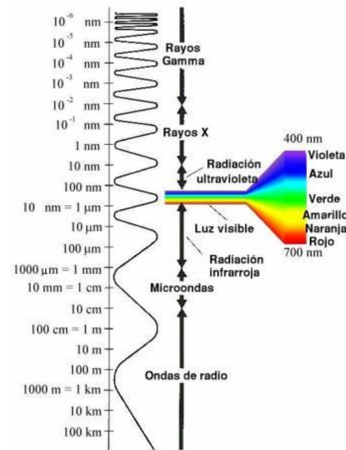
CAPÍTULO 5



Corriente alterna

Capítulo 6

Las Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas



BIBLIOGRAFÍA

THEORETICAL PHYSICS, Mechanics of particles, rigid and elastic bodies, fluids and heat flow. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)

THEORETICAL PHYSICS,Thermodinamics, electromagnetism, waves, and particles. F: Woobridge Constant. Trinity College. Addison – Wesley Publishing Company (1959)

The Feynman LECTURES ON PHYSICS. Volumenes I, II y III. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton. California Institute of Technology, Matthew Sands, Stanford University. Addison – Wesley Publishing Company (1964)

CORRIENTES, CAMPOS Y PARTÍCULAS. Francis Bitter. Massachusetts Institute of Technology. Editorial Reverté S. A. (1964).

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA MECÁNICA, MATERIA Y ONDAS. Uno Ingard, William L. Kraushaar. Editorial Reverté. (1966).

FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Arthur F. Kip. University of California. Mc Graw – Hill Book Company (1967)

CIENCIA FÍSICA Orígenes y principios Robert T. Langeman, Universidad Vanderbilt. UTEHA, (1968)

PROBLEMS IN ELEMENTARY PHYSICS. B. Bukhotsev, V: Krivchenkov, G. Myakishev, V.Shalnov. Mir Publishers. Moscow (1971)

PROBLEMES DE PHYSIQUE COMMENTES. Tomos I y II Hubert Lumbroso. Mason et Cie, París. (1971)

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. Luís L. Cantú. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Editorial Limusa México (1973)

FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA Y LA SALUD. Simon G. G. MacDonald / Desmond M. Burns University of Dundee. Fondo educativo interamericano. (1975)

MECÁNICA NEWTONIANA, MIT Physics course. A. P. French. Editorial Reverté. (1974).

FÍSICA I y II. Solomon Gartenhaus. Purdue University. INTERAMERICANA. (1977)

TEACHING TIPS. A guidebook for the beginning College Teacher. Wilbert J. McKeachie (University of Michigan). Seventh edition D. C. Heath and Company (1978)

FÍSICA PARA LAS CIENCIAS DE LA VIDA. Alan H. Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (1978)

GENERAL PHYSICS WITH BIOSCIENCE ESSAYS. Jerry B. Marion. University of Maryland. John Wiley & Sons Inc. (1979)

Física general II: Teoría Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. QC 21 M19 (Biblioteca PUCP) (1979)

Física general II: Problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 111 M364 (Biblioteca PUCP) (1979)

Física general I: problemas resueltos Hugo Medina Guzmán, Miguel Piaggio H. FIS 104 M364 (Biblioteca PUCP) (1981)

FÍSICA PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. 1 y 2. John P. McKelvey, Clemson University – Howard Grotch, Pennsilvania State University. HARLA. Mexico. (1981)

Física 3: electricidad y magnetismo para estudiantes de ciencias e ingeniería Hugo Medina Guzmán, FIS 141 M36 (Biblioteca PUCP) (1982)

EXPLORING PHYSICS Concepts and applications. Roger W. Redding North Texas State University, Stuart Kenter, Wadsworth Publishing Company (1984)

PROBLEMAS DE FISICA. J. Aguilar Peris, Universidad Complutense de Madrid - J. Casanova Colas, Facultad de Ciencias de Valladolid. Alambra (1985)

PROBLEMAS DE FISICA. Dirigido por S. Kósel. Editorial Mir Moscú. (1986)

PROBLEMAS DE FISICA Y COMO RESOLVERLOS. Clarence E. Benett Maine University. CECSA (1986)

PHYSICS for Engineering and Science. Michael E. Browne, Ph. D. (professor of Physics University of Idaho. Schaum’s outline series Mcgraw-Hill (1988)

FÍSICA: VOLUMEN 1. Mecánica, ondas y termodinámica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).

FÍSICA: VOLUMEN 2. Electricidad, magnetismo y óptica. Duane E. Roller, Ronald Blum. Editorial Reverté. (1990).

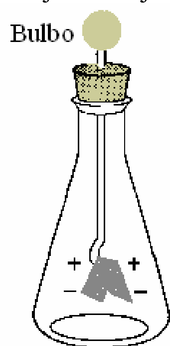
PROBLEMAS DE FISICA. Dirigido por O. Ya. Sávchenko. Editorial Mir Moscú. (1989)

MECÁNICA. Berkeley physics course – volumen 1. Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman. Editorial Reverté SA. (1992).
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Berkeley physics course – volumen 2. Edward M.Purcell. Editorial Reverté SA. (1992).
FÍSICA. Tomos I y II Tercera edición revisada (Segunda edición en español), Raymond S: Serway, James Madison University, Mcgraw-Hill, (1993)
PROBLEMAS DE FISICA Santiago Burbano de Ercilla, Enrique Burbano de Ercilla, Carlos Gracia Muñoz, XXVI edición, Zaragoza, MIRA editores (1994)
ONDAS. Berkeley physics course – volumen 3. Frank S. Crawford, Jr. Editorial Reverté SA. (1994).
FÍSICA Para las ciencias de la vida, David Jou Mirabent Universidad autónoma de Barcelona, Joseph Enric Llebot Rabagliati, Universidad de Girona, Carlos Pérez garcía, Universidad de Navarra. Mcgraw-Hill, (1994)
Física uno Hugo Medina Guzmán, FIS 104 M365 (Biblioteca PUCP) (1995)
APPLIED PHYSICS. Arthur Beiser, Ph. D. Schaum's outline series Mcgraw-Hill (1995)
TEACHING INTRODUCTORY PHTSICS A Sourcebook. Clifford E: Swartz (State University of New York, Stony Brook) and Thomas Miner (Associate Editor The Physics Teacher 1972 – 1988). ATP Press – Springer. (1996)
TEACHING INTRODUCTORY PHYSICS Arnold Arons University of Washington JOHN WILEY & SONS, INC. (1997)
FÍSICA John Cutnell / Kenneth W. Johnson. Southern Illinois University. LIMUSA (1998)
FÍSICA EN LA CIENCIA Y EN LA INDUSTRIA. A. Cromer. Northeastern University. Editorial Reverté. (2000)
FÍSICA CONTEMPORANEA Edwin Jones.– Richard Childers, University of South Carolina. Mcgraw-Hill, (2001)
PROBLEMAS Y CUESTIONES DE FISICA. Atanasio Lleó, Begoña Betete, Javier Galeano, Lourdes Lleó, Ildefonso Ruiz – Tapiador. Universidad Politécnica de Madrid. Ediciones Mundi – prensa (2002)
The PHYSICS of every day phenomena. A conceptual introduction to Physics. W. Thomas Griffith, Pacific University. Mcgraw-Hill, (2004)
FÍSICA UNIVERSITARIA. Francis W.Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young (Carnegie Mellon University) y Roger A. Freedman (University of California. Santa Barbara) Volumen 1, Volumen 2. Undecima edición. Pearson - Addison Wesley (2004)
FIVE EASY LESSONS Strategies for successful Physics teaching. Randall D. Knight California Polytechnic State University, San Luis Obispo. Addison Wesley (2004)
FUNDAMENTALS OF PHYSICS. David Halliday (Univ. of Pittsburgh), Robert Resnick (Rensselaer Polytechnic Institute), Jearl Walker (Cleveland State Univ.). 7th Edition (2005)

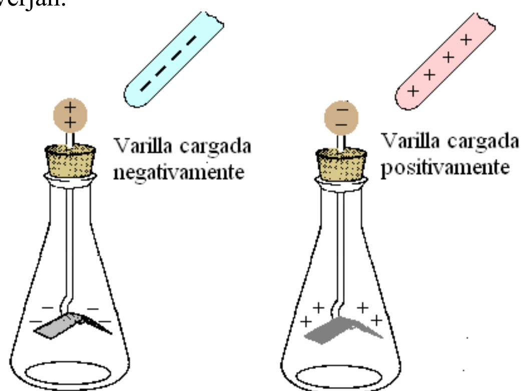
CAPÍTULO 1. Electrostática

INTRODUCCION.
La primera observación de la electrización se remonta a la época de la Grecia antigua. A Tales de Mileto se le atribuye haber observado la atracción que el ámbar previamente frotado, ejerce sobre pequeños pedazos de fibra y paja.
A pesar de que la electrización del ámbar por fricción fue transmitida de un escrito a otro, nada nuevo se descubrió hasta principios del siglo XVII en que Sir William Gilbert anunció el descubrimiento de que muchas sustancias podían ser electrizadas por frotamiento y que el ámbar es uno de los muchos materiales que manifiestan el efecto.

EL ELECTROSCOPIO.
Dispositivo que sirve para detectar y medir la carga eléctrica de un objeto. Los electroscopios han caído en desuso debido al desarrollo de instrumentos electrónicos mucho más precisos, pero todavía se utilizan para hacer demostraciones. El electroscopio más sencillo está compuesto por dos conductores ligeros suspendidos en un contenedor de vidrio u otro material aislante.
Se puede utilizar un electroscopio para determinar si un objeto está cargado eléctricamente. Cuando un objeto cargado se acerca al bulbo, las hojas divergen.
a) El electroscopio neutro tiene las cargas distribuidas uniformemente, las hojas están juntas.



(b) Las fuerzas electrostáticas causan que las hojas diverjan.

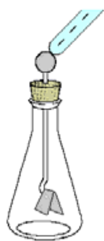


ELECTRIZACION

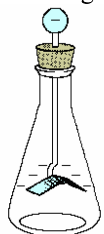


Si frotarnos una barra de plástico con una piel de gato, o si frotamos una barra de vidrio con seda. Las barras adquieren la propiedad de atraer cuerpos ligeros corno pedacitos de papel a una pequeña bola hecha da material ligero como corcho o médula de saúco (Sambucus peruviana) suspendida por hilos de seda. Se dice que estos cuerpos están electrizados.
Si frotarnos una barra de cobre sostenida por la mano, no habrá acción sobre los cuerpos ligeros, pero si frotamos la misma barra de cobre pero esta vez sostenida por un mango de vidrio, se electriza y ejercerá acción sobre los cuerpos ligeros.
O sea que tenemos cuerpos de dos categorías, los primeros como al vidrio, plexiglás, ebonita, resina que se electrizan agarrándolos con 1a mano y otros cuerpos que necesitan un mango de un material de la primera categoría para poder ser electrizados
La experiencia demuestra que en los cuerpos de la primera categoría la electricidad permanece localizada en los puntos frotados, no se propaga, estos cuerpos son malos conductores de la electricidad se conocen como **aislantes** o **dieléctricos**.
Para los cuerpos de segunda categoría, las propiedades de la atracción sobre cuerpos ligeros no solo se manifiestan en los puntos frotados, sino en todos los puntos, a sea la electrización producida se transmite a todos los puntos del cuerpo, estos cuerpos son conocidos como **conductores**.
El cuerpo humano y la tierra son conductores.
Además de la electrización por frotamiento descrita, hay otras formas de electrización que indicamos a continuación.

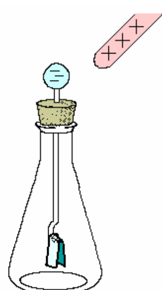
1° **Electrización por contacto** La carga es transferida al electroscopio cuando la varilla cargada toca el bulbo. Entonces, cuando una varilla con carga opuesta se acerca al bulbo, las hojas se colapsan y se juntan.
El electroscopio neutro se toca con una varilla cargada negativamente; las cargas son transferidas al bulbo.



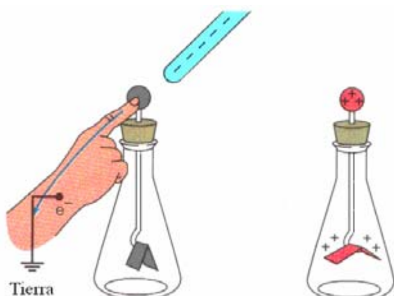
El electroscopio tiene una carga negativa neta.



La varilla cargada positivamente atrae los electrones; las hojas se colapsan.



2° **Electrización por inducción** Al tocar el bulbo se proporciona una trayectoria para la transferencia de carga, los electrones son transferidos a la tierra. Cuando el dedo se retira, el electroscopio tiene una carga neta, el electroscopio queda cargado positivamente.



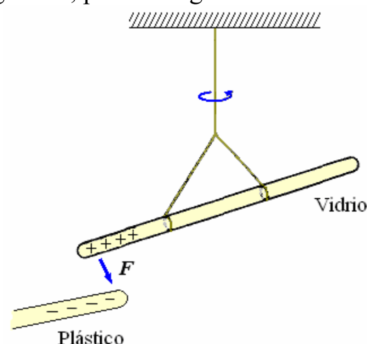
Tierra eléctrica se refiere a la tierra (o sea al “suelo”) o a algún otro objeto que pueda recibir o suministrar electrones sin cambiar significativamente su propia condición eléctrica.
Como esto se debe a electrones que han sido transferidos, usted puede preguntarse cómo se puede cargar positivamente un electroscopio. Esto se hace cargando por inducción. Al tocarse el bulbo con un dedo, el electroscopio hace tierra, es decir, se da una trayectoria para que los electrones puedan escapar del bulbo. Entonces, cuando se acerca al bulbo una varilla cargada negativamente los electrones son repelidos del bulbo. Al retirar los dedos se deja al electroscopio una carga positiva neta.

3º **Piezoelectricidad.** Una lámina de cuarzo convenientemente tallada, se electriza por compresión o por tracción, el fenómeno es reversible. Estos cuerpos son conocidos como piezoeléctricos.

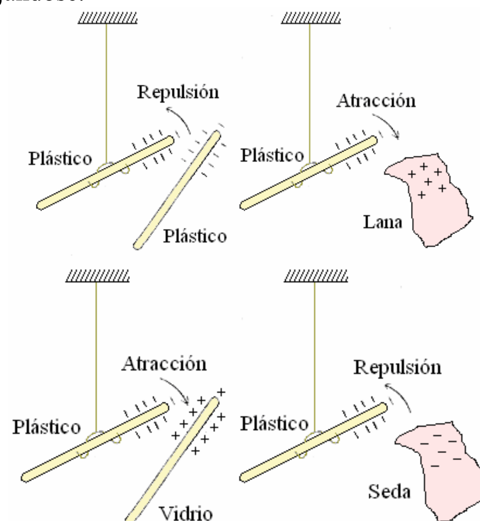
4° **Electrización por las fuentes de electricidad.** Si ponemos una pila o un acumulador, uno de sus polos se conecta a tierra y el otro a un conductor aislado, éste se electriza. Con una sola pila la electrización es débil, pero si se dispone de muchos elementos se obtiene electrización fácil de poner en evidencia.

ELECTRICIDAD POSITIVA Y NEGATIVA

Cuando frotamos entre sí dos sustancias diferentes y luego las separamos, nos encontramos con dos tipos de electricidad. Para ver mejor esto realicemos la siguiente experiencia.
Dispongamos de dos barras de plástico y dos barras de vidrio. Se carga por frotamiento con una piel una de las barras de plástico y se la suspende mediante un gancho y un hilo de nylon como se muestra en la figura siguiente, pudiendo girar libremente.



Si acercamos a esta barra de plástico la otra frotada similarmente, observamos que gira alejándose, si acercamos la piel a la barra de plástico suspendida observamos que ésta gira acercándose. De igual modo si acercamos la barra de vidrio electrizada por frotación con seda observamos que el plástico gira acercándose y si acercamos la seda el plástico gira alejándose.

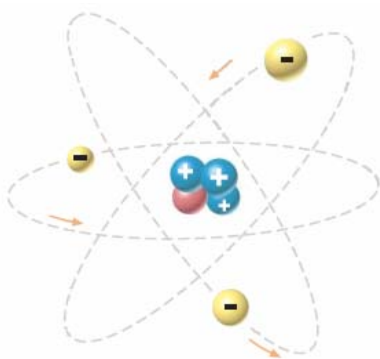


Puesto que la piel al igual que el vidrio, atraen al plástico electrizado, ambos tienen la misma clase de electrización. Se dice que estén cargados

positivamente. De modo similar el plástico y la seda estarán carga dos **negativamente**.
Las Cargas positivas las designamos por el signo (+) y las Cargas negativas por el signo (-).
De esta experiencia también podemos describir que "Las Cargas iguales se repelen y las Cargas contrarias se atraen".
También es una observación experimental que la carga no puede ser creada ni destruida, la carga total de un sistema no puede ser cambiada. Del punto de vista macroscópico las cargas pueden reagruparse y cambiarse de diferentes maneras o sea que "La carga neta se conserva en un sistema cerrado".

TEORIA DE LA ELECTRIZACION

La Carga es una propiedad característica y fundamental de las partículas elementales que forman luego materias. Las sustancias estén formadas por moléculas y estas por átomos. Cada átomo contiene un núcleo que tiene una cantidad conocida de carga positiva. Esta Carga positiva se debe a la presencia de un cierto número de **protones**. Todos los protones son semejantes y tienen la misma masa y la misma carga positiva. Alrededor de cada núcleo atómico hay un número de partículas cargadas negativamente, llamadas **electrones**.



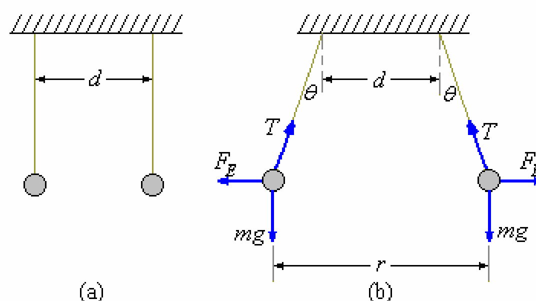
Normalmente cada átomo de una sustancia es eléctricamente neutro, o sea que tiene cantidades iguales de carga positiva y negativa, la carga de un electrón es igual pero opuesta a la carga de un protón. En cada núcleo hay tantos protones como electrones hay rodeándolo.
Los átomos aislados o los grupos grandes de átomos y moléculas tienen una afinidad para adquirir electrones adicionales sobre el número exacto que neutralizan las cargas positivas del núcleo. Esta afinidad de los átomos para tener más electrones que el número suficiente de ellos, varía considerablemente de una sustancie a otra. Por lo tanto, cuando dos sustancias diferentes se ponen en contacto, la que tiene mayor afinidad toma las electrones próximos de la otra y adquiere una carga negativa, mientras que la otra queda cargada positiva mente, tal es el caso del Caucho cuando se frota con una piel.

LA LEY DE COULOMB

Esta ley de la fuerza entre los cuerpos cargados puede enunciarse como sigue:
"Cuerpos con cargas similares se repelen y con cargas diferentes se repelen; para cargas puntuales (llamando puntual cuando sus dimensiones espaciales son muy pequeñas comparadas con cualquier longitud del problema en cuestión) la fuerza de interacción es proporcional al producto de lo cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa".



La ley fue establecida en 1784 por Coulomb por medios experimentales utilizando una balanza de torsión.
Podemos nosotros reproducir este experimento en una forma sencilla, para esto dispongamos de dos esferas pequeñas de médula de saúco (se puede usar esferas de tecknopor) suspendidas de hilo de nylon, como se muestra en la figura (a) donde la distancia puede variarse a voluntad. Al ponérsele carga a las esferas estas toman la posición mostrada en la figura (b).



Donde θ es el ángulo de deflexión, mg los pesos, F_E la fuerza electrostática y T la tensión en las cuerdas.
De las leyes de la mecánica encontramos la relación entre F_E y θ.

$$F_E = mg \tan\theta$$

Variando la separación d entre los soportes podemos observar diferentes deflexiones.
De las medidas de F_E en función de la separación de equilibrio r de las cargas encontramos que

$$F_E \propto \frac{1}{r^2}$$

esta evidencia experimental se presenta a continuación en forma de ecuación

$$F_E = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

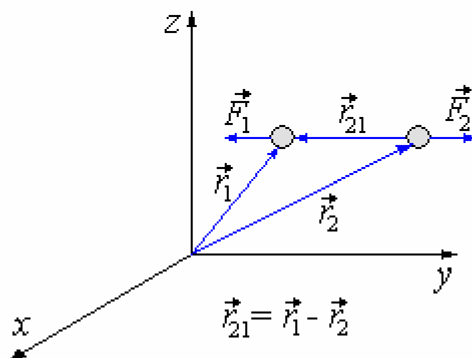
Donde q_1 y q_2 representan las magnitudes de las cargas. La dependencia de la carga no fue establecida por Coulomb, puesto que no tenía medios independientes para juzgar la magnitud de la carga, r es la distancia entre los centros de las cargas.
Como la fuerza es un vector la ley de Coulomb la podemos escribir de la siguiente forma, fuerza sobre la carga

$$\vec{F}_1 = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} \text{ o } \vec{F}_1 = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$$

Donde $\hat{r}_{21} = \dfrac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$, vector unitario a lo largo de r_{21}

Fuerza sobre la carga q

$$\vec{F}_2 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} = -\vec{F}_1$$



UNIDADES

Como la carga eléctrica es un concepto nuevo, no conocido en la mecánica es necesario introducir una nueva unidad fundamental.

Sistema CGS. En este sistema hacemos $k = 1$ y la unidad de carga se llama el statcoulombio.

Sistema M.KS. En esta sistema la unidad de carga se define a partir de la corriente eléctrica, concepto que veremos más adelante en detalle, la unidad fundamental es el ampere y la carga está definida por ampere - segundo, y a esto se le llama Coulombio (C). Como F_E está en Newton, q_1 y q_2 en Coulombios y r en metros, la constante k se fija por estas elecciones y toma el valor

$$k = 8{,}9874\times 10^9 \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

El cual puede aproximarse a $9\text{x}10^9$ en la mayoría de los cálculos numéricos.

Es útil expresar el valor de k en la forma

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Donde ε_0 es una constante que se conoce como la **permitividad** del espacio libre y su valor es

$$\varepsilon_0 = 8{,}85415\times 10^{-12} \ \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

Ejemplo 1. Se tienen dos cargas puntuales.

$q_1 = 2\times 10^{-9} C$, $\vec{r}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ en metros y

$q_2 = 3\times 10^{-9} C$, $\vec{r}_2 = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ en metros.

¿Cuál es esfuerzo sobre cada una de ellas?

Solución.

Fuerza sobre q_1: $\vec{F}_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}$

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \left(2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}\right) - \left(\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}\right)$$
$$= \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$r_{21} = \left[1^2 + (-2)^2 + 2^2\right]^{1/2} = \sqrt{9} = 3$$

Luego

$$\vec{F}_1 = 9\times 10^9 \frac{\left(2\times 10^{-9}\right)\left(3\times 10^{-9}\right)}{3^2}\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$$

$$\vec{F}_1 = 2\times 10^{-9}\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right) \text{ N}$$

Fuerza sobre q_2

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = -2\times 10^{-9}\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right) \text{ N}$$

El modulo es

$$F_1 = F_2 = 2\times 10^{-9}\left[1^2 + (-2)^2 + 2^2\right]^{1/2} = 6\times 10^{-9} \text{ N}$$

Ejemplo 2. ¿Cuál de las dos situaciones siguientes daría como resultado una mayor fuerza?

a) La fuerza de repulsión que ejerce una carga de 100 C sobre una de 1 C.

b) La fuerza de repulsión que ejerce una carga de 1 C sobre una de 100 C.

Solución. Las dos opciones nos conducen a la misma situación, ya que tienen la misma distancia. Y el producto de la carga es la misma

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}$$

Lo único que cambia es la dirección de la fuerza.

Ejemplo 3. ¿Si deseo trasladar una carga de 1C del origen a el punto (100,100, 100) y luego del punto al origen, en cual de los dos la fuerza de atracción debe ser mayor?

Solución. Al igual que en el problema anterior, la misma fuerza, en magnitud, que se requiere para trasladar la carga del origen al punto y del punto al origen es la misma. Por lo tanto la misma fuerza que se requiere para trasladar la carga del origen al punto es la misma que la que se requiere para trasladar la carga del punto al origen. Analicemos la siguiente relación.

$$\vec{F} = k\frac{q_p Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$

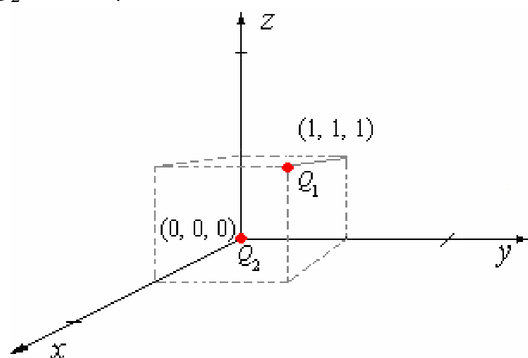
Donde q_p es una carga llamada carga de prueba, que podemos utilizar para medir la fuerza necesaria del para trasladar la carga del origen al punto P.

Analicemos ahora la fuerza para trasladar la carga del punto P al origen

$$\vec{F} = k\frac{q_p Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$

Observemos que ambas relaciones son las mismas.

Ejemplo 4. Determine la fuerza eléctrica, de atracción, ejercida por una carga $Q_1 = 2{,}0\mu\text{C}$ que se encuentra en la posición (1, 1,1) sobre la carga $Q_2 = -2{,}0\mu\text{C}$ en el origen.



Solución. La fuerza, mediante la ley de Coulomb queda determinada por:

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Determinemos para ello el vector que existe entre las cargas: $\vec{r}_{12} = (0-1)\hat{i} + (0-1)\hat{j} + (0-1)\hat{k}$

$= -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

La magnitud del vector $\vec{r}_{12}$ es:

$$r = \left|\vec{r}_{12}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

Por lo tanto el vector unitario

es: $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}_{12}}{\left|\vec{r}_{12}\right|} = \dfrac{-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}}$

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$= \frac{(2\times10^{-6})(-2\times10^{-6})}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{3})^2}\left(\frac{-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{36\times10^{-3}}{\sqrt{3}}\left(-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}\right)$$

La magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{36\times10^{-3}}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 36 \text{ x } 10^{-3} \text{ N}$$

Es decir, el término:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ Ya que la magnitud del vector unitario es 1

Ejemplo 5. Encuentra la fuerza de repulsión que existe entre dos cargas de 2 C cada una. Una de las cargas esta en el origen y la coordenada de la otra carga en (0, 0,0)

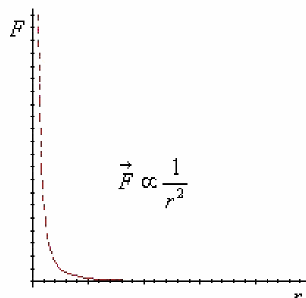
Solución. Primeramente sabemos que las dos cargas no pueden estar en el mismo punto. Para estar en el mismo punto tendríamos $r = 0$, que en la ecuación de la ley de Coulomb nos conduciría a una indeterminación debido a la división entre cero.

$$F = k\frac{q_p Q}{4\pi\varepsilon_0 (0)}$$

Sabemos del hecho que la fuerza eléctrica entre dos cargas es una ley

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

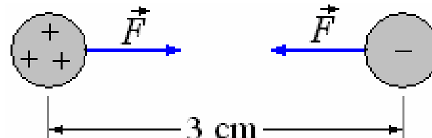
La fuerza crece muy rápidamente a medida que *r* es pequeña, como se puede observar en su gráfico



Ejemplo 6. Dos esferas idénticas pequeñas y conductoras tienen cargas de 3x10^{-9} C y -1x10^{-9} C, respectivamente. Cuando se colocan separadas 3 cm.
a) ¿Cuál es la fuerza entre ellas?
b) Si se ponen en contacto y luego se separan 3 cm,
c) ¿cuál es la fuerza entre ellas?

Solución.

a) La fuerza entre las dos esferas cuando están separadas 3 cm. es:

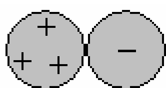


$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(3\times10^{-9})\times(-1\times10^{-9})}{(3\times10^{-2})^2}$$

$$= -3\times10^{-5} \text{ N}$$

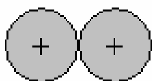
La fuerza es de atracción e igual a 3x10^{-5} N.

b) Cuando se ponen en contacto se produce equilibrio de las cargas diferentes o sea



$3\times10^{-9} - 1\times10^{-9} = 2\times10^{-9} \Rightarrow$ Sería la carga total, la que se distribuye por igual en cada una de las esferas, por ser idénticas.

$$q_1 = q_2 = \frac{2\times10^{-9}}{2} = 1\times10^{-9}\ \text{C}$$



c) La fuerza entre las dos esferas cuando se colocan a 3 cm es:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1\times10^{-9})\times(1\times10^{-9})}{(3\times10^{-2})^2} = 1\times10^{-5}\ \text{N}$$

Ejemplo 7. Dos esferas conductoras iguales de tamaño insignificante se cargan con 16,0 x 10^{-14} C y -6,4 x 10^{-14} C, respectivamente, y se colocan separadas 20 centímetros. Luego se mueven a una distancia de 50 centímetros separación.

a) Compare las fuerzas entre ellas en las dos posiciones.

b) Las esferas se conectan por medio de un alambre fino. ¿Qué fuerza ejerce la una sobre la otra?

Solución. La ecuación que da la fuerza entre las esferas, que se pueden considerar como cargas puntuales, es

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Luego

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{(0,2)^2} \text{ y } F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{(0,5)^2}$$

$$\therefore\ \frac{F_1}{F_2} = \frac{(0,5)^2}{(0,2)^2} = 6,25$$

b) Si las esferas se unen por un alambre, las cargas, que se atraen a una otra, pueden fluir por el alambre bajo influencia de las fuerzas que actúan en ellas. Las cargas neutralizarán lo más lejos posible y (16,0 x 10^{-14} – 6,4 x 10^{-14}) = 9,6 x 10^{-14} C se distribuirán sobre el sistema. No tomar en cuenta el efecto del alambre, por simetría 4,8 x 10^{-14} C quedará en cada esfera. La fuerza entre las dos esferas ahora es:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

$$= (9,9\times10^9)\frac{(4,8\times10^{-14}C)^2}{(0,5)^2}$$

$$= 8,29\times10^{-17}\text{N}$$

Ejemplo 8. Un electrón tiene una masa de 9,1 x 10^{-31} kg y una carga eléctrica de 1,6 x 10^{-19} C. Suponga que dos electrones están colocados cerca de uno de otro. Compare las fuerzas gravitacionales y eléctricas entre ellas.

Solución. La fuerza de atracción gravitacional entre los electrones es:

$$F_G = G\frac{m^2}{r^2} = (6,6\times10^{11})\frac{(9,1\times10^{-31})^2}{r^2}$$

$$= \frac{54,6\times10^{-72}}{r^2}\text{N m}^2$$

La fuerza de repulsión entre los electrones es:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = (9,9\times10^9)\frac{(1,6\times10^{-19})^2}{r^2}$$

$$= \frac{23,04\times10^{-29}}{r^2}\text{N m}^2$$

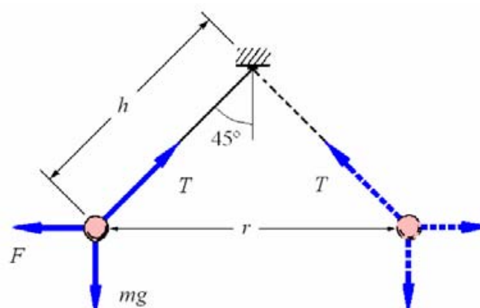
Luego

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{23,04\times10^{-29}}{54,6\times10^{-72}} = 4,2\times10^{42}$$

La fuerza gravitacional entre los electrones es despreciable en comparación con la fuerza eléctrica.

Ejemplo 9. Dos esferas conductoras pequeñas, cada uno de la masa 0,25 g, están colgando por medio de hilos aisladores de longitud 50 centímetros de modo que apenas se tocan. Se da una carga, que comparten igualmente, y a cada una toma una posición tal que el hilo por el cual cuelga forma un ángulo de 45º con la vertical. ¿Cuál es la carga en cada una?

Solución.



Hay tres fuerzas que actúan en cada esfera, el peso *mg* que actúa hacia abajo, la fuerza repulsiva de Coulomb *F* que actúa horizontalmente, y la tensión *T* en el hilo de soporte. Puesto que la esfera está en equilibrio, las componentes horizontales y verticales deben equilibrarse por separado. Así

$mg = T\cos 45^\circ$ y $F = T\text{sen}\,45^\circ$ o $F = mg\tan 45^\circ$

Pero

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2h\text{sen}45^\circ)^2}$$

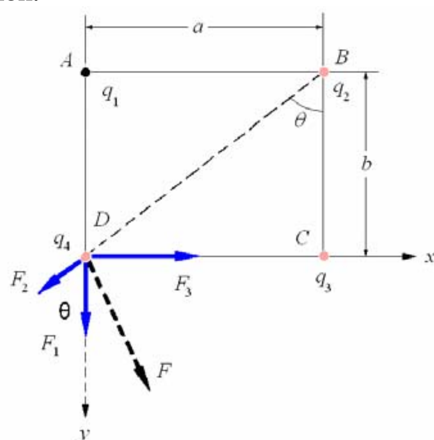
Donde *q* es la carga sobre cada esfera.

$$\therefore\ q^2 = 4\pi\varepsilon_0(2h\,\text{sen}45^\circ)mg$$

$$= \left(\frac{1}{9\times10^9}\right)\left[2\times0{,}5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2(2{,}5\times9{,}8)$$

= 13,6 x 10^{-14} C^2.
y q = 3,7 x 10^{-7}C.

Ejemplo 10. Las cargas puntuales de magnitudes 2,5 x 10^{-14} C, 1,0 x 10^{-14} C, -3,5 x 10^{-14} C, y 2.0 x 10^{-14} C se ponen en las esquinas A, B, C, y D de un rectángulo respectivamente en el cual el AB tiene una de longitud 8 cm y BC tiene una longitud de 6 cm. ¿Qué fuerza actúa sobre la carga en D debido a las otras tres?
Solución.



Las cargas en A, B, C, y D son q_1, q_2, - q_3, y q_4, respectivamente. Las fuerzas ejercidas sobre q_4, por las otras tres se muestran en el diagrama como los vectores F_1, F_2, y F_3, respectivamente. Los ejes x e y se han seleccionado en las direcciones mostradas.

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_4}{b^2},\ F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_4}{(a^2+b^2)},$$

$$F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3q_4}{a^2}$$

Las tres fuerzas que actúan sobre q_4 se combinan en una sola fuerza F con componentes (F_x, F_y) a lo largo de los ejes elegidos. F_2 se descompone a lo largo de los ejes x e y, y observamos que:

$$\mathrm{BD} = \sqrt{(8\mathrm{cm})^2 + (6\mathrm{cm})^2} = 10\,\mathrm{cm}$$

Obtenemos

$$F_x = F_3 - F_2\mathrm{sen}\theta,\ F_y = F_1 - F_2\cos\theta$$

De estas ecuaciones, se obtiene

$$F_x = \frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_3}{a^2} - \frac{q_2}{(a^2+b^2)}\times\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$= \frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_3}{a^2} - \frac{q_2a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right]$$

$$= (9\times10^9)(2{,}0\times10^{-14})\left[\frac{3{,}5\times10^{-14}}{(8\times10^{-2})^2} - \frac{(1{,}0\times10^{-14})(8\times10^{-2})}{(10\times10^{-2})^{3/2}}\right]$$

= 8,40 x 10^{-16} N.
Del mismo modo

$$F_y = \frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{a^2} + \frac{q_2a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right]$$

= 13,58 x 10^{-16} N.
El vector F tiene componentes:
(8,40x10^{-16} N y 13,58x10^{-16} N),
Cuya magnitud es:
$\sqrt{8{,}40^2 + 13{,}58^2}$ = 15,97x10^{-16} N, a un ángulo de $\tan^{-1}$ (13,58/8,40) = 58°16’ con el eje x.

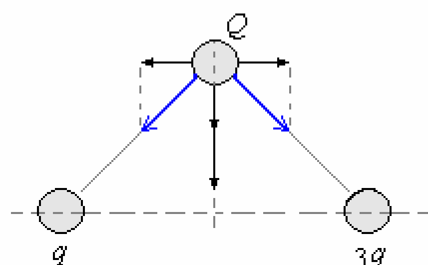
PRINCIPIO DE SUPERPOSICION - DISTRIBUCION DE CARGAS

Si más de dos cargas puntuales están presentes, las fuerzas mutuas se determinan por la aplicación repetida de la ley de Coulomb, esto viene a ser la ley de adición o principio de superposición y se demuestra experimentalmente.
Si son n las cargas esto es q_1, q_2, q_3.
La fuerza sobre la carga es

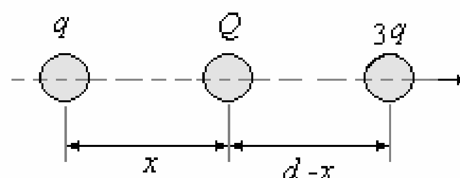
$$\vec{F}_1 = q_1\sum_{i\neq1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_{i1}}{r_{i1}^3}$$

Donde la sumatoria so extiende sobre todas las cargas con excepción de la Carga q_1.

Ejemplo 11. Dos cargas puntuales se encuentran separadas una distancia d. ¿Dónde y qué carga se debe colocar para que el sistema quede en equilibrio?
So1ución. La posición de la tercera carga Q debe estar en la recta formada por la línea que une las dos cargas, de no ser así no habría equilibrio como muestra la figura la componente vertical no tiene anulación posible.



Para determinar la posición de la carga Q llamaremos x a esta posición.



Como Q está en equilibrio

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qQ}{(d-x)^2}$$

$\Rightarrow (d-x)^2 = 3x^2$

$\Rightarrow x^2 + dx - \frac{d^2}{2} = 0$

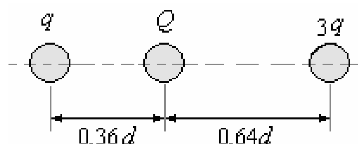
Resolviendo: $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

hay dos posiciones posibles

$x_1 = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}d = 0{,}36d$ y

$x_2 = -\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}d = -1{,}36d$,

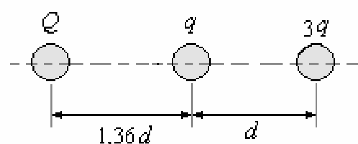
x_1 está entre ellas a la derecha de q.
x_2 está fuera a la izquierda de q.
Ahora encontramos el valor Q para x_1, para que haya equilibrio es necesario que las fuerzas sobre q se anulen.



$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qq}{(d)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(0{,}36d)^2} = 0$$

$\Rightarrow Q = -1{,}71q$

Similarmente pare x_2



$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(d)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qq}{(1{,}36d)^2} = 0$$

$\Rightarrow Q = -5{,}55q$

Ejemplo 12. Las cargas se colocan en el eje x como sigue: q1 = + 2 μC en x = 0, q_2 = - 3 μC en x = 2 m, q_3 = - 4 μC en x = 3m, y q_4 = + μC en x = 3,5 m. ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza en q_3?
Solución.

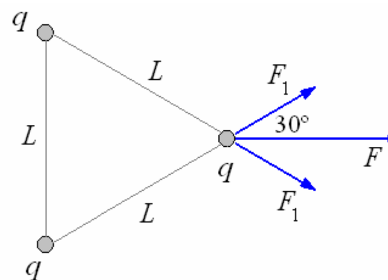
$$F = kq_3\left(\frac{q_1}{r_{13}^2} + \frac{q_2}{r_{23}^2} + \frac{q_4}{r_{43}^2}\right)$$

$$= (9\times 10^9)(4\mu C)\left[-\frac{2\mu C}{(3)^2} + \frac{3\mu C}{(1)^2} + \frac{1\mu C}{(0{,}5)^2}\right]$$

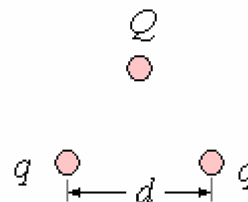
= 2,44 x 10^{-10}N/C

Ejemplo 13. Tres cargas positivas idénticas q se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero de lado L. ¿Qué fuerza experimenta una de las cargas?
Solución.

$F = 2F_1\cos 30° = 2k\frac{q^2}{L^2}\cos 30° = \sqrt{3}k\frac{q^2}{L^2}$



Ejemplo 14. Tres cargas puntuales, que inicialmente están infinitamente lejos unas de otras, se colocan en los vértices de un triángulo equilátero de lados d. Dos de las cargas puntuales son idénticas y su carga es q. Si el trabajo neto que se requiere para colocar las tres cargas en el triángulo es cero ¿cuál es el valor de la tercera carga?
Solución.



Trabajo para colocar la primera carga:

$W_1 = 0$

Trabajo para colocar la segunda carga:

$$W_2 = q\Delta V_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Trabajo para colocar la tercera carga:

$$W_3 = Q\Delta V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d} + \frac{q}{d}\right) = \frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

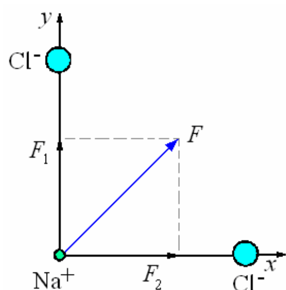
Trabajo neto para colocar las tres cargas:

$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0$

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{2Qq}{4\pi\varepsilon_0 d} = 0 \Rightarrow Q = -\frac{q}{2}$$

Ejemplo 15. La sal de mesa (cloruro de sodio) es un cristal con una estructura cúbica simple con iones de Na+ y de Cl^- que se alternan en sitios adyacentes del enrejado.
La distancia entre iones es 2,82 x 10^{-10}m = 0,282 nm (1 nm = 10^{-9} m).
a) ¿Qué fuerza experimenta un ión del Na^+ debido a uno de sus vecinos Cl^- más cercano?
b) ¿Qué fuerza experimenta un ión de Cl^- debido a un ión de Na+ vecino?
c) ¿En qué fuerza experimenta un ión de Na+ en el origen debido a los iones de Cl^- en (a, 0, 0) y (0, a, 0)?
d) ¿Cuál es el peso de un ión del Na^+ de masa 3,82 x 10^{26}kg?

Solución.



a) $F_1 = k\dfrac{e^2}{r^2} = 9\times 10^9\dfrac{\left(1,6\times 10^{-19}\right)^2}{\left(0,282\times 10^{-9}\right)^2}$

= 2,90 x 10^{-9} N

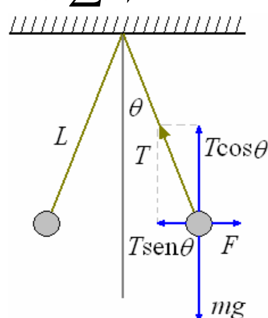
b) Por la tercera ley de Newton:
La fuerza sobre el Cl^- debido al Na+ es igual que la fuerza en el Na+ debido al Cl^-.

c) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ = 2,90 x 10^{-9} $\left(\hat{i} + \hat{j}\right)$ N

$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ = 4,10 x 10^{-9} N

d) $W = mg$ = (3,82 x 10^{26})(9,8) = 3,7 x 10^5N
Como las fuerzas eléctricas que actúan en objetos cargados pequeños son mucho más grandes que sus pesos, a menudo no se toman en cuenta.

Ejemplo 16. Dos esferas idénticas de tecknopor, cada una de 0,030 kg, cada esfera atada a un hilo de 30 cm de largo y suspendidas de un punto. A cada esfera se le da una carga q (frotándola con un paño), las dos esferas se repelen formando un ángulo de 7º con la vertical. ¿Cuál es la carga en cada esfera?
Solución. Dibuje el diagrama de fuerzas para una de las esferas. La esfera está en equilibrio, tal que: $\sum F_H = 0$ y $\sum F_V = 0$



$T\cos\theta - mg = 0 \;\Rightarrow\; T\cos\theta = mg$

$T\text{sen}\theta - F = 0 \;\Rightarrow\; T\text{sen}\theta = F$

Dividiendo: $\dfrac{T\text{sen}\theta}{T\cos\theta} = \tan\theta = \dfrac{F}{mg}$, donde

$F = k\dfrac{q^2}{(2L\text{sen}\theta)^2}$

Resolviendo:

$q^2 = \dfrac{(mg\tan\theta)(2L\text{sen}\theta)^2}{k}$

$= \dfrac{(0,03)(9,8)(\tan 7^\circ)(2)(0,3)(\text{sen}7^\circ)}{9\times 10^9}$

$\Rightarrow q$ = 0,146 x 10^{-6} C = 0,146 μC

CARGA DISTRIBUIDA. En el caso ya no de cargas puntuales sino de una distribución continua, a pesar que la carga eléctrica se encuentre en múltiplos de una carga básica que es el electrón (e = 1,6x10^{-19} C), la cual es extremadamente pequeña. Esto significa que la carga macroscópica está compuesta de un número muy grande de electrones. Así podemos describir una distribución de carga en términos de una densidad de carga.

Densidad de carga volumétrica definida por

$$\rho = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

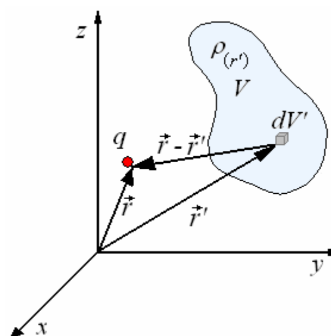
Densidad de carga superficial definida por

$$\sigma = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

Densidad de carga lineal definida por

$$\lambda = \lim_{\Delta \ell\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell}$$

Ejemplo 17. ¿Cuál sería la fuerza sobre une carga q, debido a cargas distribuidas por volumen?
Solución.



Sea al volumen V con densidad de Carga $\rho_{(r')}$. La fuerza sobre la Carga q es:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\rho_{(r')}dV'$$

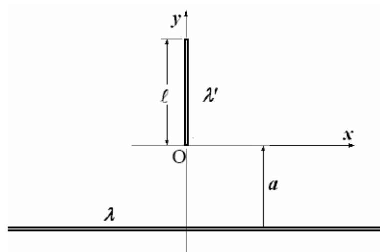
Del mismo para una distribución superficial, con densidad de Carga $\sigma_{(r')}$

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\sigma_{(r')}dS'$$

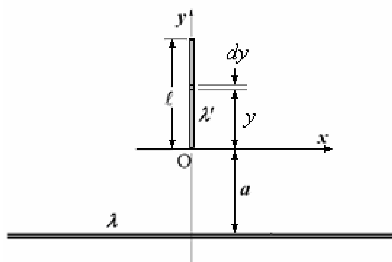
y para una distribución lineal, con densidad de Carga $\lambda_{(r')}$

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\lambda_{(r')}d\ell'$$

Ejemplo 18. La figura muestra un alambre infinito horizontal con densidad lineal de carga λ, y un alambre finito de largo y densidad lineal de carga $\lambda' = \lambda_0(y + a)$, donde λ_0 es una constante de unidad C/m^2.



a) ¿Cuál es la fuerza que el alambre infinito ejerce sobre el alambre de largo ℓ ?
b) ¿Cuál es la fuerza que el alambre de largo ℓ ejerce sobre el alambre infinito?
Solución.
a) La fuerza que el alambre infinito ejerce sobre el alambre de largo ℓ :



$$d\vec{F} = dq\vec{E}\ ,\ \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(a+y)}\hat{j}\ ,$$

$$dq = \lambda' dy = \sigma_0(a+y)dy$$

Luego: $d\vec{F} = \sigma_0(a+y)dy\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(a+y)}\hat{j}$

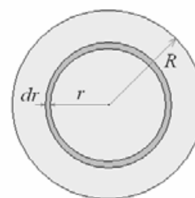
$$= \frac{\lambda\sigma_0 dy}{2\pi\varepsilon_0}\hat{j}$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{\lambda\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\hat{j}\int_0^\ell dy = \frac{\lambda\sigma_0\ell}{2\pi\varepsilon_0}\hat{j}$$

b) La fuerza que el alambre de largo ℓ ejerce sobre el alambre infinito por la tercera ley de Newton es:

$$-\vec{F} = -\frac{\lambda\sigma_0\ell}{2\pi\varepsilon_0}\hat{j}$$

Ejemplo 19. Una esfera maciza, no conductora de radio R, tiene una densidad de carga volumétrica $\rho = A/r$, donde A es constante. Calcular la carga de la esfera.
Solución.

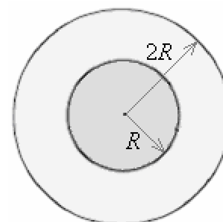


Si $\rho = \dfrac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV$

y $q = \int_{r=0}^{r=R}\rho dV$, con $\rho = \dfrac{A}{r}$ y $dV = 4\pi r^2 dr$:

$$q = \int_0^R \frac{A}{r}4\pi r^2 dr = 4\pi A\int_0^R rdr = 2\pi AR^2$$

Ejemplo 20. Se tiene una esfera aisladora con densidad de carga variable de la forma $\rho = \left(\rho_0/r^2\right)e^{-r}$ y radio R limitada exteriormente por una esfera conductora de radio interior R y exterior $2R$. En la esfera conductora hay una carga neta tal que el potencial exterior ($r > 2R$) es constante. Determine la carga total en la esfera aisladora.



Solución. La carga total en una región del espacio donde hay una densidad de carga ρ está dada por la integral:

$$q = \int_V \rho dV$$

En este caso, donde la simetría es esférica, la expresión toma la forma:

$$q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R \rho_0\frac{e^{-r}}{r^2}r^2\operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 4\pi\rho_0\int_0^R e^{-r}dr = 4\pi\rho_0\left(1-e^{-R}\right)$$

CAMPO ELECTRICO - INTRODUCCION.
Nosotros conocemos la existencia del campo gravitacional porque al dejar en un punto del espacio (cerca de la tierra) una masa m esta sufre la acción de la fuerza gravitacional $\vec{F}$, habiendo en ese punto una intensidad de campo gravitacional $\vec{g}$, donde

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Este valor en el punto no cambie con el tiempo, depende de la masa de la tierra y de la distancia

$$\vec{F} = G\frac{mM_T}{r^2}\hat{r} \text{ y } \vec{g} = \frac{GM_T}{r^2}\hat{r}$$

La Ley de Coulomb establece la fuerza de interacción entre dos cargas, pero cuando quitamos una de las cargas ¿qué hay en ese espacio? Similarmente al **campo gravitacional** podemos decir que el espacio que rodea a la carga esta afectado por lo que llamamos **campo eléctrico.**

DEFINICIÓN DE CAMPO ELÉCTRICO

Sea una carga q_1 fija en el espacio, la acción sobre la carga q_2 es

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}$$

Sí variamos la posición de q_2 la fuerza en cada punto dependerá de las coordenadas de su posición. Para eliminar la dependencia de la fuerza a q_2, se especifica esta como carga unitaria y positiva. Así el campo fuerza se define como la fuerza por unidad de carga positiva en todos los puntos alrededor de q_1, un resultado equiva1ente se obtiene dividiendo la fuerza en cada punto por el valor de q_2, esto es

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^2}\hat{r}$$

Para el caso del Campo debido a cargas distribuidas.

- Cargas puntuales. Campo producido por las n cargas puntuales (q_1, q_2, q_3, q_2 ..... q_2)en un punto determinado por $\vec{r}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}$$

- Distribución volumétrica

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho_{(r')}\frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}dV'$$

- Distribución superficial

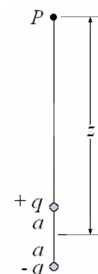
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \sigma_{(r')}\frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}dS'$$

- Distribución lineal

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \lambda_{(r')}\frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}d\ell'$$

Ejemplo 21. Un **dipolo eléctrico** consiste en las cargas + q y - q separadas por una distancia. 2a Si las cargas se colocan en (0, 0, a) y (0, 0, - a) en el eje de z (el eje del dipolo), determine el campo eléctrico del dipolo en un punto a una distancia z del origen en el eje de z, donde z >> 2 a. Exprese el resultado en los términos del momento dipolo eléctrico, definido como $p = 2aq$.

Solución.



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(z-a)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{(z+a)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left(\frac{1}{z^2 - 2az + a^2} - \frac{1}{z^2 + 2az + a^2}\right)$$

Como $a^2 << 2az << z^2$, podemos eliminar a^2

$$\frac{1}{z^2 - 2az} = \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{2a}{z}\right)}$$

Usando $\frac{1}{1-\delta} \approx 1 + \delta$, si $\delta << 1$:

$$\frac{1}{z^2\left(1 - \frac{2a}{z}\right)} = \frac{1}{Z^2}\left(1 + \frac{2a}{z}\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}\left[1 + \frac{2a}{z} - \left(1 - \frac{2a}{z}\right)\right]$$

$$= \frac{aq}{\pi\varepsilon_0 z^2}$$

o $E = \dfrac{p}{2\pi\varepsilon_0 z^2}$

La materia en la naturaleza es por general eléctricamente neutra, no se encuentra tan a menudo situaciones donde las fuerzas se deben a la carga neta en un objeto. Sin embargo, todo puede adquirir un momento dipolar cuando está colocado en un campo eléctrico porque las cargas negativas en los átomos son jaladas en una forma tirada y las cargas positivas en el núcleo son jaladas en la dirección opuesta. Así los dipolos eléctricos desempeñan un papel muy importante en nuestra comprensión de la materia. Cuando un dipolo eléctrico se coloca en un campo eléctrico, tiende a alinearse con su eje paralelo al campo. Si no es paralelo al campo, experimenta un

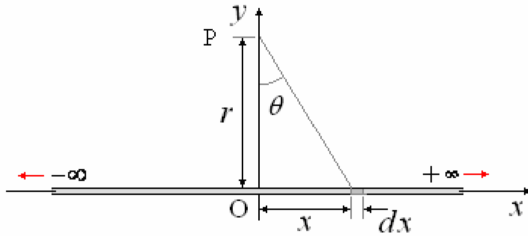
torque $\vec{\tau}$. Asociado a este torque hay una energía potencial U, donde

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E} \text{ y } U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\theta$$

Aquí θ es el ángulo entre el campo eléctrico y el eje del dipolo y el $p = 2aq$ es el momento del dipolo.

Ejemplo 22. Campo eléctrico de una línea recta infinita con carga λ Coulombios/metro.

Solución. Consideremos la línea como se muestra en la figura el punto P situado a una distancia r de la recta,



La carga del elemento dx es $dq = \lambda\, dx$

El campo eléctrico en P producido por este elemento es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

Donde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y $r_{12} = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$ con

$$\vec{r}_1 = x\hat{i} \text{ y } \vec{r}_2 = r\hat{j}$$

$$\vec{r}_{12} = r\hat{j} - x\hat{i} \Rightarrow r_{12} = \left(r^2 + x^2\right)^{1/2}$$

Luego: $d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}\left(r\hat{j} - x\hat{i}\right)$

o $d\vec{E} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{rdx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}\hat{j} - \dfrac{xdx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}\hat{i}\right]$

El campo eléctrico total lo encontraremos integrando desde $x = -\infty$ hasta $x = \infty$.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rdx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}\hat{j} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}\hat{i}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[I_1 - I_2\right]$$

Integrando I_1:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{rdx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}$$

Cambiando variable: $x = r\tan\theta$

$$\Rightarrow dx = r\sec^2\theta d\theta$$

Los límites $x = -\infty \rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{2}$

y $x = \infty . \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

De aquí

$$I_1 = \frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \left.\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{r}$$

Integrando I_2:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}} = -\left.\frac{1}{\left(r^2+x^2\right)^{1/2}}\right|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Valor que esperábamos para I_2 ya que al haber simetría los componentes horizontales se anulan entre sí.

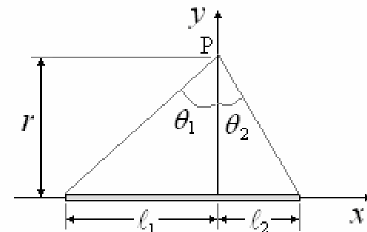
Finalmente, reemplazando los valores de I_1 e I_2.

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{i}$$

Como el campo sale radialmente, el resultado puede escribirse.

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

Recta finita. Para el caso de una recta finita la variación son los límites, veamos por ejemplo, encontrar el campo eléctrico en el punto P de la figura



aquí x varía de $x = -\ell_1$ a $x = \ell_2$

la integración

$$I_1 = \frac{1}{r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta = \left.\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\ell_2}{\left(r^2+\ell_2^2\right)^{1/2}} + \frac{\ell_1}{\left(r^2+\ell_1^2\right)^{1/2}}\right]$$

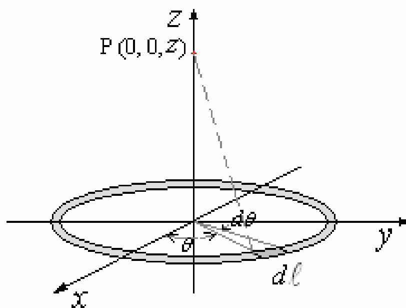
$$I_2 = \int_{-\ell_1}^{\ell_2}\frac{xdx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}} = -\left.\frac{1}{\left(r^2+x^2\right)^{1/2}}\right|_{-\ell_1}^{\ell_2}$$

$$= -\left[\frac{\ell_2}{\left(r^2+\ell_2^2\right)^{1/2}} - \frac{\ell_1}{\left(r^2+\ell_1^2\right)^{1/2}}\right]$$

El campo eléctrico es $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[I_1 - I_2\right]$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\ell_2}{\left(r^2+\ell_2^2\right)^{1/2}} + \frac{\ell_1}{\left(r^2+\ell_1^2\right)^{1/2}}\right]\hat{j} + \left[\frac{\ell_2}{\left(r^2+\ell_2^2\right)^{1/2}} - \frac{\ell_1}{\left(r^2+\ell_1^2\right)^{1/2}}\right]\hat{i}\right\}$$

Ejemplo 23. Campo eléctrico en el eje de un anillo de radio R y carga λ Coulombios/metro



Solución. Consideremos un elemento de anillo $d\ell$, determinado por el ángulo θ y barrido por $d\theta$ de tal manera que $d\ell = Rd\theta$.

La carga del elemento $d\ell$ es $dq = \lambda d\ell = \lambda R d\theta$

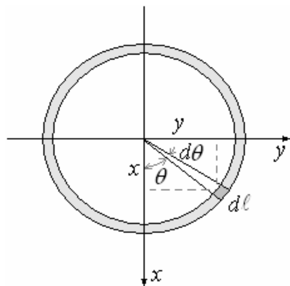
El campo eléctrico producido por este elemento en P es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

Donde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y $r_{12} = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$

con $\vec{r}_1 = x\hat{i} + y\hat{j} = R\cos\theta\,\hat{i} + R\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$

y $\vec{r}_2 = z\hat{k}$



$\vec{r}_{12} = z\hat{k} - R\cos\theta\,\hat{i} - R\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$,

$r_{12} = \left(z^2 + R^2\right)^{1/2}$

Luego

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\left(z\hat{k} - R\cos\theta\hat{i} - R\operatorname{sen}\theta\hat{j}\right)$$

O

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\left(zd\theta\hat{k} - R\cos\theta d\theta\hat{i} - R\operatorname{sen}\theta d\theta\hat{j}\right)$$

El campo eléctrico total lo encontramos integrando desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$.

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} d\vec{E} =$$

$$\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\left(z\int_0^{2\pi} d\theta\hat{k} - R\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\hat{i} - R\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta d\theta\hat{j}\right)$$

La primera integral es 2π, las dos últimas son 0, como era de esperar ya que sobre el eje la resultante del campo eléctrico por simetría debe ser vertical.

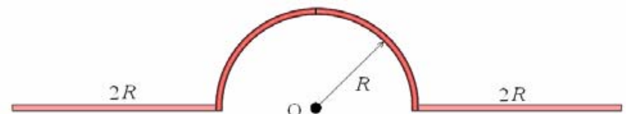
Finalmente el Campo es

$$\vec{E} = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

Si el anillo tiene una carga total Q:

$$Q = 2\pi R\lambda \text{ y } \vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

Ejemplo 24. Un segmento de línea de carga positiva, tiene una densidad lineal de carga uniforme λ. Este se dobla en la forma indicada en la figura.



Halle:

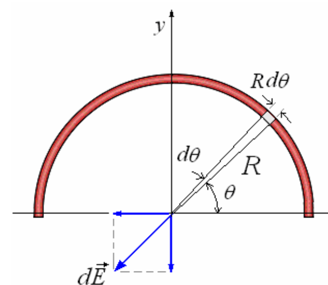
a) el campo eléctrico generado por la semicircunferencia en el punto O.

b) el campo eléctrico generado por cada porción recta en el punto O.

c) la fuerza eléctrica que ejercerá una carga puntual positiva q ubicada en el punto O sobre la línea de carga completa.

Solución.

a)



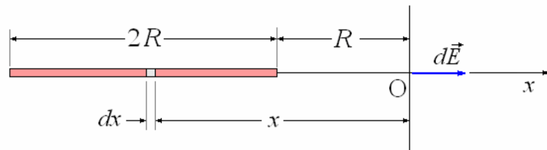
$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(-\cos\theta\hat{i} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\right)$$

$$= \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\cos\theta\hat{i} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi}\left(-\cos\theta\hat{i} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\right)d\theta$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{j}$$

b) Campo debido al lado izquierdo:



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{i} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{i}$$

Integrando:

$$\vec{E}_{izquierda} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\hat{i}\int_{-3R}^{-R}\frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\hat{i}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-3R}^{-R}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\hat{i}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right] = \frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_0 R}\hat{i}$$

Similarmente encontramos el campo debido al lado derecho:

$$\vec{E}_{derecha} = -\frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_0 R}\hat{i}$$

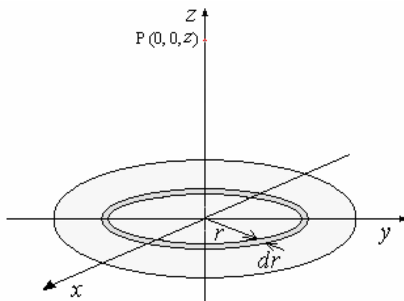
c) Si colocamos una carga q en el punto O,

$$\vec{F} = q\vec{E}_{total} = -\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{j}$$

Aplicando la tercera ley de Newton, la línea será empujada por una fuerza igual a:

$$\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{j}$$

Ejemplo 25. Campo eléctrico en el eje de un disco de radio R y carga σ C/m^2.



Solución. Consideremos un elemento anular de radio r y espesor dr cuya superficie es $dA = 2\pi r dr$, con carga $dq = \sigma\, dA = 2\pi\,\sigma\, rdr$.

El Campo eléctrico producido por este elemento en P es:

(utilizando el resultado obtenido para un anillo).

$$d\vec{E} = \frac{zdq}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{z\sigma\, rdr}{2\varepsilon_0\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

El Campo eléctrico total lo encontramos integrando desde $r = 0$ hasta $r = R$.

$$\vec{E} = \int_0^R d\vec{E} = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(z^2 + r^2\right)^{1/2}}\right]_0^R\hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}\right]\hat{k}$$

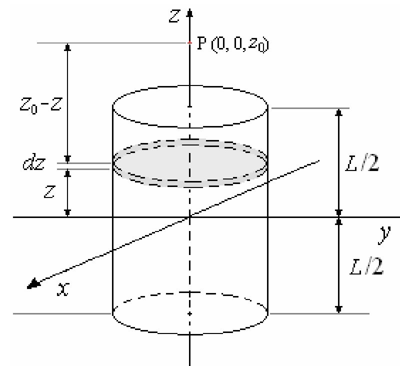
Si la carga total del disco es Q: $Q = \sigma\,\pi R^2$

y $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}\right]\hat{k}$

Para el caso de un **PLANO INFINITO** la integración se realiza desde $r = 0$ hasta $r = \infty$ y el campo eléctrico es

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Ejemplo 26. Ahora veamos el Campo eléctrico en el eje producido por un cilindro de radio R, largo L y carga ρ C/m^3.



Solución. Para evaluar el Campo eléctrico en el punto P, tomemos un elemento diferencial con forma de disco de radio R y espesor dz cuyo volumen es

$dV = \pi R^2 dz$ y su carga $dq = \rho dV = \rho\pi R^2 dz$.

El Campo eléctrico producido por este elemento en el punto P es: (utilizando el resultado del disco)

$$d\vec{E} = \frac{\rho\pi R^2 dz}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left\{1 - \frac{(z_0 - z)}{\left[(z_0 - z)^2 + R^2\right]^{1/2}}\right\}\hat{k}$$

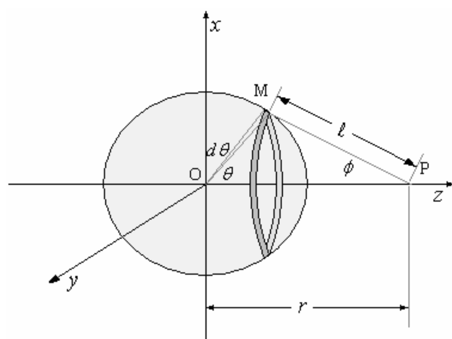
El Campo eléctrico total lo encontramos integrando desde $z = -L/2$ hasta $z = L/2$.

$$\vec{E} = \int_{-L/2}^{L/2} d\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{\int_{-L/2}^{L/2} dz - \int_{-L/2}^{L/2}\frac{(z_0 - z)dz}{\left[(z_0 - z)^2 + R^2\right]^{1/2}}\right\}\hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{z + \left[(z_0 - z)^2 + R^2\right]^{1/2}\right\}_{-L/2}^{L/2}\hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{L + \left[\left(z_0 - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right]^{1/2} - \left[\left(z_0 + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right]^{1/2}\right\}\hat{k}$$

Ejemplo 27. Campo eléctrico producido por una carga σ C/m^2 distribuida sobre une superficie esférica de radio R.



Solución. Tomemos un anillo diferencial determinado por el ángulo θ y barrido por $d\theta$, su área es: $dS = (2\pi R\,\text{sen}\,\theta)Rd\theta$,

donde

R = radio de la esfera

$2\pi R\,\text{sen}\,\theta$ = circunferencia del anillo

$Rd\theta$ ancho del anillo

su Carga es $dq = \sigma dS = \sigma(2\pi R\,\text{sen}\,\theta)Rd\theta$

El Campo producido por este elemento en el punto P es (utilizando la expresión del Campo eléctrico obtenido para un anillo)

$$d\vec{E} = \frac{[\sigma(2\pi R\,\text{sen}\,\theta)Rd\theta](\ell\cos\phi)}{4\pi\varepsilon_0\ell^3}\hat{k}$$

$$d\vec{E} = \frac{\sigma R^2\,\text{sen}\,\theta\cos\phi}{4\pi\varepsilon_0\ell^2}d\theta\hat{k} \quad (1)$$

Aplicando la ley de los cosenos al triángulo OPM

$R^2 = \ell^2 + r^2 - 2\ell r\cos\phi$ y

$\ell^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$

De la primera obtenemos: $\cos\phi = \dfrac{\ell^2 + r^2 - R^2}{2\ell r}$

Derivando la segunda: $2\ell d\ell = 2Rr\,\text{sen}\,\theta d\theta$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\theta d\theta = \frac{\ell d\ell}{Rr}$$

Sustituyendo $\cos\phi$ y $\text{sen}\,\theta d\theta$ en la ecuación (1)

$$d\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 r^2}\left(1 + \frac{r^2 - R^2}{\ell^2}\right)d\ell\hat{k}$$

Para obtener el campo eléctrico total integrarnos entre $\ell = r - R$ y $\ell = r + R$

$$\vec{E} = \int_{r-R}^{r+R} d\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 r^2}\int_{r-R}^{r+R}\left(1 + \frac{r^2 - R^2}{\ell^2}\right)d\ell\hat{k}$$

$$= \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 r^2}\left[\ell - \frac{(r^2 - R^2)}{\ell}\right]_{r-R}^{r+R}\hat{k} = \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 r^2}(4R)\hat{k}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\hat{k}$$

Siendo la carga total $Q = \sigma 4\pi R^2$

Tenemos para $r > R$: $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\hat{k}$

En el caso de entrar el punto P dentro de la esfera o sea $r < R$, los límites son:

$\ell = R - r$ y $\ell = R + r$

De aquí: $\vec{E} = \dfrac{\sigma R}{4\varepsilon_0 r^2}\left[\ell - \dfrac{(r^2 - R^2)}{\ell}\right]_{R-r}^{R+r}\hat{k}$

$$= \frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 r^2}(0)\hat{k} = 0$$

En resumen

$$\begin{cases} \text{Para } r > R \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{k} \\ \text{Para } r = R \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{k} \\ \text{Para } r < R \Rightarrow \vec{E} = 0 \end{cases}$$

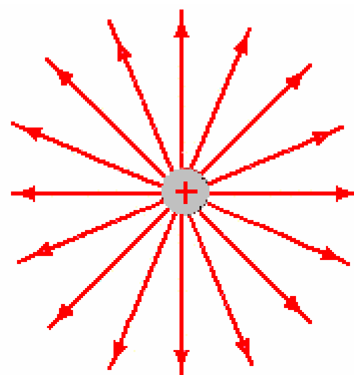
LINEAS DE FUERZA ELECTRICA

Para una mejor visualización del campo eléctrico $\vec{E}$ Faraday ideó un modelo de campo eléctrico formado por líneas de fuerza. La relación entre las líneas de fuerza y el vector campo eléctrico son:

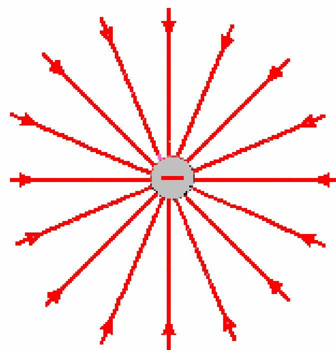
a) La tangente a una línea de fuerza en un punto cualquiera de la dirección de $\vec{E}$ en ese punto.

b) Las líneas de fuerza se dibujan de tal manera que el número de ellas por unidad de área que atraviesan sea proporcional a la magnitud de $\vec{E}$, es decir donde las líneas están cercanas, $\vec{E}$ es grande y donde están separadas, $\vec{E}$ es pequeño.

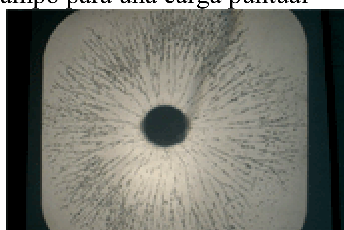
Si tenemos una carga puntual positiva las líneas de fuerza salen de ella. En los puntos cercanos las líneas están más juntas que en los alejados lo que nos muestra que el campo eléctrico es más intenso cerca y se va disipando a medida que el punto se aleja de la carga.



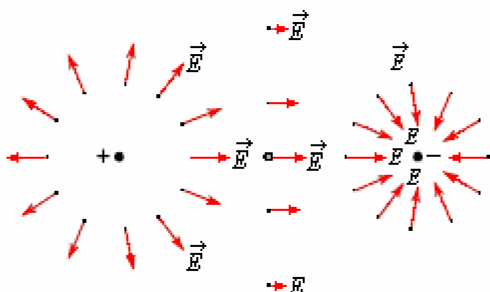
Las líneas de fuerza de una carga negativa se representan como líneas que van hacia la carga.



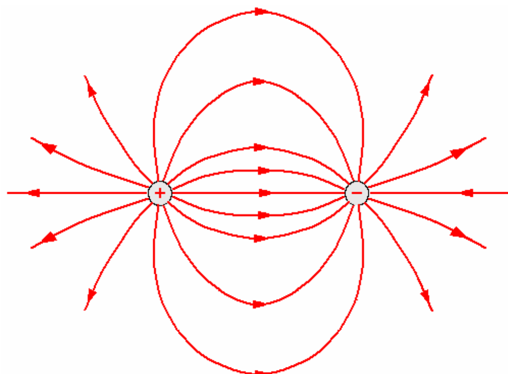
Por medio del uso de aceite, semillas de grama y empleando un pequeño electrodo cilíndrico que se carga con el generador de Wimshurt, se obtienen las líneas de campo para una carga puntual



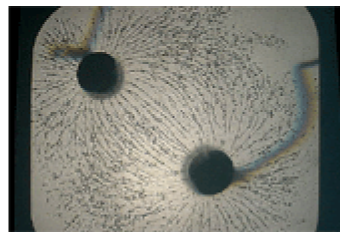
Si dibujamos los vectores del campo eléctrico $\vec{E}$ en los varios puntos alrededor de nuestra distribución de carga, una figura del campo eléctrico comienza a emerger.



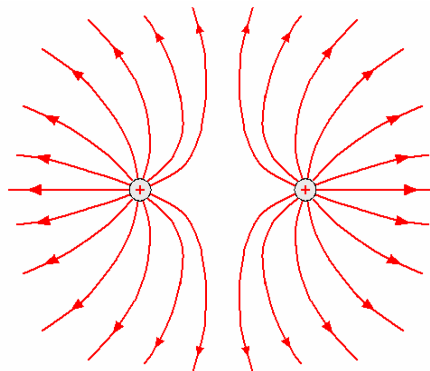
En el caso de dos cargas diferentes la figura a continuación nos muestra las líneas de fuerza



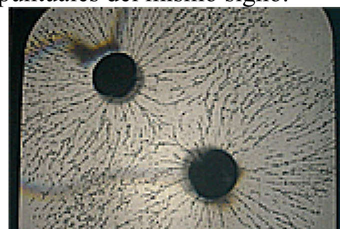
Por medio del uso de aceite, semillas de grama y empleando dos electrodos cilíndricos que se cargan de distinto signo con el generador de Wimshurt, se obtienen las líneas de campo de dos cargas eléctricas puntuales de distinto signo.



En el caso de dos Cargas positivas iguales la figura siguiente nos muestra las líneas de fuerza.



Por medio del uso de aceite, semillas de grama y empleando dos electrodos cilíndricos que se cargan de igual signo con el generador de Wimshurt, se obtienen las líneas de campo para dos cargas eléctricas puntuales del mismo signo.

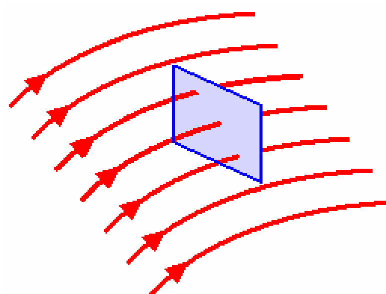


FLUJO DEL CAMPO ELÉCTRICO.

Vemos que las líneas salen o entran hacia la carga en forma de un flujo de Campo eléctrico.

Para poder encontrar una relación cuantitativa entre 1as líneas de fuerza y la intensidad del campo eléctrico definimos que el número de líneas $\Delta\Phi$ que ocupa un elemento de superficie ΔS, perpendicular a ésta, como el promedio de la intensidad de campo (E_n) en ΔS, es decir:

$$\Delta\Phi = E_n \Delta S$$



Para poder relacionar el número de líneas con el campo eléctrico en cualquier punto, hacemos que $\Delta S \rightarrow 0$ y $d\Phi = EdS$.

Para quitar la restricción de perpendicularidad de la superficie a las líneas de fuerza (es decir el campo eléctrico) podemos escribir vectorialmente

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

El número de líneas a través de una superficie S será

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

A esto se llama propiamente **FLUJO ELECTRICO**.

Ejemplo 28. Encuentre el flujo total debido a una carga puntual q.

Solución. A una distancia r de la carga el campo eléctrico es: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$, ese campo atraviesa una superficie $d\vec{S} = \hat{r}dS$.

El flujo eléctrico a través de $d\vec{S}$ es

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}dS$$

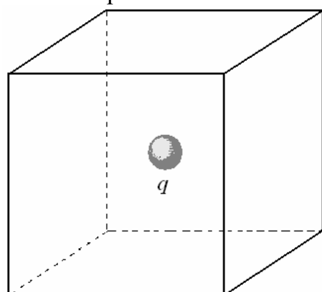
$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\int_S dS$$

El valor de $\int_S d\vec{S}$, siendo el lugar geométrico de un punto a una distancia r de la carga puntual es el área de una esfera de radio r: $\int_S d\vec{S} = 4\pi r^2$

Luego: $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\int_S dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2$

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Ejemplo 29. En el centro geométrico de un cubo de 2 m de arista tenemos una carga de 50 μC. Calcular el flujo eléctrico que atravesará a cada una de las caras del cubo. (El medio que se considera es el vacío).



Solución. El flujo total debido a la carga es

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

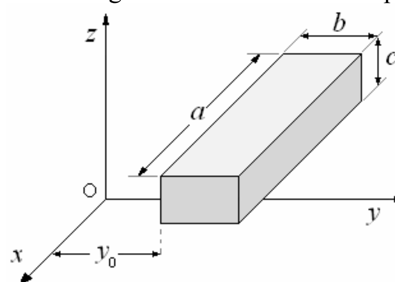
Como el cubo tiene seis caras y la carga está en el centro geométrico de éste, el flujo que atraviesa una de ellas será:

$$\Phi_c = \frac{\Phi}{6} = \frac{q}{6\varepsilon_0} = \frac{50\times10^{-6}}{6(8,85415\times10^{-12})}$$

$$= 0,94 \times 10^6 \frac{Nm^2}{C}$$

Ejemplo 30. En la superficie cerrada de la figura a = 0,5 m, b = 0,4 m, c = 0,3 m e y_0 = 0,2 m. El campo electrostático en que está sumergida no es homogéneo y viene dado en el SI por $\vec{E} = (4+3y^2)\hat{j}$.

Determinar la carga neta encerrada en la superficie.



Solución. Aplicando la definición de flujo a cada una de las áreas que forman el paralelepípedo las únicas en que éste no es cero son las paralelas al plano xz (en las demás es nulo puesto que el vector campo electrostático y los vectores área son perpendiculares); llamando A_1 la que dista y_0 del plano xz y A_2 la que dista $y_0 + b$, y teniendo en cuenta que $\vec{E}$ y sus vectores área son paralelos:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1}\vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2$$

$\vec{E}_1 = (4+3y_0^2)\hat{j}$, $d\vec{S}_1 = -dS_1\hat{j}$ y

$\vec{E}_2 = [4+3(y_0+b)]^2\hat{j}$, $d\vec{S}_2 = dS_2\hat{j}$

Con esto:

$$\Phi = -(4+3y_0^2)\int_{S_1}dS_1 + [4+3(y_0+b)]^2\int_{S_2}dS_2$$

$$= -(4+3y_0^2)ac + [4+3(y_0+b)]^2 ac$$

$$= 3abc(b+2y_0)$$

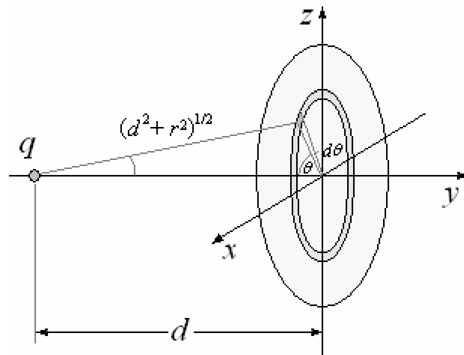
Como este flujo es debido a la carga encerrada en la superficie tenemos: $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Igualando: $3abc(b+2y_0) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow Q = 3abc(b+2y_0)\varepsilon_0$$

Ejemplo 31. Una carga puntual q se encuentra a una distancia d en el eje de un disco de radio R. ¿Cuál es el flujo a través de este disco?

Solución.



La figura muestra una sección dS perteneciente al disco de radio R.

El flujo a través de dS es: $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Donde:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + d^2\right)} \left(\text{sen}\beta \cos\theta\, \hat{i} + \cos\beta\, \hat{j} + \text{sen}\beta \,\text{sen}\theta\, \hat{k}\right)$$

, $d\vec{S} = rdrd\theta\, \hat{j}$:

de aquí $d\Phi = \dfrac{q\cos\beta rdrd\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + d^2\right)}$, como

$$\cos\beta = \frac{d}{\left(r^2 + d^2\right)^{1/2}} :$$

$$d\Phi = \frac{qd\; rdrd\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

E]. flujo a través del disco es:

$$\Phi = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{qd\; rdrd\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

$$= \int_0^R \frac{qd\; rdr}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + d^2\right)^{3/2}} \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \int_0^R \frac{qd\; rdr}{2\varepsilon_0\left(r^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

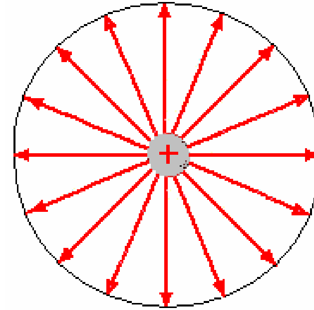
$$= -\frac{qd}{2\varepsilon_0\left(r^2 + d^2\right)^{1/2}}\Bigg|_0^R$$

$$= \frac{qd}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{\left(r^2 + d^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{d}{\left(r^2 + d^2\right)^{1/2}}\right]$$

LA LEY DE GAUSS

Consideremos una carga puntual q y encontremos el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de radio r concéntrica con la carga.



El Campo eléctrico de la esfera es producido por la carga en cada punto

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

El flujo a través de la esfera es $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

donde $d\vec{S} = \hat{r}dS$

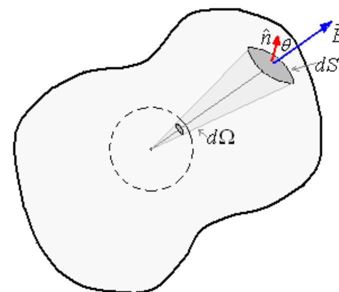
y $\Phi = \oint_S \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}dS = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_S dS$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

En resumen:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

El flujo a través de la esfera es proporcional a la carga es independiente del radio de la superficie. Consideremos ahora el caso de una carga q encerrada por una superficie arbitraria S como se muestra en la figura siguiente.



El flujo a través de le superficie S es $\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Como $d\vec{S} = \hat{n}dS$

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \oint_S E\cos\theta\, dS$$

$$= \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\, dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\cos\theta\, dS}{r^2}$$

Pero

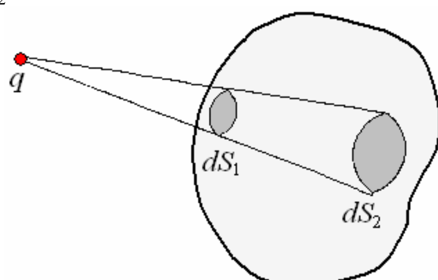
$dS\cos\theta = r^2 d\Omega \Rightarrow \dfrac{\cos\theta\, dS}{r^2} = d\Omega$, el ángulo sólido subtendido por el elemento de superficie dS,

luego. $\Phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega$

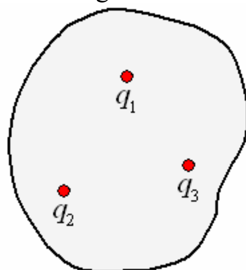
como el ángulo sólido total es 4π :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Este resultado es el mismo que en el caso de una superficie esférica, por lo tanto válido para cualquier superficie.
Si la carga está fuera de la superficie cerrada, el flujo a través de dS_1 es igual pero opuesto al flujo a través de dS_2



de aquí que el flujo neto es igual a cero.
Si hay varias cargas dentro de la superficie arbitraria, el flujo total es igual a la suma de los flujos producidos por cada carga.



Con todo esto podemos establecer **la ley de Gauss**.
El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que encierra varias cargas es:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Esta ecuación derivada para cargas puntuales puede aplicarse para cualquier configuración, notando que la integral en caso que no exista simetría geométrica se complica en su solución.

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_Q \frac{dq}{\varepsilon_0}$$

Ejemplo 32. Deducir la ley de Coulomb para dos cargas puntuales q_1 y q_2 partiendo de la ley de Gauss.
Solución. Aplicando la ley de Gauss y el concepto de flujo a una superficie esférica en cuyo centro se encuentra la carga eléctrica q_1, deducimos:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

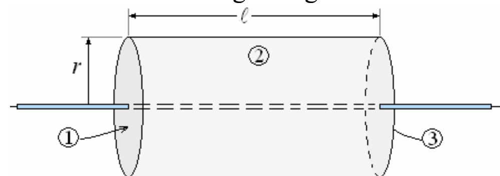
$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}$$

Si colocamos la carga q_2 en un punto en que el campo sea E, la fuerza electrostática sobre esta carga será:

$$F = q_2 E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Obsérvese que este ejemplo es lógicamente recíproco; sin embargo, demuestra la equivalencia entre las leyes de Gauss y de Coulomb.

Ejemplo 33. Se tiene una línea infinita con una carga de densidad lineal uniforme λ C/m. ¿Cuál es el campo eléctrico a una distancia r de la línea?
Solución. En este caso la superficie gausiana conveniente es un cilindro de radio r y longitud ℓ como se muestra en la figura siguiente.



Aplicando la ley de Gauss.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = q$$

La superficie la podemos suponer en 3 partes: (1) y (3) las tapas y (2) el cilindro propiamente dicho. La carga encerrada por la superficie es $q = \lambda\ell$

$$\varepsilon_0\left(\int_1 \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_3 \vec{E}\cdot d\vec{S}\right) = \lambda\ell$$

Como E es perpendicular a la línea.

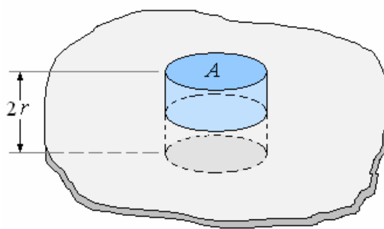
$$\int_1 \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \text{ y } \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

Luego $\varepsilon_0 \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{S} = \lambda\ell \Rightarrow \varepsilon_0 E(2\pi r\ell) = \lambda\ell$

y $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

Vectorialmente $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$

Ejemplo 34. Se tiene un plano infinito con una densidad de carga superficial. σ ¿Cuál es el Campo eléctrico a una distancia r del plano?
Solución. Aquí conviene como superficie gausiana un cilindro de sección A y longitud $2r$, como se muestra en la figura siguiente.



Aplicando la ley de Gauss

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$

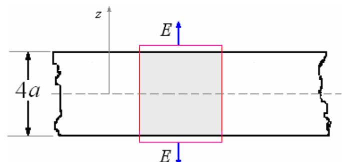
Aquí nuevamente tenemos las tapas y el cilindro propiamente dicho, como el campo eléctrico es perpendicular al plano la integral en la superficie lateral es igual a cero, quedando solo la parte de las tapas, la carga encerrada es igual a $q = \sigma A$.

$$\varepsilon_0 (EA + EA) = \sigma A \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Vectorialmente $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{r}$

El Campo es independiente de *r*.

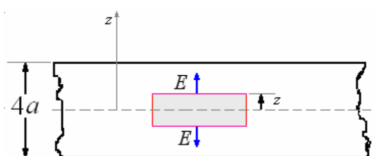
Ejemplo 35. Una carga se distribuye con densidad uniforme ρ a través del volumen de una gran placa aisladora fina de espesor 4*a*.
Calcule el campo en todo el espacio, suponga que la placa es paralela al plano *xy* y que el origen esta en el centro de la placa. Sugerencia, use la simetría del problema y evalúe para toda altura *z*.
Solución.
a) Para $-2a \leq z \geq 2a$



$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA + EA = \frac{\rho 4aA}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = 2\frac{\rho}{\varepsilon_0}a$$

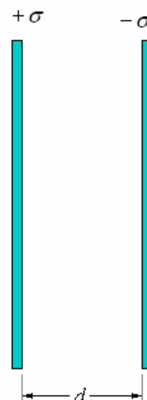
Para $-2a < z < 2a$



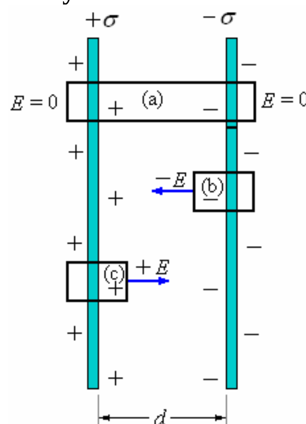
$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA + EA = \frac{\rho 2zA}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}z$$

Ejemplo 36. Se tiene dos planos conductores infinitos paralelos separados una distancia *d*, uno con densidad de carga $+\sigma$ y el otro con densidad de carga $-\sigma$. ¿Cuál será el valor del Campo eléctrico entre ellos y fuera de ellos?



Solución.
Cálculo por la ley de Gauss directamente.



<u>El campo fuera de las placas:</u>
Con la superficie gausiana (a).

$$\varepsilon_0 \left(\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = \sigma A - \sigma A$$

$$\varepsilon_0 (EA + 0 + EA) = 0 \Rightarrow E = 0$$

El campo eléctrico fuera de las superficies es cero.

<u>El campo entre las placas:</u>
Primera manera: Usando la superficie gausiana (b).

$$\varepsilon_0 \left(\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = -\sigma A$$

En la superficie que mira hacia afuera

$E = 0$: $\displaystyle\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

En la cara lateral *E* es perpendicular a la superficie $\displaystyle\int_2 \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

En la superficie que mira hacia adentro: $\displaystyle\int_3 \vec{E} \cdot d\vec{S} = -EA$

Luego: $-\varepsilon_0 EA = -\sigma A$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Segunda manera: Usando la superficie gausiana (c).

$$\varepsilon_0\left(\int_1 \vec{E}\cdot d\vec{S}+\int_2 \vec{E}\cdot d\vec{S}+\int_3 \vec{E}\cdot d\vec{S}\right)=\sigma A$$

En la superficie que mira hacia afuera

$E = 0$: $\int_1 \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$

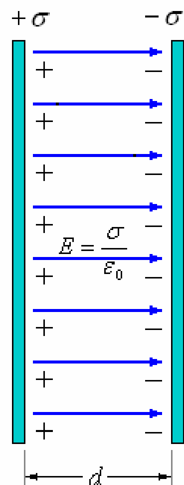
En la cara lateral E es perpendicular a la superficie $\int_2 \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$

En la superficie que mira hacia adentro: $\int_3 \vec{E}\cdot d\vec{S} = EA$

Luego: $\varepsilon_0 EA = \sigma A$

$$\Rightarrow \ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

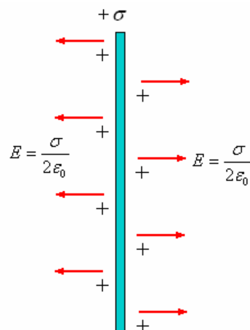
Las cargas se colocan en las superficies interiores de los planos, frente a frente a frente como se muestra en la figura a continuación.



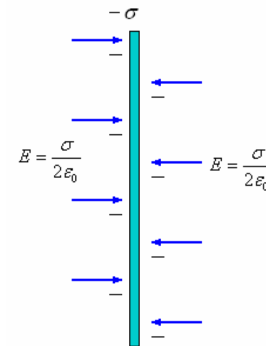
Cálculo por superposición.

Este problema se puede resolver por el método de la superposición.

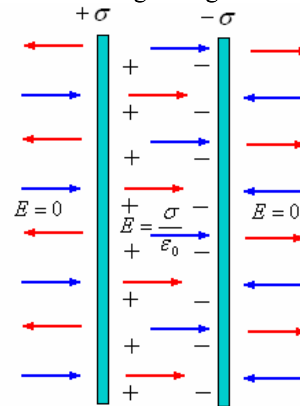
El campo debido al plano con carga positiva se indica en la figura siguiente.



El campo debido al plano con carga negativa se indica en la figura siguiente.



Cuando los planos están uno frente al otro, los campos se superponen y obtenemos los campos tal como se muestra en la figura siguiente.



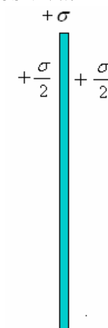
Fuera de los planos: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$

Entre los planos $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

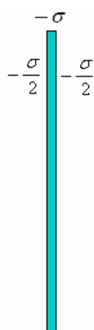
Cálculo por distribución de las cargas.

Originariamente las cargas están distribuidas como se muestra en las figuras siguientes:

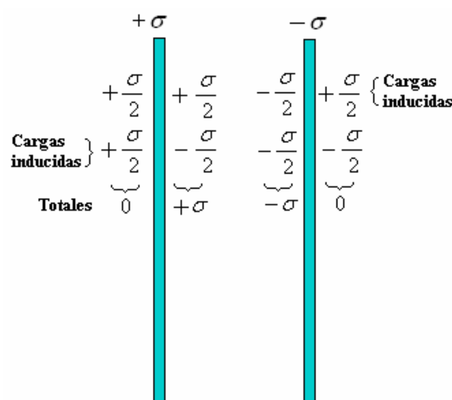
El plano con carga positiva.



El plano con carga negativa.



Cuando los planos están cercanos, El plano con carga positiva influye sobre el otro y recíprocamente, como se muestra en la figura

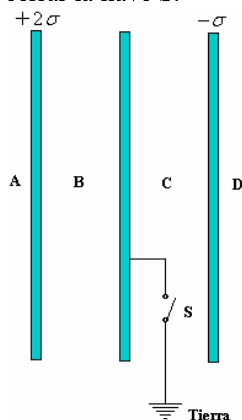


Aquí aplicamos la ley de Gauss a cualquiera de los planos y obtenemos los resultados anteriores.

Ejemplo 37. Encontrar la distribución de cargas y el campo eléctrico en los espacios A, B, C y D en el dispositivo de la figura para:

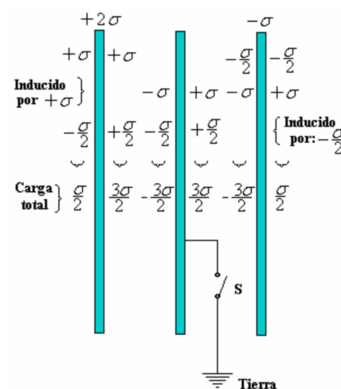
a) la llave S abierta.

b) Después de cerrar la llave S.

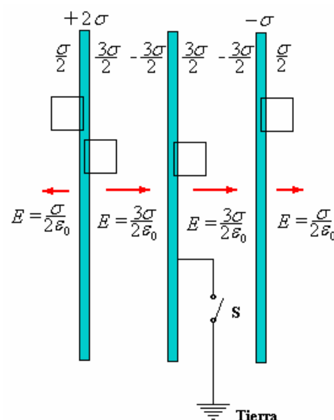


Solución.

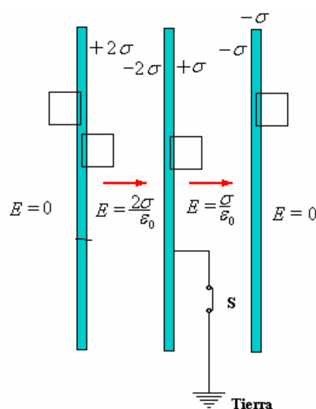
a) La carga $+2\sigma$ se distribuye $+\sigma$ en cada cara y la carga $-\sigma$ se distribuye $-\sigma/2$ en cada cara e inducen las cargas tal como se muestra en la figura siguiente.



Los campos eléctricos se pueden hallar haciendo superficies gaussianas tal como se muestran en la figura siguiente.

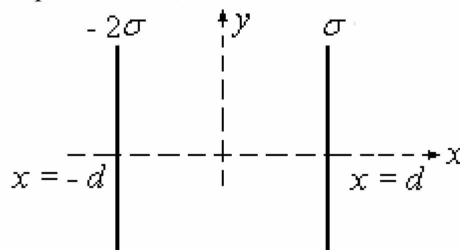


b) Cuando se conecta a tierra tenemos una fuente inagotable y receptor de carga negativa y las cargas se acomodan tal como se muestra en la figura siguiente.

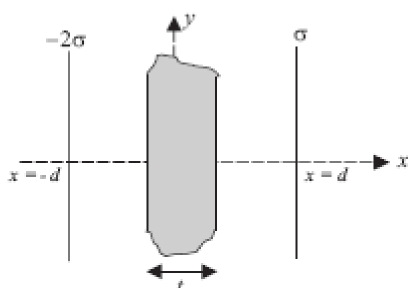


Los campos eléctricos se pueden hallar haciendo superficies gaussianas como las mostradas.

Ejemplo 38. Se tiene dos hojas infinitas ubicadas en $x = d$ y $x = -d$ con cargas σ y -2σ respectivamente, tal como se muestra en la figura.



a) Determine el campo eléctrico en todo el espacio.
b) Si entre las placas colocamos una placa infinita conductora descargada de espesor t. ¿Cuales son las densidades de carga superficiales inducidas sobre la placa?



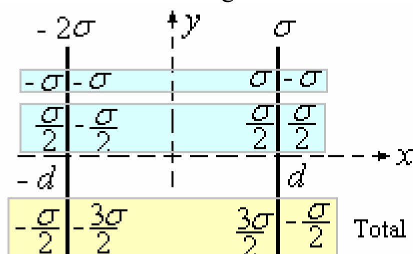
c) Si con un alambre conductor muy delgado conectamos a la placa conductora con la hoja que está ubicada en $x = d$, ¿cuál es la densidad de carga superficial de esta hoja?

Solución.

Nota: la solución es considerando como si la carga se distribuyera uniformemente en los planos infinitos, lo que no es así, ya que están frente a un borde, motivo es porque la carga debe estar concentrada en una línea e ir haciéndose mas tenue hasta cero en el infinito.

Las densidades de carga en los bordes también tienen ese problema, aun más considerando que son de espesor muy pequeño (el que debería de ser conocido)

a) Distribución de las cargas.

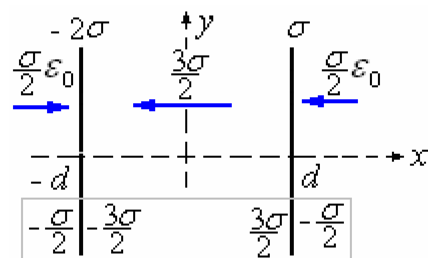


El campo eléctrico:

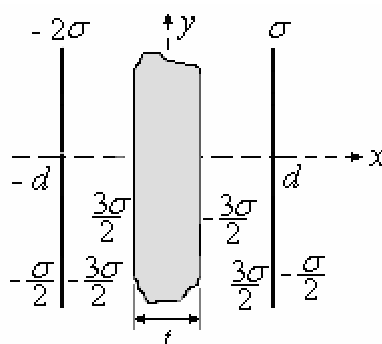
Para $x < -d$: $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$

Para $x > -d$: $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$

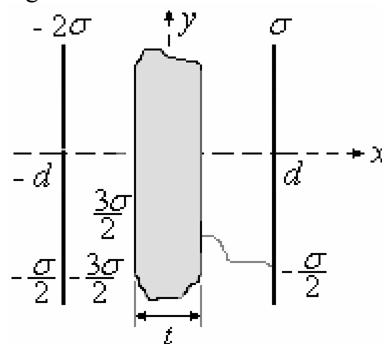
Para $-d < x < d$: $\vec{E} = -\dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$



b) Las cargas se acumulan en los bordes tal como se muestra en la figura

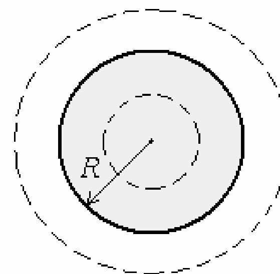


c) Si se conecta con un alambre conductor muy delgado a la placa conductora con la hoja que está ubicada en $x = d$, la densidad de carga superficial de esta hoja queda tal como se indica en la figura siguiente.



Ejemplo 39. Se tiene una esfera no conductora de radio R con densidad de Carga por volumen ρ.
¿Cuál es el valor del campo eléctrico para todo punto?

Solución.



Para $r < R$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

Vectorialmente $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$

Para $r = R$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \varepsilon_0 E\left(4\pi R^2\right) = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R$$

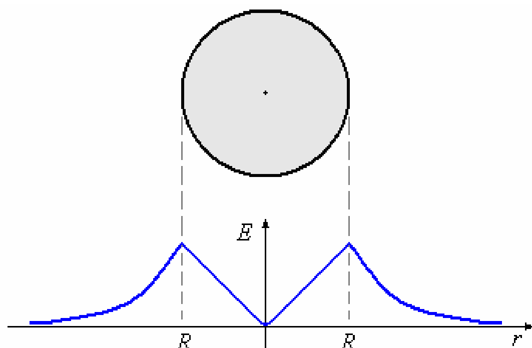
Vectorialmente $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R\hat{r}$

Para $r > R$

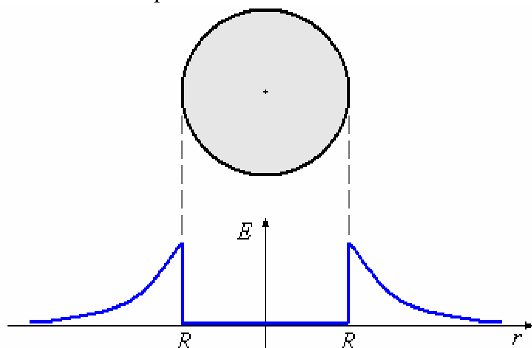
$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \;\Rightarrow$

$\varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = Q \;\Rightarrow\; E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Vectorialmente $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

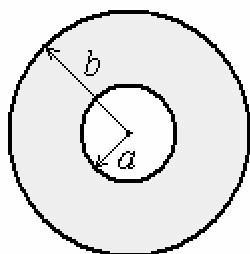


Si la esfera fuera conductora toda la carga estaría concentrada en la superficie y el Campo eléctrico en el interior o sea para $r < R$ seria nulo.



Ejemplo 40. Como una variante veamos el caso de una esfera no conductora con una cavidad concéntrica.

Solución.



Sean los radios de la esfera *a* y *b*.

Para $r < a$

Como no hay carga encerrada por la superficie gausiana

$E = 0$

Para $a < r < b$

$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$

$\Rightarrow\; \varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right)$

$\Rightarrow\; E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(r^3 - a^3\right)}{r^2}$

Vectorialmente $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(r^3 - a^3\right)}{r^2}\hat{r}$

Para $r > b$

$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$

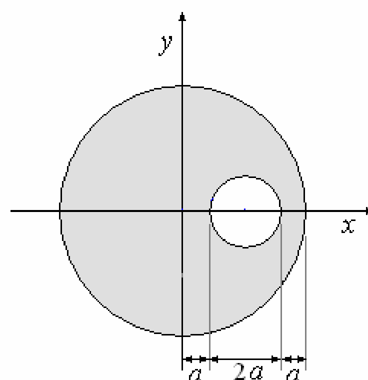
$\Rightarrow\; \varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = \rho\left(\frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right)$

$\Rightarrow\; E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(b^3 - a^3\right)}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

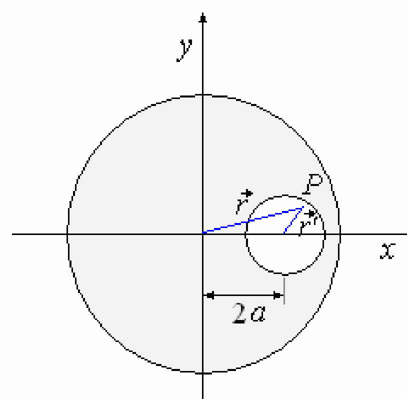
Vectorialmente $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

En el ejemplo siguiente presentamos un caso de asimetría geométrica que es posible resolver con la ley de Gauss.

Ejemplo 41. Se tiene una esfera conductora con una cavidad esférica en su interior como se muestra en la figura, y densidad de carga ρ . ¿Cuál es el campo eléctrico en la cavidad?

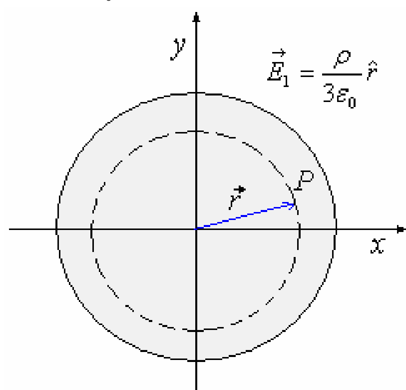


Solución. Vamos a determinar el campo eléctrico en el punto P de la figura siguiente.

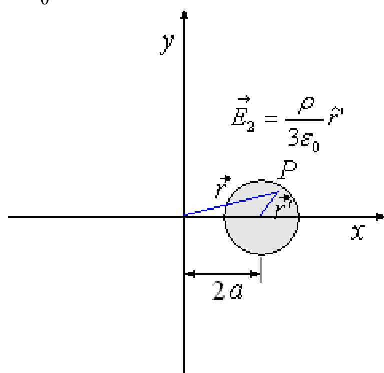


El Campo E en P es igual a: $\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$

Donde $\vec{E}_1 = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r}$



y $\vec{E}_2 = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r}'$

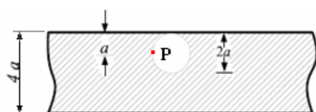


De allí que $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r} - \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\hat{r}' = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(\hat{r} - \hat{r}')$

Pero $\hat{r} - \hat{r}' = 2a\hat{i}$

Finalmente $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}2a\hat{i}$

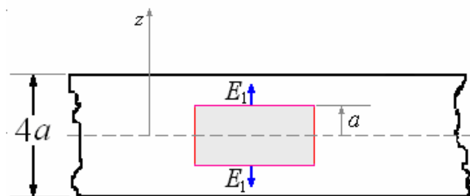
Ejemplo 42. Una carga se distribuye con densidad uniforme ρ a través del volumen de una gran placa aisladora fina de espesor $4a$.
Suponiendo que se quita algo de material, dejando una cavidad esférica de radio a colocada como se muestra en la figura, evalúe el vector de campo eléctrico en el punto P.



Solución.

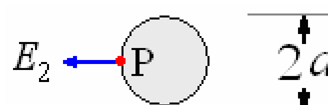
$\vec{E} = E_1\hat{k} - E_2\hat{j}$

Cálculo de $E_1 \Rightarrow E_1 = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}a$



Cálculo de $E_2 \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E_2 4\pi a^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi a^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}a$$



$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}a\right)^2 + \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}a\right)^2} = 1{,}05\frac{\rho}{\varepsilon_0}a$$

Ejemplo 43. Sea una esfera sólida aislante de radio a con una densidad volumétrica de carga igual a $\rho = \rho_0\dfrac{r}{a}$, donde ρ_0 es una constante de unidad C/m^3. La esfera aislante está dentro de una esfera conductora hueca concéntrica de radio interior b y radio exterior c. La carga neta de la esfera hueca conductora es igual a cero.
a) Halle la carga total Q en la esfera aislante.
b) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en cada superficie de la esfera conductora?
c) A partir de la ley de Gauss, deduzca las expresiones de la magnitud del vector campo eléctrico en términos de la distancia radial r, para las regiones: $r < a$, $a < r < b$,
$b < r < c$ y $r > c$.
d) (1 punto) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de r desde $r = 0$ hasta $r = 2c$.

Solución.
a) La carga total Q en la esfera aislante es:

$$Q = \int_V \rho dV \text{ , } \rho = \rho_0\frac{r}{a} \text{ y } dV = 4\pi r^2 dr$$

$$Q = \int_0^a \rho_0\frac{r}{a}4\pi r^2 dr = \int_0^a \frac{\rho_0}{a}4\pi r^3 dr$$

$$= \frac{\rho_0}{a}\pi r^4\Big|_0^a = \pi\rho_0 a^3$$

b) La densidad superficial de carga en la superficie interior de la esfera conductora ($r = b$).

$$\sigma_b = -\frac{\pi\rho_0 a^3}{4\pi b^2} = -\frac{\rho_0 a^3}{4b^2}$$

La densidad superficial de carga en la superficie exterior de la esfera conductora ($r = c$).

$$\sigma_c = \frac{\pi\rho_0 a^3}{4\pi c^2} = \frac{\rho_0 a^3}{4c^2}$$

c) El campo eléctrico:
$r < a$,
Para $r < a$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow$$

$$\varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = \int_0^r \frac{\rho_0}{a} 4\pi r^3 dr = \frac{\rho_0}{a}\pi r^4 \Rightarrow$$

$$E = \frac{\rho_0}{4a\varepsilon_0} r^2$$

Para $a < r < b$,

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = Q \Rightarrow$$

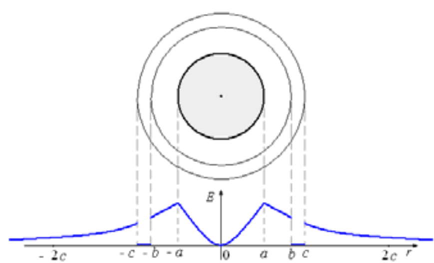
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E = \frac{\pi\rho_0 a^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2}$$

Para $b < r < c$
$E = 0$
Para $r > c$.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = Q \Rightarrow$$

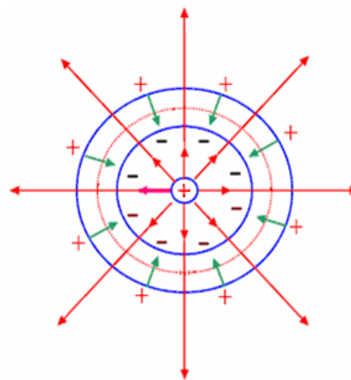
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E = \frac{\pi\rho_0 a^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2}$$

d) Gráfico del campo eléctrico en función de r desde $r = 0$ hasta $r = 2c$



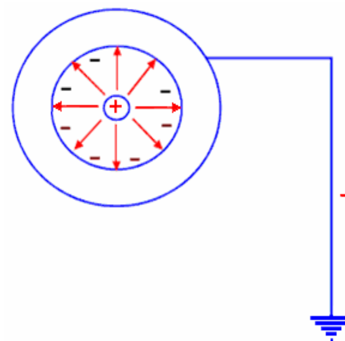
Ejemplo 44. Cargas por inducción en cáscaras esferas conductoras concéntricas. Si una carga $+q$ se encuentra en el centro de una cáscara esférica de metal. Encontrar el campo eléctrico fuera de la esfera.
a) Cuando la cáscara está libre.
b) Cuando la cáscara se conecta a tierra.
Solución.
a) Se observan los campos eléctricos inducidos por q y los inducidos en las superficies de la cáscara. En el centro de la cáscara el campo es cero, pues ambos campos se anulan. El campo fuera de la cáscara no es cero.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

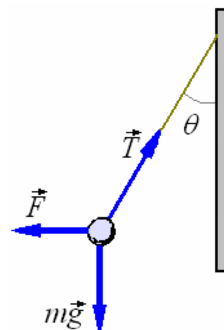


b) Al conectarlo a tierra en la superficie exterior desaparece la carga. El campo exterior es cero.

$$\vec{E} = 0$$



Ejemplo 45. Una bola que conductora pequeña de la masa 10^{-3} g suspendida de un hilo por medio de aislador a una placa conductora grande en posición vertical. Cuando la placa lleva una carga eléctrica de densidad superficial 5 x 10^{-8} C.m^{-2}, la bola es rechazada de la superficie y el hilo queda formando un ángulo de 30° con la vertical. ¿Cuál es la carga que ha pasado a la bola?



Solución. Hay tres fuerzas que actúan sobre la bola, el peso mg que actúa hacia abajo, la fuerza F ejercida por la placa que actúa horizontalmente, y la tensión T en el hilo. Puesto que la bola está en equilibrio, las componentes horizontales y verticales de las fuerzas deben balancearse por separado. Así:

$mg = T\cos\theta$ y $F = T\operatorname{sen}\theta$

Dividiendo: $F = mg\tan\theta$

Pero $F = Eq$, donde E es el campo eléctrico debido a la placa y q es la carga en la bola. ¿Además,

$F = mg\tan\theta = Eq = \sigma q/\varepsilon_0$, dónde σ es la densidad de la carga en la placa. Así

$$q = \frac{\varepsilon_0 mg \tan\theta}{\sigma}$$
$$= \frac{\left(8,85\times10^{-12}\right)\left(1\times10^{-6}\right)(9,8)\left(1/\sqrt{3}\right)}{5\times10^{-8}}$$
$= 1,00 \times 10^{-9}$ C.

Ejemplo 46. Una gota de aceite cargada de masa 2,5 x 10^{-4} g está en el espacio entre dos placas, cada uno de área 175 cm^2. Cuando la placa superior tiene una carga de 4,5 x 10^{-7} C y la placa más baja una carga negativa igual, la gota sigue estando inmóvil. ¿Qué carga lleva?
Solución. El campo eléctrico entre placas paralelas con cargas iguales y opuestas está dado por la ecuación $E = \sigma/\varepsilon_0 = \dfrac{Q}{A\varepsilon_0}$,
donde Q y A son la carga y el área de la placa positiva.
La fuerza sobre la gota del aceite es
$$F = qE = \frac{qQ}{A\varepsilon_0},$$
y como esto balancea el peso de la gota,
$$mg = \frac{qQ}{A\varepsilon_0} \Rightarrow$$
$$q = \frac{mgA\varepsilon_0}{Q}$$
$$= \frac{\left(2,5\times10^{-7}\right)(9,8)\left(175\times10^{-4}\right)\left(8,85\times10^{-12}\right)}{4,5\times10^{7}}$$
$= 8,43 \times 10^{-13}$ C

MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME
Considere una carga q conforme a un campo eléctrico uniforme en la dirección z. No considere la fuerza de la gravedad puesto que normalmente es mucho más pequeña que la fuerza eléctrica. La fuerza qE da lugar a la aceleración $a_z = F/m = qE/m$ y $a_x = 0$. Podemos determinar el movimiento usando las ecuaciones de la cinemática.

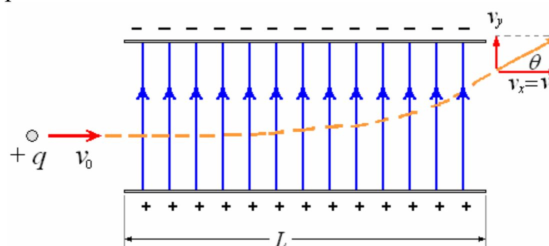
Ejemplo 47. Dos placas paralelas muy grandes de metal separaron por una distancia pequeña d tienen cargas opuestas uniformes, creando en el espacio entre ellas un campo eléctrico E uniforme. Un electrón de carga - e se lanza con velocidad inicial v_0 a través de un agujero pequeño en la placa positiva. Viaja hasta medio camino en el espacio entre las placas antes de detenerse y tomar dirección contraria. ¿Cuál es el valor de E en términos de la velocidad inicial v_0?
Solución.

$a_x = \dfrac{F}{m} = \dfrac{-eE}{m}$ y $v^2 = v_0^2 + 2ax = 0$ en $z = \dfrac{d}{2}$

Luego $0 = v_0^2 - 2\left(\dfrac{eE}{m}\right)\left(\dfrac{d}{2}\right) \Rightarrow E = \dfrac{mv_o^2}{ed}$

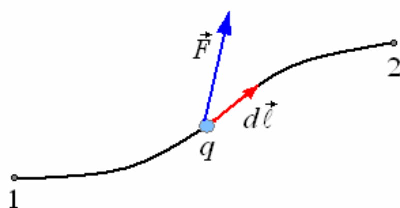
Se puede también solucionar esto usando los principios de la energía. Así:
Pérdida en K = trabajo hecho contra el campo eléctrico E:
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = (eE)\left(\frac{d}{2}\right) \Rightarrow E = \frac{mv_o^2}{ed}$$

Ejemplo 48. Dos placas paralelas cargadas grandes se utilizan a menudo para crear un campo eléctrico uniforme E. Una partícula cargada disparada entre las placas será desviada por el campo eléctrico. Esta técnica se utiliza para desviar electrones en un tubo catódico (como en un osciloscopio) o para desviar gotitas de tinta en una impresora de inyección de tinta. ¿Suponga una partícula de masa m, carga q, y velocidad inicial v_0, lanzada paralela a las dos placas donde el campo eléctrico es E. La longitud de las placas es L. ¿A través de qué ángulo se desviará la partícula?



Solución.
No hay ace1eration en la dirección x, tal que
$L = v_0 t$ donde t = tiempo entre las placas.
$v_x = v_0$ = constante:
y $v_y = v_{0y} + at = 0 + \left(\dfrac{qE}{m}\right)\left(\dfrac{L}{v_0}\right)$
$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{v_0}\left(\frac{qEL}{mv_0}\right) = \frac{qEL}{mv_0^2}$$
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{qEL}{mv_0^2}$$

POTENCIAL ELECTRICO
INTRODUCCION
¿Cuál es el trabajo que se realiza para llevar una carga pequeña de un lugar a otro?
El trabajo contra la fuerza eléctrica para transportar una carga a lo largo de una trayectoria con velocidad constante es igual al negativo de la componente de la fuerza eléctrica en la dirección del movimiento,



Integrando en la trayectoria

$$W_{12} = -\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

$\vec{F}$ es la fuerza eléctrica sobre la carga en cada punto.

$d\vec{\ell}$ es el vector desplazamiento diferencial a lo largo de la trayectoria.

Como la definición de la energía potencial se hace en términos de la diferencia de energía potencial, podemos escribir:

$$U_2 - U_1 = W_{12} = -\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Es conveniente para nuestros .propósitos considerar el trabajo por unidad de carga y en éste caso la energía potencial se denomina simplemente **potencial eléctrico.**

Nuevamente aquí la definición la hacemos en términos de la diferencia de potencial eléctrico $V_2 - V_1$.

$$V_2 - V_1 = \frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \frac{\vec{F}}{q}\cdot d\vec{\ell}$$

donde q es la carga positiva usada para evaluar el trabajo

Como $\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}$, podemos escribir

$$V_2 - V_1 = V_{12} = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

La unidad de potencial eléctrico es igual a la unidad de trabajo por unidad de carga, en el sistema internacional es Joule/Coulombio (J/C), a. la que se le ha dado el nombre de Voltio (V).

A partir de potencial eléctrico, podemos definir una nueva unidad de energía

$$W_{12} = qV_{12}$$

Si un electrón se mueve a través de una diferencia de potencial de un voltio, gana o pierde un electrón-voltio (eV) de energía.

La conversión a las unidades SI la hacemos de la siguiente manera:

$V_{12} = 1$ V y $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ VC = $1{,}6 \times 10^{-19}$ J

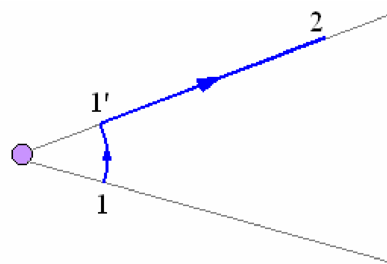
En estudios que implican partículas atómicas tales como electrones y protones, el electronvoltio es una unidad conveniente y muy comúnmente usada. Si el electronvoltio es demasiado pequeño, podemos medir la energía de la partícula en MeV (millones de electrón voltios) o GeV (mil millones de electrón voltios o **Gigavoltios**).

1 M eV ≡ 10^6 eV

1 GeV ≡ 10^9 eV

POTENCIAL ELECTRICO PRODUCIDO POR UNA CARGA PUNTUAL.

Consideremos el campo debido a una carga q. Tenemos que encontrar la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 determinados por r_1 y r_2 respectivamente.



La trayectoria más fácil está mostrada en la figura, no hay trabajo de 1 a l' ya que $\vec{E}$ y $d\vec{\ell}$ .tienen direcciones perpendiculares en cada punto, luego queda solo la trayectoria de 1' a 2.

$$V_2 - V_1 = V_{12} = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

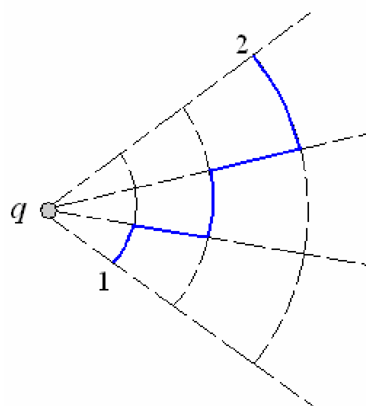
Donde: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$, $d\vec{\ell} = \hat{r}dr$

Reemplazando $V_2 - V_1 = -\int_1^2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}dr$

$$V_2 - V_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \left.\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right|_1^2$$

$$V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Así como tomamos la trayectoria 1, 1', 2 podríamos haber tomado cualquier trayectoria de 1 a 2 a la que se divide fácilmente en tramos de trayectoria circular y radial como se muestra en la figura siguiente.



De la ecuación $V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) =$

$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$ que nos da la diferencia de

potencial entre 1 y 2, es conveniente identificar arbitrariamente los términos como

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \text{ y } V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}.$$

Escribiéndose el caso general de la manera siguiente.

$$V_{(r)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Cantidad que algunas veces se le denomina **potencial absoluto.** Como resultado de esta elección el potencial en el infinito es igual a cero.

POTENCIAL ELECTRICO PRODUCIDO POR UNA DISTRIBUCION DE CARGA

Para calcular el potencial de n cargas q_1, q_2, q_3 …….q_n situadas en r_1, r_2, r_3 …….r_n. El potencial eléctrico en el punto situado en r es igual a la suma de los potenciales producidos por cada una de las cargas.

$$V_{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}$$

Cuando la distribución de carga es continua tendremos:

- Distribución volumétrica

$$V_{(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_{(r')}}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} dV'$$

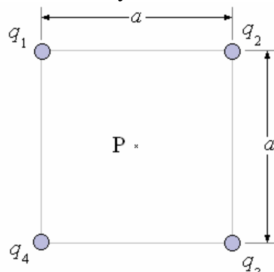
- Distribución superficial

$$V_{(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_{(r')}}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} dS'$$

- Distribución lineal

$$V_{(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \frac{\lambda_{(r')}}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} d\ell'$$

Ejemplo 49. En la figura siguiente calcular el potencial eléctrico en el punto P producido por las cargas. Donde: $q_1 = 1\text{x}10^{-9}$ C, $q_2 = 3\text{x}10^{-9}$ C, $q_3 = -2\text{x}10^{-9}$ C, $q_4 = 2\text{x}10^{-9}$ C y $a = 1$ m.



Solución.

El potencial en el punto P es

$$V_{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}$$

En este caso es conveniente tomar como origen el punto P de tal manera que $\vec{r} = 0$ y $\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|$ para los cuatro casos es $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ o sea $\frac{\sqrt{2}}{2}$ metros.

Luego $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)}{\sqrt{2}/2}$

Reemplazando valores

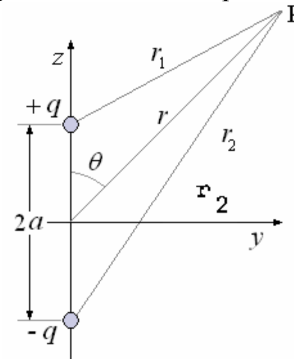
$$V = 9\times 10^9 \frac{\left(1\times 10^{-9} + 3\times 10^{-9} - 2\times 10^{-9} + 2\times 10^{-9}\right)}{\sqrt{2}/2}$$

$$V = 32\sqrt{2} = 45{,}12 \text{ voltios.}$$

Ejemplo 50. Dipolo eléctrico. El dipolo eléctrico consiste en dos cargas iguales y opuestas q y $-q$ separadas una distancia pequeña $2a$. Queremos encontrar el potencial eléctrico para puntos situados a una distancia r, para el caso de $r >> a$.

Solución.

La figura siguiente muestra un dipolo



El potencial en el punto P es

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

De la figura vemos

$$r_1 = \left(r^2 - 2ar\cos\theta + a^2\right)^{1/2}$$

$$r_1 = r\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

y $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$

Usando la expresión binomial para $n = -½$

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots$$

En nuestro caso $x = -\frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}$

de allí

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \ldots\ldots\right]$$

Expandiendo términos y manteniendo sólo los términos con r^2 y menores en el denominador

ya que $r >> a$.

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} + \frac{2a\cos\theta}{r^2}$$

Procediendo de igual manera para r_2

$$r_2 = \left(r^2 + 2ar\cos\theta + a^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} - \frac{2a\cos\theta}{r^2}$$

Sustituyendo $\frac{1}{r_1}$ y $\frac{1}{r_2}$ en V tenemos:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r} + \frac{2a\cos\theta}{r^2}\right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{2a\cos\theta}{r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

En esta expresión al producto $2aq$ lo llamaremos momento dipolo p.

Luego

$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

donde la orientación de p es de - q a q para considerarlo vectorialmente, con esto el potencial eléctrico puede expresarse como producto escalar.

$$V = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Ejemplo 51. Sean tres cargas puntuales de magnitud q ubicadas en vértices de un cubo de lado L, tal como lo muestra la figura.

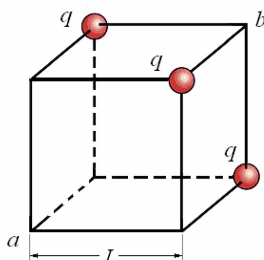
Determine:

a) El potencial eléctrico en el vértice a producido por las 3 cargas.

b) El trabajo externo necesario para desplazar una carga Q del vértice a al vértice b.

c) La fuerza eléctrica que ejercen las cargas q sobre la carga Q ubicada en el punto b.

d) Estando la carga Q en el vértice b se la deja libre. Las tres cargas q permanecen fijas en los vértices del cubo durante el desplazamiento de Q. ¿Cuál es la energía cinética máxima que adquirirá Q por acción de las tres cargas q?



Solución.

a)

$$V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(L\sqrt{2}\right)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(L\sqrt{2}\right)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(L\sqrt{2}\right)} = \frac{3\sqrt{2}q}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

b) $W = QV_{a\to b} = Q\left(V - V_b\right)$

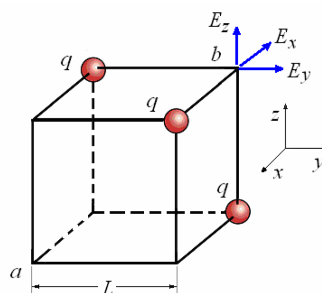
$$V_b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

Luego:

$$W = Q\left(V_b - V_a\right)$$

$$= \frac{3Qq}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3Qq\left(2-\sqrt{2}\right)}{8\pi\varepsilon_0 L}$$

c)



$$\vec{E}_b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\hat{i}}{L^2} + \frac{\hat{j}}{L^2} + \frac{\hat{k}}{L^2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$$

La fuerza sobre la carga Q en el punto b:

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right),\ F = \frac{\sqrt{3}Qq}{4\pi\varepsilon_0 L^2}$$

d) El potencial del punto con respecto al infinito es:

$$V_b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

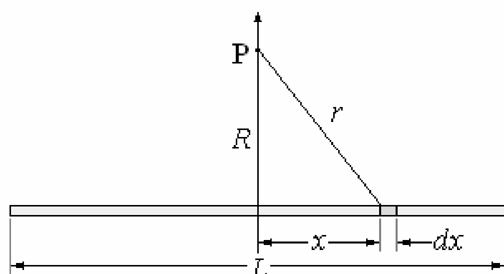
La diferencia de potencial entre el punto b y el infinito es:

$$\Delta V = V_b - V_\infty = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

Luego:

$$K_{máx} = Q\Delta V = Q\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

Ejemplo 52. Se tiene una línea de longitud L y con densidad de carga lineal λ. Calcular el Potencial eléctrico a una distancia R sobre la línea perpendicular bisectriz.



Solución.
Considerar el elemento dx, el Potencial que produce este elemento en el punto P es

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{\left(R^2 + x^2\right)^{1/2}}$$

El potencial de toda la línea es

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dx}{\left(R^2 + x^2\right)^{1/2}}$$

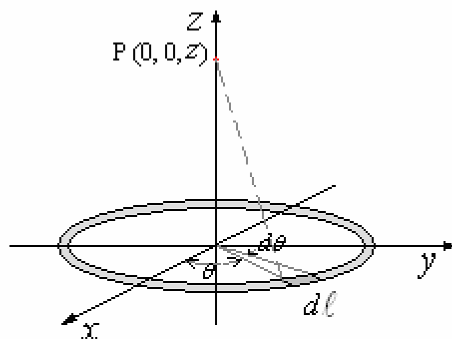
o $$V = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{\frac{L}{2}}\frac{dx}{\left(R^2 + x^2\right)^{1/2}}$$

$$V = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\log\left(x + \sqrt{R^2 + x^2}\right)\Big|_0^{\frac{L}{2}}$$

$$V = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{\frac{L}{2} + \sqrt{R^2 + \frac{L^2}{4}}}{R}\right)$$

Podemos notar en este resultado que para el caso de una línea infinita, es decir para $L = \infty$ el potencial es infinito, esto es porque nosotros para el potencial del elemento diferencial estamos considerando como referencia el infinito con potencial cero y esta línea cargada va hasta el infinito. Luego pera una línea infinita tenemos que tomar otro punto como referencia.

Ejemplo 53. Potencial eléctrico en el eje de un anillo de radio R y Carga λ C/m.
Solución.



Consideremos el elemento de anillo $d\ell$ determinado por el ángulo θ y barrido por $d\theta$ de tal manera que $d\ell = Rd\theta$.

El potencial eléctrico debido a esta carga en el punto P es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda Rd\theta}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

El potencial debido a todo el anillo es

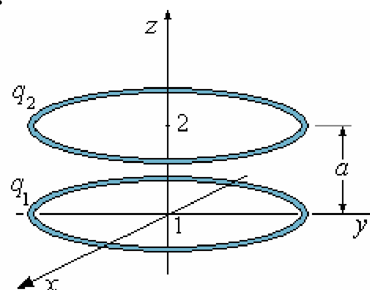
$$V = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

En términos de la Carga total $Q = 2\pi R\lambda$.

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

Ejemplo 54. Dos anillos coaxiales uniformemente cargados de radios iguales R está en planos paralelos separados una distancia a, el trabajo que se realiza para traer una carga q del infinito al centro de cada uno de los anillos es respectivamente A_1 y A_2. Encontrar les Cargas q_1 y q_2 que tienen los anillos.
Solución.



El potencial en 1:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[q_1 + \frac{q_2}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}}\right]$$

El potencial en 2:

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[q_2 + \frac{q_1}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}}\right]$$

El potencial en el infinito $V_\infty = 0$

Trabajo para traer una carga q desde el infinito a 1:

$$A_1 = q\left(V_1 - V_\infty\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[q_1 + \frac{q_2}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}}\right] \quad (1)$$

Trabajo para traer una carga q desde el infinito a 2:

$$A_2 = q\left(V_2 - V_\infty\right)$$

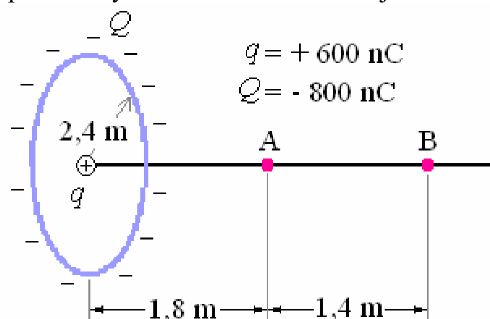
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[q_2 + \frac{q_1}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}}\right] \quad (2)$$

(1) y (2) son dos ecuaciones con incógnitas q_1 y q_2.
Resolviendo (1) y (2) obtenemos:

$$q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R A_2}{q}\frac{\left[\frac{1}{\left(1+a^2/R^2\right)^{1/2}} - \frac{A_1}{A_2}\right]}{\left[\frac{1}{\left(1+a^2/R^2\right)} - 1\right]}$$

$$q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R A_1}{q}\frac{\left[\frac{1}{\left(1+a^2/R^2\right)^{1/2}} - \frac{A_2}{A_1}\right]}{\left[\frac{1}{\left(1+a^2/R^2\right)} - 1\right]}$$

Ejemplo 55. Una carga Q = - 800 nC se distribuye uniformemente en un anillo de radio de 2,4 m. Una carga q = + 600 nC se pone en el centro del anillo. Los puntos A y B están situados en el eje del anillo.



a) ¿Cuál es el trabajo hecho por una fuerza externa que transporta un electrón de B a A?
b) si el potencial eléctrico es igual a cero en un punto en el eje del anillo. ¿Cuál es la distancia de este punto del centro del anillo?
c) Si se un electrón se lanza a lo largo del eje del anillo desde el infinito. El electrón llega y se detiene momentáneamente en un punto en el eje que está a 5,0 m del centro del anillo. ¿Cuál es la velocidad inicial del electrón en el infinito?
d) Si una fuerza externa retira la carga q del centro del anillo y la transporta al infinito. ¿Cuál es el trabajo realizado por esta fuerza externa?

Solución.

a) $W_{B\to A} = e\left(V_A - V_B\right)$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{q}{(1,8)} - \frac{Q}{\left(1,8^2 + 2,4^2\right)^{1/2}}\right) - \left(\frac{q}{(3,2)} - \frac{Q}{\left(3,2^2 + 2,4^2\right)^{1/2}}\right)\right]$$

= -700 eV

b) $\frac{q}{x} - \frac{Q}{\left(x^2 + 2,4^2\right)^{1/2}} = 0 \Rightarrow x = 2,7\ \text{m}$

c) $\frac{1}{2}m_e v_0^2 = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{q}{(5,0)} - \frac{Q}{\left(5,0^2 + 2,4^2\right)^{1/2}}\right)\right)$

$\Rightarrow v_0 = 9\times 10^6\ \text{m/s}$

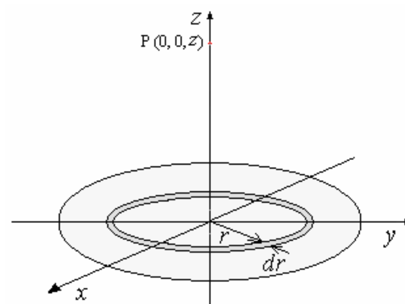
d) $W_{O\to\infty} = q\left(V_\infty - V_O\right)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{Q}{(2,4)}\right) - \left(-\frac{Q}{\left(\infty^2 + 2,4^2\right)^{1/2}}\right)\right]$$

= + 1,8 x 10^{-3} J

Ejemplo 56. Potencial eléctrico en el eje de un disco de radio R y carga σ C/m^2.

Solución.



Consideremos el anillo diferencial de radio r y superficie $dS = 2\pi r dr$.

El potencial debido a este anillo en el punto P es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi r dr}{\left(z^2 + r^2\right)^{1/2}}$$

El potencial debido a todo el disco es

$$V = \frac{\sigma 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\left(z^2 + r^2\right)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(z^2 + r^2\right)^{1/2}\Big|_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(z^2 + r^2\right)^{1/2} - z\right]$$

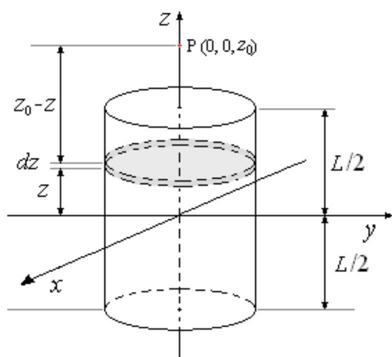
En términos de le Carga total $Q = \pi R^2 \sigma$

$$V = \frac{Q}{2\pi R^2 \varepsilon_0}\left[\left(z^2 + r^2\right)^{1/2} - z\right]$$

En este caso al igual que para la línea infinita, para el plano infinito hay que tomar otro punto de referencia diferente al ∞.

Ejemplo 57. ¿Cuál es el potencial en el eje producido por un cilindro de radio R, largo L y carga ρ C/m^3.

Solución.



Para evaluar el potencial eléctrico en el punto P, tomaremos un disco de ancho diferencial dz, cuyo volumen es $dV = \pi R^2 dz$.

El potencial debido al disco en el punto P es

$$dV = \frac{\rho \pi R^2 dz}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left\{\left[(z_0 - z)^2 + R^2\right]^{1/2} - (z_0 - z)\right\}$$

El potencial debido al cilindro es

$$V = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left\{\left[(z_0 - z)^2 + R^2\right]^{1/2} - (z_0 - z)\right\}dz$$

$$V = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{-\frac{1}{2}(z_0 - z)\left[(z_0 - z)^2 + R^2\right]^{1/2} + R^2 \log\left[(z_0 - z) + \sqrt{(z_0 - z)^2 + R^2}\right]\right\} - z_0 z + \frac{z^2}{2}\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$V = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left\{\left(z_0 + \frac{L}{2}\right)\left[\left(z_0 + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right]^{1/2} - z_0 L - \left(z_0 - \frac{L}{2}\right)\left[\left(z_0 - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right]^{1/2} + R^2 \log\left[\frac{z_0 + \frac{L}{2} + \sqrt{\left(z_0 + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}{z_0 - \frac{L}{2} + \sqrt{\left(z_0 - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2}}\right]\right\}$$

Ejemplo 58. Se tiene una esfera de radio R con carga uniforme de densidad ρ C/m^3. Encontrar el potencial para todo punto. Considerar el potencial en el infinito igual a cero.

Solución.

Para $r > R$

Por la ley de Gauss

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\hat{r}$$

El potencial es

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r} + C_1 = -\int \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} + C_1$$

$$V = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1$$

Para $r = \infty \Rightarrow V = 0$ de aquí

y $V = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Para $r = R$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Para $r < R$

Por la ley de Gauss $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$

El potencial es

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r} + C_2$$

$$= -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r dr + C_2 = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_2$$

Como para $r = R$

$$\Rightarrow V = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

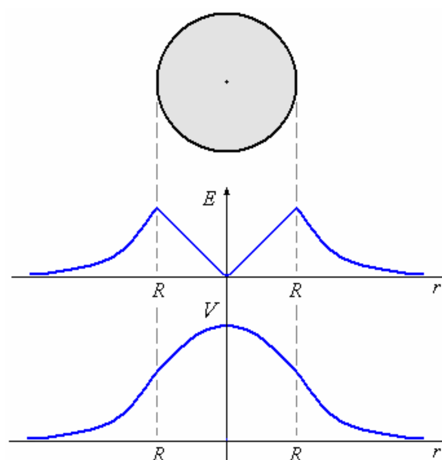
$$\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

y $V = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

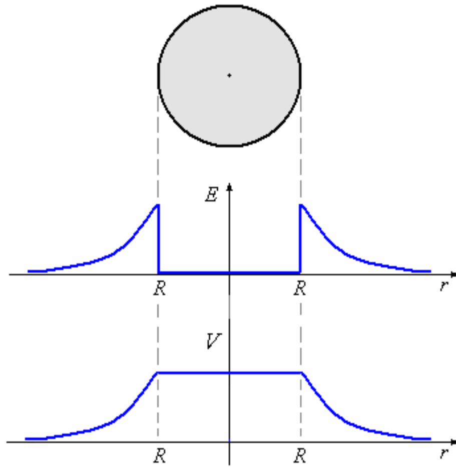
$$\Rightarrow V = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)$$

La figura siguiente muestra la distribución de campo eléctrico y potencial eléctrico en el caso visto.



Ejemplo 59. Como una variante veamos el caso de una esfera conductora.

La carga se encuentra en la superficie y el campo eléctrico en el interior es cero y por lo tanto el potencial es constante, igual al de la superficie. Lo mismo sucede cuando la esfera es hueca estos dos últimos casos se muestra en la figura siguiente



Ejemplo 60. Las superficies interior ($r = a$) y exterior ($r = b$) de un cascaron esférico no conductor tienen la misma densidad de carga σ. La densidad de carga en el resto del espacio es nula.
a) Encuentre el campo eléctrico en las zonas $r < a$, $a < r < b$, y $r > b$.
b) Calcule el potencial electrostático en cada una de las regiones mencionadas.
Solución.
a) Para $r < a$ $\vec{E}_{(r)} = E_{(r)}\hat{r}$, donde $E_{(r)} = 0$,

Para $a < r < b$ $E_{(r)} = \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}$;

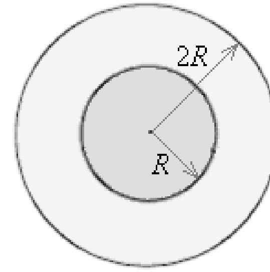
Para $r > b$ $E_{(r)} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 r^2}\left(a^2 + b^2\right)$,

b) Para $r > b$ $V_{(r)} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 r}\left(a^2 + b^2\right)$;

Para $a < r < b$ $V_{(r)} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 r}\left(a^2 + br\right)$ y

Para $r < a$ $V_{(r)} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}(a + b)$.

Ejemplo 61. Se tiene una esfera aisladora con densidad de carga variable de la forma $\rho = \left(\rho_0 / r^2\right)e^{-r}$ y radio R limitada exteriormente por una esfera conductora de radio interior R y exterior $2R$. En la esfera conductora hay una carga neta tal que el potencial exterior ($r > 2R$) es constante. Determine:
a) La carga total en la esfera aisladora.
b) el campo eléctrico en el exterior ($r > 2R$).
c) a diferencia de potencial entre $r = 3R/2$ (esfera conductora) y el centro de la esfera aisladora (considere $V = 0$ en $r = \infty$).
d) la densidad de carga en la superficie exterior de la esfera conductora.



Solución.
a) La carga total en una región del espacio donde hay una densidad de carga ρ está dada por la integral:

$$q = \int_V \rho dV$$

En este caso, donde la simetría es esférica, la expresión toma la forma:

$$q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho_0 \frac{e^{-r}}{r^2} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta\, d\phi =$$

$$4\pi\rho_0 \int_0^R e^{-r} dr = 4\pi\rho_0\left(1 - e^{-R}\right)$$

b) Dado que el potencial en esa región es constante y que $\vec{E} = -\nabla V$, entonces $\vec{E}_{ext} = 0$.
c) Obsérvese que las condiciones del problema dicen que para r > 2R , V = Cte. Igual cosa ocurre en el conductor, donde el campo eléctrico es nulo. Si consideramos que φ = 0 en el infinito, entonces, en el resto del espacio, incluido el conductor, V = 0, de este modo, la diferencia de potencial entre $r = 3R/2$ y el centro de la esfera estará dado por:

$$V = V_{r=0} - V_{r=\frac{3}{2}R} = V_{r=0} - V_{r=R} = V_{r=0}$$

es decir, $V = -\int_{\infty}^{0} E_{(r)} dr = -\int_R^0 E_{(r)} dr$

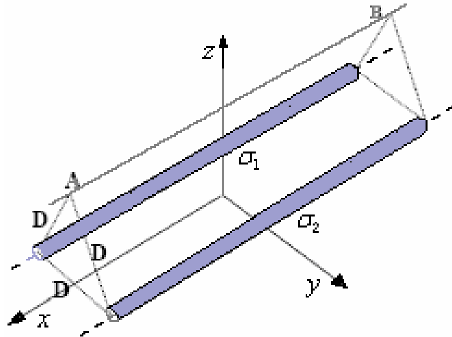
Para evaluar esta integral es necesario determinar $E(r)$ en la esfera aisladora, lo que se realiza utilizando la Ley de Gauss. Dado que $E(r)$ es radial, podemos escribir directamente:

$E = \dfrac{q_{(r)}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, donde $q_{(r)} = 4\pi\rho_0\left(1 - e^{-r}\right)$. Así

$$V = -\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^0\left(\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-r}}{r^2}\right)dr = \infty$$

d) Dado que el campo eléctrico exterior a la esfera conductora es nulo, la carga total, comprendiendo la esfera interior y la conductora debe ser nula. Además, para que el campo eléctrico en el conductor también sea nulo, la carga encerrada por cualquier superficie gaussiana en su interior debe ser nula, es decir, en la superficie interior del conductor debe haber una carga de igual magnitud a la de la esfera aisladora, con distinto signo, las que sumadas se anulan. En consecuencia, en la superficie exterior del conductor no hay carga, es decir, $\sigma = 0$.

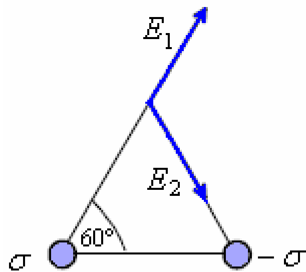
Ejemplo 62. En la figura se ha representado parte de 2 cilindros muy largos, cada uno de radio r_0, que tienen en su superficie densidades de carga constantes $\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_2 = -\sigma$ respectivamente. (No hay carga en el interior de los cilindros).



a) Encuentre el campo eléctrico sobre la línea AB, que equidista de los cilindros en una distancia igual a la separación entre ellos (D).
b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los centros de los cilindros?
c) Calcule el potencial en un punto sobre la línea AB.
Solución.
a) Utilizando una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y largo L concéntrica con un cilindro cargado, de similares características que los propuestos en este problema, por la ley de gauss, se obtiene la expresión:

$E2\pi rL = \dfrac{2\pi r_0 L\sigma}{\varepsilon_0}$ de donde $E = \dfrac{\sigma r_0}{\varepsilon_0}$, forma general para el campo eléctrico para tales distribuciones de carga.

Si los cilindros se observan en corte y se dibujan allí los campos eléctricos generados por cada cilindro se observaría lo siguiente:



donde $\left|E_1\right| = \left|E_2\right| = \dfrac{\sigma r_0}{\varepsilon_0 D}$, con lo cual, la suma resulta ser un vector en la dirección horizontal cuyo valor es la superposición de las proyecciones de E_1 y E_2: en esa dirección

$$\vec{E} = 2\frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0 D}\cos 60°$$

b) Para contestar esta pregunta es necesario considerar que el campo eléctrico en el interior de los cilindros es nulo, como se deduce directamente con la ley de Gauss. Ello nos dice que allí V es constante. De este modo, la diferencia de potencial entre los centros de los cilindros corresponde la diferencia de potencial entre sus mantos.

Eligiendo como trayectoria de integración una recta paralela al eje y, que pasa por los centros de los cilindros, se tiene:

$$V = \int_{y_1}^{y_2} Edy =$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0\left(y + \dfrac{D}{2}\right)}dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0\left(\dfrac{D}{2} - y\right)}dy \text{ con}$$

$$y_2 = \frac{D}{2} - r_0 \text{ e } y_1 = -\left(\frac{D}{2} - r_0\right)$$

Donde $\dfrac{\sigma r_0}{\varepsilon_0\left(y + \dfrac{D}{2}\right)}$ y $\dfrac{\sigma r_0}{\varepsilon_0\left(\dfrac{D}{2} - y\right)}$ son las magnitudes de los campos generados por los cilindros con centros en $y = -D/2$ e $y = +D/2$ respectivamente.
Resolviendo estas integrales se llega a

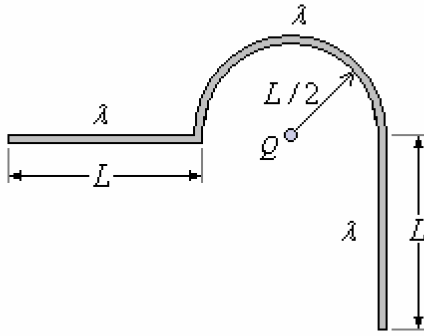
$$V = \frac{2\sigma r_0}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D - r_0}{r_0}\right)$$

c) El potencial eléctrico en general se puede calcular sumando los potenciales originados desde diversas fuentes. Utilizando esta idea, para responder a esta pregunta, basta con calcular el potencial de una de las distribuciones de carga, ya que la otra es similar, salvo el signo. (Además deben compatibilizarse los orígenes del potencial).
Considerando un cilindro con densidad de carga σ, el campo eléctrico es $\vec{E} = \dfrac{\sigma r_0}{\varepsilon_0}\hat{r}$, siendo r la distancia entre el centro de la distribución (cilindro) y el punto en que calculamos el potencial.
Al calcular la integral de línea, eligiendo como trayectoria de integración una recta radial y una curva sobre el manto, como esta última no contribuye al potencial, se tiene: $V^+ = \dfrac{\sigma r_0}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{D}{r_0}\right)$ y, para la otra distribución, $V^- = -\dfrac{\sigma r_0}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{D}{r_0}\right)$, con lo cual

$V_{AB} = 0$. En este caso se ha elegido el origen de $V_{(r_s)}$ en un punto equidistante de los cilindros (es arbitrario). Obsérvese que este resultado depende obviamente del origen de los potenciales y por lo tanto, su respuesta puede ser otra

Ejemplo 63. Tres trozos de hilo cargado con densidad de carga λ se disponen como se indica en la figura.
a) Determine el campo eléctrico total sobre la carga Q.
b) Calcule la fuerza que ejerce Q sobre cada uno de los trozos de hilo.

c) Determine la energía potencial de la carga Q (origen en ∞).



Solución.

a) Para resolver este problema es conveniente dividirlo en tres, uno para cada distribución.

Calculamos primero el campo eléctrico de la distribución lineal de la izquierda: Si ponemos un eje x conteniendo a este trozo, con el origen en Q se tiene que

$$\vec{E}_1 = E_{x1}\hat{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-3L/2}^{-L/2}\frac{\lambda dx'}{(x')^2}\hat{i}$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{1}{x'}\right|_{-3L/2}^{-L/2}\hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{L}-\frac{2}{3L}\right)\hat{i}$$

$$= \frac{\lambda}{3\pi\varepsilon_0 L}\hat{i}$$

Si llamamos E_2 al campo generado por la semicircunferencia, por simetría, éste debe apuntar hacia abajo (eje $-y$), luego, la única componente que, luego de integrar es diferente de cero, está dada por

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\ell}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{3/2}}(y-y')$$

en nuestro caso $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{3/2} = L/2$, $y = 0$,

$y' = (L/2)\operatorname{sen}\theta$ con θ medido desde el eje x. A su vez $d\ell = (L/2)d\theta$. Reemplazando estos valores en la integral se tiene.

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\left(\frac{L}{2}\right)d\theta}{\left(\frac{L}{2}\right)^3}\left(-\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{\left(\frac{L}{2}\right)}\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Integrando entre 0 y π se tiene

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\lambda}{L}\hat{j}$$

Para el tercer segmento operamos en forma similar.

En este caso

$\vec{r} = 0$, $\vec{r}' = \left(\frac{L}{2}\right)\hat{i} + y'\hat{j}$, $dq = \lambda dy'$, $x' = \frac{L}{2}$

con lo que

$$dE_{\delta,x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(L/2)dy'}{\left[(L/2)^2 + y'^2\right]^{3/2}}$$

$$dE_{\delta,y} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda y' dy'}{\left[(L/2)^2 + y'^2\right]^{3/2}}$$

Integrando en y' ambas expresiones entre 0 y - L encontramos:

$$E_{3x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda\left(\sqrt{5}-5\right)}{5L} \text{ y } E_{3y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\sqrt{5}\lambda}{5L}$$

De donde $\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\lambda\left(\sqrt{5}-5\right)}{5L}\hat{i} + \frac{4\sqrt{5}\lambda}{5L}\hat{j}\right]$

Obviamente $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

b) Para responder a esta pregunta, basta con calcular la fuerza que realiza cada una de los trozos de hilo sobre Q, así, la fuerza que ejerce Q sobre el hilo estará determinada por el principio de acción y reacción, es decir, las respuestas a la pregunta son: Caso 1 $F_1 = -E_1 Q$; Caso 2 $F_2 = -E_2 Q$; Caso 3 $F_3 = E_3 Q$

c) Como son distribuciones finitas, podemos utilizar la expresión deducida para ese fin a partir del potencial de una carga puntual respecto de infinito

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

En el primer caso tendremos

$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-3L/2}^{-L/2}\frac{\lambda dx'}{|x'|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-3L/2}^{-L/2}\frac{\lambda dx'}{x'}$ el cambio de signo es debido a que el dominio de integración.

Comprende sólo valores de $x < 0$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Del mismo modo,

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\lambda\left(\frac{L}{2}\right)d\theta}{\frac{L}{2}} = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

y finalmente

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{-L}\frac{\lambda dy'}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (y')^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(-2+\sqrt{5}\right)$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\pi+\ln\left(-2+\sqrt{5}\right)\right]$$

Ejemplo 64. Dos cáscaras cilíndricas conductoras largas son coaxiales y tienen radios de 20 mm y de 80 mm. El potencial eléctrico del conductor interno, con respecto al conductor externo, es + 600 V.
a) (1 punto) Se lanza un electrón desde el reposo en la superficie del conductor externo. Encuentre la velocidad del electrón cuando alcanza al conductor interno.
b) (1 punto) ¿Cuál es a magnitud máxima del campo eléctrico entre los cilindros?
c) (1 punto) Si un electrón está en movimiento circular alrededor del cilindro interno en una órbita de radio 30 mm. ¿Cuál es a velocidad del electrón?
d) (1 punto) Se lanza un electrón radialmente hacia afuera de un punto entre las cáscaras en las cuales el potencial eléctrico es + 350 V con respecto al conductor externo. La energía cinética inicial del electrón es 150 eV. ¿Cuál es a energía cinética del electrón, cuando alcanza cualquiera de las cáscaras?
Solución.

a) $q_e\Delta V = \frac{1}{2}m_e v_f^2 \Rightarrow$

$$v_f = \sqrt{\frac{2q_e\Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\left(1,6\times10^{-19}\right)(600)}{9,1\times10^{-31}}}$$

$= 1,45 \times 10^7$m/s

b) Si consideramos que el conductor externo tiene $V_{R_2} = 0$ y el conductor interno $V_{R_1} = 600\text{V}$ El potencial entre los conductores es

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r}+C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C$$

Cuando $r = R_2$, $V_{R_2} = 0$ y

$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R_1 + C \Rightarrow C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R_1$$

Cuando $r = R_1$, $V_{R_1} = 600\text{V}$ y

$$\Rightarrow 600 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln R_1 - \ln R_2\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 4 = \frac{1,39\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{600}{1,39} = 432,8$$

El campo entre los conductores es

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{432,8}{r}$$

El campo máximo se obtiene con el menor *r*.

$$E_{máx} = \frac{432,8}{20\times10^{-3}} = 21640\ \text{V/m}$$

c) $q_e E = m_e\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{q_e E r}{m_e}}$

$q_e = 1,6\times10^{-19}\,\text{C}$, $m_e = 9,1\times10^{-31}\,\text{kg}$,

$r = 30\text{mm}$, $E = \frac{432,8}{r} = \frac{432,8}{0,03} = 14426,7$ V/m

$$v = \sqrt{\frac{\left(1,6\times10^{-19}\right)\left(\frac{432,8}{0,03}\right)(0,03)}{9,1\times10^{-31}}}$$

$= 8,72 \times 10^6$m/s

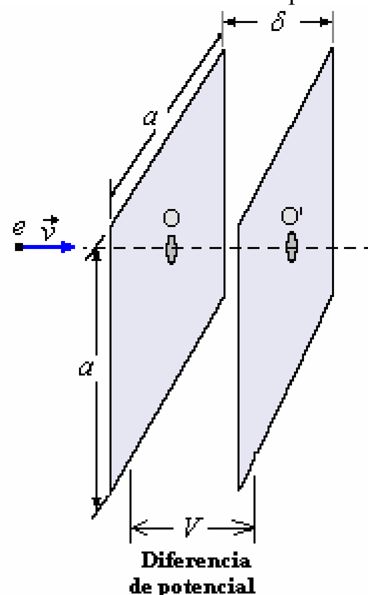
d) Se lanza un electrón radialmente hacia fuera desde el punto 1 al punto 2
El punto 1 esta a + 350 V, el punto 2 en la cáscara exterior a 0 V.

$$W_{1\to2} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow -\text{e}\left(0-350\text{V}\right) = K_2 - 150\text{eV}$$

$$\Rightarrow K_2 = 350\text{eV} + 150\text{eV} = 500\text{eV}$$

Ejemplo 65. Un electrón *e* (carga - *e*) incide con velocidad *v* a un pequeño agujero practicado en el centro de dos placas cuadradas planas de lado *a*. (En sus cálculos utilice la aproximación de placas infinitas).
a) Encuentre la expresión que da cuenta de la densidad de carga en las placas cuando entre ellas hay una diferencia de potencial *V* (inicialmente las placas están descargadas).
b) ¿Cuál debe ser la diferencia de potencial *V* para que el electrón llegue con velocidad *v*/2 al agujero O'?
c) En las condiciones dadas en b). ¿Qué fuerza ejerce el electrón contra la placa positiva cuando ha recorrido una distancia *δ*/2 entre las placas?



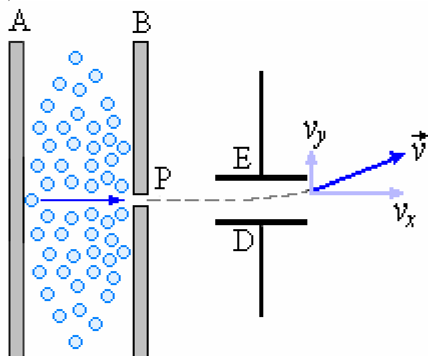
Solución.

a) Si inicialmente las placas tienen carga nula, al conectarlas a la diferencia de potencial *V*, cada una de ellas adquiere cargas de igual magnitud y distinto signo. Dichas cargas deben ser tales que generen un campo eléctrico tal que $V = \int_{Placa1}^{Placa2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ integral que, al ser *E* = cte, vale $V = E\delta$. Por otro lado, cada placa produce un campo $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, (Gauss) y, por lo tanto, el campo total entre las placas resulta ser $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$,con lo cual $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0}{\delta}V$.

b) La energía total del electrón antes de ingresar a O es $\dfrac{1}{2}m_0 v^2$ y si llega a O' con $v_{O'} = \dfrac{v}{2}$, usando el teorema de conservación de la energía podemos escribir en O', $eV + \dfrac{1}{2}m_0\left(\dfrac{v}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}m_0 v^2$. A partir de esta expresión, $V = \dfrac{3}{8e}mv^2$.

c) La fuerza que ejercen las placas sobre el electrón en cualquier punto interior a las placas es $\vec{F} = e\vec{E}$ cuya magnitud es $F = \dfrac{e\sigma}{\varepsilon_0}$ dirigida hacia la placa positiva. Por el principio de acción y reacción, la fuerza que ejerce el electrón sobre las placas es igual, pero con sentido contrario a la anterior.

Ejemplo 66. Sea un gas de átomos neutros entre dos placas a $\Delta V_1 = V_A - V_B$, la separación es tal que el campo eléctrico entre ellas es uniforme. Cuando un átomo de masa *m* choca con A queda inicialmente en reposo y pierde una carga − *e* (la carga de un electrón).



a) Determine ΔV_1 cuando el átomo que chocó con A pasa con una velocidad en P igual a v_0 (suponga que el agujero en P es pequeño y no afecta la forma del campo)

b) ¿Cual placa, A ó B, estaría a mayor potencial? , ¿Cuál placa cargada negativamente?

c) Luego el átomo pasa por condensador C_0 de placas paralelas con cargas iguales pero de signo opuesto entre E y D. Determine el valor las cargas en E y D cuando $\Delta V_2 = V_E - V_D$ es responsable de la desviación mostrada.

d) ¿Es posible que el átomo no sufra desviación alguna entre E y D? ¿Una desviación en sentido opuesto?

Solución.

a) $e\Delta V_1 = \dfrac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{2e\Delta V_1}{m}}$

b) Como el átomo tiene carga positiva la placa A es positiva y la placa B es negativa, por lo tanto A está a mayor potencial que B.

c) $Q = C_0 \Delta V_2$

d) Si es posible que el átomo no sufra desviación alguna entre E y D

$mg = eE$

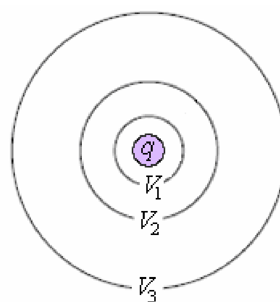
También es posible, invirtiendo las cargas de las placas.

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

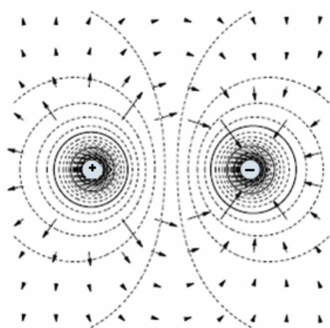
Como hemos podido observar, el potencial es solamente función de las coordenadas de posición, de tal manera que un potencial constante define una superficie equipotencial. En esta superficie no se realiza trabajo al mover una carga de prueba sobre ella, el campo eléctrico es perpendicular a estas superficies.

Los equipotenciales son perpendiculares a las líneas de fuerza, un campo eléctrico puede representarse también por medio de las equipotenciales.

Las equipotenciales de una carga puntual están dadas por $r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 V}$, las que se muestran en la figura siguiente.

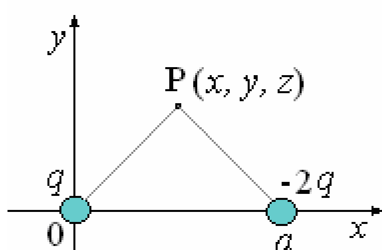


A continuación se muestra las líneas equipotenciales producidas por dos cargas iguales y opuestas.



Ejemplo 61. Se tiene dos cargas puntuales q y - $2q$ situadas en los puntos (0,0,0) y (a,0,0), respectivamente, encontrar la superficie equipotencial.

Solución.



El potencial en el punto P (x, y, z) es:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}$$

Cuando $V = 0$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} = 0$$

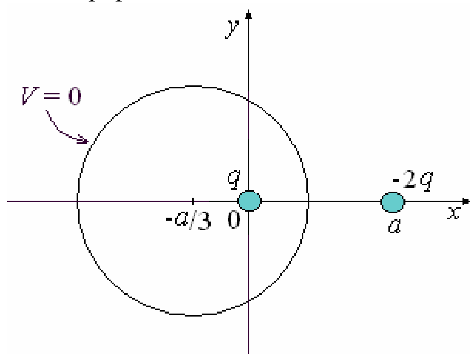
$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = 4\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$x^2 + \frac{2}{3}ax + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{3}$$

Sumando a ambos miembros $a^2/9$:

$$\left(x+\frac{a}{3}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{9}a^2$$

Ecuación de la superficie equipotencial que corresponde a una esfera con centro en $-a/3$, 0 y radio $R = 2a/3$, la figura siguiente muestra la superficie equipotencial $V = 0$.



CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DEL POTENCIAL.

Como las fuerzas están dadas por el campo eléctrico $\vec{E}$, ésta puede obtenerse inversamente a partir del potencial V. Consideremos dos puntos orientados con el eje x uno en x y el otro en $x + \Delta x$, la diferencia de potencial entre estos dos puntos es ΔV.

$$\Delta V = V(x. + \Delta x, y, z) - V(x., y, z)$$

Por definición, escribimos en función de la derivada parcia1

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x$$

(Derivada parcial: Es la derivada de una función de dos o más variables con respecto a una de ellas, considerando en el desarrollo a las demás como constantes).

Simultáneamente en la misma trayectoria

$$\Delta V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -E_x \Delta X$$

Fácilmente podemos deducir que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Similarmente, podemos hacer a lo largo de los ejes z e y.

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \text{ y } E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

El Campo resultante es la suma vectorial de sus componentes:

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

o $\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}\frac{\partial}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)V$

En notación abreviada

$$\vec{E} = -\nabla V$$

donde el operador ∇ llamado nabla es

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Ejemplo 67. Responda los casos siguientes justificando cada respuesta.

a) Un plano cargado con densidad de carga $-\sigma$ se coloca en el plano $x\,y$ (z = 0). Halle el campo eléctrico en todo el espacio por medio de la ley de Gauss.

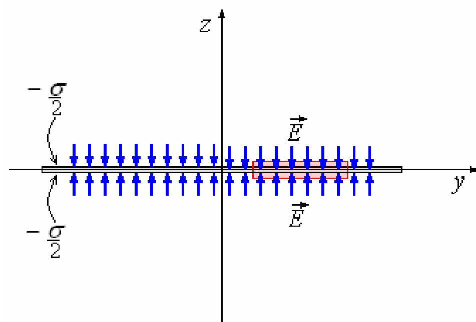
b) Usando el principio de superposición y el resultado en a), halle el campo eléctrico en todo el espacio cuando añadimos un segundo plano infinito con densidad de carga $+2\sigma$ paralelo, en z = 2.

c) Usando la definición, evalué la diferencia de potencial $V(x_1)$ - $V(x_2)$ entre x_1 = -3 y x_2 = 1, 5.

d) Se coloca un tercer plano infinito descargado en $z = 3$ y se une al plano en $z = 0$ con un alambre conductor muy delgado, puede suponer que lo hace atravesando el plano $z = 2$ por un agujero muy pequeño, de manera de no afecta la geometría del sistema.
Calcule la diferencia de potencial pedida en c).

Solución.

a)



Sea la superficie gausiana de área A

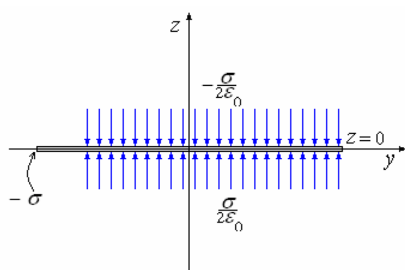
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow\ 2EA = \frac{-\sigma A}{\varepsilon_0}\ \Rightarrow\ E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

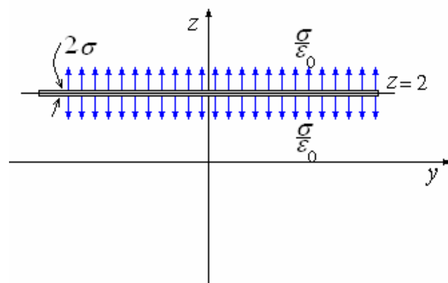
Para $z > 0$ $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

Para $z < 0$ $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

b) El campo producido por el plano en $z = 0$:



El campo producido por el plano en $z = 2$:



Para $z > 2$:

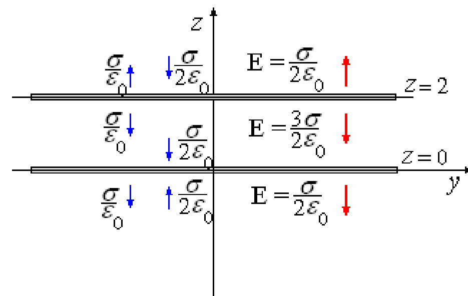
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Para $0 < z > 2$:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k} = -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Para $z < 0$:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$



c) La diferencia de potencial $V(x_1) - V(x_2)$ entre $x_1 = -3$ y $x_2 = 1,5$.

$$\Delta V_1 = V_{(-3)} - V_{(0)} = \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\right)\cdot\left[0-\left(-3\hat{k}\right)\right]$$

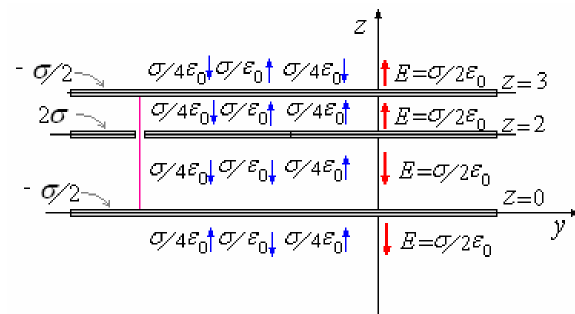
$$= -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\Delta V_2 = V_{(0)} - V_{(1,5)} = \left(-\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\right)\cdot\left[1,5\hat{k}-0\right]$$

$$= -\frac{4,5\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{4,5\sigma}{2\varepsilon_0} = -\frac{7,5\sigma}{2\varepsilon_0}$$

d) Con el tercer plano infinito descargado en $z = 3$, el campo eléctrico queda distribuido como se muestra a continuación.



La diferencia de potencial $V(x_1) - V(x_2)$ entre $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$.

Tomando en cuenta la nueva disposición:

$$\Delta V_1 = V_{(-3)} - V_{(0)} = \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\right)\cdot\left[0-\left(-3\hat{k}\right)\right]$$

$$= -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\Delta V_2 = V_{(0)} - V_{(1,5)} = \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k}\right)\cdot\left[1,5\hat{k}-0\right]$$

$$= -\frac{1,5\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{1,5\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{3\sigma}{\varepsilon_0}$$

Ejemplo 68. Encontrar el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico a partir del potencial.
Solución.
El potencial del dipolo es

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

El Campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Para este caso es conveniente trabajar con coordenadas esféricas,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

y

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

En esta ecuación el último término vale cero ya que no existe variación de potencial respecto a ϕ, entonces:

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

$$\vec{E} = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta}$$

Ejemplo 69. Encontrar el campo eléctrico en el eje de un anillo de radio *R* y con carga *Q*, a partir del potencial.
Solución.

Para el anillo $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}$

El Campo eléctrico es $\vec{E} = -\nabla V$

$E_x = 0$, $E_y = 0$ y

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2z}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}$$

Finalmente: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\hat{k}$

Ejemplo 70. Encontrar el Campo eléctrico en el eje de un disco de radio *R* y con carga *Q* a partir del potencial.
Solución.
Para el disco

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\left(z^2+R^2\right)^{1/2} - 1\right]$$

El Campo eléctrico es $\vec{E} = -\nabla V$

$E_x = 0$, $E_y = 0$

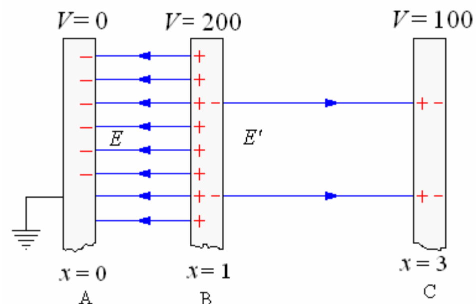
$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\left(z^2+R^2\right)^{1/2} - 1\right]$$

$$= -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{1}{2}\left(z^2+R^2\right)^{-1/2}2z - 1\right]$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right]$$

y $\vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{1/2}}\right]\hat{k}$

Ejemplo 71. Perpendicular al eje *x* hay tres placas delgadas de metal, A en *x* = 0, B en *x* = 1 m, y C en *z* = 3 m. A se mantiene conectado a tierra, B tiene un potencial de 200 voltios, y C tiene un potencial de 100 voltios.
a) Encuentre el campo eléctrico entre A y B y entre B y C.
b) Encuentre la densidad de la carga en cada placa.



Solución.
a) Los campos se asumen uniformes.
A la izquierda (entre A y B).

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{200}{1} = -200 \text{ V/m.}$$

A la derecha (entre B y C).

$$E' = -\frac{(-100)}{2} = +50 \text{ V/m}$$

b) Teniendo en cuenta que $\sigma = \varepsilon_0 E_n$, vemos que

σ_A = -200 ε_0 C/m²

σ_C = - 50 ε_0 C/m²

La placa B tiene una densidad de carga de +200 ε_0 C/m^2 a su izquierda y de - 50 ε_0 C/m^2 a su derecha, o una densidad de carga neta $\sigma_B = +150\,\varepsilon_0$ C/m^2.

CAPACIDAD - ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

INTRODUCCIÓN. -

De lo visto anteriormente el potencial (tomado relativo a un potencial cero en el infinito) de un cuerpo conductor con carga *Q* es proporcional al valor de dicha Carga *Q*. O la carga total *Q* en el conductor aislado es directamente proporcional al potencial del conductor, es decir

$$Q = CV$$

Donde *C* es una constante que depende de la forma del cuerpo, mas no de *Q* o *V*.
Esta constante *C* es una característica de un cuerpo al lado y se la denomina **Capacidad**.

$$C = \frac{Q}{V}$$

En el sistema internacional su unidad es el coulombio/voltio, al que se le denomina **faradio**, cuya abreviatura es *F*, en la práctica la capacidad de un faradio es muy grande, por eso se usan los submúltiplos

microfaradio $(\mu F) = 10^{-6} F$

picofaradio $(pF) = 10^{-12} F$

A manera de ejemplo calculamos la capacidad de una esfera conductora aislada de radio *R*. El potencial de un conductor esférico con carga *Q* es $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$

y su capacidad $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$

EL CONDENSADOR

Los sistemas que se encuentran en le práctica no están referidos al infinito, consisten en dos conductores con cargas iguales y de signo opuesto, esto se consigue llevando la carga de un conductor al otro de tal manea que si este tiene una carga *Q* el .primero habrá quedado con Carga -*Q*. A este sistema se le conoce como **condensador**.

La relación que existe entre la carga *Q* y la diferencia de potencial $\Delta V = V_1 - V_2$, es

$Q = C\Delta V$, donde a capacidad *C* depende solamente de la geometría del Condensador.

Para calcular la capacidad *C* de un condensador es recomendable seguirlos siguientes pasos:

a) Dados los dos conductores situar una carga + *Q* en uno de ellos y una carga - *Q* en el otro.

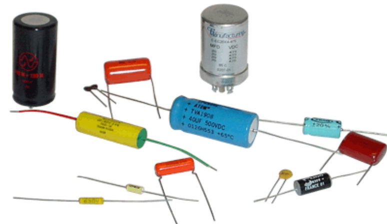
b) Determinar el campo eléctrico entre los conductores.

c) Determinar la diferencia de potencial entre los conductores

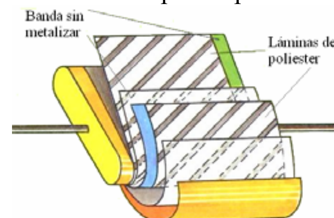
d) Finalmente, $C = \frac{Q}{V}$

Los condensadores se representan por medio de dos líneas paralelas iguales, como se ilustra n la figura siguiente ⊣⊢.

La figura a continuación muestra diferentes condensadores comerciales.



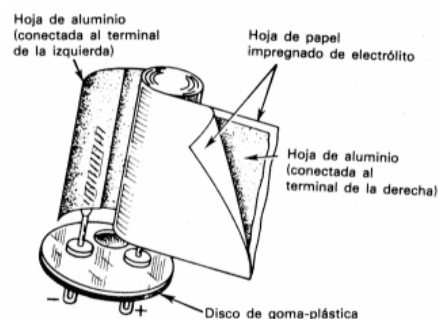
La figura siguiente muestra como esta formado un condensador moderno de placas paralelas



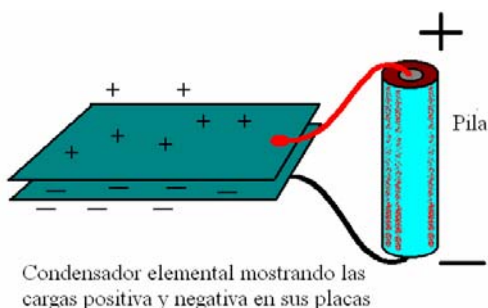
El condensador electrolítico.



Esquema de condensador electrolítico.

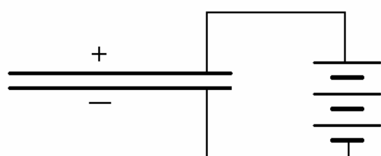


Como se carga un condensador



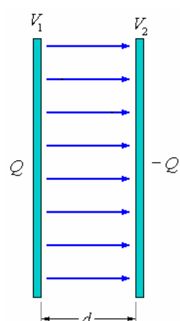
Condensador elemental mostrando las cargas positiva y negativa en sus placas

Representación esquemática del circuito anterior.


Representación esquemática de un condensador y batería

Ejemplo 72. El condensador de placas paralelas. Este Condensador consiste en dos placas paralelas de área A y separadas una distancia d (d es muy pequeña comparada con A).

Solución.



Ponemos la Carga Q y - Q como se muestra en la figura.
El campo eléctrico que se forma entre las placas es:
$E = \sigma/\varepsilon_0$, siendo $\sigma = Q/A$, tenemos:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Como $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

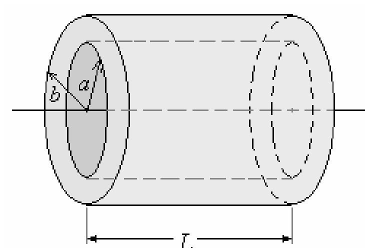
La diferencia de potencial entre las placas es:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 Edx = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} d$$

Finalmente la capacidad, es

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Ejemplo 73. El condensador cilíndrico. Este Condensador cilíndrico en dos conductores cilíndricos concéntricos de radios a y b con longitud L, siendo esta longitud mucho mayor a fin de poder despreciar las irregularidades de los extremos.



Solución.

Pongamos cargas Q y - Q a los cascarones de radios a y b respectivamente.
Aplicando la ley de Gauss encontrar que el Campo eléctrico entre ellos es

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \text{ donde } \lambda = \frac{Q}{L}$$

De aquí $E = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$

Como $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

$$V_1 - V_2 = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{dr}{r}$$

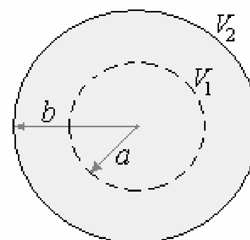
$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a}$$

Finalmente la capacidad es

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$$

Ejemplo 74. El condensador esférico. Este Condensador consiste en dos cáscaras esféricas conductoras y aisladas con radios a y b.

Solución.



Pongamos cargas Q y - Q a los cascarones esféricos de radios a y b respectivamente.
Aplicando la ley de Gauss encontramos el campo eléctrico entre ellos

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Como $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

La diferencia de potencial entre los cascarones es

$$V_1 - V_2 = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

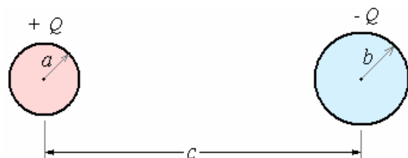
$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(b-a)}{ab}$$

Finalmente la capacidad es

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}$$

Cuando $b \to \infty$, la capacidad tiende a
$C = 4\pi\varepsilon_0 a$, que es la capacidad del conductor esférico aislado.

Ejemplo 75. Encontrar la capacidad entre dos esferas conductoras de radios *a* y *b* separadas una distancia *c,* siendo *c* mucho mayor que *a* y *b*.
Solución.



Pongamos cargas *Q* y - *Q* a las esferas de radios *a* y *b* respectivamente.
El potencial V_1 sobre la esfera de radio *a* es el potencial debido a su carga *Q* mas el potencial debido a la carga - *Q*, tomada como puntual ya que $c >> b$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{(-Q)}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

De1 mismo modo el potencial V_2 sobre la esfera de radio *b*

$$V_2 = \frac{(-Q)}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

La diferencia de potencial entre las esferas es

$$V_1 - V_2 = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\right) - \left(\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\right)$$

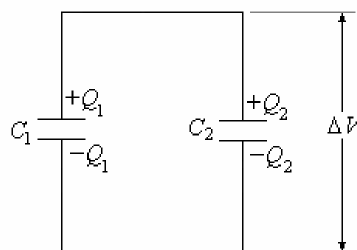
$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c}\right)$$

La capacidad del sistema es:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c}\right)}$$

COMBINACIONES DE CONDENSADORES
Generalmente los condensadores se encuentran combinados en los circuitos eléctricos.
Los condensadores pueden combinarse de dos formas en paralelo o en serie.
A continuación encontraremos la capacidad equivalente de diferentes combinaciones.

CONDENSADORES EN PARALELO. La figura siguiente muestra una combinación en paralelo de los condensadores de capacidades C_1 y C_2



En este caso la diferencia de potencial es igual a ΔV para los dos condensadores.
El Condensador C_1 almacena una carga Q_1

$$Q_1 = C_1\Delta V$$

El Condensador C_2 almacena una carga Q_2

$$Q_2 = C_2\Delta V$$

La carga total almacenada es

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1\Delta V + C_2\Delta V$$
$$= (C_1 + C_2)\Delta V$$

Como le Capacidad es $\frac{Q}{\Delta V}$

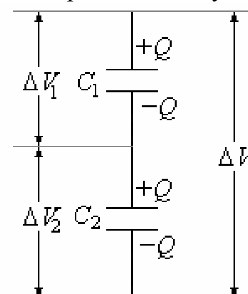
La capacidad equivalente es

$$C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

Si fueran *n* condensadores en paralelo la capacidad equivalente sería

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

CONDENSADORES EN SERIE. La figura siguiente muestra una combinación en serie de los condensadores de capacidades C_1 y C_2.



La diferencia de potencial entre los extremos es ΔV, de tal manera que la diferencia de potencial en el condensador C_1 es ΔV_1 y la diferencia de potencial en el Condensador C_2 es ΔV_2 y $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$.
Si los dos Condensadores se conectan y luego se cargan, por la conservación de carga se requiere que cada condensador tome la misma carga *Q*, de tal manera que

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1},\ \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2} \text{ y } \Delta V = \frac{Q}{C}$$

Luego $\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$

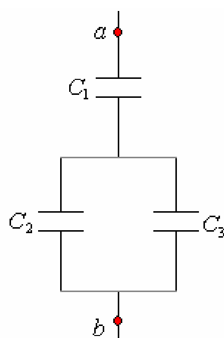
Simplificando Q: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Finalmente $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Si fueran n condensadores en serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

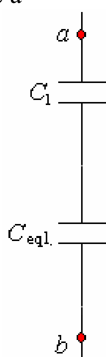
Ejemplo 76. En la figura siguiente encontrar la capacidad equivalente entre a y b. Donde $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 1\ \mu F$ y $C_3 = 3\ \mu F$.



Solución.
Primero tenemos que encontrar el equivalente de los condensadores C_2 y C_3

$$C_{eq1} = C_2 + C_3 = 1\mu F + 3\mu F = 4\mu F\ .$$

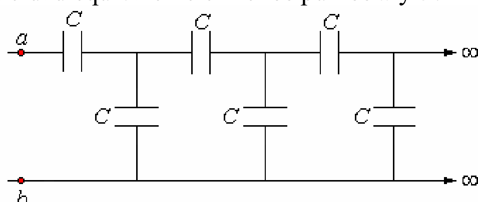
El Sistema se reduce a



C_1 y C_{eq1}. Están en serie, el equivalente es

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_{eq1}}{C_1 + C_{eq1}} = \frac{2 \times 4}{2 + 4} = \frac{4}{3}\mu F$$

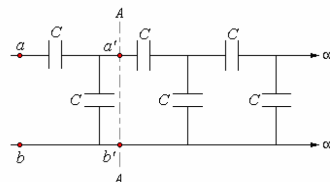
Ejemplo 77. Se tiene el sistema de Condensadores mostrado en figura, todos los condensadores tienen capacidad C y se extiende al infinito. ¿Cuál es la capacidad equivalente entre los puntos a y b?



Solución.

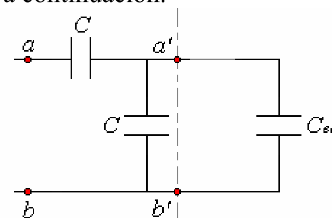
Sea la capacidad C_{eq} entre los puntos a y b.

Hagamos un corte en el circuito como se muestra en la figura siguiente.

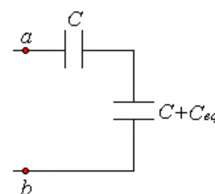


Observamos que el circuito partiendo del corte AA a la derecha es igual al original luego la capacidad equivalente entre a' y b' es C_{eq} también.

De esta manera el circuito podemos dibujarlo como se muestra a continuación.



Este circuito es equivalente al mostrado al inicio. Luego



Finalmente: $C_{eq} = \frac{(C + C_{eq})C}{(C + C_{eq}) + C} = \frac{C^2 + C_{eq}C}{2C + C_{eq}}$

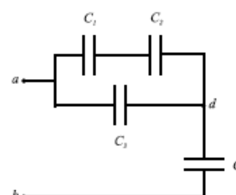
De donde resulta la ecuación

$$C_{eq}^2 + CC_{eq} - C^2 = 0$$

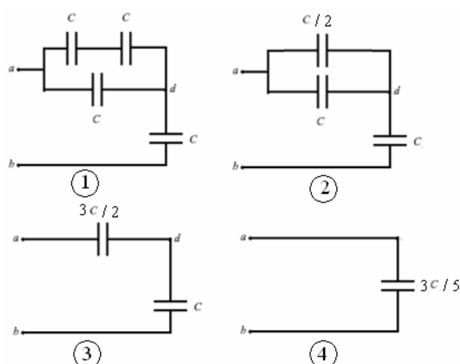
Tomando la solución positiva

$$C_{eq} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}C$$

Ejemplo 78. En el circuito mostrado, cada condensador tiene un valor de 4 μ F. Si Va - Vb = 12 voltios, hallar la carga de cada condensador y además Va - Vd.



Solución.



En la figura (4)

$$Q_4 = \frac{3C}{5}V = \frac{3}{5}\left(4x10^{-6}\right)\left(12\right) = 28.8x10^{-6}\text{ C}$$

Esta misma carga es para los dos condensadores de la figura (3), por estar en serie.

En la figura (2)

$\frac{Q_3}{C} = \frac{Q'_3}{C/2} \Rightarrow Q'_3 = 2Q_3$, además

$Q'_3 + Q_3 = Q_4 = 7{,}2x10^{-6}$

Luego $Q_3 = 2{,}4x10^{-6}$ y $Q'_3 = 4{,}8x10^{-6}$

En la figura (1)

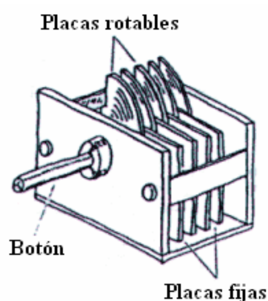
$Q_1 = Q_2 = Q'_3 = 4{,}8x10^{-6}$

En resumen $Q_1 = Q_2 = 4{,}8x10^{-6}$ C, $Q_3 = 2{,}4x10^{-6}$ C,

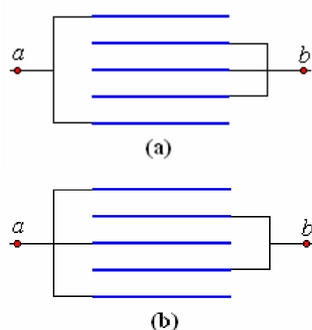
$Q_4 = 7{,}2x10^{-6}$ C

$$Va - Vd = \frac{Q_3}{C} = \frac{2{,}4x10^{-6}}{4x10^{-6}} = 0{,}6\text{ V}$$

Ejemplo 79. Un condensador de radio consiste de cinco placas igualmente espaciadas cada una de área *A* y separadas una distancia *d*.

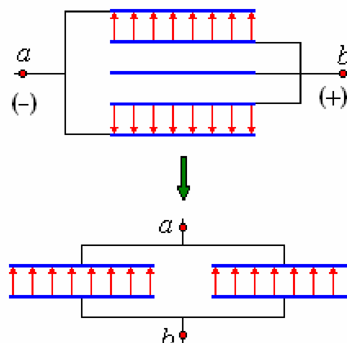


Calcular la capacidad cuando las placas se conectan en las formas mostradas en las figuras (a) y (b).



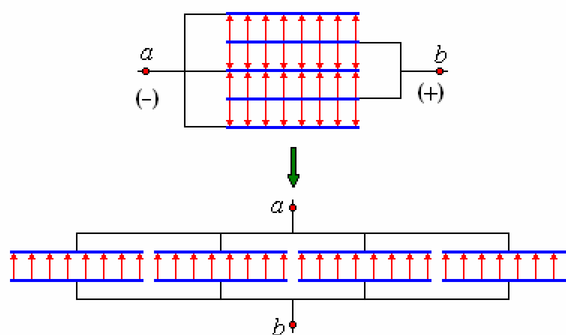
Solución.

El caso (a): Como la placa media y las dos adyacentes están unidas al mismo potencial, de tal manera que no hay campo entre ellas, y las placas extremas están al mismo potencial, de tal manera que el sistema consiste de dos condensadores en paralelo.



La Capacidad es: $C_{eq} = 2C = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}$

El caso (b): La figura a continuación muestra como se forman los campos y es equivalente a cuatro condensadores en paralelo.



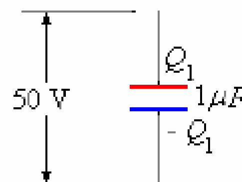
La Capacidad es: $C_{eq} = 4C = \frac{4\varepsilon_0 A}{d}$

Ejemplo 80. Dos Condensadores de Capacidades 1 μF y 2 μF, cargados cada uno a 50 voltios se conectan en las dos formas posibles. ¿Cuales son la carga y diferencia de potencial de cada condensador en cada caso?

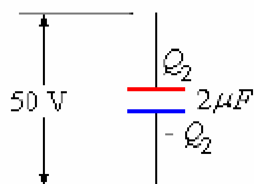
Solución.

La Carga que toman los condensadores a 50 voltios, es

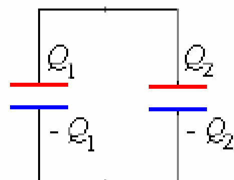
$Q_1 = C_1 V = 1\times 10^{-4}\times 50 = 0{,}5 \text{ x } 10^{-6}$ C



$Q_2 = C_2 V = 2\times 10^{-4}\times 50 = 1{,}0 \text{ x } 10^{-6}$ C

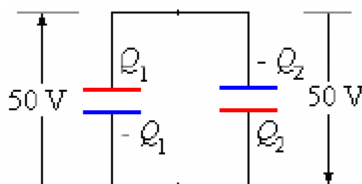


Primera posibilidad:
Conectar positivo con positivo y negativo con negativo

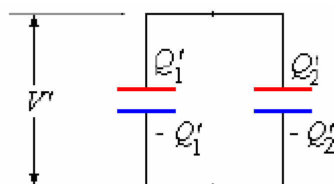


Esta conexión nos da que la carga en cada condensador sigue siendo la misma
Q_1 = 0,5 x 10^{-6} C y Q_2 = 1,0 x 10^{-6} C
La diferencia de potencial sigue siendo 50 voltios.

Segunda posibilidad:
Conectar positivo con negativo y negativo con positivo.



En este caso la carga se redistribuirá



De tal manera que

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + (-Q_2) = Q_1 - Q_2$$

$$Q'_1 + Q'_2 = 0,5\times10^{-6} - 1,0\times10^{-6} = -0,5\times10^{-6}$$

Pero $Q'_1 = C_1V'$ y $Q'_2 = C_2V'$

De aquí $C_1V' + C_2V' = -0,5\times10^{-6}$

$$V' = -\frac{0,5\times10^{-6}}{C_1 + C_2} = -\frac{0,5\times10^{-6}}{1\times10^{-6} + 2\times10^{-6}}$$

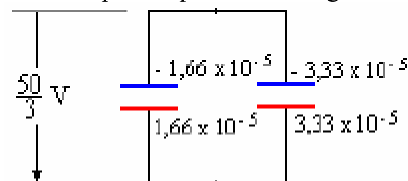
$$V' = -\frac{50}{3}\text{ V}$$

El valor negativo significa que el potencial es más negativo en la parte superior que la parte inferior.
Luego

$$Q'_1 = 1\times10^{-6}\left(-\frac{50}{3}\right) = -1,66\text{ x }10^{-5}\text{ C}$$

$$Q'_2 = 2\times10^{-6}\left(-\frac{50}{3}\right) = -3,33\text{ x }10^{-5}\text{ C}$$

Finalmente el esquema queda como sigue



Ejemplo 81. Dos esferas aisladas conductoras, cada una con radio 3 cm, están muy separadas conectadas por un alambre (no considerar la capacidad del alambre). Las esferas están cargadas a un potencial de 100 Voltios. Una cáscara esférica de radio 4 cm dividida en dos hemisferios se coloca concentricamente alrededor de una de las esferas conectándola a tierra, formando un condensador esférico; el alambre que une a las esferas pasa a través de un pequeño agujero en las cáscaras. Calcular el potencial final de los dos Conductores.
Solución.



En la posición antes: La capacidad de cada una de las esferas es $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$, y la carga en cada esfera es $Q = C_1V_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1V_1$

En la posición después: La capacidad de la esfera simple sigue siendo $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ y su carga es $Q'_2 = C_1V_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_1V_1$. La capacidad de las esferas concéntricas es $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$ y su carga es

$$Q''_2 = C_2(V_2 - V_{Tierra})$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}V_2$$



Como la carga del sistema se conserva:
Carga antes = carga después.

$$2Q_1 = Q'_1 + Q''_2$$

$$24\pi\varepsilon_0 V_1R_1 = 4\pi\varepsilon_0 V_2R_2 + 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}V_2$$

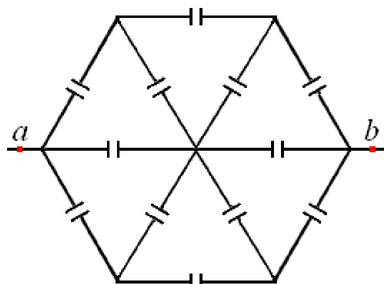
De aquí: $V_2 = \dfrac{2}{\left(1 + \dfrac{R_2}{R_2 - R_1}\right)}V_1$

Como V_1 = 100 V, R_1 = 3 cm y R_2 = 4 cm, remplazando obtenemos:

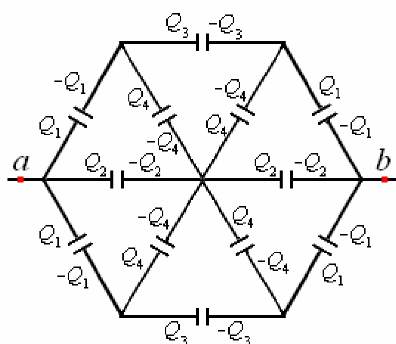
$$V_2 = \frac{2}{\left(1 + \frac{4}{4-1}\right)} 100 = 40 \text{ V}$$

El potencial final de los dos conductores es 40 voltios.

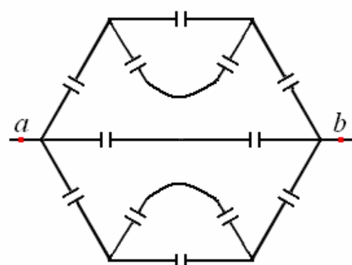
Ejemplo 82. Encontrar la capacidad equivalente entre los puntos *a* y *b*, todos los condensadores tienen capacidad *C*.



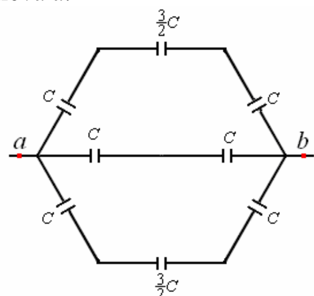
Solución. Este caso al parecer muy complicado se simplifica debido a su simetría.
El reparto de Cargas al ponerlo a una diferencia de potencial sería como se muestra a continuación:



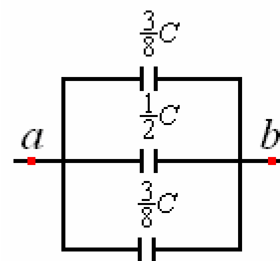
Claramente se ve que este circuito es igual al que se muestra en la figura a continuación:



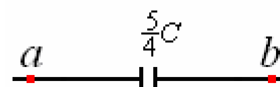
Y esto nos lleva a:



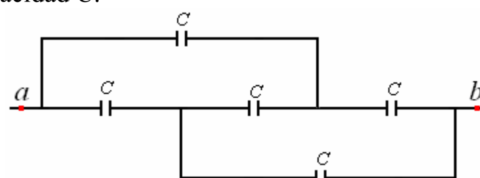
Continuando la simplificación



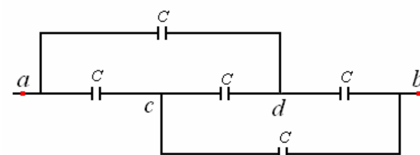
y por último



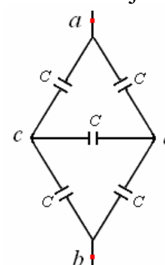
Ejemplo 83. Encontrar la capacidad equivalente entre los puntos *a* y *b*, todos los condensadores tienen capacidad *C*.



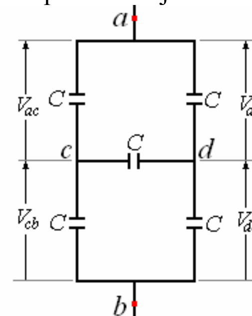
Solución. A este circuito aparentemente complejo, porque no está ni en serie ni en paralelo podemos hacerle algunas transformaciones sin cambiarlo.



Entre *a* y *c* hay un solo condensador
Entre *a* y *d* hay un solo condensador
Entre *c* y *d* hay un solo condensador
Entre *d* y *b* hay un solo condensador
Entre *c* y *b* hay un solo condensador
Esto nos permite hacer el dibujo equivalente siguiente

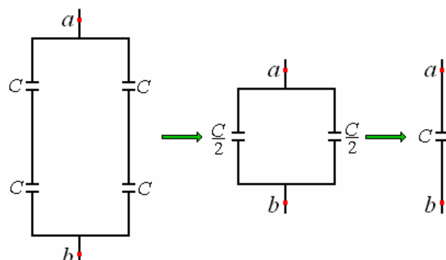


El que también se puede dibujar como

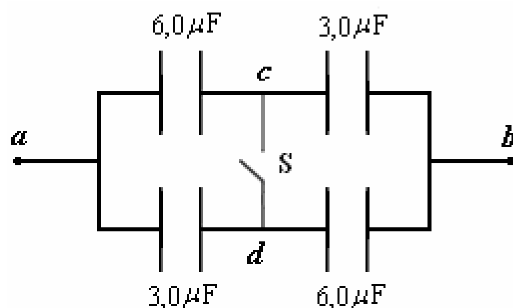


Podríamos resolverlo en forma similar al hexágono anterior, pero lo vamos a hacer en forma diferente.

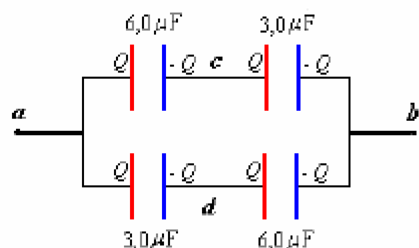
Se puede ver: $V_{ab} = V_{ad}$ y $V_{cb} = V_{db}$
Con lo que podemos concluir:
$V_c = V_d$, esto hace que el condensador entre c y d no se cargue y es como si no existiera, con lo que el circuito queda reducido, a condensadores en paralelo el que podemos ir simplificando hasta encontrar el condensador equivalente.



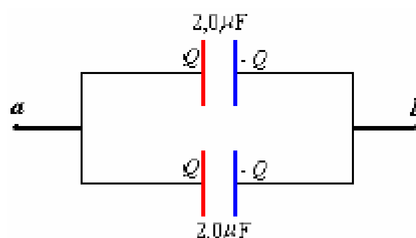
Ejemplo 84. Sean cuatro condensadores conectados como se indica en la figura anexa. Con el interruptor S abierto, se aplica una diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab} = 9$ V.



a) Calcule el valor de la carga de cada condensador.
b) ¿Cuál es la diferencia de potencial $V_{cd} = V_c - V_d$? ¿Qué punto está a mayor potencial?
c) Se encierra el interruptor S, sin desconectar la diferencia de potencial V_{ab} ¿Cuál es el valor de la carga de cada condensador?
d) ¿Cuál es el cambio de energía $\Delta U = U_i - U_f$ al cerrar el interruptor S? comente el signo de su resultado. Sugerencia use el concepto de condensador equivalente para obtener el valor ΔU .
Solución.
a) El dispositivo se carga de la manera indicada en la figura siguiente.



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{6,0} + \frac{1}{3,0} = \frac{1}{2,0} \Rightarrow C_{eq} = 2,0\ \mu\text{F}$$

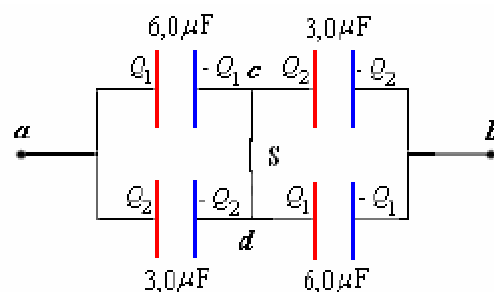


De aquí $Q = 2,0\times10^{-6}(9) = 18,0\ \mu$C
Que es la carga que corresponde a cada condensador.

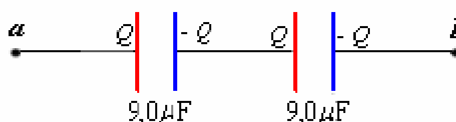
b) $V_{cb} = \dfrac{Q}{3,0\times10^{-6}} = \dfrac{18\times10^{6}}{3,0\times10^{-6}} = 6$ V

$V_{db} = \dfrac{Q}{6,0\times10^{-6}} = \dfrac{18\times10^{6}}{6,0\times10^{-6}} = 3$ V

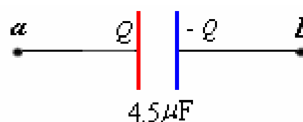
$V_{cd} = V_c - V_d = V_{cb} - V_{db} = 6 - 3 = 3$ V
El punto a está *a* mayor potencial.
c) La distribución de las cargas es como se indica a continuación



Esto se reduce a



Y finalmente



De lo que obtenemos:
$Q = 4,5\times10^{-6}(9) = 40,5\text{x}10^{-6}\text{ C} = Q_1 + Q_2$
Como $V_{ac} = V_{ad}$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{6\times10^{-6}} = \frac{Q_2}{3\times10^{-6}} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = 2$$

De estas dos últimas relaciones:
$Q_1 = 27\text{x}10^{-6}$ C, $Q_2 = 13,5\text{x}10^{-6}$ C

d) $U_i = \dfrac{1}{2}C_{eq(i)}V_{ab}^2 = \dfrac{1}{2}(4\times10^{-6})(9)^2$
$= 1,62\text{x}10^{-4}$ J

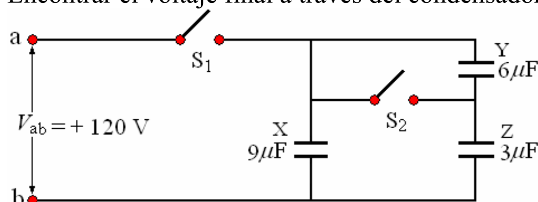
$U_f = \dfrac{1}{2}C_{eq(f)}V_{ab}^2 = \dfrac{1}{2}(4,5\times10^{-6})(9)^2$
$= 1,82\text{x}10^{-4}$ J

$\Delta U = U_i - U_f = 1,62\text{x}10^{-4} - 1,82\text{x}10^{-4}$

$= -\ 0{,}20\text{x}10^{-4}$ J

El signo es negativo porque se ha realizado trabajo sobre el sistema porque aumento su capacidad y había que aumentar la carga.

Ejemplo 85. El circuito mostrado inicialmente con los condensadores descargados X, Y, y Z, y los interruptores abiertos, S_1 y S_2. Una diferencia potencial V_{ab} = +120 V se aplica entre los puntos a y b. después de que el circuito esté montado, se cierra el interruptor S_1, pero el interruptor S_2 se mantiene abierto. Encontrar
a) La energía almacenada en el condensador X
b) La carga del condensador Y.
c) El voltaje a través del condensador Z.
d) Si el interruptor S_1 se abre, y se cierra S_2. Encontrar el voltaje final a través del condensador X,



Solución.

a) $U_X = \dfrac{1}{2}CV^2 = \dfrac{1}{2}\left(9\times10^{-6}\right)(120)^2$ = 0,065 J

b) $\dfrac{1}{C_{eq}} = \dfrac{1}{C_Y} + \dfrac{1}{C_Z} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$

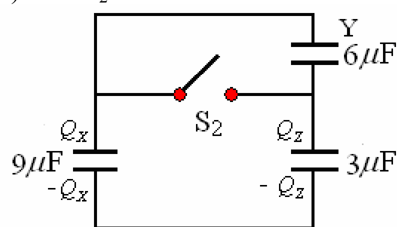
$C_{eq} = 2\mu\text{F}$

$Q_Y = Q = C_{eq}V_{ab} = \left(2\times10^{-6}\right)(120)$

= 240 mC

c) $V_Z = \dfrac{Q}{C_Z} = \dfrac{0{,}240}{3\times10^{-6}}$ = 80 V

d) Con S_2 abierto.



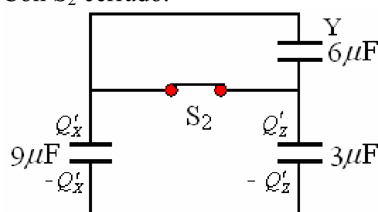
La carga del condensador *X* es:

$Q_X = C_X V = \left(9\times10^{-6}\right)(120)$ = 1080 x 10^{-6}C

La carga del condensador Z es:

$Q_Z = Q_Y$ = 240 x 10^{-6}C

Con S_2 cerrado.



$Q_X + Q_Z = Q'_X + Q'_Z$ = 1320 x 10^{-6}C

Como $\dfrac{Q'_X}{Q'_Z} = \dfrac{C_X}{C_Z} = \dfrac{9\times10^{-6}}{3\times10^{-6}} = 3$

$Q'_X = \dfrac{3}{4}\left(1320\times10^{-6}\right)$= 990 x 10^{-6}C

Luego $V'_X = \dfrac{Q'_X}{C_X} = \dfrac{990\times10^{-6}}{9\times10^{-6}}$ = 110 V.

ENERGIA ELECTROSTATICA DE CARGAS

Para colocar una carga q_1 en el espacio no se realiza trabajo pero si querernos colocar otra carga q_2 tenernos que realizar un trabajo, porque tenemos que traer la carga q_2 del infinito donde el potencial es cero hasta el punto situado a r_{12} de q_1 donde el potencial debido a esta última es

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}$$

El trabajo realizado es

$$W = q_2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

este trabajo realizado queda como energía en el sistema

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Ahora si tenernos tres cargas presentes la energía en el sistema es

$$W = U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

Este resultado es independiente del radio en que se lleva las cargas a sus posiciones finales.
En el caso de ser o cargas la energía electrostática total es la suma de las energías de todos los pares posibles.

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{todos\\los\\pares}}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Cuando queremos cargar un cuerpo con densidad de carga ρ, consideramos que ya se ha juntado una cantidad de carga *q*, el trabajo para traer una carga *dq* del infinito es la energía diferencial que se almacena.

$$dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qdq}{r}$$

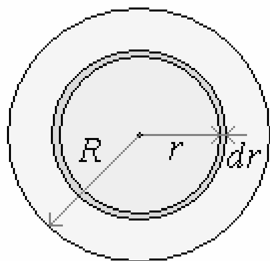
Siendo $dq = \rho dV$ y dV un elemento diferencial del volumen del cuerpo.

Nota: El concepto de "voltio" "potencial" en electricidad es similar al concepto de "altura" en gravedad y al concepto de "temperatura" en termodinámica. En todos estos casos, se define un nivel de referencia de el cual se mide voltio/altura/temperatura.

- El cero para el voltaje se considera el voltaje de la tierra del planeta, llamado en la ingeniería eléctrica "tierra".
- El cero para la gravedad se considera ser el nivel del suelo (en el caso de la tierra).
- El cero para la temperatura se considera ser el Kelvin cero supuesto.
-

Ejemplo 86. Encontrar la energía almacenada al cargar una esfera de radio R con carga uniformemente distribuida de densidad volumétrica ρ .

Solución. Supongamos que ya hemos cargado una esfera de radio r, y queremos ponerle un diferencial de carga en el volumen inmediato de espesor dr, como se muestra en la figura.



La Carga q almacenada ya, es

$$q = \frac{4}{3}\pi r^3 dr\rho$$

La Carga dq que vamos a traer del infinito es

$$dq = 4\pi r^2 dr\rho$$

El trabajo en traer la carga dq es

$$dU = \frac{qdq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{4\pi \rho^2 r^4 dr}{3\pi\varepsilon_0}$$

El trabajo para la carga toda la esfera se halla integrando r desde 0 hasta R.

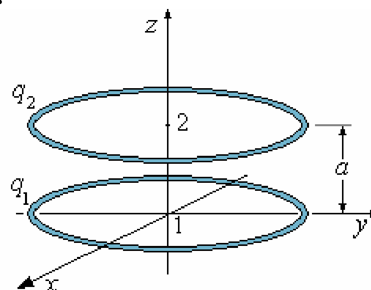
$$U = \int_0^R dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{qdq}{r} = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr$$

$$U = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

Como $Q = \frac{4\pi R^3}{3}\rho \Rightarrow U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Ejemplo 87. Dos anillos coaxiales uniformemente cargados de radios iguales R está en planos paralelos separados una distancia a, el trabajo que se realiza para traer una carga q del infinito al centro de cada uno de los anillos es respectivamente A_1 y A_2. Encontrar les Cargas q_1 y q_2 que tienen los anillos.

Solución.



El potencial en 1:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2 + R^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[q_1 + \frac{q_2}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}}\right]$$

El potencial en 2:

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2 + R^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[q_2 + \frac{q_1}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}}\right]$$

El potencial en el infinito:

$$V_\infty = 0$$

Trabajo para traer una carga q desde el infinito a 1:

$$A_1 = q\left(V_1 - V_\infty\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[q_1 + \frac{q_2}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}}\right] \quad (1)$$

Trabajo para traer una carga q desde el infinito a2:

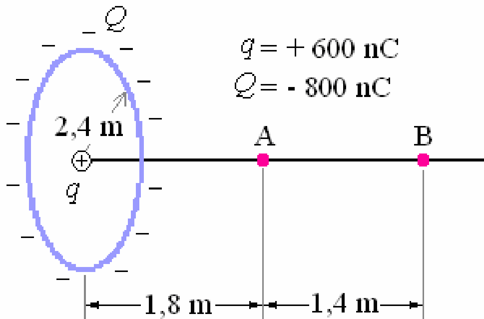
$$A_2 = q\left(V_2 - V_\infty\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[q_2 + \frac{q_1}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}}\right] \quad (2)$$

(1) y (2) son dos ecuaciones con incógnitas q_1 y q_2.
Resolviendo (1) y (2) obtenemos:

$$q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R A_2}{q}\frac{\left[\frac{1}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}} - \frac{A_1}{A_2}\right]}{\left[\frac{1}{\left(1 + a^2/R^2\right)} - 1\right]}$$

$$q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R A_1}{q}\frac{\left[\frac{1}{\left(1 + a^2/R^2\right)^{1/2}} - \frac{A_2}{A_1}\right]}{\left[\frac{1}{\left(1 + a^2/R^2\right)} - 1\right]}$$

Ejemplo 88. Una carga Q = - 800 nC se distribuye uniformemente en un anillo de radio de 2,4 m. Una carga q = + 600 nC se pone en el centro del anillo. Los puntos A y B están situados en el eje del anillo.



a) ¿Cuál es el trabajo hecho por una fuerza externa que transporta un electrón de B a A?
b) si el potencial eléctrico es igual a cero en un punto en el eje del anillo. ¿Cuál es la distancia de este punto del centro del anillo?
c) Si se un electrón se lanza a lo largo del eje del anillo desde el infinito. El electrón llega y se detiene momentáneamente en un punto en el eje que está a 5,0 m del centro del anillo. ¿Cuál es la velocidad inicial del electrón en el infinito?
d) Si una fuerza externa retira la carga q del centro del anillo y la transporta al infinito. ¿Cuál es el trabajo realizado por esta fuerza externa?

Solución.

a) $W_{B\rightarrow A} = e(V_A - V_B)$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{q}{(1,8)} - \frac{Q}{(1,8^2+2,4^2)^{1/2}}\right) - \left(\frac{q}{(3,2)} - \frac{Q}{(3,2^2+2,4^2)^{1/2}}\right)\right]$$

$W_{B\rightarrow A}$ = -700 eV

b) $\frac{q}{x} - \frac{Q}{(x^2+2,4^2)^{1/2}} = 0$

$\Rightarrow x = 2{,}7$ m

c) $\frac{1}{2}m_e v_0^2 = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(5,0)} - \frac{Q}{(5,0^2+2,4^2)^{1/2}}\right]$

$\Rightarrow v_0 = 9\times10^6$ m/s

d) $W_{O\rightarrow\infty} = q(V_\infty - V_O)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{Q}{(2,4)}\right) - \left(-\frac{Q}{(\infty^2+2,4^2)^{1/2}}\right)\right]$$

= + 1,8 x 10^{-3} J

ENERGIA ALMACENADA POR UN CONDENSADOR

La energía que se almacena en el condensador es igual a la energía requerida para cargarlo.
Ahora encontraremos esa energía.
Consideremos que se ha tomado una carga q de una de las placas de un condensador de capacidad C colocado sobre la otra, la diferencia de potencial entre ellas es

$$V = \frac{q}{C}$$

Para transferir en este instante una carga dq de una placa a la otra. El trabajo requerido para transferir esta carga es

$$dW = dU = Vdq$$

Poniendo V en función de q

$$dW = \frac{q}{C}dq$$

Para obtener el trabajo total integramos desde q = 0 hasta la carga total $q = Q_0$.

$$U = \frac{1}{C}\int_0^{Q_0} qdq = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

Como $Q_0 = CV_0 \Rightarrow U = \frac{1}{2}CV_0^2$

Esta expresión es general para todo tipo de condensador, ya que la geometría del condensador no interviene en el razonamiento.

Densidad de energía del campo eléctrico. Es razonable considerar que esta energía se almacena en el campo eléctrico y por lo tanto es conveniente definir el concepto de densidad de energía del campo eléctrico, para esto consideremos un condensador de placas paralelas, despreciando las irregularidades de los extremos tenemos $C = \frac{\varepsilon_9 A}{d}$

Y $Q_0 = CV_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}V_0 = \varepsilon_0 A\left(\frac{V_0}{d}\right)$

$$Q_0 = \varepsilon_0 A E_0$$

La densidad de energía es

$$\mu_E = \frac{U}{\text{Volumen}}$$

el volumen es: Ad

$$\mu_E = \frac{\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}}{\text{Volumen}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon_0 A E_0)^2}{(\varepsilon_0 A/d)}}{Ad}$$

$$\mu_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

Aunque para esta demostración particularizamos para el caso de placas paralelas, esta ecuación es aplicable para cualquier caso.

Ejemplo 89. Se tiene un condensador esférico con radio interior a y radio exterior b, cuando la diferencia de potencial entre las cáscaras esféricas es V_0, calcular la energía electrostática almacenada.

Solución.

La capacidad de este condensador es

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

La energía almacenada es

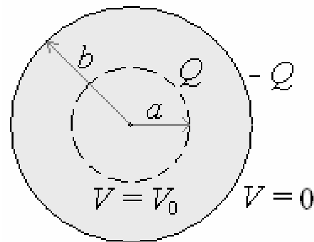
$$U = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}V_0^2 =$$

$$2\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{(b-a)}V_0^2$$

Otra forma de cálculo es mediante la densidad de energía.

$$\mu_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Por la ley de Gauss evaluamos E



El Campo eléctrico entre las cáscaras es

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_9 r^2}$$

Donde $Q = CV_0 = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{ab}{(b-a)}V_0$

Luego: $E = \dfrac{ab}{(b-a)}\dfrac{V_0}{r^2}$

-reemplazando el valor de E en $\mu_E = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

$$\mu_E = \frac{\varepsilon_0 a^2 b^2}{2(b-a)^2}\frac{V_0^2}{r^4}$$

Para obtener la energía total

$$\mu_E = \frac{dU}{dV},$$

Con $dV = 4\pi r^2 dr$ y $dU = \mu_E dV$

$$U = \int dU = \int \mu_E dV = \int_a^b \frac{\varepsilon_0 a^2 b^2}{2(b-a)^2}\frac{V_0^2}{r^2}dr =$$

$$\frac{2\pi\varepsilon_0 a^2 b^2 V_0^2}{(b-a)^2}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 a^2 b^2 V_0^2}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Finalmente: $U = 2\pi\varepsilon_0 \dfrac{ab}{(b-a)}V_0^2$

Resultado igual al evaluado directamente, lo cual prueba la aseveración que hicimos sobre la generalidad de la expresión de la densidad de energía.

Ejemplo 90. La red de condensadores mostrados está montada con los condensadores inicialmente descargados. Una diferencia de potencial V_{ab} = 10,0 V se aplica a través de la red. El interruptor S en la red se mantiene abierto. Calcule:

a) la capacidad equivalente de la red.

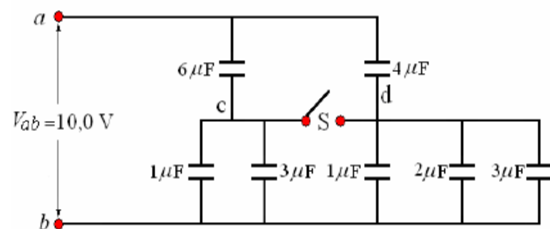
b) la diferencia de potencial $V_c - V_d$.

c) la carga y voltaje en el condensador de 2,0 μF.

Se cierra el interruptor S manteniendo la diferencia de potencial V_{ab} en 10,0 V.

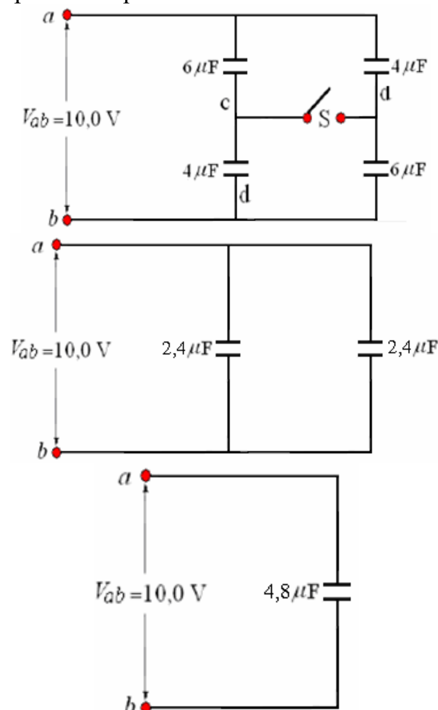
d) la carga y voltaje en el condensador de 2,0 μF.

e) el cambio de energía electrostática $\Delta U = U_f - U_i$, antes y después de cerrar el interruptor S. Comente su resultado.



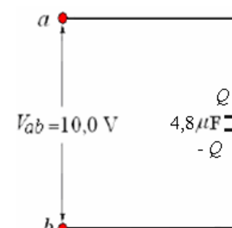
Solución.

a) la capacidad equivalente de la red.

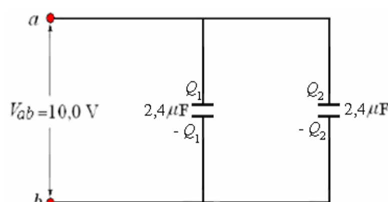


b) la diferencia de potencial $V_c - V_d$.

$$V_{bc} = \frac{Q_1}{4\times10^{-6}},\ V_{bd} = \frac{Q_2}{6\times10^{-6}}$$



$Q = (4{,}8\times10^{-6})(10{,}0)$ = 48 x 10^{-6} C.



$Q_1 = Q_2 = Q/2 = 24 \times 10^{-6}$ C

Luego: $V_{bc} = \dfrac{24\times10^{-6}}{4\times10^{-6}}$ = 6 V,

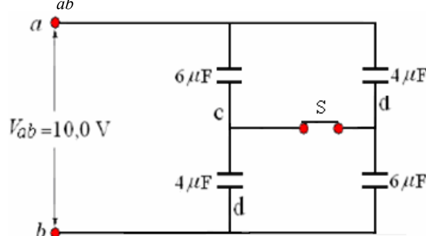
$V_{bd} = \dfrac{24\times10^{-6}}{6\times10^{-6}}$ = 4 V.

$V_c - V_d = V_{bc} - V_{bd}$ = 6 - 4 = 2 V.

c) la carga y voltaje en el condensador de 2,0 μF.

V_{bd} = 4 V, $Q_{2\mu F} = \left(2\times10^{-6}\right)\left(4\right)$ = 8 x 10^{-6} C.

Se cierra el interruptor S manteniendo la diferencia de potencial V_{ab} en 10,0 V.



d) la carga y voltaje en el condensador de 2,0 μF.
Como las capacidades equivalentes de la parte superior y la inferior son iguales a 10 μF, las diferencias de potencial de la parte superior y la parte inferior son iguales a 10/2 = 5 V.

Luego $Q'_{2\mu F} = \left(2\times10^{-6}\right)\left(5\right)$ = 10 x 10^{-6} C.

e) el cambio de energía electrostática $\Delta U = U_f - U_i$, antes y después de cerrar el interruptor S. Comente su resultado

Antes de cerrar

$U_i = \dfrac{1}{2}C_{eq\,i}V^2 = \dfrac{1}{2}\left(4,8\times10^{-6}\right)\left(10^2\right)$ = 2,4 x 10^{-4} J.

Después de cerrar

$U_f = \dfrac{1}{2}C_{eq\,f}V^2 = \dfrac{1}{2}\left(5\times10^{-6}\right)\left(10^2\right)$ = 2,5 x 10^{-4} J.

ΔU = 2,5 x 10^{-4} - 2,4 x 10^{-4}. = 0,1 x 10^{-4} J = 10 x 10^{-6} J.

La capacidad equivalente en la nueva configuración es mayor que en la original, siendo la diferencia de potencial igual, la energía almacenada en la nueva configuración es mayor.

FUERZAS, TORQUES

Ahora mostraremos como la fuerza sobre uno de los objetos en un sistema cargado puede calcularse a partir de la energía electrostática.

Consideremos un sistema formado por dos placas, si permitimos el movimiento Δx de una de ellas,. El trabajo mecánico realizado por una fuerza exterior F para mover las placas es:

$\Delta W = F\,\Delta x$

Siendo F la fuerza entre las placas, este trabajo debe ser igual al cambio de energía electrostática en el condensador.

Si el objeto en mención es obligado a un movimiento de rotación debido a un torque τ y a un desplazamiento es $\Delta\theta$, el trabajo realizado es

$\Delta W = \tau\,\Delta\theta$

Ejemplo 91. ¿Cuál es la fuerza entre las placas de un condensador de placas paralelas, al separarlas una distancia *dx* en, el condensador tiene una área *A*, separación entre placas *d* y Carga *Q*?

Solución.

El trabajo es

$\Delta W = F\,\Delta x$

que es igual al cambio de la energía electrostática

$U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

el cambio es (por derivación con respecto a *C*)

$\Delta U = \dfrac{1}{2}Q^2\Delta\left(\dfrac{1}{C}\right)$.

con $\Delta\left(\dfrac{1}{C}\right) = \Delta\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0 A/d}\right) = \Delta\left(\dfrac{d}{\varepsilon_0 A}\right)$

Como ε_0 y *A* son constantes, el único variable es *d* y $\Delta d = \Delta x$.

Luego tenemos: $\Delta\left(\dfrac{1}{C}\right) = \dfrac{\Delta x}{\varepsilon_0 A}$

Y $\Delta U = \dfrac{Q^2\Delta x}{2\varepsilon_0 A}$

Siendo $\Delta U = \Delta W = F\Delta x$, podemos escribir:

$F\Delta x = \dfrac{Q^2\Delta x}{2\varepsilon_0 A} \Rightarrow F = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$

Reacomodando: $F = \dfrac{1}{2}Q\dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$

Como $\sigma = \dfrac{Q}{A}$ y $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$

Finalmente: $F = \dfrac{1}{2}QE$

Este resultado que es diferente en el factor ½ al que esperábamos por intuición se debe que el campo *E* no es el campo en las cargas, ya que la carga en la superficie tiene un espesor muy delgado y el campo va desde 0 en el interior hasta *E* en el espacio entre las placas, es decir la distribución superficial de

cargas tiene un espesor. El campo que actúa sobre las Cargas es el promedio $E/2$, esto explica el factor ½.

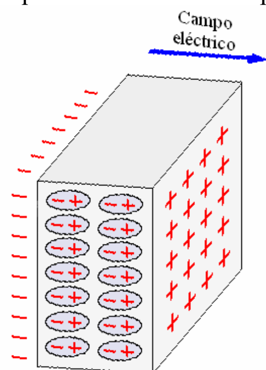
CAMPO ELECTRICO EN UN DIELECTRICO
Dieléctrico es un material no conductor como por ejemplo el vidrio, el papel, el plástico.
Faraday experimentando con condensadores aplicó la misma diferencia de potencial a dos condensadores de placas paralelas iguales, pero uno de ellos con un material dieléctrico entre las placas y observó que el condensador con dieléctrico almacena mayor carga.
La capacidad de un condensador de placas paralelas es

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

y la carga con respectó a la diferencia de potencial es:

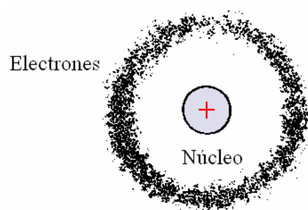
$$Q = CV$$

Con un material dieléctrico la carga es mayor, o sea, aumenta la capacidad.
Manteniendo la carga constante, al poner el dieléctrico, siendo las características de la capacidad las dimensiones, la diferencia de potencial disminuirá.
Como $V = Ed$, el Campo eléctrico entre las placas disminuye, esto se explica porque las cargas del dieléctrico en presencia del campo eléctrico se orientan como se muestra en la figura siguiente, a este efecto decimos que el dieléctrico está polarizado.

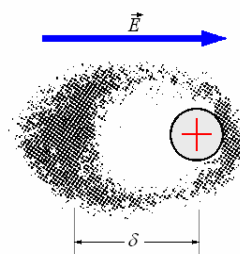


El dieléctrico polarizado a pesar de ser eléctricamente neutro en promedio produce un Campo eléctrico tanto exterior como interiormente, como resultado de esto aparece un campo eléctrico opuesto al original, disminuyéndolo.

POLARIZACION.
CARGAS DE POLARIZACION.
La figura a continuación nos muestra un átomo en un dieléctrico en ausencia de campo eléctrico, la carga positiva en el centro y la carga negativa distribuida uniformemente.



Pero en presencia de un campo eléctrico se produce una distorsión como se muestra en la figura siguiente.



El átomo se polariza, y esta configuración equivale en primera aproximación a un dipolo eléctrico..
Es razonable considerar que si el campo no es demasiado grande al momento sobre el dipolo será proporcional a la intensidad de este campo.

Si consideramos que $\vec{p}$ sea el momento dipolar de cada átomo y que tenemos N átomos por unidad de volumen, el momento dipolar por unidad de volumen será $N\vec{p}$, al que llamaremos Vector polarización $\vec{P}$.

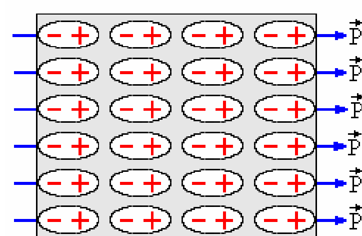
$$\vec{P} = N\vec{p}$$

$\vec{P}$ = momento dipolar por unidad de volumen, que tiene el mismo valor en todos los puntos del dieléctrico.

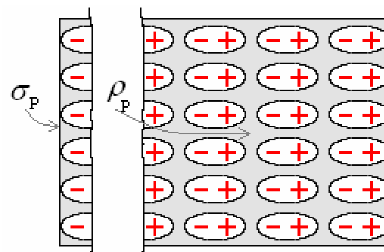
Como $\vec{p} = q\vec{\delta}$, siendo δ el desplazamiento promedio de las cargas positivas y negativas en el sentido de $\vec{p}$, podemos escribir

$$\vec{P} = Nq\vec{\delta}$$

Consideremos un cuerpo tetraedral polarizado, tal como se muestra en la figura siguiente



En la superficie aparecen sólo cargas negativas. Sea A la superficie total del tetraedro y el volumen inmediato es $A\delta$ (recordar que δ es la longitud del dipolo).



El momento dipolo de este volumen es $(S\delta)\vec{P}$, esto lo podemos escribir corno $SP\vec{\delta}$. Si es la carga q la que debe desplazarse una distancia δ de - q para producir el momento dipolo tenernos $SP\vec{\delta} = q\vec{\delta}$, de donde obtenemos : $q = SP$.

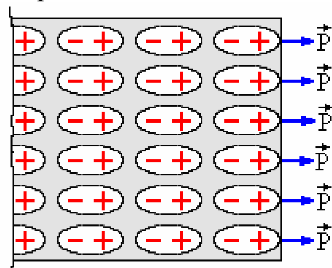
Y $\dfrac{q}{S} = \sigma_P = P$

Llamando a $\dfrac{q}{S} = \sigma_P$ densidad de carga superficial debido a la polarización.

En general $\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}$, donde $\hat{n}$ es la dirección normal a la superficie y q la carga total en la superficie.

$$q = \int_A \sigma_P dS = \int_A \vec{P}\cdot\hat{n}dS$$

Ahora observamos lo que sucede en el interior del volumen, le figure muestra el volumen inmediato interior a la superficie.



Por el principio de conservación de la carga, la carga dejada en este volumen V debe ser igual a - q,

Donde $-q = \int_V \rho_P dV$

Siendo ρ_P la densidad de carga por volumen debido a la polarización.

Para evaluar ρ_P en función de $\vec{P}$

$$-q = -\int_A \vec{P}\cdot\hat{n}dS = \int_V \rho_P dV$$

Usando el teorema de la divergencia convertimos la integral de superficie en integral de volumen.

$$-\int_A \vec{P}\cdot\hat{n}dS = \int_V \nabla\cdot\vec{P}dV$$

Donde $\nabla\cdot\vec{P}$ .es la divergencia de $\vec{P}$, el operador ∇ opera vectorialmente sobre $\vec{P}$.

Luego

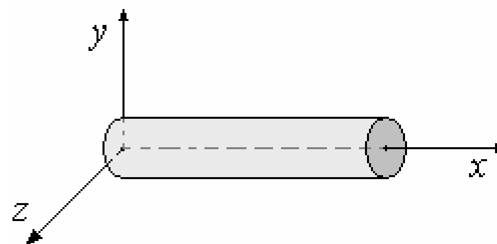
$$\int_V \rho_P dV = \int_V \nabla\cdot\vec{P}dV$$

De este último obtenemos finalmente

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}$$

Ejemplo 92. Una varilla delgada dieléctrica de sección transversal A se extiende a lo largo del eje x desde $x = 0$ a $x = L$ la polarización es longitudinal y está dada por $\vec{P} = \left(ax^2 + b\right)\hat{i}$. Encontrar la densidad de Carga de polarización y mostrar explícitamente que la carga total es cero.

Solución.



Primero encontremos la densidad superficial

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}$$

Para la cara en $x = 0$, $\hat{n} = -\hat{i}$ y $\vec{P} = b\hat{i}$:

$$\sigma_{P(x=0)} = b\hat{i}\cdot\left(-\hat{i}\right) = -b$$

Para la cara en $x = L$, $\hat{n} = \hat{i}$ y $\vec{P} = \left(aL^2 + b\right)\hat{i}$:

$$\sigma_{P(x=L)} = \left(aL^2 + b\right)\hat{i}\cdot\hat{i} = aL^2 + b$$

Para la superficie cilíndrica lateral, como $\hat{n}\perp\vec{P}$

$$\sigma_{PS} = 0$$

La densidad volumétrica

$$\rho_P = \nabla\cdot\vec{P} = \left(\frac{\partial}{dx}\hat{i} + \frac{\partial}{dy}\hat{j} + \frac{\partial}{dz}\hat{k}\right)\cdot\left(ax^2 + b\right)\hat{i}$$

$$= \frac{\partial}{dx}\left(ax^2 + b\right) = 2ax$$

La Carga total es:

$$Q_T = \sigma_{P(x=0)}A + \sigma_{P(x=L)}A + \int_V \rho_P dV$$

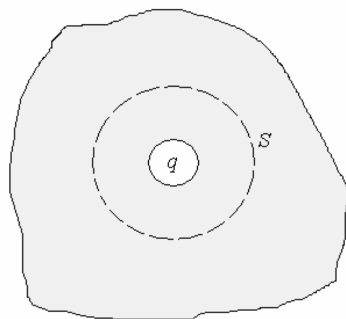
$$= -bA + \left(aL^2 + b\right)A + \int_0^L 2ax(Adx)$$

$$Q_T = -bA + aL^2A + bA + aAL^2 = 0$$

Valor que esperábamos encontrar.

LA LEY DE GAUSS PARA DIELECTRICOS - DESPLAZAMIENTO ELECTRICO

Supongamos una región en que tenemos una carga q en un medio dieléctrico, este medio se polariza y aparecen cargas por polarización, aplicando la ley de Gauss.



$$\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + Q_P)$$

Donde Q_P es la carga de polarización.

$$Q_P = -\int_V \rho_P dV = -\int_V \nabla\cdot\vec{P}dV$$

Convirtiendo la integral de volumen a integral de superficie por el teorema de la divergencia.

$$\int_V \nabla\cdot\vec{P}dV = \int_S \vec{P}\cdot\hat{n}dS$$

Obtenemos: $Q_P = \int_S \vec{P}\cdot\hat{n}dS$

De aquí:

$$\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + \int_S \vec{P}\cdot\hat{n}dS\right)$$

$$\Rightarrow\ \varepsilon_0\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}dS = q + \int_S \vec{P}\cdot\hat{n}dS$$

Y $\varepsilon_0\int_S\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)\cdot\hat{n}dS = q$

Definamos el Campo vectorial **Desplazamiento eléctrico** $\left(\vec{D}\right)$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

Y tenemos la ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D}\cdot\hat{n}dS = q$$

LA CONSTANTE DIELECTRICA

Vimos que la polarización del medio ocurre como una respuesta al campo eléctrico en el medio, pera el caso en que $\vec{P}$ desaparece cuando se quita $\vec{E}$ y para materiales isotrópicos en los cuales se orienta según $\vec{E}$, $\vec{P}$ es proporcional a , pare Campos no muy intensos

$$\vec{P} = \chi\vec{E}$$

donde χ es llamada **Susceptibilidad eléctrica**,

como $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\vec{E} = (\varepsilon_0 + \chi)\vec{E}$$

Llamando a $(\varepsilon_0 + \chi) = \varepsilon$, **Permitividad** del material obtenemos una relación entre $\vec{D}$ y $\vec{E}$.

El comportamiento de un material queda completamente especificado ya sea por la permitividad ε o por la susceptibilidad χ. Sin embargo es más conveniente trabajar con una cantidad sin dimensiones, **La constante dieléctrica** *K*.

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

Para el vacío *K* =1

CONSTANTE DIELECTRICA DE ALGUNOS MATERIALES	
MATERIAL	***K***
Vidrio	5 - 10
Mica	6,0
Nylon	3,5
Madera	2,5 - 3,0
Caucho	2 – 3,5
Agua destilada (20 ºC)	60
Aire (1 atm)	1,00059

Ejemplo 93. Cuál es la capacidad de un condensador de placas paralelas de área *A* y separación *d*, cuando se le introduce un dieléctrico de constante *K* que llena completamente el espacio entre placas.

Solución.

El Campo eléctrico entre las placas es:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Donde $\sigma = \frac{Q}{A}$ y $\varepsilon = K\varepsilon_0$

$$\therefore\ E = \frac{Q}{K\varepsilon_0 A}$$

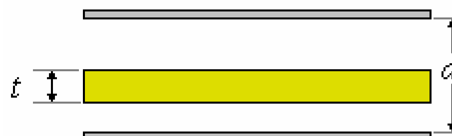
La diferencia de potencial entre las placas

$$V = \int \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{K\varepsilon_0 A}d$$

La Capacidad es $C = \frac{Q}{V} = K\frac{\varepsilon_0 A}{d}$

La capacidad de1 condensador, con dieléctrico es *K* veces a la capacidad sin dieléctrico.

Si al dieléctrico cubriera parte del espesor del espacio que separa a las placas, digamos un espesor *t*, como se muestra en la figura.



En este caso tenemos el campo eléctrico en parte vacío y en parte con dieléctrico.

En el vacío:

$$E_{vacío} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

En el dieléctrico:

$$E_{dieléctrico} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{K\varepsilon A}$$

La diferencia de potencial entre las placas

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_{vac}(d - t) + E_{dilec} t$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\left[(d - t) + \frac{t}{K}\right]$$

y la Capacidad

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{(d - t) + \frac{t}{K}}$$

Ejemplo 94. Evaluar el Campo eléctrico debido a una Carga puntual q dentro del dieléctrico de constante K.
Solución.
Aplicamos la ley de Gauss para una superficie esférica de radio r, Colocando a la carga q en el origen.

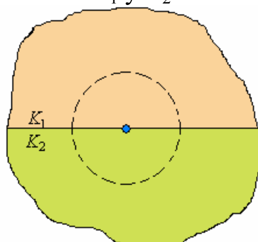
$$\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q$$

$$D 4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \text{ y } \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

El Campo eléctrico es

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{K\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi K\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

En el caso en que la carga q esté entre dos medios distintos de constantes K_1 y K_2



Aplicamos la ley de Gauss para una superficie esférica de radio y.

$$\int_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q \Rightarrow D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = q$$

Pero $D_1 = \varepsilon_1 E = K_1 \varepsilon_0 E$ y

$$D_2 = \varepsilon_2 E = K_2 \varepsilon_0 E$$

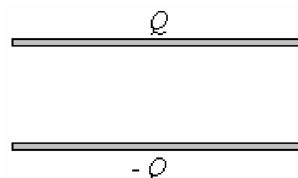
Luego: $K_1 \varepsilon_0 E 2\pi r^2 + K_2 \varepsilon_0 E 2\pi r^2 = q$

$$E 2\pi\varepsilon_0 r^2 (K_1 + K_2) = q$$

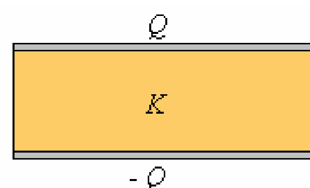
y $E = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 (K_1 + K_2) r^2}$

Vectorialmente: $\vec{E} = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 (K_1 + K_2) r^2}\hat{r}$

Ejemplo 95. Se tiene un condensador de placas paralelas cargado con carga Q y aislado de manera que la carga en las placas se conserva. Calcular la energía en el condensador antes y después de insertar un dieléctrico, llenando todo el espacio entre las placas. En base a lo calculado, ¿se realizó algún trabajo para insertar el dieléctrico? ¿Quien lo realizó?
Solución.



$$U_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

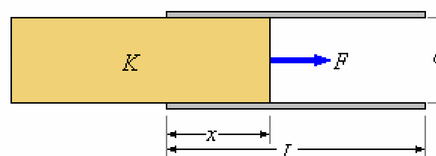


$$U_f = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{KC}$$

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\left(\frac{1}{K} - 1\right)$$

Si se realiza un trabajo, ese trabajo lo realiza el ente que ejerce la fuerza para introducir el dieléctrico.

Ejemplo 96. Cuál es la fuerza F necesaria para introducir un dieléctrico de constante k entre las placas de un condensador de placas paralelas, las placas se mantienen a una diferencia de potencial constante V. Siendo las dimensiones del condensador, área La, separación d.
Solución.



La figura muestra el dieléctrico parcialmente insertado, la energía potencial acumulada en esta posición es igual a la energía de la parte con dieléctrico (x) más la energía de la parte sin dieléctrico ($L - x$).

$$U = \frac{1}{2}\frac{K\varepsilon_0 a(x)}{d}(\Delta V)^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 a(L - x)}{d}(\Delta V)^2$$

La fuerza es $F = F_x = \dfrac{\partial U}{\partial x}$

De aquí

$$F = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\frac{K\varepsilon_0 a(x)}{d}(\Delta V)^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 a(L-x)}{d}(\Delta V)^2\right] =$$

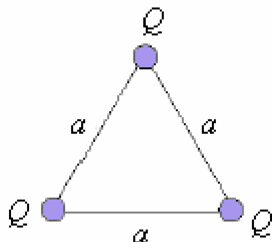
$$\frac{1}{2}\frac{K\varepsilon_0 a}{d}(\Delta V)^2 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 a}{d}(\Delta V)^2$$

Finalmente $F = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 a}{d}(K-1)(\Delta V)^2$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Considere dos esferas iguales cargadas con 1C separadas en una distancia r.
(a) Calcule la masa que debieran tener las esferas para que se encuentren en equilibrio estático considerando la fuerza gravitacional y la electrostática.
(b) Considerando que la densidad de masa de las partículas es de 5,5g/ cm3 (aproximadamente la densidad del hierro), ¿Cuál es la distancia mínima a la cual se pueden poner dichas esferas?
Indicación: Aproxime la fuerza entre las esferas como cargas puntuales. La constante de gravitación universal es G = 6,67 x 10^{-11}Nm^2/ kg^2 y la constante en la Ley de Coulomb es k =9 x 10^9Nm^2/C^2.
Respuesta.
m = 1, 16 · 10^{10} kg; r = 159, 18m (entre centros)

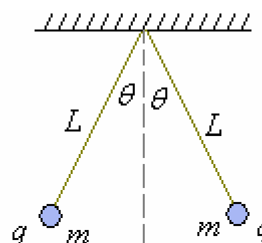
2. Tres cargas puntuales iguales a Q se encuentran ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a. Determine la magnitud de la fuerza eléctrica que experimenta cada una de ellas.



Respuesta.

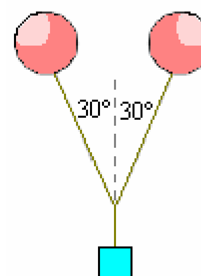
$$F = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2}\cos 30°$$

3. Dos pequeñas esferas de masa m están suspendidas de un punto común mediante cuerdas de longitud L. Cuando cada una de las esferas tiene carga q, las cuerdas forman un ángulo con la vertical como indica la figura. Demuestre que la carga q viene dada por $q = 2L \operatorname{sen}\theta \sqrt{mg \tan\theta / k}$,donde k es la constante de Coulomb. Determine q si m = 10g, L = 50cm y θ = 10°.



Respuesta. 2,4061 x 10^{-7} C

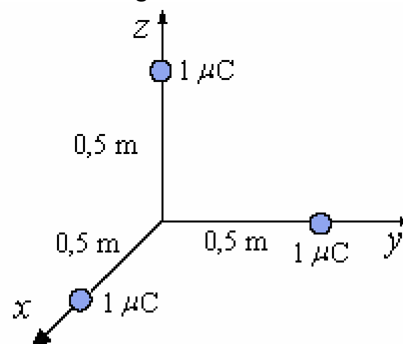
4. Dos globos iguales llenos de Helio, están cargados con carga igual Q. Mediante dos hilos de longitud 1m amarrados a los globos se suspende una masa de 0, 005 kg quedando el sistema flotando en equilibrio con los hilos formando un ángulo de 60° entre sí. Determine el valor de la carga Q.



Respuesta. 1, 2537 x 10^{-6} C

5. Dos cargas iguales a Q y 5Q están en línea recta separadas una distancia a. Determine los puntos en la línea que une las cargas donde el campo eléctrico es cero.

6. Se tienen tres cargas como se indica en la figura.



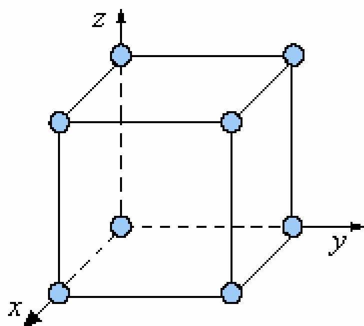
a) Calcular el campo eléctrico en el origen del sistema coordenado.

b) Determinar la fuerza que se ejerce sobre la carga en el eje *x*.

7. Cuatro cargas puntuales *q*, 2 *q*, - 4 *q* y 2 *q* están fijas en los vértices de un cuadrado de lado *b*. En el centro del cuadrado se coloca una quinta carga *q*.
(a) Indique en que dirección apunta la fuerza que actúa sobre la carga central *q*.
(b) Calcule explícitamente la fuerza (magnitud y dirección).
Respuesta.
Eligiendo el eje *x* como la diagonal que va desde - 4*q* a 2*q* y el eje *y* como la diagonal que va desde la otra carga 2*q* a la carga *q*, las componentes de la fuerza son: $F_x = \frac{3q^2}{\pi\varepsilon_0 b^2}$, $F_y = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 b^2}$

8. Dos cargas Q_1 y Q_2 están a una distancia *d*:
(a) Determine el punto en la línea que une las cargas donde el campo eléctrico es cero.
(b) Si se trae desde el infinito una tercera carga situándolo donde el campo eléctrico es cero, ¿La energía gastada en el proceso es también cero?. Calcúlela.

9. Ocho cargas puntuales de magnitud *q* se encuentran en los vértices de un cubo de arista *a*.



a) Determine la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga en el origen, producida por las otras y
b) la magnitud de la fuerza sobre cualquier carga.
Respuesta.

a) $\vec{F} = -\frac{kq^2}{a^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$

b) $F = \frac{kq^2}{a^2}\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

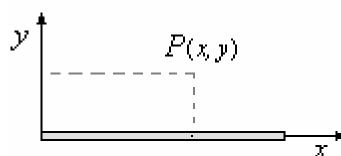
10. En el problema anterior, calcule la energía que se requiere para formar la mencionada distribución de cargas

11. Dos cargas puntuales están colocadas sobre el eje *x*. $Q_1 = q$ en $x = a$ y $Q_2 = -4q$ en $x = - a$. Encuentre una expresión vectorial en coordenadas cartesianas para la fuerza que actúa sobre una carga de prueba *Q*, ubicada en un punto cualquiera del plano *XY*. Encuentre las coordenadas (*x*, *y*) de todos los puntos en los cuales la carga de prueba esta en equilibrio. Discuta si el equilibrio es estable o inestable.
Respuesta.

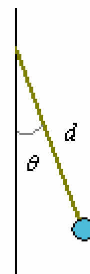
$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(x-a)\hat{i} + y\hat{j}}{\left[(x-a)^2 + y^2\right]^{3/2}} + 4\frac{(x+a)\hat{i} + y\hat{j}}{\left[(x+a)^2 + y^2\right]^{3/2}}\right\},$$

el punto (3*a*, 0) es un punto de equilibrio inestable.

12. Deduzca una expresión para el campo eléctrico producido por un trozo recto de hilo de longitud *L* con carga *Q* distribuida uniformemente en su longitud, en un punto de coordenadas (*x*; *y*), estando el origen en el extremo izquierdo del hilo y el eje *y* perpendicular al hilo.



13. De una barra fina vertical que tiene densidad lineal uniforme de carga $\lambda = 10^{-4}$ C/m, se suspende una carga puntual de magnitud $Q = 10^{-5}$ C de masa *m* = 0,1g, amarrándola con un hilo de longitud *L* = 1m a un punto de la barra. Determine la tensión en el hilo y el ángulo que forma con la vertical en la posición de equilibrio.

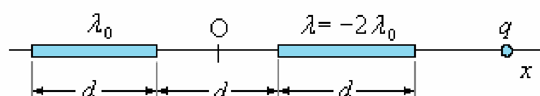


14. Una barra fina infinita, con densidad lineal de carga λ, se dobla en forma de horquilla como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el punto O.



Respuesta. $E = 0$

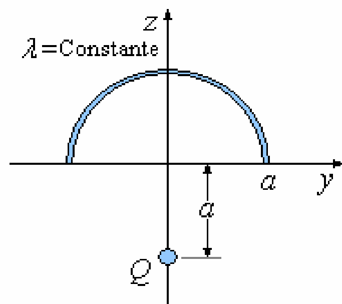
15. Dos barras aisladoras delgadas se disponen como se indica en la figura, una con densidad de carga ρ_0 y la otra con $\rho = 2\rho_0$.



a) Calcular el campo eléctrico en el origen.
b) Determinar la fuerza que se ejercen las barras sobre una carga q dispuesta sobre el eje *x*.

c) Encuentre el o los puntos en los cuales la fuerza sobre q es nula.

16. En la figura la semicircunferencia yace en el plano yz mientras la carga Q es una carga puntual contenida en el eje z a la distancia a del origen. Tanto Q como λ son positivos.



a) Encontrar una expresión para el campo eléctrico sobre el eje x debido a ambas cargas.
b) ¿Qué relación debe existir entre Q y la carga total de la semicircunferencia para que el campo eléctrico en el origen sea nulo?

17. Un anillo metálico de radio a tiene una carga total Q distribuida uniformemente en su perímetro. Una carga puntual q se trae desde el infinito y se coloca en un punto a distancia d sobre el eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro. Determine el trabajo realizado por el campo eléctrico.

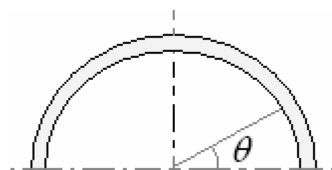
18. Un anillo aislador de radio a tiene una carga total Q distribuida uniformemente en su perímetro.
a) Una carga puntual q se trae desde el infinito y se coloca en un punto a distancia d sobre el eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro. Determine el trabajo realizado por el campo eléctrico.
b) Si la carga puntual hubiese estado fija y el anillo se trae desde infinito a la posición descrita antes, ¿Cuál sería su respuesta?.

19. Dos partículas, cada una con masa m y carga q, están suspendidas por cuerdas de longitud ℓ desde un punto común. ¿Cuál es el ángulo θ que forman las cuerdas entre sí?

20. En los vértices de un cuadrado de 10 cm. de lado se colocan cargas 1×10^{-9} coulombios. ¿Cuál es la fuerza sobre cada carga?

21. Comparar la fuerza gravitacional y la fuerza eléctrica entre dos electrones colocados muy cerca. ($e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg)

22. Se tienen tres cargas iguales a q en los vértices de un triángulo equilátero, ¿qué carga y en qué posición debe colocarse para que el sistema esté en equilibrio?
23. Se tiene una semicircunferencia de radio R con una distribución de carga lineal $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$.
Calcular la carga total.

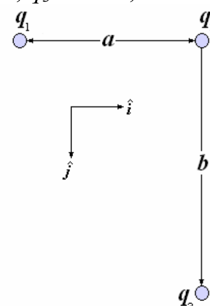


24. Un cilindro recto de radio R y altura L orientado a lo largo del eje z, tiene una carga no uniforme $\rho_{(z)} = \rho_0 + Az$ con referencia a un origen en el centro del cilindro. ¿Cuál es la fuerza sobre una carga q localizada en el centro del cilindro?

25. Un disco circular de radio R tiene una carga total Q uniformemente distribuida en su superficie. Calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje del disco a una distancia z del plano de dicho disco.
Respuesta.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{z}$$

26. La figura muestra tres cargas que se mantienen fijas en el plano xy.
a) Halle, en cartesianas, la fuerza eléctrica neta sobre q_3 debida a las otras dos cargas.
b) Evalúe el resultado anterior para el caso $q_1 = 25$ mC, $q_2 = -16$ mC, $q_3 = 5$mC, $a = 3$ m y $b = 4$ m.

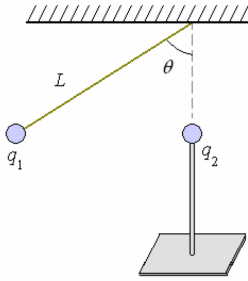


Respuesta.
a)

$$\vec{F}_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{q_1 a}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}\right]\hat{i} + \left[\frac{q_1 b}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}} + \frac{q_2}{b^2}\right]\hat{j}\right\}$$

b) $\vec{F}_3 = 9\left(3\hat{i} - \hat{j}\right)10^3$ N

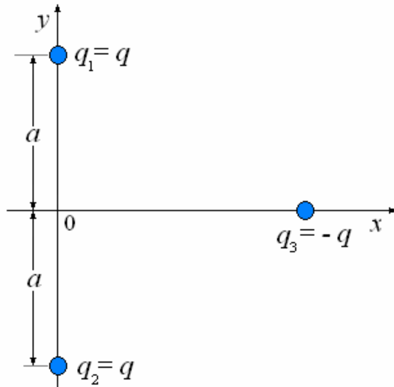
27. El sistema de la figura se encuentra en reposo. Las dos partículas tienen la misma carga $q_1 = q_2 = q$ y se encuentran a la misma altura. La carga q_1 tiene masa m y cuelga de un hilo tenso que forma un ángulo θ con la vertical. La carga q_2 se mantiene fija en su lugar por medio de un soporte unido a una masa.
Halle la longitud L del hilo.



Respuesta.

$$L=\sqrt{\frac{q^2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\operatorname{sen}^3\theta}}$$

28. La figura muestra un sistema de tres partículas cargadas en un plano *xy* horizontal. Las partículas 1 y 2 se mantienen fijas y la 3, de masa *m*, se está moviendo a lo largo del eje *x* bajo la influencia de las fuerzas eléctricas que le aplican las otras dos. Llame $x_{(t)}$ a la posición de q_3 respecto al origen.
a. Halle la fuerza neta sobre q_3 y su ecuación de movimiento.
b. ¿Es el punto $x = 0$ un punto de equilibrio? ¿Por qué?
c. Halle el período del movimiento de q_3 si inicialmente se suelta desde el reposo en un punto $|x_{(0)}| << a$.



Respuesta.

a) $\vec{F}_3=-\dfrac{q^2x\hat{i}}{2\pi\varepsilon_0\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}$,

$$\ddot{x}+\frac{q^2x}{2\pi\varepsilon_0 m\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}=0$$

b) Es un punto de equilibrio porque $\vec{F}_3(x)\Big|^{x=0}=0$

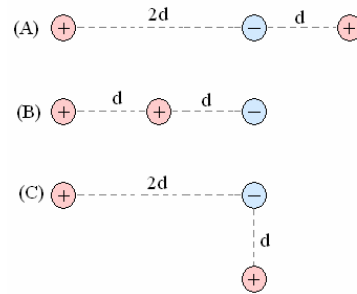
c) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{2\pi\varepsilon_0 ma^3}{q^2}}$

29. Una carga puntual de 5 μC se coloca en el origen, otra carga puntual de 8 μC se coloca a 3 m del origen sobre el eje *x*, y una tercera carga de 12 μC se coloca a 3 m del origen sobre el eje *y*.

Aproxime $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx 9\times10^9\ \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ y halle la magnitud de la fuerza sobre la carga en el origen.
Respuesta.

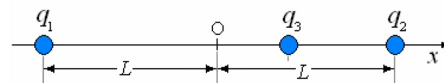
$$F=\sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\left(q_1q_2+q_1q_3\right)}=10^4\ \text{N}$$

30. Un electrón y dos protones se colocan en los tres diferentes arreglos mostrados en la figura. Llamemos *F* al módulo de la fuerza eléctrica total que los protones ejercen sobre el electrón. Compare *F* en los tres casos y ordene de mayor a menor.



Respuesta.
*E*n el caso B > que en el caso C > que en el caso A

31. En el sistema de la figura las tres partículas poseen la misma carga, $q_1 = q_2 = q_3 = q$. Las partículas 1 y 2 se mantienen fijas y la 3, de masa *m*, se está moviendo a lo largo del eje *x* bajo la influencia de las fuerzas eléctricas que le aplican las otras dos. Llamaremos $x_{(t)}$ a la posición de q_3 respecto al origen O.
a. Halle la fuerza neta sobre q_3 y su ecuación de movimiento.
b. ¿Es el punto x = 0 un punto de equilibrio? ¿Por qué?
c. Suponga que $|x_{(t)}| << L$ y halle el período de las pequeñas oscilaciones de la partícula 3 en torno al origen.



Respuesta.

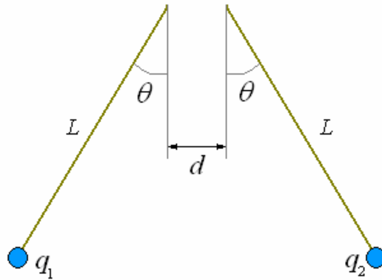
a) $\vec{F}_3=-\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{(L+x)^2}-\dfrac{1}{(L-x)^2}\right]\hat{i}$,

$$\ddot{x}+\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 m}\left[\frac{1}{(L+x)^2}-\frac{1}{(L-x)^2}\right]=0,$$

b) Es un punto de equilibrio porque $\vec{F}_3(x)\Big|^{x=0}=0$.

c) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{\pi\varepsilon_0 mL^3}{q^2}}$

32. Dos pequeños cuerpos con cargas q_1 y q_2 del mismo signo están en reposo suspendidos mediante hilos de longitud L.
Los hilos, como se muestra en la figura, forman un ángulo θ con la vertical y sus puntos de sujeción al techo están separados una distancia d.
a. Dibuje el diagrama de fuerzas de cada cuerpo.
b. Escriba en componentes (vertical y horizontal) la segunda ley de Newton para cada carga.
c. Determine las masas de los dos pequeños cuerpos.



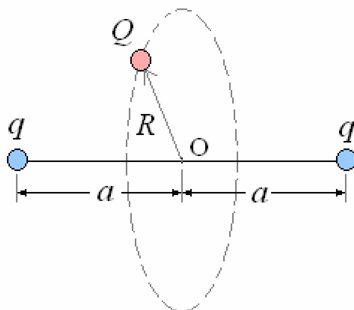
Respuesta.
b) $T_1 \cos\theta = mg$,

$$T_1 \text{sen}\theta = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 (d + aL\text{sen}\theta)^2}$$

para q_2 se cambia $T_1 \rightarrow T_2$ y $m_1 \rightarrow m_2$.

c) $$m_1 = m_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \tan\theta (d + aL\text{sen}\theta)^2}$$

33. Dos partículas, fijas y de carga q cada una se encuentran separadas una distancia $2a$. Una tercera partícula de masa M y carga Q está sometida solamente a la fuerza electrostática de las partículas fijas, ella gira en una órbita circular de radio R; la órbita es perpendicular a la línea que une las dos partículas fijas y tiene su centro en el punto medio entre ellas. Ver figura.
a. Calcule la fuerza electrostática sobre Q. Indique qué signo debe tener Q.
b. Halle la rapidez de Q.
c. Determine para qué valor de R es máximo el módulo de la fuerza sobre Q.



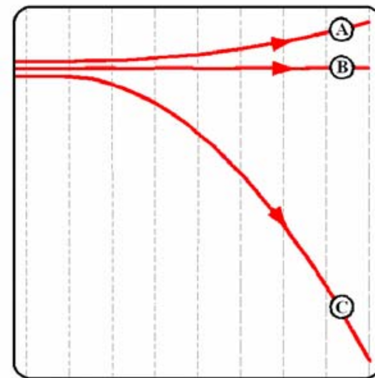
Respuesta.
Tomaremos el vector unitario $\hat{r}$ como aquél que apunta del centro O de la circunferencia hacia Q.

a) $$\vec{F} = \frac{qQR}{2\pi\varepsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}} \hat{r}$$, Signo(Q) = -Signo(q).

b) $$v = \sqrt{\frac{|qQ| R^2}{2\pi\varepsilon_0 M (R^2 + a^2)^{3/2}}}$$

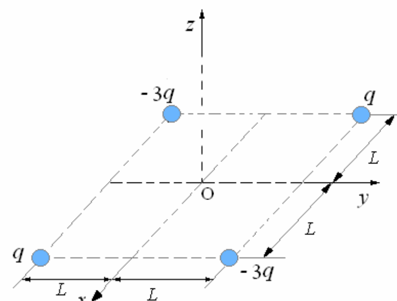
c) $$R = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

34. Un haz constituido por neutrones, electrones y protones, todos con igual velocidad, penetra en un campo vertical uniforme y se divide en otros tres haces A. B y C como indica la figura. Desprecie el efecto de la gravedad e indique a cuál tipo de partículas corresponde cada haz. Indique también qué se puede decir acerca del sentido del vector campo eléctrico.



Respuesta.
Los neutrones forman el haz B los electrones el haz C y los protones el haz C.
El sentido del campo eléctrico es hacia arriba

35. En los vértices de un cuadrado de lado $2L$ se fijan 4 partículas cuyas cargas se señalan en el dibujo.
a) Calcule el campo eléctrico del sistema en un punto z sobre el eje perpendicular al cuadrado y que pasa por su centro.
Ayuda: Calcule por separado la contribución de cada par de cargas conectadas por una diagonal.



b) En el punto z se coloca una partícula de masa m y carga $2q$, inicialmente en reposo. Suponga que la gravedad no es relevante en este problema.
b$_1$) Halle la ecuación de movimiento de la partícula de masa m.

b$_2$) Suponga que z < L y calcule el período de las pequeñas oscilaciones que describe la partícula.

Respuesta.

Tomaremos el vector unitario $\hat{k}$ paralelo al eje z y apuntando hacia arriba.

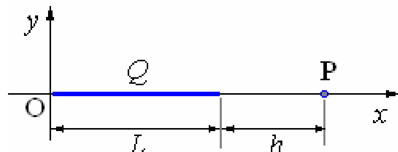
a) $\vec{E} = -\dfrac{qz}{\pi\varepsilon_0\left(z^2+2L^2\right)^{3/2}}\hat{k}$.

b$_1$) $\ddot{z} + \dfrac{2q^2 z}{\pi\varepsilon_0 m\left(z^2+2L^2\right)^{3/2}}$.

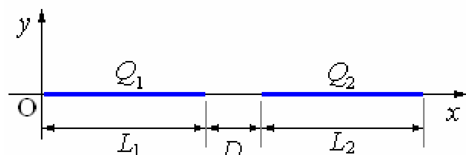
b$_2$) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\pi\sqrt{2}\varepsilon_0 m L^3}{q^2}}$

36. La figura muestra una barra delgada de longitud L y carga Q uniformemente distribuida. El punto P está en la misma línea de la barra y a una distancia h del extremo de la misma.

a) Halle el campo eléctrico producido por la barra en el punto P y la fuerza eléctrica que le aplicaría a una carga puntual q que se colocara allí.



b) La figura muestra dos barras delgadas, colineales, separadas una distancia D y de longitudes L_1 y L_2. Sus cargas Q_1 y Q_2 están uniformemente distribuidas. Aproveche el resultado de la parte a) y halle la fuerza eléctrica entre las dos barras.



Respuesta.

a) $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{h+L}\right)\hat{i}$,

$\vec{F} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{h+L}\right)\hat{i}$

b) [Fuerza sobre Q_2] =

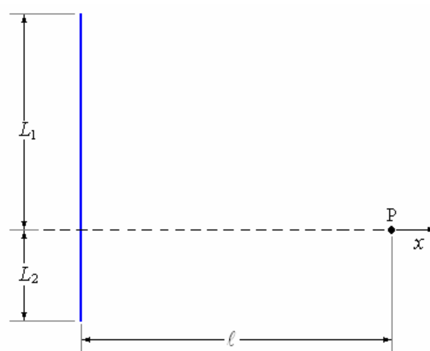
$\vec{F}_{12} = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 L_1 L_2}\ln\left[\dfrac{(D+L_1)(D+L_2)}{D(D+L_1+L_2)}\right]\hat{i}$

37. El hilo recto de la figura tiene longitud $L = L_1 + L_2$ y carga Q uniformemente distribuida.

a) Halle el campo eléctrico que produce el hilo en el punto P.

b$_1$) Halle el valor del campo eléctrico para puntos tales que $L_1 = L_2 = L/2$.

b$_2$) Reescriba el resultado de b$_1$ de forma tal que no aparezca Q y aparezca λ (la densidad longitudinal de carga del hilo).



c) Para hallar el campo eléctrico producido por un hilo recto de longitud infinita tomemos el límite $L \to \infty$ en b$_1$ y en b$_2$. Explique por qué son distintos los dos límites. ¿Cuál se debe tomar?

Respuesta.

a)

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell L}\left[\left(\frac{L_1}{\sqrt{L_1^2+\ell^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2+\ell^2}}\right)\hat{i} + \left(\frac{\ell}{\sqrt{L_1^2+\ell^2}} - \frac{\ell}{\sqrt{L_2^2+\ell^2}}\right)\hat{k}\right]$$

b$_1$) $\vec{E}_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{L^2+\ell^2}}\right)\hat{i}\right.$

b$_2$) $\vec{E}_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \ell}\left[\left(\dfrac{L}{\sqrt{L^2+4\ell^2}}\right)\hat{i}\right.$

c) $\lim\limits_{L\to\infty}\vec{E}_1 = 0$ (corresponde a una carga Q finita diluida en un hilo infinito)

$\lim\limits_{L\to\infty}\vec{E}_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \ell}\hat{i}$ (Corresponde a un hilo infinito con densidad de carga finita)

38. Un hilo circular de radio R y carga Q uniformemente distribuida está en el plano xy y su centro coincide con el origen.

a. Halle el campo eléctrico que produce en el punto de coordenadas cartesianas (0, 0, z).

b. Estudie el comportamiento del campo encontrado en la parte a cuando $z > R$.

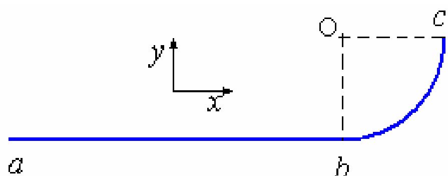
Respuesta.

a) $\vec{E} = \dfrac{Qz}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{k}$

b) $\vec{E} \approx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\hat{k}$ (desde lejos se ve como urna carga puntual).

39. La figura muestra un hilo cargado abc con densidad longitudinal de carga λ. El tramo bc es un cuarto de una circunferencia de radio R y centro en O.

El tramo ab es recto, de longitud $L = 4R/3$ y perpendicular a la línea Ob.

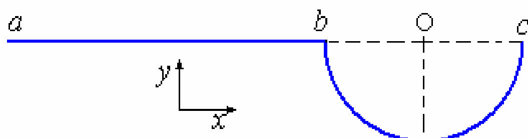


a) Calcule el campo eléctrico que producen en el punto O cada uno de los dos tramos ab y bc.
b) Halle el campo eléctrico neto que produce todo el hilo en el punto O.
Respuesta.
a)

$$\vec{E}_{ab}\ \frac{\lambda}{10\pi\varepsilon_0 R}\left(\hat{\imath}+2\hat{\jmath}\right), \vec{E}_{bc} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\hat{\imath}+\hat{\jmath}\right)$$

b) $\vec{E}_{abc}\ \frac{3\lambda}{20\pi\varepsilon_0 R}\left(-\hat{\imath}+3\hat{\jmath}\right)$

40. La figura muestra un hilo cargado con densidad longitudinal de carga). El tramo be es la mitad de una circunferencia de radio R y centro en O. El tramo ab es recto, de longitud $L = 2R$ y paralelo a la línea bO

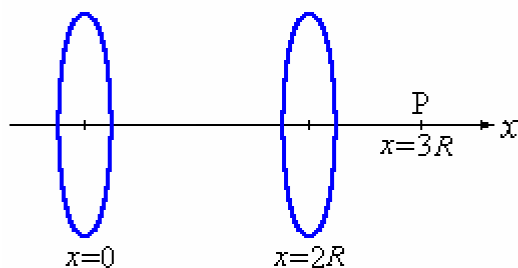


a) Calcule el campo eléctrico que producen en el punto O cada uno de los dos tramos ab y bc.
b) Halle la magnitud del campo eléctrico neto que produce todo el hilo en el punto O y el ángulo que forma con la dirección.
Respuesta.

a) $\vec{E}_{ab} = \frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_0 R}\hat{\imath}$, $\vec{E}_{bc} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{\jmath}$

b) $E_{ab} = \frac{|\lambda|}{6\pi\varepsilon_0 R}$, ángulo arc tg (3).

41. Dos discos de radio R se ubican como se muestra en la figura y una carga $q = -Q/2$ es puesta en el punto P.
El disco izquierdo tiene una carga Q (> 0) y el derecho − Q, ambas uniformemente distribuidas.



a) Calcular la fuerza que la carga $q = -Q/2$, ejerce sobre cada uno de los planos.
b) Determinar el lugar donde pondría una segunda carga $q = -Q/2$ de modo que la fuerza neta sobre ella sea nula.

42. Determine la fuerza entre un disco de radio R cargado con densidad uniforme de carga σ y una varilla de largo L y densidad lineal λ colocada en el eje del disco, a una distancia b del mismo.
Respuesta.

$$\vec{F} = \frac{\sigma\lambda}{2\varepsilon_0}\left[L+\sqrt{R^2+b^2}-\sqrt{R^2+(b+L)^2}\right]\hat{k}$$

43. Una esfera uniformemente cargada de radio R esta centrada en el origen con una carga Q. Determine la fuerza resultante que actúa sobre una línea uniformemente cargada, orientada radialmente y con una carga total q con sus extremos en $r = R$ y $r = R + d$.
Respuesta.

$$\vec{F} = \frac{Q\lambda d}{4\pi\varepsilon_0 R(R+d)}\hat{r}$$

44. Un cilindro circular recto de radio R y altura L esta orientado a lo largo del eje z y tiene una densidad de carga volumétrica no uniforme dada por $\rho(r) = \rho_0+\beta r$, donde r se mide respecto del eje del cilindro. Calcule el campo eléctrico producido por esta distribución sobre el eje del cilindro.

Respuesta. $\vec{E} = 0$

45. En la pregunta anterior suponga que la distribución de carga es $\rho(z) = \rho o + \beta z$ donde z se mide respecto de la base del cilindro. Calcule el campo eléctrico producido por esta distribución sobre el eje del cilindro.

46. Una carga lineal de densidad λ con la forma de un cuadrado de lado L se encuentra en el plano yz con su centro en el origen. Determine el campo eléctrico sobre el eje x a una distancia arbitraria x, y compare el resultado con el del campo que existe en el eje de una anillo cargado de radio $r = L/2$, con un centro en el origen y con la misma carga total.
Respuesta.

$$\vec{E}_{cuadrado(x)} = \frac{\lambda L}{\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+L^2/4\right)}\frac{1}{\sqrt{x^2+L^2/2}}\hat{\imath} ,$$

$$\vec{E}_{anillo(x)} = \frac{\lambda L}{4\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+L^2/4\right)^{3/2}}\hat{\imath}$$

47. Una carga puntual q está situada en el centro de un cubo cuya arista tiene una longitud d.

a) ¿Cuál es el valor del flujo de $\vec{E}\left(\int\int\vec{E}\cdot d\vec{S}\right)$ en una cara del cubo?.

b) La carga se traslada a un vértice del cubo. ¿Cuál es el valor del flujo de a través de cada una de las caras del cubo?.

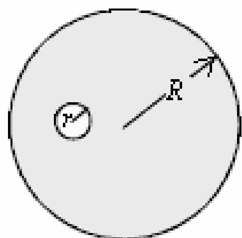
48. Dos láminas planas, paralelas e infinitas, cargadas con una densidad $\sigma_1 = 4\ \mu$C y $\sigma_2 = 6\ \mu$C, distan 2 cm. Estudiar el campo eléctrico de este sistema. Supongamos que dichos planos en vez de estar paralelos se cortan perpendicularmente. Demostrar que la magnitud del campo es la misma en las cuatro regiones que ellos determinan en el espacio.

49. Calcule el campo eléctrico producido por una superficie circular de radio *R* con distribución de carga σ a lo largo del eje de simetría perpendicular al plano que la contiene y determine su valor en el límite $R >> z$. Compare su resultado con el valor que se obtiene utilizando la ley de Gauss en el caso de un plano infinito.

50. Repita el cálculo anterior para el caso en que la superficie fuese un cuadrado de lado *a* y determine el valor límite cuando $a >> z$

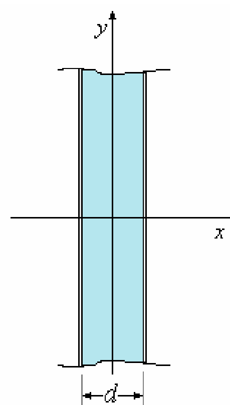
51. Un cilindro macizo, muy largo, de radio *a*, tiene una carga distribuida con una densidad de carga $\rho = -Ar$, donde *A* es una constante positiva. Determine el valor del campo eléctrico en el interior y el exterior cercano al cilindro, en puntos lejanos de sus extremos.

52. La figura muestra una esfera aisladora de radio *R* con densidad de carga ρ = constante, la cual tiene una burbuja esférica vacía en su interior, de radio *r*, situada a la distancia *a* del centro. Calcule el campo eléctrico:

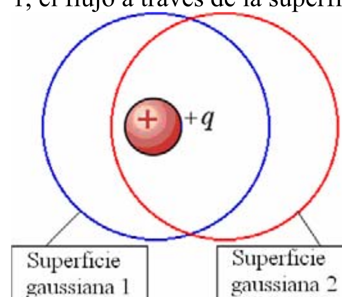


a) en el centro de la burbuja,
b) sobre una línea que contenga los centros de la esfera y la burbuja, dentro y fuera de la esfera y
c) sobre un eje perpendicular a la línea que une los centros de la esfera y la burbuja, dentro y fuera de la esfera.

53. La figura representa un volumen aislante de espesor *d* = 0,5m limitado por planos infinitos (perpendiculares al eje *x*) (en corte). La densidad de carga volumétrica es constante, $\rho = 10^{-6}$ C/m.
a) Determine el campo eléctrico a ambos lados del dieléctrico.
b) ¿porqué *E* = 0 en el centro del dieléctrico?
c) Determine el campo eléctrico en el interior del dieléctrico como función de x.

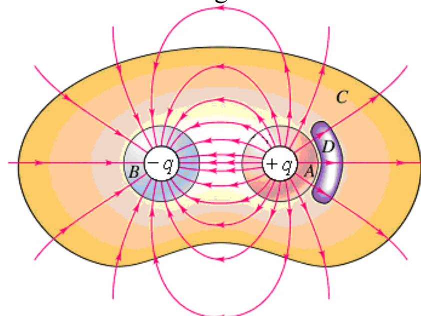


54. Una superficie gaussiana esférica (1) encierra y se centra en una carga puntual $+q$. Una segunda superficie gaussiana esférica (2) del mismo tamaño también encierra la carga pero no se centra en ella. ¿Cómo es comparado al flujo eléctrico a través de superficie 1, el flujo a través de la superficie 2?



Respuesta. iguales

55. Dos cargas del punto, + *q* y - *q*, se arregla según lo demostrado. ¿A través de qué superficie(s) cerrada el flujo eléctrico neto es igual a cero?



Respuesta. La superficie *C* y la superficie *D*

56. Se tiene una superficie cuadrada de lado *a* con carga σ C/m^2. ¿Cuál es el valor del Campo eléctrico en puntos situados en el eje que pasa por el centro del cuadrado.

57. Se tienen dos alambres infinitos separados por una distancia 2*d*, con cargas iguales y opuestas λ y $-\lambda$, ¿cuál es la fuerza entre ellos?

58. Una esfera no conductora de masa *m* y cargada, cuelga por medio de un hilo de longitud ℓ, se

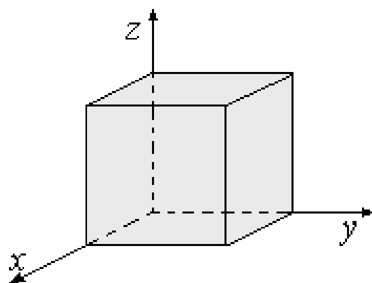
encuentra bajo la acción de un campo eléctrico $\vec{E}$. Calcular la carga da la esfera si el ángulo entre la vertical (perpendiculares al Campo) y el hilo es θ.

59. Se tiene una recta infinita con densidad de carga lineal λ y una carga *q* situada a una distancia perpendicular *d*, ¿cuál es el campo eléctrico en un punto entre ellos sobre la distancia *d*?

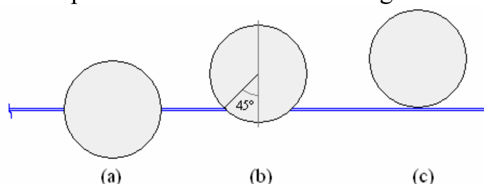
60. Un casquete esférico definido por el ángulo sólido π y radio *R,* tiene una carga superficial de densidad σ. ¿Cuál es el valor del Campo eléctrico en el centro de curvatura del casquete?

61. Se tiene una Carga *q* en el centro de un cilindro de longitud 2ℓ y radio *R*, encontrar el flujo a través de cada una de las caras y el flujo total.

62. Dado un campo eléctrico $\vec{E} = 2x\hat{i} + y\hat{i}$ N/C. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa cada una de las caras del cubo, de lado 1 m. y esté en el primer octante



63. Calcular el flujo eléctrico producido por una lámina con carga superficial de densidad σ que atraviesa una superficie esférica de radio *R* en cada una de las posiciones mostradas en la figura.



64. Encontrar el Campo eléctrico de un cilindro infinito de radio *R* y con densidad de carga ρ coulombios/m^3 para puntos $r > R$, $r = E$ y $r < E$.

65. Se tiene una esfera de radio *R* y con densidad de $\rho_{(r)} = c/r$. ¿A qué es igual el campo eléctrico dentro de la esfera ($r < R$)?

66. Una lámina infinita de espesor *a* contiene une densidad de carga uniforme ρ. Encontrar el campo eléctrico para todo punto.

67. Una nube de carga con simetría esférica origina un campo eléctrico dirigido radialmente hacia afuera desde el centro de la nube y es el siguiente

$$E_{(r)} = \frac{A}{r^2}\left(1 - e^{-ar}\right)$$

Hallar la densidad de carga $\rho_{(r)}$ en la nube.

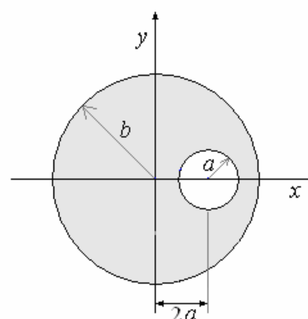
68. Dos cáscaras esféricas concéntricas de radios *a* y *b*, aisladas una de la otra, la interior tiene una Carga *Q* y la exterior está conectada a tierra. ¿Cuál es el campo eléctrico entre ellas?
¿Qué pasa cuando la esfera exterior no está conectada a tierra?

69. Dos cáscaras esféricas concéntricas de radios *a* y *b* tienen Cargas Q y $-Q/2$ respectivamente. ¿Cuál es el Campo eléctrico para todo punto?

70. ¿Cuál es la densidad de carga de la superficie infinita que sostiene flotante una partícula con masa *m* y carga *q*.

71. Hallar la fuerza por unidad de área sobre un plano infinito con carga uniforme debido a otro plano infinito con carga uniforme paralelo al primero.

72. Se tiene un cilindro infinito de radio *b* y un vacío cilíndrico da radio *a*, tal como se muestra en la figura. Si la carga por unidad de volumen es ρ ¿Cuánto vale al Campo eléctrico en todos los puntos?



73. Bajo ciertas circunstancias la intensidad del campo eléctrico en la atmósfera tiene un valor E_1 en la superficie y un valor E_2 a una altura *h* sobre la superficie. En ambos casos el sentido del vector es hacia la Tierra. Determinar el valor promedio de la densidad de carga promedio en la atmósfera debajo de *h*.
Calcular para $E_1 = 300$ V/m, $E_2 = 20$ V/m y $h =$ 1400 m.

74. Un haz de electrones que se mueven con una velocidad de 2x10^6 m/s pasa entre dos placas horizontales que tienen densidad de carga 1x10^9 C/m^2 y -3x10^9 C/m^2. Suponer que el campo producido es el mismo a que si fueran placas infinitas. El haz ingresa paralelo a las placas y deja el campo después de pasar

1 cm., encontrar la deflexión resultante de los electrones.

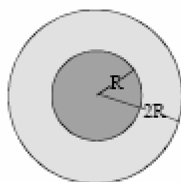
75. Se tienen dos hilos aisladores muy largos, uno en la dirección del eje *x* con una densidad de carga λ_1 y el otro, en la dirección del eje *y* con una densidad de carga λ_2. Hallar el potencial V y el campo eléctrico en cualquier punto del plano *xy* y mostrar que $\vec{E} = -\nabla V$.

76. Un globo esférico de radio *R* tiene una carga superficial con densidad σ.
a) Calcule el campo eléctrico en el interior y el exterior del globo.
b) Determine la energía eléctrica que se requiere para cargar el globo trayendo las cargas desde el infinito.
c) Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico generado por la carga en el globo al inflarlo entre *R* y *R* + Δ*R*.

77. Una esfera aisladora de radio *a* y densidad de carga dada por $\rho = \rho_0 e^{-r}$. Calcular el campo eléctrico en el interior y exterior de la esfera.

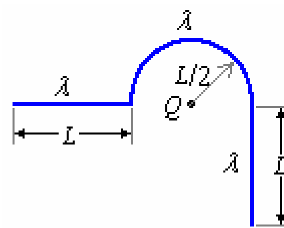
78. Considere la misma esfera anterior, pero esta vez rodeada por un casquete esférico conductor de radio interior *b* > *a* y espesor *d*. El casquete exterior tiene carga nula. Calcule el campo eléctrico y el potencial respecto de infinito,
a) entre las esferas,
b) en el interior de la esfera conductora y
c) para un radio *r* > *b* + *d*.

79. Se tiene una esfera aisladora con densidad de carga variable de la forma $\rho = \rho_0 e^{-r} r$ y radio *R* limitada exteriormente por una esfera conductora de radio interior
R y exterior 2*R*. En la esfera conductora hay una carga neta tal que el potencial exterior (*r* > 2*R*) es constante.



Determine:
a) La carga total en la esfera aisladora.
b) el campo eléctrico en el exterior (*r* < 2*R*).
c) la diferencia de potencial entre *r* = 3*R*/2 (esfera conductora) y el centro de la esfera aisladora (considere el potencial cero (*V* = 0) en *r* = ∞).
d) la densidad de carga en la superficie exterior de la esfera conductora.

80. Tres trozos de hilo cargado con densidad de carga λ se disponen como se indica en la figura.



a) Determine el campo eléctrico total sobre la carga *Q*.
b) Calcule la fuerza que ejerce *Q* sobre cada uno de los trozos de hilo.
c) Determine la energía potencial de la carga *Q*.

81. Un volumen esférico de radio *a* está lleno con carga de densidad uniforme ρ. Calcular la energía potencial *U* de esta distribución esférica de carga, es decir, el trabajo requerido para formarla.
Respuesta.
$U = \frac{3Q^2}{5a}$, donde *Q* es la carga total de la esfera.

82. Un cilindro macizo, muy largo, de radio *a*, tiene una carga distribuida $\rho = -Ar$, donde *A* es una constante positiva. Determine el valor del campo eléctrico y el potencial en el interior y el exterior cercano al cilindro, en puntos lejanos a sus extremos.

83. Un plano conductor tiene una carga + *Q* y a cada lado de éste, a las distancias x_1 y x_2, se colocan, paralelas, placas infinitas conductoras con carga total nula.
Encontrar la diferencia de potencial entre las caras internas y entre las externas de las placas.

84. En una región del espacio, el potencial eléctrico está dado por *V* (*x*, *y*) = *Axy* siendo *A* una constante. Determine la fuerza ejercida sobre una carga puntual *q* ubicada en un punto de coordenadas (*x*, *y*). Calcule además el trabajo que realiza el campo eléctrico sobre *q* al moverse la carga desde el punto (0, 0) al punto (*x*, *y*) en una línea recta.

85. Un disco circular de radio *a* tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. El disco se encuentra en el plano *xy* con su centro coincidiendo en el centro del sistema de coordenadas.
a) Obtenga una fórmula para el campo eléctrico en el eje del disco en función de *z*.
b) Aproxime el resultado anterior a primer orden para $\frac{a}{z} \to 0$ y pruebe que el resultado coincide con el campo de una carga puntual.
c) Determine la posición de un punto sobre el eje *z*, mas allá del cual, el disco puede considerarse como una carga puntual con un error en el cálculo de $\vec{E}$ menor al 1%.

86. Calcular el campo eléctrico de un cascarón esférico de radio *r* con densidad de carga superficial uniforme σ en todo punto del espacio.
a) Usando la ley de Coulomb.
b) Usando la ley de Gauss.

87. Suponga que en lugar de la ley de fuerza de Coulomb, se encuentra experimentalmente que la fuerza entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 está dada por, $\vec{F}_{12} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\left(1-\sqrt{r_{12}}\right)}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$
a) Halle el campo eléctrico alrededor de una carga puntual correspondiente a esta fuerza.
b) Pruebe que el campo es irrotacional.
c) Halle el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie esférica centrada en la carga.
Compare con el caso de un campo coulombiano

88. Una carga *q* se encuentra en el vértice A del cubo ABCDEFGH. Calcular el flujo de campo eléctrico a través de la cara FECD.
89. Calcular el campo eléctrico de una esfera uniformemente cargada de carga total *Q*.
a) Usando la ley de Coulomb.
b) Usando la ley de Gauss.

90. Considere dada una distribución de carga con simetría esférica. En este caso ρ es $\rho_{(r')}$ siendo *r'* la distancia al centro de la distribución.
a) Encuentre una expresión general para el campo eléctrico en función de $\rho_{(r')}$, en un punto cualquiera de una esfera de radio *r* y centro en el centro de la distribución.
b) Aplique el resultado anterior al cálculo del campo producido por una densidad de carga dada por
$$\rho_{(r')} = -\frac{\varepsilon_0 Ab}{r'^2}e^{-br'} + 4\pi\varepsilon_0 A\delta_{(r')}.$$
c) Un cascarrón esférico tiene una densidad de carga $\rho = k/r^2$ en la región $a \le r \le b$ y cero en otro lado. Hallar el campo eléctrico en todo el espacio.

91. Un cable coaxial tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ en el cilindro interior ($r < a$) y una densidad de carga superficial uniforme σ en la superficie del cilindro exterior ($r = b$). La carga total del cable es cero. Hallar el campo eléctrico en todo el espacio.

92. Una plancha plana infinita de espesor 2*d* tiene una densidad de carga uniforme ρ. Hallar el campo eléctrico en todo punto como función de la distancia *y* al plano de simetría de la plancha. Graficar.

93. Dos esferas de radio *R* con densidades de carga $+\rho$ y $-\rho$ cuyos centros están separados por una distancia *d* tal que $d < 2R$ están parcialmente superpuestas. Probar que el campo eléctrico en la región de intersección es constante y hallar su valor.

94. Una distribución estática de carga produce un campo eléctrico radial dado por: $\vec{E} = A\dfrac{e^{-br}}{r}\hat{r}$,
donde *A* y *b* son constantes.
a) Hallar la densidad volumétrica de carga de la distribución.
b) Halle la carga total de la distribución

95. Considere un disco circular de radio *a* y densidad de carga uniforme.
a) Calcule el potencial en un punto cualquiera del eje *y*.
b) Determine la energía requerida para traer una carga desde el infinito hasta ese punto.

96. Calcule el potencial respecto del infinito en el centro de un cuadrado de lado *b* en el cual se tiene una distribución uniforme de carga superficial σ .

97. En una región de espacio existe un campo eléctrico que se deriva del potencial $V(x, y, z) = xyz - 3x - 2y - z$.
Determine el trabajo que realiza el campo eléctrico al llevarse una carga de 2 μC desde el punto (0, 0, 0) al punto (1, 1, 1) en forma cuasiestática (energía cinética despreciable).

98. Considere una esfera no conductora de radio *R* que tiene una carga total *Q* repartida uniformemente en su volumen. Determine el potencial eléctrico en todas partes.

99. Determine el trabajo que realiza el campo eléctrico al traer una carga puntual *Q* desde una distancia 2*d* hasta una distancia *d* de un hilo recto infinito que tiene una carga uniforme λ C/m.

100. Se tienen dos esferas metálicas aisladas de radio $r_1 = 0{,}10$ m y $r_2 = 0{,}20$m, inicialmente descargadas y alejadas entre sí. Si a la esfera de radio r_1 se le coloca una carga de 6×10^{-8} C y luego se conectan ambas mediante un hilo conductor muy fino, calcule:
a) La carga final de cada esfera.
b) El potencial final de las esferas.
c) La energía almacenada en el campo eléctrico antes y después de la conexión.

101. Calcule la diferencia de potencial entre dos esferas concéntricas de radios *a* y *b* ($a < b$) que tienen cargas *q* y *Q* respectivamente.
Respuesta.
$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

102. Calcule el campo eléctrico producido por una distribución de carga tal que el potencial que produce

esta dado por: $V_{(r)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\lambda r}}{r}$. Encuentre la distribución de carga $\rho = \rho_{(r)}$.

Respuesta.

$$E_{(r)} = q\frac{(1+\lambda r)}{4\pi\varepsilon_0}e^{-\lambda r},\ \rho_{(r)} = -q\lambda^2\frac{e^{-\lambda r}}{4\pi r}$$

103. Las superficies interior ($r = a$) y exterior ($r = b$) de un cascaron esférico no conductor tienen la misma densidad de carga σ. La densidad de carga en el resto del espacio es nula. Encuentre el campo eléctrico en las zonas $r < a$, $a < r < b$, y $r > b$. Calcule el potencial electrostático en cada una de las regiones mencionadas.

Respuesta. $\vec{E}(r) = E_{(r)}\hat{r}$, donde $E_{(r)} = 0$ si $r < a$, $E_{(r)} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}$ si $a < r < b$;

$E_{(r)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 r^2}\left(a^2 + b^2\right)$ si $b < r$,

$V_{(r)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 r}\left(a^2 + b^2\right)$ si $r > b$;

$V_{(r)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 r}\left(a^2 + br\right)$ si $b > r > a$ y

$V_{(r)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(a + b)$ si $a > r$.

104. Una burbuja de forma esférica tiene una carga Q. La energía asociada a la tensión superficial de la burbuja es proporcional a su superficie, es decir $U_{mec} = S\tau$, en que S es el área de la burbuja y τ es una constante. Calcule la energía total de la burbuja (eléctrica y mecánica) como función de su radio y grafíquela. Finalmente calcule el radio de equilibrio de la burbuja.

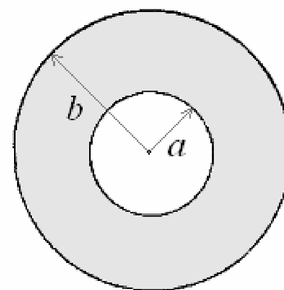
105. Calcúlese $\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ desde el origen e un punto x_0, y_0 en el plano x,v para el Campo $\vec{E} = A\left(y\hat{i} - x\hat{j}\right)$ a lo largo de tras trayectorias rectilíneas diferentes.
a) desde (0, 0) a (0, y_0) y a (x_0, y_0)
b) desde (0,0) a (x_0, 0) y a (x_0, y_0)
c) desde (0,0) directamente a (x_0, y_0)

106. Calcular el trabajo hecho contra las fuerzas electrostáticas en mover una carga de -1×10^{-10} C desde 10 cm. debajo de una carga da 1×10^{-5} C hasta una posición da 1 m. debajo de ella. En la posición final el cuerpo permanece suspendido, las fuerzas electrostáticas y gravitacionales son iguales y opuestas. ¿Cuál es la masa del cuerpo?

107. Un anillo de radio R está formado por dos semicircunferencias con cargas q y $-q$.
Encontrar al potencial y el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo.

108. En un plano infinito se ha hecho un agujero circular de centro O y radio R, el plano tiene una densidad de carga $-\sigma$. Calcular el potencial y el campo en un punto en la recta perpendicular al plano en O.

109. Se tiene un cilindro infinito de radios a y b como se muestra en la figura, con densidad de carga volumétrica ρ. ¿Cual es el valor del potencial para todo punto?



110. Encontrar le forma de las superficies equipotenciales para un segmento de recta de longitud $2a$, colocado entre $z = -a$ y $z = a$, con una Carga total q.

111. Se acomodan linealmente tres cargas, la Carga $-2q$ se coloca en el origen, y las otras dos cargas $+q$ se colocan en (0, 2, 5) y (3, 0, $-a$) respectivamente.
Encontrar el potencial $V_{(r)}$ para un punto en el espacio $r >> a$.
A partir de este valor encontrar al Campo eléctrico.

112. Un protón con una energía de 100 eV es disparado perpendicularmente hacia un plano metálico muy grande con una densidad de carga superficial de 10^{-7} C/m^2.
¿Desde dónde se disparará el protón si casi alcanza al plano?

113. Una gota de aceite tiene una carga neta de tres veces la carga del electrón y un radio de l0cm. ¿Cuál es su velocidad terminal cuando cae entre dos placas horizontales con una diferencia de potencial de 1000 voltios y separadas 2cm, la positiva es la de arriba?
Densidad del aceite 839 kg/m^3
Densidad del aire 1,29 kg/m^3
Viscosidad del aire 1,80 N.s/m^2

114. La presión dentro y fuera de una pompa de jabón es la misma. ¿A qué potencial ha sido cargada la pompa de jabón de radio 2 cm? La tensión superficial de la solución de agua jabonosa es 0,0265N/m.

115. Una esfera conductora de radio $R_1 = 3$ cm. lleva una carga negativa Q_1 Una segunda esfera conductora le radio interior $R_2 = 4$ cm. y radio exterior $R_3 = 5$ cm, neutra, se colocan concentricamente.
a) Encontrar le repartición de las cargas. Si se establece contacto entre las esferas ¿cuál es la nueva repartición de las cargas?
b) Considerando que la esfera interior está a un potencial $V_1 = 0$ lo esfera externa caté a potencial V_2 = 10000 V. ¿Cuál es le repartición de las cargas y el valor de estas?

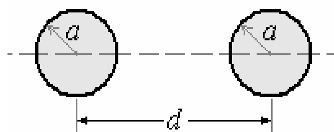
116. Si una carga *q* se coloca a una distancia *d* de un plano conductor infinito mantenido a potencial cero. Se puede determinar que el campo eléctrico resultante en frente del plano es el mismo que si se tuviera una carga - *q* a una distancia - *d*. Esta segunda carga se conoce como carga imagen. Encontrar la densidad de carga en el plano y verificar que la carga total en el plano es -*q*.

117. Encontrar las cargas imagen cuando una carga *q* está a iguales distancias de dos planos conductores a potencial cero que se encuentran formando un ángulo de 60°. Encontrar la fuerza sobre la Carga *q*.

118. Un condensador coaxial está formado por dos cilíndricos conductores concéntricos de radios *a* y *b* respectivamente y largo *L*. Suponiendo que el espacio entre los conductores es vacío y que el cilindro interior se encuentra a potencial *V* = *V*o y el exterior a potencial
V = 0 y que tanto *a* como *b* son mucho menores que *L*, encuentre la capacidad del condensador coaxial.
Respuesta.

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$$

119. Considere un sistema formado por dos conductores cilíndricos paralelos, muy largos, de radio *a*, separados una distancia *d* >> *a*, como muestra la figura. Entre los cilindros hay una diferencia de potencial *V*. Encuentre la capacidad por unidad de longitud para el sistema de conductores.



Respuesta.

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left[\frac{\left(d + \sqrt{d^2 - 4a^2}\right)}{2a}\right]}$$

120- Encontrar la capacidad de un disco conductor muy delgado de radio *a*.

121. Determinar la capacidad de uno varilla delgada de radio *R* y longitud *L*, siendo L >> *R*.

122. Determinar la capacidad por unidad de longitud entre dos alambres paralelos de radios *R* y distancia entre ellos *d*, siendo *d* >> *R*.

123. Un condensador de 1 μF se carga 0V y otro de 2 μF se cargad a 200V; estos se conectan de tal manera que la placa positiva de uno se conecta al negativa del otro. Encontrar la diferencia de potencial y la carga de cada condensador, así mismo la pérdida de energía que hubo.

124. En que forma cinco condensadores, cada uno de capacidad 1 μF , deben de conectarse para producir una Capacidad total de 4/9 μF .

125. Se tiene un condensador de placas paralelas de área de placas *A* y separación *d*, se le introduce una placa metálica paralela de espesor, calcular la capacidad resultante.

126. La Capacidad de un condensador variable cambia 1inealmente de 50 a 36 μF durante una rotación de 0° a 180°. Cuando se coloca a 75° una diferencia de potencial de 00 voltios se mantiene a través del condensador. ¿Cuál es la dirección y magnitud del torque electrostático experimentado por el condensador?

127. Un Condensador de 5 μF se carga a una diferencia de potencial de 12 voltios, se conecta en paralelo este condensador a otro inicialmente descargado, la diferenciada potencial disminuye a 3 voltios, ¿cuál es la capacidad del segundo condensador?

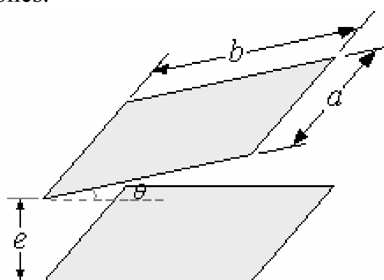
128. Se tiene dos condensadores planos de capacidades C_1 y C_2 con las armaduras de igual superficie *A* y con una separación *d* y *d*/2 respectivamente. Se conectan en paralelo y se cargan a una diferencia de potencial V_0 .
a) Calcular la carga y la energía en cada condensador.
b) Si es posible mover una de 1as armaduras del condensador C_2, ésta se mueve hasta que la separación entre placas es *d*, ¿cuál es la carga en cada condensador, cuál es la nueva diferencia de potencial y cuál es la energía almacenada?
c) ¿Cuál es la fuerza que se ejerce sobre la armadura móvil de C_2 en el estado intermedio *x* entre *d* y *d*/2 ¿cuál es el trabajo a realizar para llevar la armadura móvil de la posición inicial a la final?

129. El Conductor exterior dz un cable coaxial tiene un radio fijo *b*. Determinar el radio *a* del conductor interior, tal que para determinada diferencia de potencial entre los conductores, la intensidad del campo eléctrico en su superficie sea mínima.

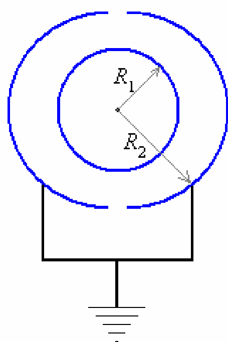
Determinar la capacidad por unidad de longitud de tal cable.

130. Una esfera metálica de un metro de radio tiene un exceso de carga eléctrica de 10^{-9} C. Se conecta mediante un alambre a una esfera inicialmente descargada de 30 cm. de radio que está lejos de la primera esfera (no tomar en cuenta la capacidad del alambre).
a) ¿Cuál es la carga de cada una de las esferas?
b) ¿Cuál es la energía antes de unirlas y después de unirlas? ¿Y si es diferente, qué pasa con la diferencia?

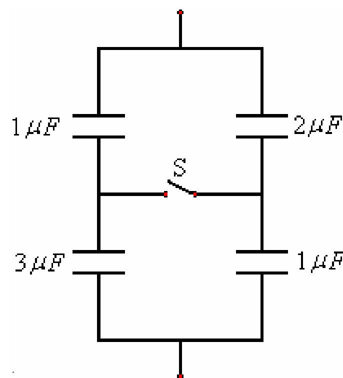
131. Las armaduras de un condensador forman un ángulo encontrar la capacidad en función de las dimensiones.



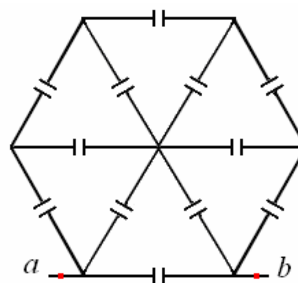
132. Un Condensador esférico está constituido de dos armaduras de radios R_1 y R_2. La armadura exterior está formada por dos hemisferios iguales, unidos a tierra por un conductor. La armadura interna tiene una carga Q y está aislada. Calcular la fuerza a que esté sometido cada uno de los hemisferios exteriores.



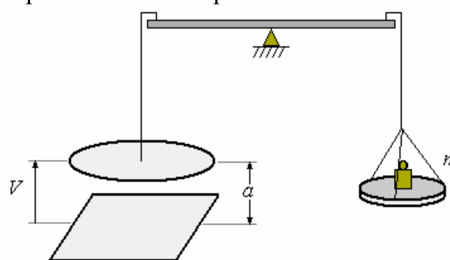
133. Se tiene el sistema de condensadores mostrado en la figura, inicialmente cargado a la diferencia de potencial de 100 V, Si se cierra la llave S ¿cual es la diferencia de potencial en cada condensador y la carga en cada uno de ellos?



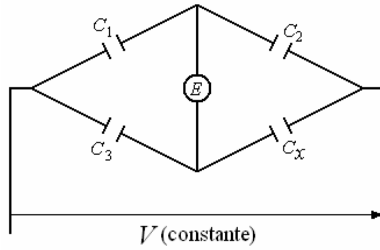
134. Encontrar la capacidad equivalente entre *a* y *b* en la figura, todos los condensadores tienen capacidad *C*.



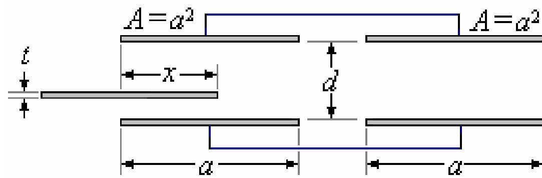
135. En la figura se muestra un **electrómetro** esquematizado, este se usa para determinar diferencias de potencial. Consiste en una balanza cuyo platillo izquierdo es un disco de área *A*, colocado a una distancia *a* de un plano horizontal formando un condensador, cuando se aplica una diferencia de potencial *V* entre el disco y el plano aparece sobre el disco una fuerza hacia abajo. ¿Cuál es el va1or de la masa que debe ponerse en el otro platillo para retomar el equilibrio?



136. Una manera de determinar la capacidad de un condensador desconocido es utilizar el dispositivo mostrado en la figura donde E es un electrómetro. El procedimiento es tener los condensadores conocidos C_1 y C_2; buscar un condensador C_3 para el cual la lectura en el electrómetro sea cero. Encontrar la expresión para calcular C_x.



137. Dos condensadores idénticos de área A y lado a y separación entre placas d, inicialmente descargados, se conectan en paralelo. Mediante una batería se aplica al sistema una diferencia de potencial V_0. Posteriormente se desconecta la batería, con lo cual los condensadores en paralelo quedan cargados y aislados. Se introduce en uno de los condensadores una placa conductora de igual área y de espesor t, como se muestra en la figura.

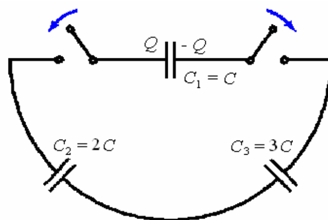


a) Calcule la energía almacenada en el sistema cuando la placa de espesor t ha penetrado una distancia x en el condensador.
b) Calcule la cantidad de carga transferida de un condensador a otro como función de x, e indique en que sentido es la transferencia.
Respuesta.

a) $E = \dfrac{2\varepsilon_0 a^2}{d}\dfrac{a(d-t)}{2a(d-t)+at}V_0^2$

b) $\Delta Q_A = -\dfrac{at}{2a(d-t)+at}\dfrac{Q}{2}$, donde Q es la carga total en el sistema.

138. La figura muestra un circuito con tres condensadores y dos interruptores unidos por hilos conductores. El condensador C_1 tiene carga Q y los otros dos están descargados. En cierto momento se cierran los interruptores y se espera hasta que el sistema alcance el equilibrio.
a. Encuentre la carga que se almacena en cada placa de cada condensador.
b. Halle la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador.

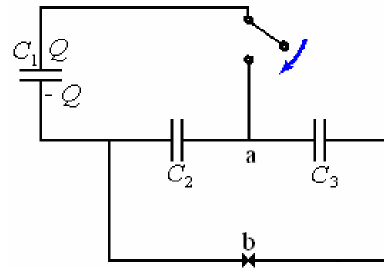


Respuesta. Llamaremos q_1, q_2 y q_3 a las cargas en las placas izquierdas de los condensadores C_1, C_2 y C_3 respectivamente.

a) $q_1 = \dfrac{5Q}{11}$, $q_2 = q_3 = \dfrac{6Q}{11}$.

b) $V_1 = \dfrac{5Q}{11C}$, $V_2 = \dfrac{3Q}{11C}$, $V_3 = \dfrac{2Q}{11C}$

139. El condensador C_1 de la figura está cargado como se muestra y los otros dos condensadores están descargados. Se cierra el interruptor S y se espera hasta que el sistema alcance el equilibrio.
a. Determine las cargas en las placas de los tres condensadores que están conectadas al punto a.
b. Halle la diferencia de potencial V_a - V_b.



Respuesta.

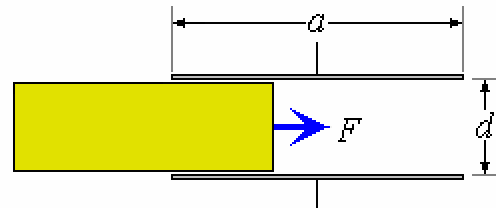
a) $q_1 = \dfrac{C_1 Q}{C_1 + C_2 + C_3}$, $q_2 = \dfrac{C_2 Q}{C_1 + C_2 + C_3}$,

$q_3 = \dfrac{C_3 Q}{C_1 + C_2 + C_3}$

b) $V_a - V_b = \dfrac{Q}{C_1 + C_2 + C_3}$

140. Responder a la pregunta anterior cuando la placa que se introduce en el condensador de la izquierda está hecha con un dieléctrico cuya constante es ε.

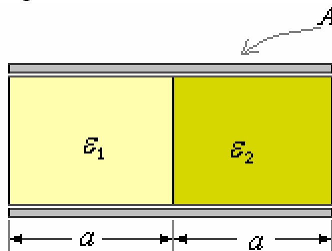
141. Ente la placas del condensador de la figura, de lados a y b, existe una diferencia de potencial constante V_0.



a) Calcular la carga $Q_{(x)}$ en las placas en función de la distancia x cuando se introduce un dieléctrico de constante ε y ancho b, como se indica.
b) Determine la variación de energía en el condensador en función de x.
c) Determine la fuerza sobre el dieléctrico en función de x.
Respuesta.

a) $Q_{(x)} = \frac{V_0 b}{d}\left[\varepsilon x + \varepsilon_0 (a - x)\right]$, b)
$U_{(x)} = \frac{Q^2 d}{2b\left[\varepsilon x + \varepsilon_0 (a - x)\right]}$, c) $\vec{F} = -\nabla U_{(x)}$

142. En un condensador de placas cuadradas paralelas de área *A*, se introducen dos dieléctricos de constantes ε_1 y ε_2 que llenan totalmente el interior del condensador como se muestra en la figura. Calcule la capacidad del condensador.

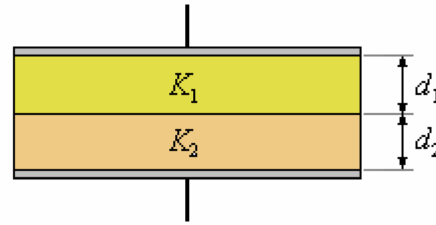


Respuesta. $C = \varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{2a^2}{d}$, $A = 4a^2$

143. Un cubo dieléctrico de lado *L* tiene una polarización radial dada por $\vec{P} = A\vec{r}$, donde *A* es constante y $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. El origen de coordenadas está en el centro del cubo. Encontrar todas las densidades de carga y mostrar que la carga total se hace cero.

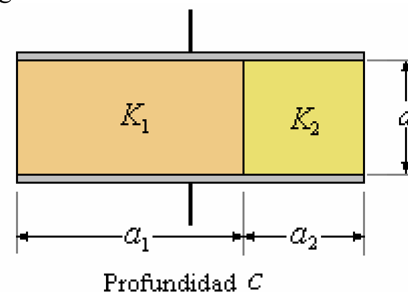
144. Dos placas conductoras paraleles están separadas una distancia *d* y mantenidas a la diferencie de potencial ΔV. Un dieléctrico de constante *k* y espesor uniforme *t* se ensarta entre las placas. Determinar los campos vectoriales *E* y *D* en el dieléctrico y en el vacío.

145. Se tiene un condensador de placas paralelas separadas una distancia *d* y área *A*. El espacio entre las placas se llena con dos dieléctricos como se muestra en la figura, calcular la capacidad del condensador.

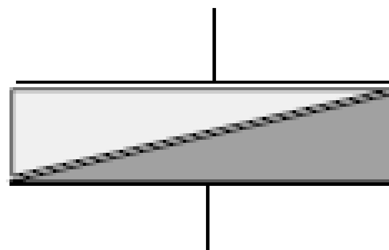


146. El dieléctrico en un Condensador de placas paralelas no es uniforme, varía linealmente de un valor en la superficie de una placa a en la superficie de la otra placa. Le distancia entre placas es *d* y su área *A*. Determinar la capacidad de este condensador.

147. ¿Cuál es la capacidad del condensador mostrado en la figura?

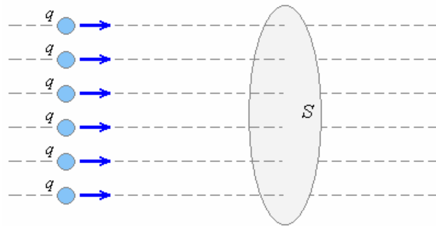


148. Considérese el mismo condensador del problema anterior, con los dieléctricos dispuestos diagonalmente como se indica, el cual se conecta a una batería que proporciona una tensión V.
a) ¿Se distribuye en forma uniforme la carga en las placas? Explique.
b) ¿Es el campo eléctrico y el campo de desplazamiento perpendiculares a las placas? Explique.
c) Calcule la capacidad de este condensador y la distribución de carga en las placas.



CAPÍTULO 2. Corriente Continua

CORRIENTE ELECTRICA.
Hasta ahora hemos considerado solamente cargas en reposo; ahora consideraremos cargas en movimiento. Esto implica que trabajaremos con conductores, porque en un conductor como ya dijimos los portadores de carga tienen movimiento libre. Aunque esta definición no solo es para conductores convencionales como los metales, sino también a los semiconductores, electrolitos, gases ionizados, dieléctricos imperfectos y aún en el vacío en vecindad de un cátodo los electrones emitidos termoiónicamente.
Los portadores de carga pueden ser positivos o negativos.
Las cargas en movimiento constituyen el flujo de corriente o simplemente corriente, definimos como corriente media (I_m) a través de una superficie limitada (*S*) como la cantidad de carga que atraviesa por unidad de tiempo.



Donde

$$I_m = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

La corriente instantánea es la corriente media calculada en el límite cuando $\Delta t \to 0$

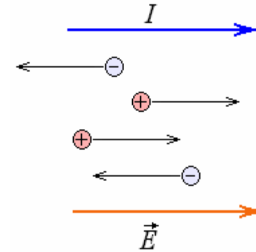
$$I = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

La unidad de corriente en el sistema MKS es el Ampere o Amperio (A).

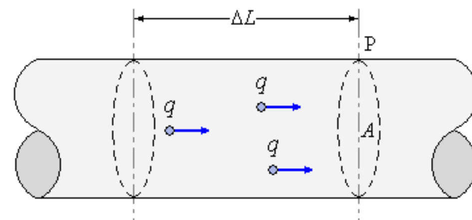
$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$

Como habíamos visto anteriormente el coulombio se define a partir de la corriente, hasta este punto todavía no podemos hacer una definición de el Ampere, lo cual haremos cuando estudiemos campos magnéticos.
En un metal los portadores de carga son los electrones, mientras que los iones positivos están fijos a posiciones regula res en la estructura, solamente los electrones de valencia son los que participan en el proceso de la conducción.
En un electrolito los portadores de carga son iones positivos y negativos, como algunos iones se mueven con mayor rapidez que otros, la conducción de uno de los tipos de iones es la que predomina.
En una descarga de gas, los portadores de carga son tanto electrones como iones positivos, pero como los electrones tienen mayor movilidad la corriente prácticamente es llevada en su totalidad por los electrones

Para la dirección de la corriente vamos a utilizar la convención que toman le dirección de los portadores de cargas positivas, en dirección del campo eléctrico externo como se muestra en la figura siguiente.



DENSIDAD DE CORRIENTE
Consideremos un conductor con un solo tipo de conductores con carga *q*, el número de estos conductores por unidad de volumen es *N*, suponiendo que la velocidad de desplazamiento de estos conductores es v_d cuando está sujeto a un campo externo, en un tiempo Δt todos los elementos contenidos en el volumen $A\Delta L = Av_d \Delta t$ son $NAv_d \Delta t$ y su carga $\Delta Q = qNAv_d \Delta t$ y pasa a través de la sección *A* en P como se muestra en la figura.



La corriente en el punto P es

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{qNAv_d \Delta t}{\Delta t} = qNAv_d$$

La corriente por unidad de área es la **Densidad de Corriente.**

$$J = \frac{I}{A} = qNv_d$$

Esta cantidad representa la rapidez del transporte de carga a través de una unidad de área normal a la dirección del flujo, es una cantidad vectora1 orientada con v_d

$$\vec{J} = qN\vec{v}_d$$

La unidad de densidad de corriente en el sistema MKS es A/m^2.

Siendo $\vec{J}$ constante en toda la superficie *A*. La corriente que atraviesa *A* es

$$I = \vec{J} \cdot \hat{n} A$$

Siendo $\vec{n}$ el vector unitario perpendicular al plano *A*.
Si la densidad de corrientes no es uniforme.

$$I = \int_A \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Ejemplo 1. Un conductor da cobre conduce una corriente de densidad 1000 A/m^2. Asumiendo que cada átomo de cobre contribuye con un electrón como portador de carga. Calcular la velocidad de desplazamiento correspondiente a esta densidad de corriente

Solución.

La densidad de corriente es $J = qNv_d$

La velocidad de desplazamiento es

$$v_d = \frac{J}{qN}$$

El valor de N (portadores por unidad de volumen) lo encontramos como sigue:

$$N = \frac{N_0 \times \rho \times \text{portadores/átomo}}{M}$$

N_0 (número de Avogadro) = 6,02x10^{23} $N \dfrac{\text{átomo}}{\text{mol}}$

M (peso atómico) = 63,5 $\dfrac{\text{gramo}}{\text{mol}}$

ρ (densidad) $= 8{,}92 \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ = 8,92 x 10^6 $\dfrac{\text{g}}{\text{m}^3}$

$$\frac{\text{portadores}}{\text{átomo}} = 1$$

Finalmente

$$v_d = \frac{1000 \dfrac{A}{m^2}}{\left(1{,}6 \times 10^{-19} C\right) \dfrac{\left(6{,}02 \times 10^{23} \dfrac{\text{átomo}}{\text{mol}}\right)\left(8{,}92 \dfrac{\text{g}}{\text{m}^3}\right)}{63{,}5 \dfrac{\text{g}}{\text{mol}}}}$$

= 0,739 x 10^{-7} m/s

Ejemplo 2. Protones de masa 1,67 x 10^{27} kg y que se mueven con una velocidad 2 x 10^7 m/s chocan con un blanco de masa 1 g y de capacidad calorífica específica 0,334 cal/g°C. La corriente de protones corresponde a una corriente de 4,8 A. ¿Con que razón la temperatura del blanco se eleva inicialmente, si una mitad de la energía de los protones se convierte en calor?

Solución.

Cada protón tiene una carga de 1,60 x 10^{-19} C. Si la corriente que fluye es 4,8 A, el número de los protones que chocan el blanco en 1 s debe ser *n*, donde

$$\frac{n\left(1{,}6 \times 10^{-19} C\right)}{1 s} = 4{,}8 \times 10^{-6} A$$

$\Rightarrow$ n = 3.00 x 10^{13} protones.

En un segundo la energía cinética total perdida por los protones es $n \times \frac{1}{2} m_p v^2$, y un tercio de esta energía se convierte en calor en el blanco. Si en un segundo la elevación de la temperatura del blanco es *t*, el calor ganado por la blanco es *mct*.

Por lo tanto $mct = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} nm_p v^2$ o

$$t = \frac{nm_p v^2}{6mc}$$

$$= \frac{\left(3{,}00 \times 10^{13}\right)\left[1{,}67 \times 10^{-27}\right]\left(2 \times 10^7\right)^2}{6(1)(4{,}18 \times 0{,}334)}$$

$= 2{,}39$°C

LA LEY DE OHM RESISTIVIDAD Y RESISTENCIA

Cuando un conductor conduce una corriente, existe un campo eléctrico *E* en su interior. Se ha encontrado experimentalmente para muchos conductores a temperatura constante que la densidad de corriente *J* es directamente proporcional a este campo. Siendo esta expresión LA LEY DE OHM.

$$\vec{J} = g \vec{E}$$

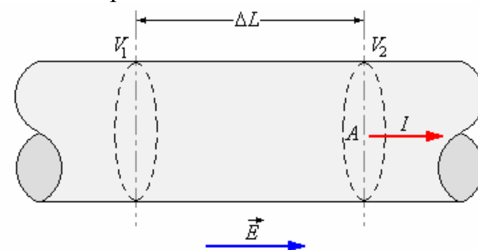
Donde la constante *g* es la conductividad del material, si esta conductividad no depende del campo eléctrico, se dice que el material obedece la ley de Ohm.

La ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza, como las leves de Newton, sino es una descripción empírica que compara gran cantidad de sustancias,

El recíproco de la conductividad es la resistividad η.

$$\eta = \frac{1}{g}$$

En el caso de un conductor definido, digamos un alambre, podemos escribir la ley de Ohm en función de la caída de potencial



Escogemos un segmento corto de longitud *L*, la diferencia de potencial entre la sección 1 y 2 es $(V_1 - V_2) = \Delta V$. (El potencial en 1 es mayor)

Como $\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, es el igual en todos los puntos del alambre

$$\Delta V = EL \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{L}$$

Pero $\vec{J} = g \vec{E}$ y la corriente $I = \int_A \vec{J} \cdot \hat{n} dS = JA$

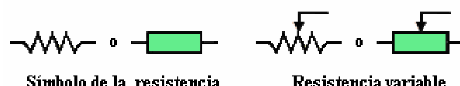
De aquí $I = gEA = \frac{gA}{L} \Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{L}{gA} I$

Esto nos da una relación lineal entre I y ΔV, equia1ente a la ley de Ohm.

A la cantidad $\dfrac{\Delta V}{I}$ ó $\dfrac{V}{I} = \dfrac{L}{gA}$, se la denomina **resistencia** R del segmento de alambre

$$R = \frac{V}{I} = \frac{L}{gA} = \frac{\eta L}{A}$$

La unidad de resistencia es Voltio/Ampare, denominada Ohm o con el símbolo Ω y su representación esquemática se muestra en la siguiente figura.



Como podemos ver la resistencia de un conductor depende de la longitud, de su sección transversal y de la resistividad que es una propiedad intrínseca de cada material.

La unidad de la resistividad es el Ohm-m $(\Omega - m)$ y para cualquier metal depende de la temperatura. A temperaturas normales la resistividad varía casi linealmente con la temperatura, suele referirse los valores a temperatura de 20°C. La relación entre resistividad y temperatura es la siguiente

$$\eta = \eta_{20^\circ}\left[1 + \alpha\left(t - 20^\circ C\right)\right]$$

La tabla que se muestra e continuación nos da valores de η y a para algunos materiales a 20°C.

RESISTIVIDAD Y COEFICIENTE DE TEMPERATURA

Material	ρ **a 20ºC** $(\Omega - m)$	α **a 20ºC 1/ºC**
Plata	$1{,}6 \times 10^{-8}$	0,0038
Cobre	$1{,}69 \times 10^{-8}$	0,00393
Oro	$2{,}44 \times 10^{-8}$	0,0084
Hierro	10×10^{-8}	0,0050
Níquel	$7{,}24 \times 10^{-8}$	0,006
Aluminio	$2{,}83 \times 10^{-8}$	0,0039
Mercurio	$95{,}8 \times 10^{-8}$	0,00089
Tungsteno	$5{,}51 \times 10^{-8}$	0,0045
Constantan	44×10^{-8}	0,00002
Nicrón	100×10^{-8}	0,0004
Carbón	$3{,}5 \times 10^{-5}$	- 0,0005
Germanio	0,46	- 0,048
Silicio	640,0	- 0,075
Vidrio	10^{10} - 10^{14}	
Mica	10^{11} - 10^{15}	
Cuarzo	$7{,}5 \times 10^{17}$	
Azufre	10^{15}	
Jebe duro	10^{13} - 10^{16}	
Ambar	5×10^{14}	
Madera	10^{8} - 10^{11}	

Ejemplo 3. Un trozo de carbón tiene una longitud L y una sección cuadrada de lado a se mantiene una diferencia de potencial V entre los extremos de la dimensión L.

a) ¿Cuál es la resistencia del bloque?
b) ¿Cuál es la corriente?
o) ¿Cuál es la densidad de corriente?

Solución.

a) Tenemos que $R = \eta \dfrac{L}{A}$

Como $A = a^2 \Rightarrow R = \eta \dfrac{L}{a^2}$

b) Por la ley de Ohm $\Delta V = RI$

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{\eta \dfrac{L}{a^2}} = \frac{a^2 \Delta V}{\eta L}$$

c) La densidad de corriente es

$$J = \frac{I}{A} = \frac{\dfrac{a^2 \Delta V}{\eta L}}{a^2} = \frac{\Delta V}{\varepsilon L}$$

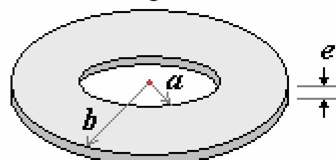
Ejemplo 4. Para encontrar cuánto alambre aislado se ha colocado en una bobina un técnico mide la resistencia total del alambre, encontrando 5,18 Ω. Después corta una longitud de 200 cm y encuentra que la resistencia de este es 0,35 Ω. ¿Cuál era inicialmente la longitud del alambre en la bobina?

Solución.

La resistencia del alambre en la bobina es relacionada con su longitud por la fórmula $R = \dfrac{\rho \ell}{A}$. La longitud cortada tiene la misma resistencia y sección transversal. Luego su resistencia es $R_0 = \dfrac{\rho \ell_0}{A}$

$$\therefore \frac{\ell_0}{\ell} = \frac{R_0}{R} \Rightarrow \ell_0 = 200\frac{5{,}18}{0{,}35} = 2960 \text{ cm.}$$

Ejemplo 5. Se tiene un conductor de resistividad q en forma de anillo plano con radios a y b y espesor e como se muestra en la figura.



a) ¿Cuál es su resistencia para una corriente perpendicular al plano?
b) ¿Cuál es su resistencia para una corriente radial hacia afuera, de la circunferencia de radio a hacia la circunferencia de radio b?

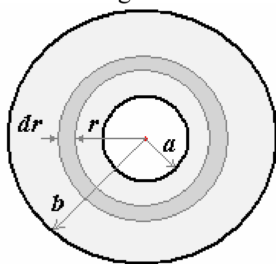
Solución.

a) $R = \eta \dfrac{L}{A}$

Donde $L = e$ y $A = \pi\left(b^2 - a^2\right)$

De aquí $R = \eta \dfrac{e}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}$

b) Consideremos un elemento de radio r y ancho dr como se muestra en la figura.



en la expresión $R = \eta \dfrac{L}{A}$

En este caso la resistencia solo es un diferencial de resistencia (dR), la longitud dr, la sección transversal $A(2\pi r)e$, de aquí: $dR = \dfrac{\eta dr}{2\pi e r}$

La resistencia al flujo radial es

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\eta}{2\pi e}\frac{dr}{r} = \frac{\eta}{2\pi e}\ln r\Big|_a^b$$

Finalmente $R = \dfrac{\eta}{2\pi e}\ln\dfrac{b}{a}$

Ejemplo 6. Un alambre de cobre se encuentra e la temperatura de 20°C y tiene una longitud de 10 metros y una sección de 0,005m^2 si le aplica una diferencie de potencial de 200 voltios, calcular:
a) La resistencia del alambre a 120°C
b) El campo eléctrico en el alambre.
c) La densidad de corriente en el alambre.

Solución.

a) $R = \eta \dfrac{L}{A}$

Donde L = 10 m, A = 0,005 m^2,

$\eta = \eta_{20}\left[1 + \alpha\left(t - 20^{\circ} C\right)\right]$

$\eta = 1{,}7\times 10^{-8}\left[1 + 0{,}0039(120 - 20)\right]$ = 2,36 x 10^{-8} $\Omega - m$

De allí $R = 2{,}36\times 10^{-8}\dfrac{10}{0{,}005}$ = 4,72 x 10^{-5} Ω

b) Tenemos que

$V = EL$ y $E = \dfrac{V}{L} = \dfrac{200}{10} = 20\dfrac{\text{V}}{\text{m}}$

c) Como $J = \dfrac{I}{A}$

Tenemos que

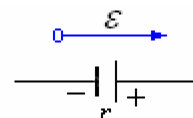
$V = IR \Rightarrow$

$I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{200}{4{,}72\times 10^{-5}}$ = 42,37 x 10^5 A

Luego $J = \dfrac{42{,}37\times 10^5}{0{,}005}$ = 8,5 x$10^8 \dfrac{A}{m^2}$

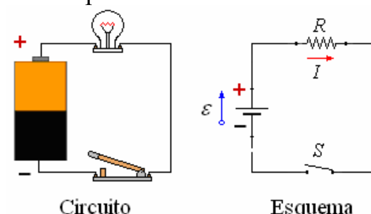
FUERZA ELECTROMOTRIZ

Para producir una corriente es necesario una diferencia de potencial, así mismo para poder cargar un condensador necesitamos una diferencia de potencial, en ambos casos estamos poniendo cargas en movimiento, O sea que se realiza trabajo, para esto se necesitan fuentes de energía, dispositivos que convierten le energía química o mecánica en energía eléctrica, estas son las pilas y baterías y los generadores.
Vamos a utilizarla abreviación fem por "fuerza electromotriz" que es un término que se refiere a energía y no a fuerzas) como símbolo tomamos ε y su representación esquemática es como se muestra en la figura siguiente.



fuerza electromotriz ε
Resistencia interna r
Terminal positivo (+)
Terminal negativo (-)

Consideremos una fem, por ejemplo una pila seca. En ella hay un terminal de bajo potencial $(-)$ y un terminal de alto potencial $(+)$. La diferencia de potencial entre los terminales (ΔV), cuando se emplea la pila para establecer una corriente I en un circuito como el de la figura siguiente, las cargas positivas son movidas por acción de fuerzas no electrostáticas contra las fuerzas electrostáticas (las fuerzas de coulomb ejercidas por las cargas en reposo) desde el terminal de bajo potencial hacia el terminal de alto potencial.

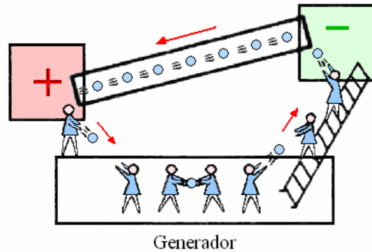


Si analizamos los portadores de carga del circuito de la figura vemos que al pasar de un potencial menor a uno mayor adquieren una energía que es equivalente al trabajo que hace la fuente para llevarlos del terminal negativo al terminal positivo, esto es

$dW = \varepsilon dq$

Suponiendo que los conductores son ideales (resistencia cero), la energía perdida por los portadores de carga al pasar por la resistencia es igual a le energía adquirida en la fem Podemos notar que la unidad de fem es también el Voltio.

¿Como se produce el flujo de electrones?



Para entender el flujo de electrones, que es la corriente eléctrica, hay que recordar las reglas de las cargas positiva y negativa.
Las cargas desiguales (+ y -) se atraen. Cargas iguales (+ y +), o (- y -) se repelen.
Los electrones de un átomo tienen cargas negativas y son atraídos por las cargas positivas. Los electrones se mueven con facilidad de un átomo a otro.
Para crear una corriente eléctrica en un alambre de cobre, se necesita una carga positiva en un extremo y una carga negativa en el otro.
Para crear y mantener la corriente eléctrica (movimiento de electrones), deben darse dos condiciones indispensables:
1. Que haya una fuente de electrones o dispositivo para su generación (generado**r**), pila, batería, fotocélula, etc.
2. Que exista un camino, sin interrupción, en el exterior del generador, por el cual, circulen los electrones. A este Camino se le conoce como conductor.

ENERGIA Y POTENCIA EN LOS CIRCUITOS ELECTRICOS

Al pasar una corriente eléctrica por un conductor, la energía en realidad no se pierde sino se transforma convirtiéndose en energía térmica. Cuando ponemos un campo eléctrico en el conductor los electrones libres se aceleran

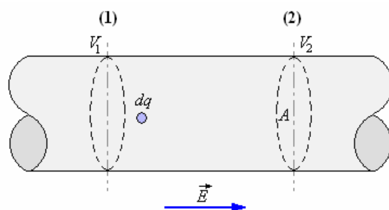
$$m\vec{a} = q\vec{E}$$

De donde $\vec{a} = \dfrac{q}{m}\vec{E}$

y su velocidad en el tiempo t es

$$\vec{v} = \vec{a}\,t = \frac{q}{m}\vec{E}\,t$$

Por consiguiente adquirimos una energía cinética adicional que se transfiere continuamente al conductor mediante choques entre los electrones y los iones de este. Es decir la energía se va transfiriendo inmediatamente manteniéndose la velocidad de desplazamiento en un valor medio.



En le figura anterior consideremos la carga dq que va de (1) a (2) con la corriente I en un tiempo de tal manera que $dq = Idt$ sufre un cambio de energía Potencial dada por

$$-dW = dq(V_1 - V_2) = dqV$$

Donde $V = dq(V_1 - V_2)$ es le caída de potencial, luego

$$-dW = IdtV \;\Rightarrow\; -\frac{dW}{dt} = IV$$

Expresión que nos da la razón en que se pierde la energía, que viene a ser la Potencia perdida en el conductor.

$$P = IV$$

Si V esta en voltios e I en amperes, que son unidades MKS, obtendremos la potencia en Joule/s = Vatios o Watts.
Como en un circuito ohmico $V = IR$, podemos escribir la expresión disipada como

$$P = I^2R\,.$$

A este resultado se le conoce como **Ley de Joule**, mientras que el caso de calentadores en que se desea transformar energía eléctrica en energía térmica este efecto es deseable, en otros casos esta disipación térmica es indeseable, por ejemplo en los alambres de conducción.
A esta pérdida (I^2R) se le denomina pérdida por calentamiento de Joule, a fin de reducir esta pérdida se utilizan conductores de baja resistencia (R) y mejor aún se trata de transmitir la potencia con la corriente más baja posible para lo cual hay que poner un voltaje muy elevado, por otra parte para usar la energía eléctrica con seguridad son recomendables los voltajes relativamente bajos. Para esto es necesario elevar y bajar los voltajes.

Ejemplo 7. Se diseña una unidad de calefacción que disipe 1000 watts, alimentado con una fuente de 220 voltios. ¿En qué porcentaje se reducirá la producción de calor si el voltaje se reduce a 200 voltios?
Solución.
Conectado a 220 Voltios
P = 1000 Watts

Como $P = IV = I^2R = \dfrac{V^2}{R}$

la resistencia de la unidad es

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2}{1000} = 48{,}4\Omega$$

Cuando la unidad se conecta a 200 Voltios la disipación será

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{200^2}{48{,}4} = 830 \text{ Watts}$$

El porcentaje en que se reduce el calor es

$$\% = \frac{1000 - 830}{1000}100 = 17 \text{ por ciento.}$$

Ejemplo 8. Una tetera eléctrica contiene 2 litros de agua que caliente desde 20°C al punto de ebullición

en 5 minutos. El voltaje de la fuente es 200 V y la kW cuesta 2 centavos. Calcular
a) la energía consumida (asumir que las pérdidas de calor son insignificantes),
b) el costo de usar la tetera bajo estas condiciones seis veces,
c) la resistencia del elemento de calefacción, y
d) la corriente en el elemento.
Solución.
El calor ganado por el agua al ser llevado al punto de ebullición está dado por la expresión
$Q = mc(\theta_2 - \theta_1)$.
a) Con $m = 2\times 10^3 cm^3 \times 1 g/cm^3 = 2\times 10^3 g$
$c = 4{,}18 \dfrac{J}{g^o C}$
Tenemos: $Q = (2\times 10^3)(4{,}18)(100-20)$ = 6,69 x 10^5 J,
y puesto que no se toman en cuenta las pérdidas de calor, ésta es la energía eléctrica consumida por la tetera. La energía es la energía consumida por segundo, la que es
$P = \dfrac{Q}{t} = \dfrac{6{,}69\times 10^5 J}{5\times 60 s} = 2{,}23\dfrac{J}{s}$ = 2,23 kW.
b) La tetera utiliza 2,23 kW por 5 minutos cada vez que se hierve el agua. Cuando se utiliza seis veces, 2,23 kW se usa por 30 min = ½ hora. Luego el costo es.
$2{,}23 kW \times ½\ \text{hr} \times 2\ \text{centavos.kW/hr}$ = 2,23 centavos.
c) La potencia consumida es 223 kW y el voltaje de la fuente es 200 V. Pero $P = V^2/R$ o
$R = \dfrac{V^2}{P} = \dfrac{(200V)^2}{2{,}23\times 10^3 V}$ = 17,9 Ω
d) Pero también podemos escribir la potencia como $P = IV$.
$\Rightarrow\ I = \dfrac{P}{V} = \dfrac{2{,}23\times 10^3 W}{200 A}$ = 11,2A

Ejemplo 9. Un dínamo conducido por un motor de vapor que utiliza 10^3 kg de carbón por día produce una corriente de 200 A con una fuerza electromotriz de 240 V. ¿Cuál es la eficiencia del sistema si el valor del carbón es 6,6 x 10^3 cal/g?
Solución.
La potencia provista por el carbón por segundo es
$6{,}6\times 10^3 \dfrac{cal}{g}\left(4{,}18\dfrac{J}{cal}\right) = 27{,}6\times 10^3 \dfrac{J}{g}$
$P_C = \dfrac{27{,}6\times 10^3\times 10^6}{24\times 60\times 60}$ = 3,2 10^5W
La potencia eléctrica provista por el dínamo es
$P = IV$ = 200A x 240V=4,8 x10^4 W.
Luego la eficiencia del sistema es
$\dfrac{P}{P_C}\times 100\% = \dfrac{4{,}8\times 10^4}{3{,}2\times 10^5}\% = 15\%$

Ejemplo 10. Un alambre de diámetro 1 milímetro que lleva una corriente elevada tiene una temperatura de 1200 K cuando ha alcanzado el equilibrio. Asumimos que el calor perdido del alambre es puramente por radiación. La temperatura de los alrededores es 300 K, la resistencia del alambre a esta temperatura es 5 x 10^{-8} Ω m, y el coeficiente de temperatura de la resistencia del alambre es 4 x 10^{-3} por ºC. ¿Cuál es la magnitud de la corriente en el alambre?
Solución.
Puesto que el calor está siendo perdido por radiación solamente, la energía perdida por segundo por una 1 m de longitud de alambre es $W = A\sigma(T^4 - T_0^4)$, donde A es el área superficial de la longitud del alambre y σ es la constante de Stefan, se asume que el alambre irradia como cuerpo negro.
Pero esta energía es provista por el flujo de corriente. Así, si R es la resistencia de 1 m del alambre, entonces $I^2 R = W = A\sigma(T^4 - T_0^4)$. Pero
$R = \dfrac{\rho\ell}{A'} = \dfrac{\rho_0[1+\alpha(T-T_0)]\ell}{A'}$
Donde A' es la sección transversal, ℓ es la longitud, el ρ_0 es la resistencia a 300 K, y α es el coeficiente de temperatura de la resistencia. Por lo tanto
$$I^2 = \frac{AA'\sigma(T^4 _ T_0^4)}{\rho_0[1+(T_T_0)]\ell}$$
$$= \frac{[1\times 2\pi(0{,}5\times 10^{-3})][\pi(0{,}5\times 10^{-3})^2][5{,}67\times 10^{-8})(1200^4 - 300^4)}{(5\times 10^{-8})[1+(1200-300)](1)}$$
= 1258 A^2.
$\Rightarrow I = 35{,}5$ A.

Ejemplo 11. Un radiador eléctrico tiene una resistencia de $(50 + aT^2)\Omega$ en la temperatura T K y emite βT^4 W, α y β son constantes. Su resistencia es 125 Ω cuando una diferencia potencial de 50 V es conecta a través de ella. ¿Qué corriente debe pasar a través del radiador para que emita 980 W?
Solución.
Si el radiador tiene una resistencia de 125 Ω cuando hay una caída de 50 V a través de ella, la potencia consumida es
$\dfrac{V^2}{R} = \dfrac{(50\ \text{V})^2}{125\Omega} = 20\ \text{W}$.
Si se asume que todo se irradiada, entonces
$20\ \text{W} = \beta \text{T}^4\ \text{W}$, Además,
$125\Omega = (50 + \alpha T^4)\Omega$ o $75 = \alpha T^4$.

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{75^2}{20}$$

Cuando el radiador emite 980 W, tenemos:

$$980 \text{ W} = \beta T_1^4 \text{ W} = \frac{20\alpha^2}{75^2} T_1^4 \text{ W}$$

$$\Rightarrow \alpha T_1^2 = \sqrt{\frac{75^2 \times 980}{20}} = 525 .$$

Así la resistencia del radiador ahora es $\left(50 + \alpha T_1^2\right)\Omega = 575\Omega$. Pero la potencia, la resistencia, y la corriente se relacionan por $P = I^2 R$.

Luego $I = \sqrt{\dfrac{980 \text{ W}}{575\Omega}} = 1{,}3 \text{ A}$.

Ejemplo 12. Un aparato fabricado para funcionar con 115 V y para disipar 500W es utilizado donde el voltaje es 230 V ¿qué resistencia debe colocarse en serie con el proyector antes de utilizarlo? ¿Qué energía se disipa en la resistencia agregada?

Solución.

El aparato tiene una resistencia *R* dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$.

Luego $R = \dfrac{(115\text{V})^2}{500\text{W}} = 26{,}45\Omega$

La corriente se obtiene de la ecuación

$$I = \frac{P}{V} = \frac{500\text{W}}{115\text{V}} = 4{,}35 \text{ A}$$

Cuando el voltaje de fuente es 230 V, una resistencia adicional *X* se inserta en serie para dar la misma corriente. Así

$$R + X = \frac{230 \text{ V}}{4{,}35\text{A}} = 52{,}9\Omega \;\Rightarrow\; X = 26{,}45\Omega$$

La energía disipada en la resistencia agregada es

$$I^2 X = (4{,}35)^2 (26{,}45) = 500\text{W} .$$

Esto se ve más fácilmente de la manera siguiente. Si la misma corriente se va a sacar de una fuente con un voltaje dos veces el usado previamente, $P = IV$ será ahora el doble que antes.

Los 500 W extra serán disipados en la resistencia agregada, que debe tener la misma resistencia que el aparato, puesto que cada uno disipa la misma potencia.

Ejemplo 13. Una corriente de 2 A se pasa a través de un calentador de la resistencia 8,4 Ω sumergido en 400 g de un líquido contenido en un calorímetro y la temperatura se eleva 10°C en 3 minutos. Cuando se utilizan 560 g de líquido en el mismo calorímetro y se pasa la misma corriente, la temperatura se eleva 10°C en 4 minutos. Despreciando cualquier pérdida de calor o cualquier cambio en la resistencia del calentador, calcule la capacidad calorífica del calorímetro y la capacidad calorífica específica del líquido.

Solución.

El calor ganado por el calorímetro y el contenido debe ser igual al calor provisto por la energía eléctrica. Así si *c* es la capacidad calorífica específica del líquido y *S* la capacidad calorífica del calorímetro, entonces

$$S\left(10^{\circ}\text{C}\right) + (400g)c\left(10^{\circ}\text{C}\right) = \frac{1}{4{,}18\text{J/cal}}(2\text{A})^2(8{,}4\Omega)(3\times 60\text{s})$$

si convertimos la energía eléctrica de julios a las calorías. Similarmente,

$$S\left(10^{\circ}\text{C}\right) + (560g)c\left(10^{\circ}\text{C}\right) = \frac{1}{4{,}18\text{J/cal}}(2\text{A})^2(8{,}4\Omega)(4\times 60\text{s})$$

$$\therefore\; (560-400)g \times c\left(10^{\circ}\text{C}\right) = \frac{1}{4{,}18\text{J/cal}}(2\text{A})^2(8{,}4\Omega)60(4-3)\text{s} .$$

$$\therefore\; c = \frac{2^2(8{,}4)(60)}{4{,}2(160)(10)}\frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}} = 0{,}3\frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}}$$

Por lo tanto, volviendo a la primera ecuación, tenemos

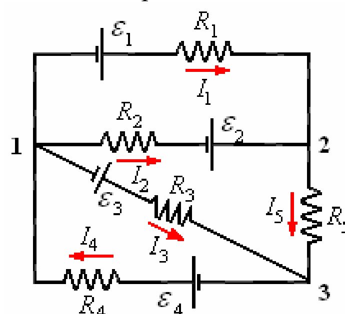
$$S\left(10^{\circ}\text{C}\right) + 400\text{g}\left(0{,}3\frac{\text{cal}}{\text{g}^{\circ}\text{C}}\right)\left(10^{\circ}\text{C}\right)$$

= 8 x 3 x 60 cal.

$$\therefore\; S = \frac{(1440-1200)}{10^{\circ}\text{C}} = 24\frac{\text{cal}}{^{\circ}\text{C}}$$

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA. INTRODUCCION

Los sistemas de corriente eléctrica estacionarios, o sea no cambiante que encontramos son combinaciones de generadores y resistencias interconectados por alambres a los cuales se les considera conductores perfectos.



La figura muestra un circuito eléctrico esquemático, los puntos 1, 2, 3 son conocidos como **nodos** y el recorrido de un nodo a otro consecutivo se conocen como **ramas**, por ejemplo entre 1-2 (hay dos ramas), entre 1-3, entre 2-3 (hay una rama). La **malla** es el recorrido completo de un hondo hasta volver al mismo siguiendo las ramas, por ejemplo 1-2-3, otro

ejemplo, 3-1, otro ejemplo 1-2-3-1 (hay tres mallas posibles).
A continuación estudiaremos circuitos sencillos compuestos de pilas o baterías, resistencias y condensadores en diversas combinaciones, pero solo con corriente continua que es la que no cambia de sentido como iones con las corrientes alternas, que es motivo de un estudio especial posterior.
Resolver un sistema significa que dados los valores de la fuerza electromotriz y las resistencias debemos determinar las intensidades de corriente en todas las ramas o en general dados dos de ellos encontrar el tercero.

LEYES DE KIRCHHOFF
Para resolver un circuito se necesitan dos reglas denominadas Leyes o reglas de Kirchhoff.

Primera ley de Kirchhoff
La suma de corrientes que entran e un nodo es igual a la suma de corrientes que salen del mismo, esto se deduce del principio de conservación de la carga. La primera ley de Kirchhoff podemos expresarla como

$$\sum I = 0 \qquad (1)$$

En el nodo 2 de la figura anterior

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Si tenemos N nodos en un circuito podemos obtener N - 1 ecuaciones independientes, la ecuación del nodo N no es independiente ya que si la ecuación (1) cumple en (N-1) nodos, esta cumple automáticamente en el nodo N.

Segunda ley de Kirchhoff
La suma de las caídas de potencial a lo largo de cualquier **malla** o lazo debe ser igual a la suma de los aumentos de potencial

$$\sum \varepsilon - \sum RI = 0 \qquad (2)$$

Esta ley se deduce del principio de conservaci6n de la energía.
En el caso de la figura anterior, tenemos

$$V_1 + \varepsilon_1 - I_1 R_1 = V_2 \quad \text{(Rama 1-2)}$$

$$V_2 - I_5 R_5 = V_3 \quad \text{(Rama 2-3)}$$

$$V_3 + \varepsilon_4 - I_4 R_4 = V_1 \quad \text{(Rama 1-2)}$$

Sumando estas expresiones obtenemos la suma de las caídas de potencial y aumento de potencial de la malla 1-2-3-1 (un lazo cerrado)

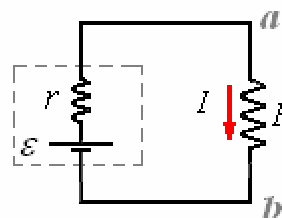
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - I_1 R_1 - I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - (I_1 R_1 + I_5 R_5 + I_4 R_4) = 0$$

Expresión que en general viene a ser

$$\sum \varepsilon - \sum RI = 0$$

Ejemplo 14. ¿Cual es la diferencia de potencial en una resistencia R conectada entre los bornes de una pila de fuerza electromotriz ε y con resistencia interna r?
Solución.
Le figura muestra esquemáticamente el circuito con la pila y su resistencia



Aplicando la segunda ley de Kírchhoff. Siendo I la corriente que circula por el circuito

$$\varepsilon - Ir - IR = 0$$

De aquí

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

La diferencia de potencial en la resistencia es:

$$V_{ab} = IR = \frac{\varepsilon R}{r + R}$$

La potencia que se disipa a través de R es

$$P = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}$$

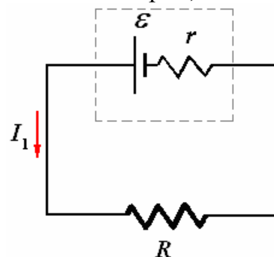
Si queremos encontrar el valor de R para el cual la potencia disipada sea la mínima

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)} - \frac{2\varepsilon^2 R}{(r + R)} = 0$$

Resolviendo

$$(R + r) - 2R = 0 \;\Rightarrow\; R = r$$

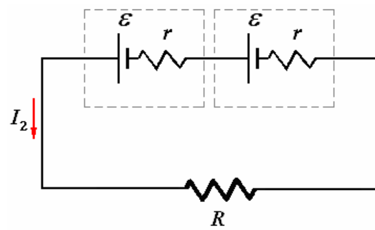
Ejemplo 15. Un estudiante de física conecta una pila a un circuito y encuentra que la corriente de la pila es I_1. Cuando conecta una segunda pila idéntica en serie con la primera, la corriente se convierte en I_2.
Cuando conecta las pilas en paralelo, la corriente a través del circuito es I_3.
Demuestre que la relación que él encuentra entre las corrientes es $3I_2I_3 = 2\,\grave{I}_1(I_2 + I_3)$.
Solución.
Sea ε la fuerza electromotriz de cualesquiera de las pilas ser y r su resistencia interna. y el circuito externo tiene una resistencia R.
a) Cuando se usa una sola pila,



Aplicamos la ecuación del circuito,

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

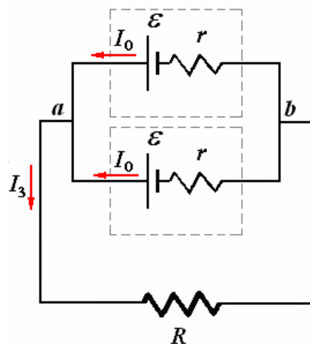
Si dos pilas idénticas se conectan en serie.



Sus fuerzas electromotrices actúan en igual sentido. Por lo tanto

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{R+2r}$$

Cuando las pilas se conectan en paralelo, puesto que son idénticas, por la simetría del montaje, corrientes idénticas I_0 deben atravesar cada una de las pilas.



Además por la primera ley de Kichhoff

$$I_3 = I_0 + I_0 = 2I_0 \quad (1)$$

Considerando el paso de la corriente a través de cualquiera de las pilas, tenemos:

$$\varepsilon - I_0 r - I_3 R = 0 \quad (2)$$

De (1) $I_0 = \dfrac{I_3}{2}$

Reemplazando en (2):

$$\varepsilon - \frac{I_3}{2} r - I_3 R = 0 \Rightarrow \varepsilon = I_3\left(R + \frac{r}{2}\right)$$

De aquí $I_3 = \dfrac{\varepsilon}{\left(R + \dfrac{r}{2}\right)}$

De estas ecuaciones de I_1, I_2 e I_3 encontramos que

$$R + r = \frac{\varepsilon}{I_1},\ R + 2r = \frac{2\varepsilon}{I_2} \text{ y } R + \frac{r}{2} = \frac{\varepsilon}{I_3}$$

Eliminando r entre las dos primeras ecuaciones da.

$$R = \varepsilon\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right),$$

y entre la primera y la tercera da

$$R = \varepsilon\left(\frac{2}{I_1} - \frac{2}{I_2}\right),$$

Dividiendo estas dos últimas ecuaciones una por la otra da

$$1 = \frac{2\left(\dfrac{1}{I_1} - \dfrac{1}{I_2}\right)}{\left(\dfrac{1}{I_3} - \dfrac{1}{I_1}\right)},$$

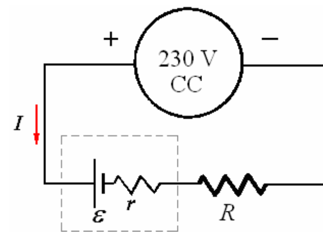
$$\therefore\ 2I_1I_2 - I_2I_3 = 2I_2I_3 - 2I_1I_3$$

$$\Rightarrow\ 3I_2I_3 = 2I_1\left(I_2 + I_3\right)$$

Ejemplo 16. Una batería de 50 pilas se está cargando de una fuente de C.C. de 230 V y de resistencia interna insignificante. ¿La fuerza electromotriz de cada pila en carga es 2,3 V, su resistencia interna es 0,1 2 y la corriente de carga necesaria es 6 A. ¿qué resistencia adicional debe ser insertada en el circuito?

Solución.

Sea R la resistencia adicional necesitada en el circuito.



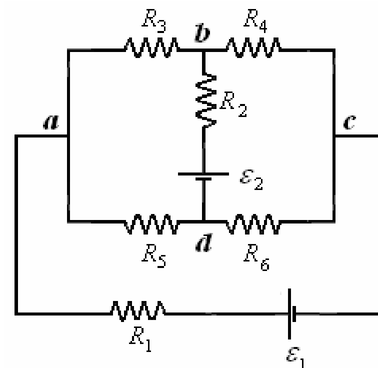
Las 50 pilas tienen una fuerza electromotriz total de 115 V y una resistencia interna total de 5 Ω.

Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff para obtener

$$230 - \varepsilon = I(R + r) \Rightarrow 230 - 115 = 6(R + 5)$$

De aquí $R = \dfrac{115}{6} - 5 = 14{,}2\Omega$

Ejemplo 17. Resolver el circuito mostrado en la figura.



Solución.

Como primer paso fijemos el sentido de la corriente en cada rama, las que finalmente pueden resultar con signo negativo, lo que significaría que el sentido es contrario al considerado.

Aquí tenemos seis incógnitas por lo tanto necesitamos seis ecuaciones

Por la primera ley de Kirchhoff. Nudo *a*:

$$I_3 + I_5 - I_1 = 0 \qquad (1)$$

Nudo *b*:

$$I_4 + I_2 - I_3 = 0 \qquad (2)$$

Nudo *c*:

$$I_1 - I_4 - I_6 = 0 \qquad (3)$$

Por la segunda ley de Kirchhoff

Siendo cuatro nudos solo podemos obtener tres ecuaciones.

Camino *a-c-d-a*

$$-I_1R_1 + \varepsilon_1 - I_6R_6 - I_5R_5 = 0 \qquad (4)$$

Camino *a-e-d-a*

$$-I_1R_1 + \varepsilon_1 - I_4R_4 - I_3R_3 = 0 \qquad (5)$$

Camino *a-d-b-a*

$$+I_5R_5 + \varepsilon_2 - I_2R_2 - I_3R_3 = 0 \quad (6)$$

ya tenemos las 6 ecuaciones que nos resolverán el circuito.

Reordenando las ecuaciones:

$$0 = I_1(-1) + I_2(0) + I_3(1) + I_4(0) + I_5(0) + I_6(0)$$
$$0 = I_1(0) + I_2(1) + I_3(-1) + I_4(1) + I_5(0) + I_6(0)$$
$$0 = I_1(1) + I_2(0) + I_3(0) + I_4(-1) + I_5(0) + I_6(-1)$$
$$0 = I_1(R_1) + I_2(0) + I_3(0) + I_4(0) + I_5(R_5) + I_6(R_6)$$
$$\varepsilon_1 = I_1(R_1) + I_2(0) + I_3(R_3) + I_4(R_4) + I_5(0) + I_6(0)$$
$$\varepsilon_2 = I_1(0) + I_2(R_2) + I_3(R_3) + I_4(0) + I_5(-R_5) + I_6(0)$$

Que podernos resolver por determinantes

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & R_5 & R_6 \\ \varepsilon_1 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & R_2 & R_5 & 0 & -R_5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & R_5 & R_6 \\ R_1 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_5 & 0 & -R_5 & 0 \end{vmatrix}}$$

De igual modo para I_2, I_3, I_4, I_5, I_6.

Ejemplo 18. Se tienen dos baterías una de 6 voltios y resistencia interna 2 ohms y otra de 12 voltios y resistencia interna 4 ohms. Se conecta una resistencia de 12 ohms. ¿Cuál es la diferencia de potencial en la resistencia cuando se conecta tal como en

a) la figura (a)?

b) la figura (b)?

(a) (b)

Solución.

a)

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff.

$$\varepsilon_1 - Ir_1 + \varepsilon_2 - Ir_2 - IR = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r_1 + r_2 + R}$$

$$I = \frac{6+12}{2+4+12} = \frac{18}{18} = 1 \text{ ampere}$$

La diferencia de potencial en los puntos *a* y *b* es

$V_{ab} = IR$ =1 ampere x 12 ohms

V_{ab} = 12 voltios

b)

Aplicando la primera, ley de Kirchhoff en el nudo *a*

$I_1 + I_2 - I = 0$ (1)

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff de *b*, a, *b* por los dos caminos.

$$\varepsilon_1 - I_1r_1 - IR = 0 \qquad (2)$$

$$\varepsilon_2 - I_2r_2 - IR = 0 \qquad (3)$$

Reescribiendo las ecuaciones

$$0 = I_1(1) + I_2(1) + I(0)$$

$$\varepsilon_1 = I_1(r_2) + I_2(0) + I(0)$$
$$\varepsilon_2 = I_1(0) + I_2(r_2) + I(0)$$

Resolviendo por determinantes para I :

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ r_1 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & r_2 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ r_1 & 0 & R \\ 0 & r_2 & R \end{vmatrix}}$$

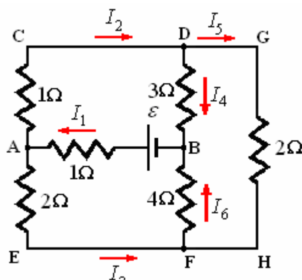
Reemplazando valores

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{-24-24}{-48-24} = 0{,}5 \text{ A}$$

La diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* es
Vab = *IR* = 0,5 Amperes x 12 Ohms = 6 voltios

Ejemplo 19. Un circuito se conecta como en el diagrama. ¿La disipación de la potencia no debe exceder a 1 W en ningún rama. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza electromotriz de la batería?

Solución.



Todos los puntos en el diagrama se han etiquetado, y las corrientes se han insertado en cada rama.
Aplicando la primera ley de Kirchhoff a los puntos A, F, y D, tenemos

$I_1 = I_2 + I_3$, $I_3 + I_5 = I_6$, $I_2 = I_4 + I_5$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a los circuitos ACDB, BAEF, y DGHF. Tenemos

$$\varepsilon = I_1(1\Omega) + I_2(1\Omega) + I_4(3\Omega)$$
$$\varepsilon = I_1(1\Omega) + I_3(2\Omega) + I_6(4\Omega)$$
$$0 = I_5(2\Omega) + I_6(4\Omega) - I_4(3\Omega)$$

Resolviendo estas seis ecuaciones simultáneamente encontramos las soluciones siguientes:

$$I_1 = \frac{41\varepsilon}{139\Omega},\ I_2 = \frac{26\varepsilon}{139\Omega},\ I_3 = \frac{15\varepsilon}{139\Omega},$$
$$I_4 = \frac{24\varepsilon}{139\Omega},\ I_5 = \frac{2\varepsilon}{139\Omega} \text{ y } I_6 = \frac{17\varepsilon}{139\Omega}$$

La potencia disipada en una resistencia R_r a través de la cual pasa la corriente I_r es $P_r = I_r^2 R_r$.
Aplicando esto a los elementos en el diagrama, tenemos

$$P_{AB} = \frac{1681\varepsilon^2}{(139)^2\Omega},\ P_{AC} = \frac{676\varepsilon^2}{(139)^2\Omega},$$
$$P_{AE} = \frac{450\varepsilon^2}{(139)^2\Omega},$$
$$P_{DB} = \frac{1728\varepsilon^2}{(139)^2\Omega},\ P_{GH} = \frac{8\varepsilon^2}{(139)^2\Omega},$$
$$P_{BF} = \frac{1156\varepsilon^2}{(139)^2\Omega}$$

Está claro que la mayor potencia disipada es en la resistencia entre los puntos B y D. Para satisfacer las condiciones del problema, P_{DB} es 1 W para el valor máximo de la fuerza electromotriz ε . Así:

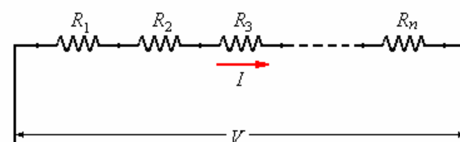
$$\frac{1728\varepsilon^2}{(139)^2\Omega} = 1\text{W} \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{(139)^2}{1728}\text{V}^2$$
$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{139}{24\sqrt{3}}\text{V} = 3{,}34\text{V}$$

CONEXIONES DE RESISTENCIAS, EN SERIE Y EN PARALELO.

Cuando se tienen varias resistencias en un circuito es conveniente reducirlas a una resistencia equivalente con el objeto de facilitar la resolución del circuito.

En serie.

Se dice que n resistencias están conectadas en serie cuando están unidas extremo a extremo una a continuación de otra, como se muestra en la figura siguiente.



Con una diferencia de potencial *V* fluye una corriente *I*, aplicando la segunda ley de Kirchhoff

$$V - IR_1 - IR_2 - IR_3 - \ldots\ldots - IR_n = 0$$

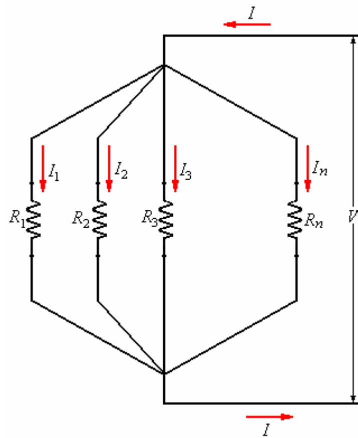
expresión de la cual se obtiene la resistencia equivalente

$$R_e = \frac{V}{I} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots + R_n$$

$$R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

En paralelo.

Cuando n resistencias se conectan en la forma como muestra la figura siguiente, se dice que las resistencias están conectadas en paralelo.



De la primera ley de Kirchhoff

$I = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$

De la segunda ley de Kirchhoff

$V = I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3 + ... + I_nR_n$

De este última encontramos que

$I_1 = \frac{V}{R_1}$, $I_2 = \frac{V}{R_2}$, $I_3 = \frac{V}{R_3}$, ………,

$I_n = \frac{V}{R_n}$

Reemplazando en la primera expresión

y $\frac{I}{V} = \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_n}$

De aquí $\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

Ejemplo 20. Dos conductores de la misma longitud y material pero con diferentes áreas de sección transversal son: a) conectados en serie, y b) en paralelo. ¿Cuándo una diferencia potencial se aplica a través de las combinaciones, en cual de los conductores el calentamiento será mayor?

Solución.

La resistencia de cada conductor tiene la forma

$R = \rho\frac{\ell}{A}$. Como la resistividad y las longitudes son iguales en cada caso, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{A_2}{A_1}$.

a) Cuando los conductores están en serie, la misma corriente pasa con cada uno. Por lo tanto el cociente del calentamiento producido en los alambres es:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{I^2R_1}{I^2R_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

El calentamiento es mayor en el conductor con sección transversal de menor área.

b) Cuando los conductores están en paralelo, diferentes corrientes pasan a través de ellos pero la diferencia potencial a través de cada uno es igual. Por lo tanto

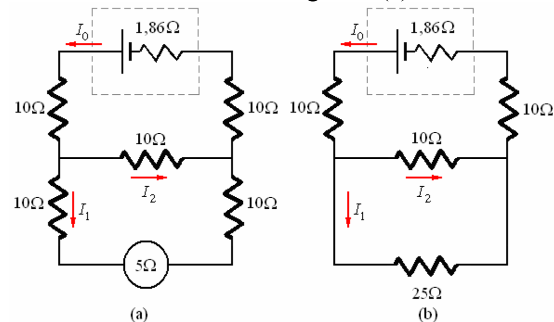
$$\frac{Q'_1}{Q'_2} = \frac{V^2/R_1}{V^2/R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

En este caso el calentamiento es mayor en el conductor con sección transversal de mayor área.

Ejemplo 21. Cinco resistencias, cada uno de 10 Ω, se conectan para formar una letra H, una pila de 2 V y con resistencia interna 1,86 Ω se conecta a través de los extremos superiores y un amperímetro con resistencia 5 Ω a través de los extremos inferiores. ¿Qué corriente pasa a través del amperímetro?

Solución.

El circuito mostrado en el diagrama (a) es equivalente al circuito mostrado en el diagrama (a).

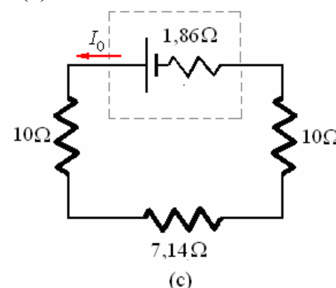


Las resistencias de10 Ω y 25 Ω están en paralelo. Por lo tanto la resistencia equivalente es *R*, donde

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{10} + \frac{1}{25} = \frac{5+2}{50} = \frac{7}{0} \Rightarrow$$

$$R = \frac{50}{7} = 7{,}14\,\Omega$$

El circuito es por lo tanto equivalente al mostrado en el diagrama (c).



Es posible ahora encontrar la corriente en el circuito.

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2}{10 + 10 + 7{,}14 + 1{,}86} = \frac{2}{29}A$$

Esta corriente se divide en las corrientes I_1 e I_2 a través de las partes inferiores de los circuitos, según como se muestra en los diagramas (a) y (b), donde

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{10\Omega}{25\Omega} \Rightarrow \frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{10}{35}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{10}{35}(I_1 + I_2)$$

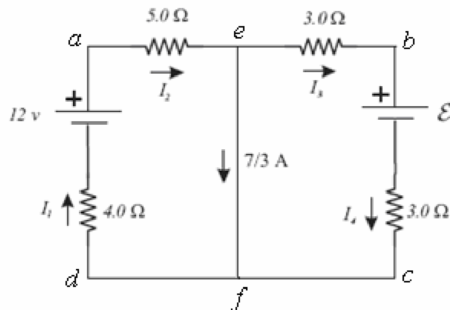
Por la primera ley de Kirchhoff,

$I_1 + I_2 = I_o$

Luego $I_1 = \frac{10}{35} I_0 = \frac{10}{35} \times \frac{2}{29} = 0{,}0197$ A

Es la corriente que atraviesa el amperímetro

Ejemplo 22. En la figura mostrada, calcular cada corriente en la dirección indicada para las resistencias y calcular ε .



Solución.

a) Cálculo de las corrientes:

En la malla *aefda*. $I_1 = I_2$

$$-4{,}0 I_1 + 12 - 5{,}0 I_1 = 0 \Rightarrow 9{,}0 I_1 = 12 \Rightarrow$$

$$I_1 = I_2 = \frac{12}{9} = 1{,}33\text{A}$$

En el nudo e.

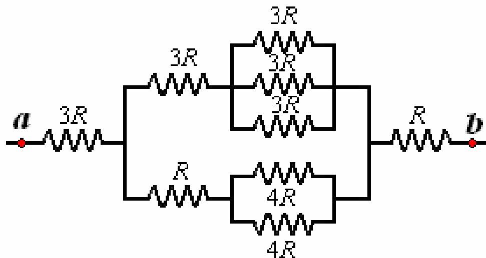
$$\frac{4}{3} - \frac{7}{3} - I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = I_4 = 1\text{A}$$

Cálculo de ε :

En la malla *ebcfb*.

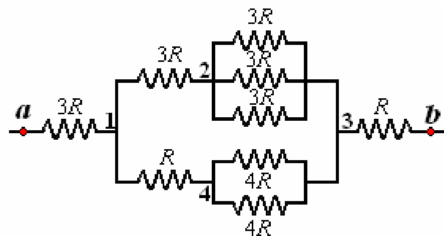
$$-3(1) - \varepsilon - 3(1) = 0 \Rightarrow \varepsilon = 6\text{V}$$

Ejemplo 23. Encuentre la resistencia equivalente entre los terminales *a* y *b* del circuito de la figura.



Solución.

Este circuito formado por partes en serie y partes en paralelo



Le resistencia entre 2 y 3 es

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} = \frac{3}{3R} = \frac{1}{R}$$

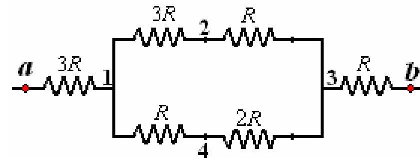
$$R_{23} = R$$

La resistencia entre 4 y 3 es

$$\frac{1}{R_{43}} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{4R} = \frac{2}{4R} = \frac{1}{2R}$$

$$R_{43} = 2R$$

El circuito queda reducido a



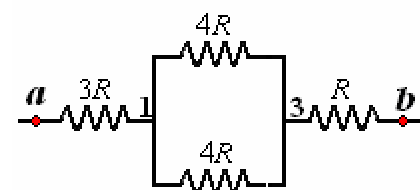
La resistencia entre 1, 2, 3 es

$$R_{123} = 3R + R = 4R$$

La resistencia entre 1, 4, 3 es

$$R_{143} = 2R + 2R = 4R$$

El circuito queda reducido a



La resistencia entre 1 y 3 es

$$\frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{4R} = \frac{2}{4R} = \frac{1}{2R}$$

$$R_{13} = 2R$$

El circuito queda reducido a



Finalmente la resistencia entre a b es

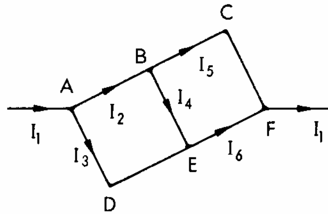
$$R_{ab} = 3R + 2R + R = 6R$$



Ejemplo 24. Con un pedazo de alambre uniforme se forman dos cuadrados con un lado común de longitud 10cm. Una corriente ingresa al sistema rectangular por una de las esquinas y va diagonalmente para salir por la esquina opuesta. Demuestre que la corriente en el lado común es un quinto de la corriente que entra. ¿Qué longitud del alambre conectado entre la entrada y la salida (A y F), tendría un efecto resistente equivalente tendría un efecto resistivo equivalente?

Solución.

Sea la *R* resistencia de cada lado del cuadrado, y el flujo de corrientes tal como el mostrado en el diagrama.



Aplicando la primera ley de Kirchhoff, $\sum I = 0$, a los puntos A, B, y E da:

$I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (1)

$I_2 - I_4 - I_5 = 0$ (2)

$I_3 + I_4 - I_6 = 0$ (3)

La aplicación de la segunda ley de Kirchhoff a los circuitos ABED y BCFE da

$I_2R + I_4R - I_3 2R = 0$ (4)

$I_5 2R - I_6R - I_4R = 0$ (5)

Eliminando I_5 e I_6 de las ecuaciones, (2), (3), y (4) obtenemos:

$2I_2 - I_3 - 4I_4 = 0$ (6)

Eliminando I_2 las ecuaciones (1), (4), y (6):

Obtenemos:

(1) + (4) $I_1 - 3I_3 + I_4 = 0$ (7)

2(1) + (6) $2I_1 - 3I_3 - 4I_4 = 0$ (8)

Eliminando I_3 de (7) y (8):

(8) – (7) $I_1 - 5I_4 = 0 \Rightarrow I_4 = \frac{1}{5}I_1$ (9)

Además, la caída de potencial de A a F por el camino ADEF, empleando las ecuaciones. (3), (7), y (9), es:

$$V_{AF} = I_3 2R + I_6 R = R(2I_3 + I_3 + I_4)$$

$$= R(I_1 + 2I_4) = I_1 R\left(1 + \frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{7}{5} R I_1$$

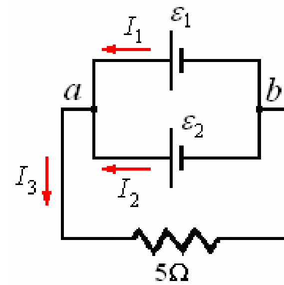
Empleando las ecuaciones. (3), (7), y (9).

Por lo tanto el efecto equivalente se obtiene si un alambre $7/5$ veces la longitud de cualquier lado del cuadrado se conecta entre A y F, porque produce la misma caída de potencial que el cuadrado doble entre estos puntos.

Ejemplo 25. Dos pilas, una de fuerza electromotriz 1,2V y resistencia interna 0,5 Ω, la otra de fuerza electromotriz 2V y resistencia interna 0,1 Ω, están conectadas en paralelo y la combinación se conectada en serie con una resistencia externa de 5 Ω. ¿Qué corriente pasa con esta resistencia externa?

Solución.

El circuito es como el mostrado en la figura siguiente:



Aplicando la primera ley de Kirchhoff

$I_1 + I_2 = I_3$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito cerrado que contiene ambas pilas y luego al circuito cerrado con la pila inferior y la resistencia externa, tenemos

$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (2 - 1{,}2) = 0{,}1I_2 - 0{,}5I_1$ y

$\varepsilon_2 = 2 = 0{,}1I_2 + 5I_3$

De aquí $I_2 - 5I_1 = 8$ y $I_2 + 50(I_1 + I_2) = 20$

o $10I_2 - 50I_1 = 80$ y $51I_2 + 50I_1 = 20$.

Luego $I_2 = \frac{100}{61}$ = 1,64 A,

$I_1 = -\frac{388}{355}$ = -1,27 A,

$I_3 = I_1 + I_2$ = 0,37 A

Ejemplo 26. Un galvanómetro de resistencia 20 Ω da una desviación de toda la escala cuando una corriente de 1 mA pasa a través de ella. ¿Qué modificación se debe hacer al instrumento de modo que dé la desviación de toda la escala para (a) una corriente de 0,5 A, y (b) una diferencia potencial de 500V?

Solución.

Si un galvanómetro tiene una resistencia de 20 Ω y da la desviación completa para una corriente de 1 mA, después la caída de voltaje a través de ella bajo estas circunstancias es

$V = IR = (10^{-3})(20)$ = 0,02 V

(a) Para permitir que el galvanómetro lea hasta 0,5 A, una resistencia de desviación debe ser agregada. Esta resistencia debe tomar 499 mA, permitiendo solamente 1 mA a través del galvanómetro. Pero la diferencia potencial a través de cada una es igual. Así si *r* es la resistencia de la desviación, entonces

1 mA x 20 Ω = 499 mA x *r*,

$\Rightarrow r = \frac{20}{499}$ = 0,0401 Ω.

(b) Para cambiar la lectura del voltímetro hasta 500 V, uno debe agregar una resistencia en serie. Solamente 0,02 V caen a través del galvanómetro para la corriente máxima de 1 mA. Así 499,98 V deben caer a través de la resistencia *R*. La misma corriente atraviesa la resistencia y el galvanómetro. Por lo tanto

$$R = \frac{499{,}98\ \text{V}}{10^{-3}\ \text{A}} = 499{,}980\Omega .$$

Ejemplo 27. Una bobina del alambre está conectada a través de un puente de Wheatstone y de una resistencia estándar de temperatura controlada de 1 Ω a través del otro. Si la temperatura de la bobina es 0°C, los otros brazos del puente tienen cociente de 0,923 entre las resistencias en el. Si la temperatura de la bobina es 100°C el cociente es 1,338. ¿Cuál es el coeficiente de temperatura de la resistencia del alambre?

Solución.

De la ecuación del puente de Wheatstone, las resistencias de la bobina, R_0 a 0°C y R a 100°C, son R_0 = 0,923 Ω y R_t = 1,338 Ω. Pero $R_t = R_0(1+\alpha t)$, donde α es el coeficiente de temperatura del alambre de la resistencia. Así

$$\alpha = \frac{(R_t/R_0)-1}{t} = \frac{(1{,}338/0{,}923)-1}{100^{\circ}\text{C}}$$

= 0,0045 /ºC

Ejemplo 28. Una resistencia variable en serie con una pila 2 V y un galvanómetro se ajusta para dar una desviación a escala completa, para una corriente de 1 mA. ¿Qué resistencia puesta en serie en el circuito reducirá la lectura del galvanómetro por l/f?

El galvanómetro está calibrado para medir resistencia sobre esta base, pero la fuerza electromotriz de la pila cae el 5% y se reajusta la resistencia variable de modo que la desviación a escala completa corresponda otra vez al cero de la resistencia variable. ¿Qué error del porcentaje ahora se da en una resistencia que tenga un valor verdadero de 3800 Ω?

Solución.

La resistencia total en el circuito cuando el galvanómetro está dando la desviación a escala completa es

$$R = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{2\ \text{V}}{10^{-3}\ \text{A}} = 2000\Omega$$

Si una resistencia desconocida X se agrega al circuito y produce una lectura de (l/f) mA en el galvanómetro, entonces

$$R + X = \frac{2}{(1/f)\times 10^{-3}} = 2000f\Omega \Rightarrow$$

$$X = (2000f - 2000) = 2000(f-1)\Omega$$

La fuerza electromotriz de la pila cae a $\frac{95}{100}$ de 2 V = 1,9 V.

Para la desviación a escala completa la resistencia en el circuito será:

$R' = \frac{1{,}9}{10^{-3}} = 1900\Omega$, y si otra resistencia de 3800 Ω se inserta en el circuito, la corriente es

$\frac{1{,}9\text{V}}{(1900+3000)\Omega} = \frac{1}{3}\text{mA}$. Pero de la calibración del galvanómetro, cuando la corriente cae a un tercio de su valor, la resistencia insertada debe tener un valor

$$X = [2000(3-1)]\Omega = 4000\Omega .$$

El error en la lectura es así 200 Ω, y el error del porcentaje es

$$\frac{200}{3800}\times 100\% = 5{,}3\%$$

Ejemplo 29. Una longitud de 300 cm de alambre de potenciómetro se requiere para balancear la fuerza electromotriz de una pila. Cuando una resistencia de 10 Ω se conecta a través de la pila, la longitud requerida para el balance es 250 cm. Calcule la resistencia interna de la pila.

Solución.

El alambre del potenciómetro es uniforme y la caída de potencial a lo largo de el es regular. Por lo tanto la longitud a lo largo del alambre es directamente proporcional a la caída potencial a través de el. Así ε = k x 300 cm, donde k es la constante de proporcionalidad entre el potencial y la longitud, teniendo unidades de V/cm.

Cuando una resistencia de 10 Ω se pone a través de los terminales de la pila, el potencial a través del resistor es V = k x 250 cm.

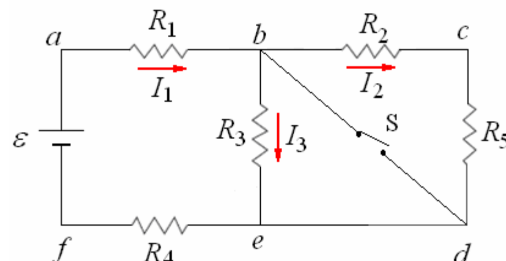
Luego $\frac{\varepsilon}{V} = \frac{300}{250} = \frac{6}{5}$.

Pero cuando una resistencia se coloca a través de los terminales de la pila, una corriente fluirá en ese circuito, donde $V = IR$ y $\varepsilon = I(R+r)$.

De aquí $\frac{\varepsilon}{V} = \frac{6}{5} = \frac{R+r}{R} = \frac{10\Omega + r}{10\Omega} \Rightarrow$

$r = 2\Omega$

Ejemplo 30. Se tiene el circuito mostrado en la figura. Los valores de los diferentes elementos son: R_1 = 15,0 Ω, R_2 = 5,0 Ω, R_3 = 10,0 Ω, R_4 = 20 Ω, R_5 = 5,0 Ω, y ε = 80 V



a) Si el interruptor S permanece abierto, calcule la resistencia equivalente del circuito y la corriente total I_1. Luego calcular las corrientes I_2 e I_3.

b) Utilizando el resultado de la parte a), calcule la potencia entregada por la fuente y la potencia disipada por cada resistencia (si el interruptor "S"

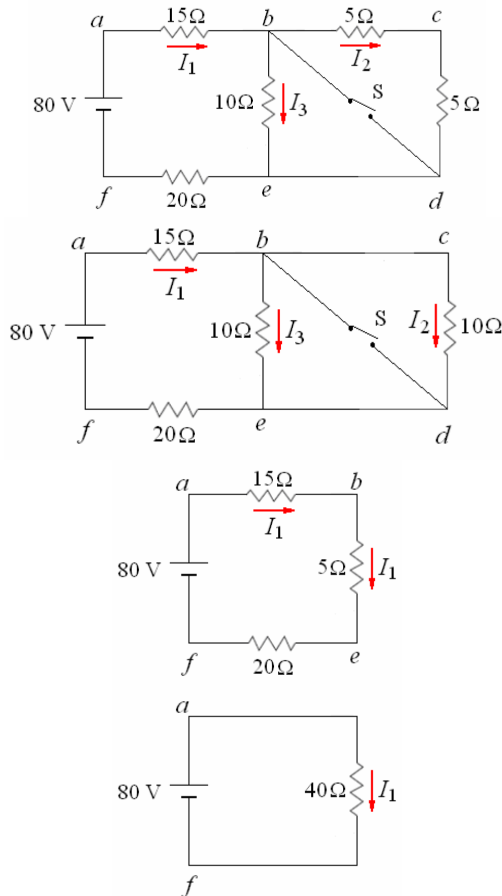
permanece abierto). Compare sus dos resultados y comente.

c) Suponga que el potencial eléctrico del punto *e* es cero (V_e). Determine el potencial eléctrico de los puntos *a* y *c*.

d) Se adiciona 60 voltios al voltaje de la fuente, y a continuación se cierra el interruptor "S". Calcule la corriente total en el circuito.

Solución.

a) La corriente total I_1.



La resistencia equivalente es 40 □.

$$I_1 = \frac{80}{40} = 2 \text{ A.}$$

Las corrientes I_2 e I_3.

$$I_1 = I_2 + I_3 = 2,\ I_2 = I_3 \Rightarrow I_2 = I_3 = 1 \text{ A.}$$

b) La potencia entregada por la fuente:

$$P_\varepsilon = I_1^2 40 = (2^2)(40) = 160 \text{ W.}$$

La potencia disipada por cada resistencia con el interruptor "S" abierto.

$$P_1 = I_1^2 R_1 = (2^2)(15) = 60 \text{ W.}$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = (1^2)(5) = 5 \text{ W.}$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = (1^2)(10) = 10 \text{ W.}$$

$$P_4 = I_4^2 R_4 = (2^2)(20) = 80 \text{ W.}$$

$$P_5 = I_5^2 R_5 = (1^2)(5) = 5 \text{ W.}$$

La suma de la potencia disipada por las resistencias es igual a la potencia entregada por la fuente porque la fuente es ideal sin resistencia interna.

c) $V_e - 20I_1 + 80 = V_a$

Con $I_1 = 2$ A y $V_e = 0$:

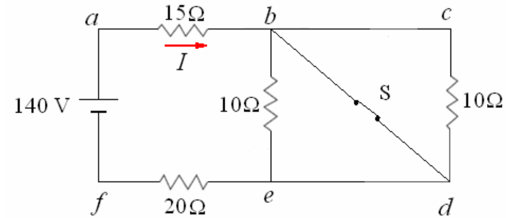
$$0 - 20(2) + 80 = V_a \Rightarrow V_a = 40 \text{ V}$$

$$V_e + 10I_2 = V_c$$

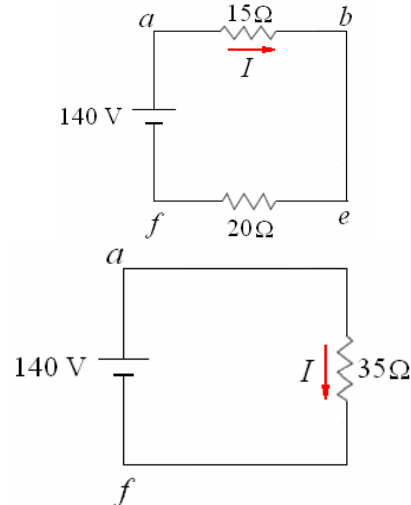
Con $I_2 = 1$ A y $V_e = 0$:

$$0 - 10(1) = V_c \Rightarrow V_c = -10 \text{ V}$$

d) Se adiciona 60 voltios al voltaje de la fuente, y se cierra el interruptor "S".



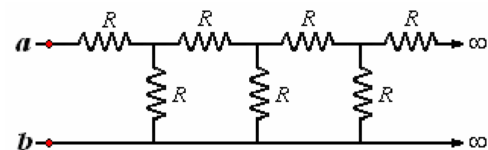
La parte *bcde* equivale a un corto circuito.



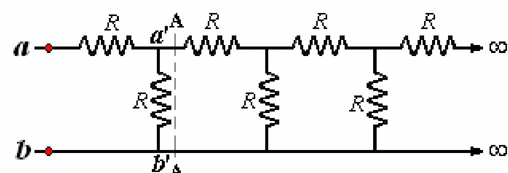
La corriente del circuito es:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{140}{35} = 4 \text{ A.}$$

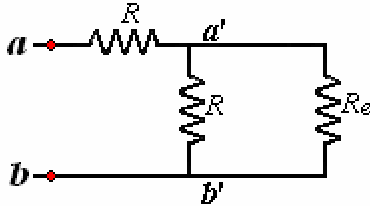
Ejemplo 31. Encontrar la resistencia equivalente entre los terminales *a* y *b* del circuito mostrado en la figura.



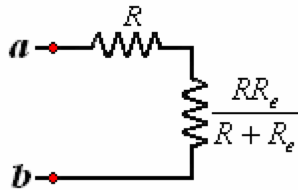
Solución.



Consideremos que la resistencia entre *a* y *b* es R_e observemos ahora el corte AA en la figura, considerado el lado izquierdo la resistencia entre *a'* y *b'* es también igual a R_e. Luego podemos dibujar el circuito como en la figura siguiente.



Este circuito es equivalente a



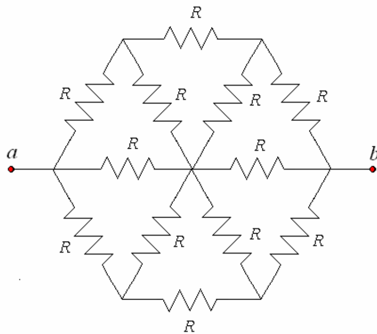
Que es un circuito en serie cuya resistencia total es $R+\frac{RR_e}{R+R_e}$, que a su vez es igual a R_e, de aquí

$$R_e = R+\frac{RR_e}{R+R_e} \text{ y } R_e^2 - RR_e - R^2 = 0$$

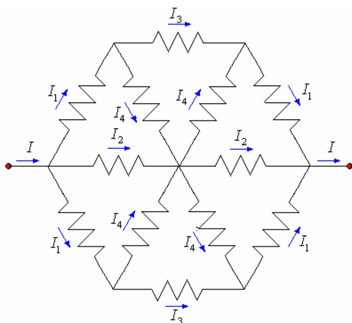
Resolviendo para R_e obtenemos el valor positivo

$$R_e = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}R$$

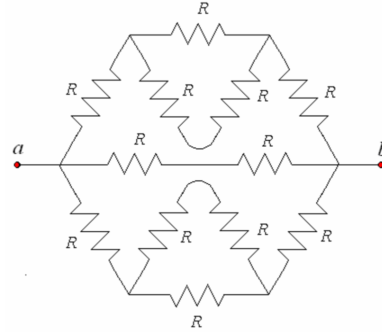
Ejemplo 32. Encontrar la resistencia equivalente entre los terminales a y b del circuito de la figura.



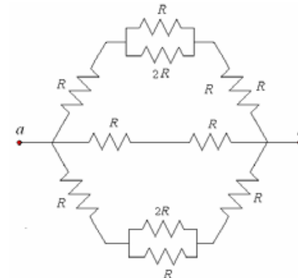
Solución.
Como se trata de un circuito simétrico, la distribución de corrientes será simétricamente como mostramos a continuación.



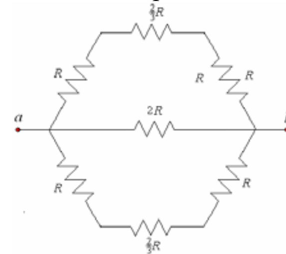
Siguiendo las corrientes este circuito es equivalente a:



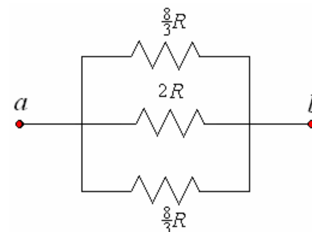
Circuito que asta formado por partes en paralelo y en serie.
El circuito se reduce a:



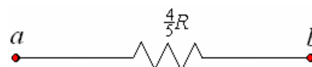
Reducidos los circuitos en paralelo se tiene:



Este a su vez se reduce a

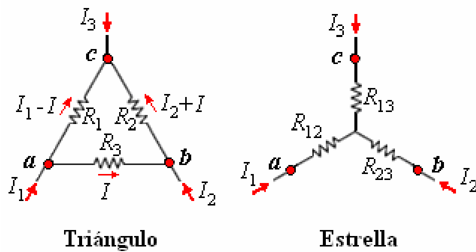


Finalmente



CAMBIO DE UN CIRCUITO TRIANGULO A ESTRELLA

Se presentan algunos casos que no son en serie ni en paralelo, cuya resolución es larga, pero que es posible simplificar realizando ciertas transformaciones, cambiar un circuito **triángulo**, a otro equivalente **estrella**, mostrados en la figura siguiente.



Por ser equivalentes los intensidades de corriente en los nodos *a*, *b*, *c* en los dos circuitos deben ser iguales respectivamente, las que de acuerdo a la primera ley de Kirchhoff se reparten en el circuito triangulo.
Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al lazo *a*, *b*, *c*, *a* en el triángulo

$$IR_2 + (I_2 + I)R_3 - (I_1 - I)R_1 = 0$$

de donde

$$I = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff entre *a* y *b* de los dos circuitos , el potencial V_{ab} de ambos deben de ser iguales.

$$V_{ab} = IR_2 = I_1 R_{12} - I_2 R_{23} \qquad (2)$$

Reemplazando el valor de *I* de (1) en (2)

$$\frac{I_1 R_1 - I_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} R_2 = I_1 R_{12} - I_2 R_{23}$$

$$I_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} - I_2 \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$= I_1 R_{12} - I_2 R_{23} \qquad (3)$$

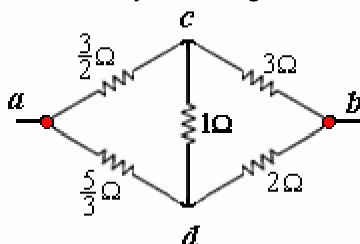
Por observación de la expresión (3)

$$R_{12} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

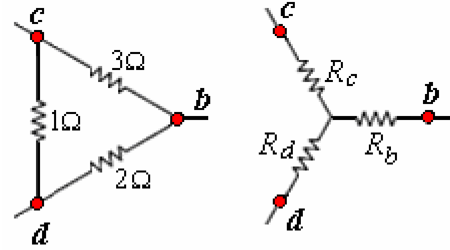
De igual manera se puede deducir

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Ejemplo 33. Encontrar la resistencia equivalente entre los terminales *a* y *b* de la figura.



Solución.
Busquemos el circuito estrella equivalerte al circuito triángulo *cdb*

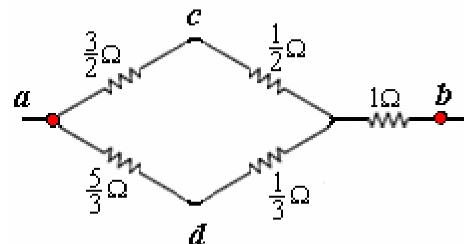


$$R_c = \frac{3 \times 1}{1 + 3 + 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\Omega$$

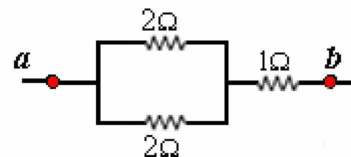
$$R_b = \frac{3 \times 2}{1 + 3 + 2} = \frac{6}{6} = 1\Omega$$

$$R_d = \frac{1 \times 2}{1 + 3 + 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\Omega$$

E]. circuito se convierte en



Reduciendo los partes en serie



Reduciendo las partes en paralelo

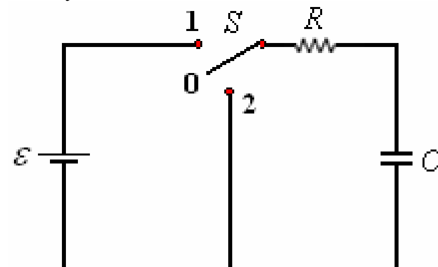


y finalmente



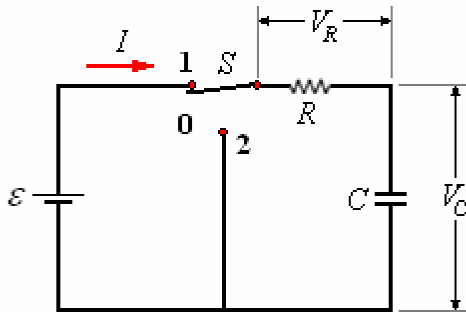
La resistencia equivalente es 2Ω

CIRCUITO RC
En esta parte estudiaremos un circuito en el que la corriente no es estacionaria, se trata del circuito con resistencia y condensador en serie.



La figura muestra un condensador *C*, una resistencia *R* que se conecta a une fuerza electromotriz ε por medio de una llave *S* con tres posiciones.
Inicialmente el circuito está abierto, no hay carga en el condensador. (Posición 0).

Carga.
En el instante $t = 0$ ponemos la llave *S* en la posición 1; empieza e fluir una corriente *I*.



Aplicando la segunda ley da Kirchhoff en el circuito de le figura anterior

$\varepsilon - V_R - V_C = 0$

V_R, diferencia de potencial en le resistencia = *IR*

V_C, diferencia de potencial en el condensador = $\dfrac{q}{C}$,

llamando *q* a la carga del condensador e *I* a la corriente en cierto instante t.

De aquí

$$\varepsilon - IR - \frac{q}{C} = 0$$

Como $I = \dfrac{dq}{dt}$, podemos escribir

$$\varepsilon - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

o $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{RC}q - \dfrac{\varepsilon}{R} = 0$

Resolviendo la ecuación para las condiciones iniciales, para $t = 0$, $q = 0$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - \varepsilon C)$$

$$\frac{dq}{(q - \varepsilon C)} = -\frac{1}{RC}dt$$

integrando

$$\int_0^q \frac{dq}{(q - \varepsilon C)} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln(q - \varepsilon C)\Big|_0^q = -\frac{1}{RC}t\Big|_0^t$$

$$\ln\frac{(q - \varepsilon C)}{-\varepsilon C} = -\frac{1}{RC}t$$

$$\frac{(q - \varepsilon C)}{-\varepsilon C} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

Finalmente

$$q = \varepsilon C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

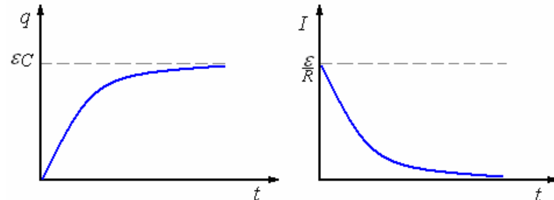
Para $t = \infty$, tenemos $q = \varepsilon C = Q_0$

La variación de la corriente es

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

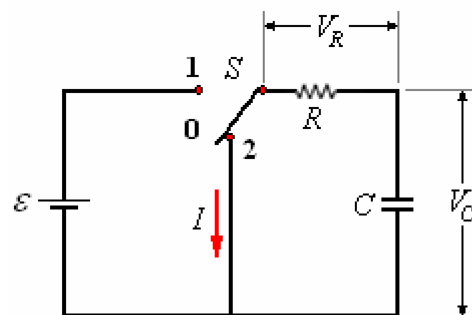
Para $t = 0$, $I = \dfrac{\varepsilon}{R}$ y para $t = \infty$, $I = 0$

La figura siguiente muestra los diagramas *q* versus *t* e *I* versus *t* durante le carga



Descarga.
Una vez que ha pasado un tiempo igual a varias veces el valor del producto *RC* conocido como constante de tiempo del circuito se ruede considerar que el condensador está con su carga total $Q_0 = \varepsilon C$.

Pasamos la llave a la posición 2 y obtenemos el circuito mostrado a continuación.



En este caso en el instante $t = 0$, la carga en el condensador es $q = Q_0$.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff

$$V_R + V_C = 0 \Rightarrow IR + \frac{q}{C} = 0$$

Como $I = \dfrac{dq}{dt}$, escribimos $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{RC}q = 0$

Resolviendo la ecuación para las condiciones iniciales

$t = 0$, $q = Q_0$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

Integrando

$$\int_0^2 \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln q\Big|_0^{Q_0} = -\frac{1}{RC}t\Big|_0^t$$

$$\ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{1}{RC}t$$

$$\frac{q}{Q_0} = e^{-t/RC}$$

Finalmente

$$q = Q_0 e^{-t/RC} = \varepsilon C e^{-t/RC}$$

para $t = 0$, tenemos $q = Q_0$

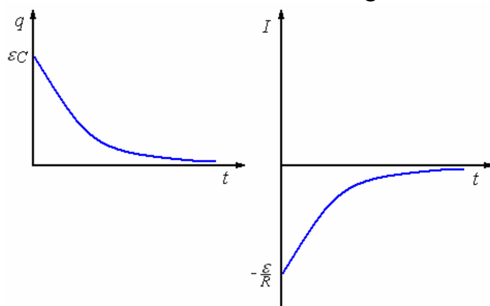
La variación de la corriente es

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

Para $t = 0$, $I = -\frac{\varepsilon}{R}$ y para $t = \infty$, $I = 0$

La corriente es en sentido contrario a la corriente durante la carga.

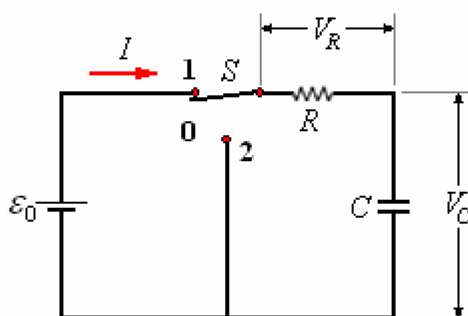
La figura a continuación muestra los diagramas q versus t e I versus t durante la descarga.



Ejemplo 34. Halle la ecuación para la carga de un condensador conectado en serie con una resistencia R y una fuente continua ε_0.

Solución.

En el instante $t = 0$ ponemos la llave S en la posición 1; empieza e fluir una corriente I.



Aplicando la segunda ley da Kirchhoff en el circuito de le figura anterior

$$\varepsilon_0 - V_R - V_C = 0$$

V_R, diferencia de potencial en le resistencia = IR

V_C, diferencia de potencial en el condensador = $\frac{q}{C}$,

llamando q a la carga del condensador e I a la corriente en cierto instante t.

De aquí

$$\varepsilon_0 - IR - \frac{q}{C} = 0$$

Como $I = \frac{dq}{dt}$, podemos escribir

$$\varepsilon_0 - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

o $$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q - \frac{\varepsilon_0}{R} = 0$$

Resolviendo la ecuación para las condiciones iniciales, para $t = 0$, $q = 0$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - \varepsilon_0 C)$$

$$\frac{dq}{(q - \varepsilon_0 C)} = -\frac{1}{RC} dt$$

integrando

$$\int_0^q \frac{dq}{(q - \varepsilon_0 C)} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln(q - \varepsilon_0 C)\Big|_0^q = -\frac{1}{RC} t\Big|_0^t$$

$$\ln\frac{(q - \varepsilon_0 C)}{-\varepsilon C} = -\frac{1}{RC} t$$

$$\frac{(q - \varepsilon_0 C)}{-\varepsilon_0 C} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

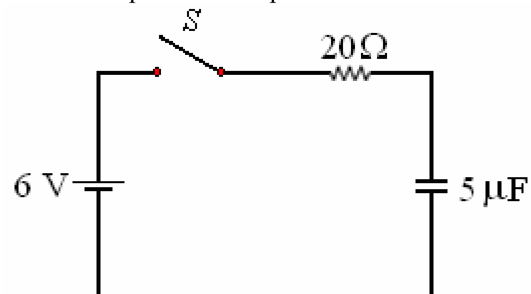
Finalmente

$$q = \varepsilon_0 C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Ejemplo 35. En el circuito de la figura, estando el condensador descargado, se cierra la llave, calcular:

a) El tiempo para el cual el condensador almacene la mitad de la carga.

b) La diferencia de potencial en el Condensador y en la resistencia para ese tiempo.



Solución.

a) La carga total del condensador sería Q_0, la mitad de la carga $Q_0/2$.

La expresión para la carga del condensador es

$$q = Q_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Si para el tiempo $t_{1/2}$, $q = \frac{Q_0}{2}$ $\Rightarrow$

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0\left(1 - e^{-t_{1/2}/RC}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-t_{1/2}/RC} \Rightarrow$$

$$e^{-t_{1/2}/RC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t_{1/2}}{RC} = \ln 2 \Rightarrow$$

$t_{1/2} = 0{,}692RC$ = 0,692 x 20 x 5 x 10^6 = 0,692x10^{-4} s.

b) La diferencia de potencial en el condensador es

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon C}{C}\left(1 - e^{-t_{1/2}/RC}\right) = \varepsilon\left(1 - e^{-t_{1/2}/RC}\right) =$$

$$\varepsilon\left(1 - e^{-RC\ln 2/RC}\right) = 6\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3 \text{ V.}$$

La diferencia de potencial en la resistencia es

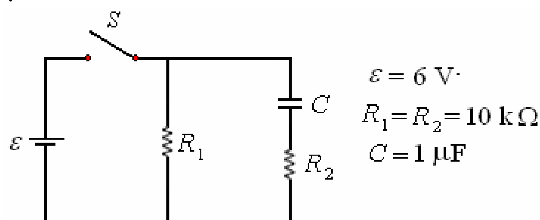
$$V_R = IR = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t_{1/2}/RC}R = \varepsilon e^{-t_{1/2}/RC}$$

Para $t_{1/2} = 0{,}692\times 10^{-4} = RC\ln 2$

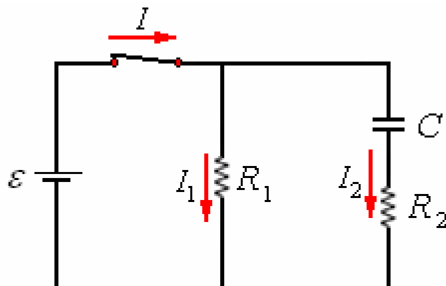
$$V_R = IR = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t_{1/2}/RC}R = \varepsilon e^{-t_{1/2}/RC}$$

$$= \varepsilon e^{-RC\ln 2/RC} = \frac{\varepsilon}{2} = 3 \text{ V.}$$

Ejemplo 36. En el circuito de la figura, estando el condensador descargado, se cierra la llave.
a) ¿Cuál es la corriente suministrada por le fem en el momento que se cierra la llave y cuál después de largo tiempo?
b) Después de un tiempo largo *t'* se abre la llave. ¿Cuánto tiempo tarda en disminuir la carga del condensador en un 90% con relación a la que tenía en *t'*?



Solución.
Cuando se cierra la llave circula la corriente tal como se muestra a continuación.



Por le primera ley de Kirchhoff

$I = I_1 + I_2$ (1)

Por le segunda ley de Kirchhoff

$\varepsilon - I_1R_1 = 0$ (2)

y $\varepsilon - I_2R_2 - \dfrac{q}{C} = 0$ (3)

De (2) obtenemos

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

Trabajando con (3)

$$I_2R_2 + \frac{q}{C} - \varepsilon = 0,\ I_2 = \frac{dq}{dt}$$

Luego $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{R_2C}q - \dfrac{\varepsilon}{R_2} = 0$

Cuya solución es

$$q = \varepsilon C\left(1 - e^{-t/R_2C}\right)$$

y la corriente es

$$I_2 = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R_2}e^{-t/R_2C}$$

Reemplazando las expresiones de I_1 e I_2 en (1)

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2}e^{-t/RC} \Rightarrow$$

$$I = \varepsilon\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}e^{-t/RC}\right)$$

Esta expresión corresponde a la corriente.
En el instante en que se cierra la llave, $t = 0$.

$$I = \varepsilon\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \varepsilon\frac{(R_1 + R_2)}{R_1R_2}$$

Con los valores

$$I = 6\frac{\left(10\times 10^3 + 10\times 10^3\right)}{10\times 10^3 \times 10\times 10^3} = 12 \text{ x } 10^{-4} \text{ A}$$

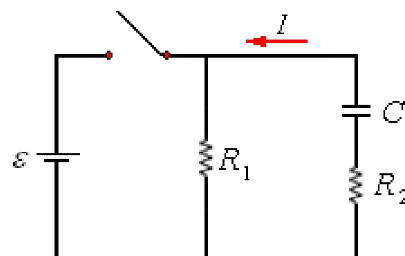
Mucho tiempo después, $t = \infty$.

$$I = \varepsilon\left(\frac{1}{R_1}\right) = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

Con los valores

$$I = \frac{6}{10\times 10^3} = 6 \text{ x } 10^{-4} \text{ A}$$

b) Después de un tiempo largo se abre la llave. En ese instante la carga del condensador es Q_0, y el circuito queda como se muestra a continuación.



Aplicando la segunda ley de Kirchhoff

$$IR_1 + IR_2 + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow I(R_1 + R_2) + \frac{q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow I + \frac{1}{(R_1 + R_2)}q = 0$$

Con $I = \frac{dq}{dt}$:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2)}q = 0$$

Cuya solución es

$$q = Q_0 e^{-t/(R_1+R_2)C}$$

Cuando la carga disminuye en un 90% queda el 10% de la Carga o sea, $q = \frac{Q_0}{10}$.

$$\frac{Q_0}{10} = Q_0 e^{-t/(R_1+R_2)C} \Rightarrow t = (R_1 + R_2)C \ln 10$$

Poniendo valores

$$t = (10\times 10^3 + 10\times 10^3)10^{-6}(2{,}3)$$

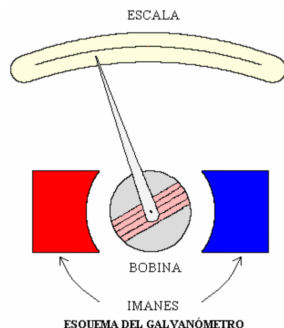
$= 4{,}6 \text{ x } 10^{-2}$ s.

INSTRUMENTOS Y DISPOSITIVOS DE MEDICION

Amperímetros y Voltímetros.

Los dispositivos que miden, la corriente, la diferencia de potencial en un circuito son el amperímetro y el voltímetro, respectivamente.

La parte principal de estos instrumentos es un **Galvanómetro**, que es un aparato que sirve para detectar el paso de pequeñas corrientes. El tipo mas común es el Galvanómetro de D'Ansorval, funciona basado en el principio de que una bobine por la cual circula corriente y que está en el interior de un campo magnético experimenta la acción de un torque proporcional al paso de la corriente de tal modo que la lectura en la escala es proporcional a la corriente que pasa por él.



ESQUEMA DEL GALVANÓMETRO

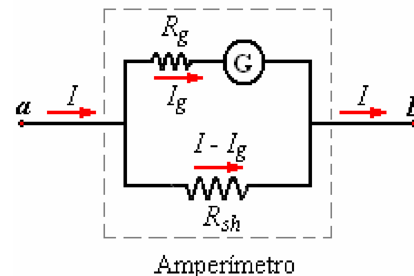
Los parámetros mas importantes que se deben conocer son la resistencia del galvanómetro (R_g) y la corriente que produce le máxima desviación en la aguja del galvanómetro (I_g), un ejemplo típico de valores es una resistencia $R_g = 20\Omega$ y una desviación máxima para una corriente de 1 miliampere (I_g = 1 mA).

Este instrumento conectado en la forma conveniente con una resistencia de determinado valor y montado en una caja con solo los terminales y la escala visibles viene a ser un amperímetro o un voltímetro.

Ejemplo 37. Con el galvanómetro, proyectar un amperímetro de 0 a 1 Ampere.

Solución.

Para tener un amperímetro de 0 a lA es necesario que el galvanómetro marque una desviación máxima de 1 A. Como esto sucede para una corriente I_g = 1 mA, es preciso hacer un desvío a la corriente como se muestra en la siguiente figura.



Amperímetro

Esto se logra conectando una resistencia en paralelo llamado shunt (R_{sh}), cuyo valor se determina como sigue:

La diferencia de potencial entre *a* y *b*, es

$$V_{ab} = I_g R_g = (I - I_g)R_{sh} \Rightarrow$$

$$R_{sh} = R_g \frac{I_g}{(I - I_g)}$$

con los datos

$$R_{sh} = 20\frac{10^{-3}}{(1 - 10^{-3})} = 0{,}020002\Omega$$

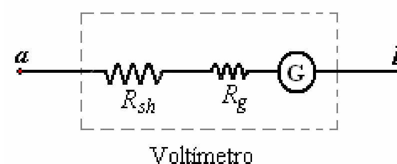
Se debe de conectar en paralelo al galvanómetro una resistencia de $0{,}020002\Omega$ y se tendrá un amperímetro 0 - 1 A entre los terminales *a* y *b*.

Un amperímetro ideal debe tener una resistencia cero, ya que se conecta en serie al circuito que se quiere medir.

Ejemplo 38. Con el mismo galvanómetro proyectar un voltímetro de 0 a 6 Voltios.

Solución.

Para tener un voltímetro de 0 a 6V es necesario que el galvanómetro marque a desviación máxima 6 Voltios, como esto sucede cuando pasa una corriente 1 mA, es preciso aumentar la resistencia de éste, esto se logra mediante una resistencia en serie, como se muestra en la figura a continuación.



Voltímetro

La diferencia de potencial entre *a* y *b*, es

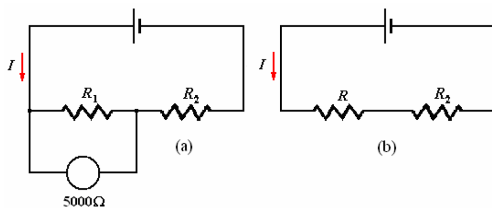
$$V_{ab} = (R_{sh} + R_g)I_g \Rightarrow R_{sh} = \frac{V_{ab}}{I_g} - R_g$$

con los datos

$$R_{sh} = \frac{6}{10^{-3}} - 20 = 5980\Omega$$

Se debe conectar en serie al galvanómetro una resistencia d e 5980 Ω y se tendría un voltímetro 0 – 6 V entre los terminales *a* y *b*.
Un voltímetro ideal debe tener una resistencia infinita ya que se conecta en paralelo al circuito que se quiere medir.

Ejemplo 39. Un banco de las pilas que tienen una fuerza electromotriz total de 12 V y una resistencia interna insignificante está conectado en serie con dos resistencias. Un voltímetro de resistencia 5000 Ω se conecta alternadamente a través de las resistencias, y da las medidas 4 V y 6 V, respectivamente. ¿Cuáles son los valores de las resistencias?
Solución.



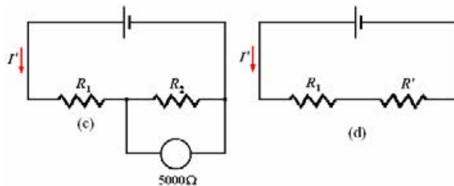
El voltímetro está conectado a través de R_1 como en el diagrama (a), y es equivalente al circuito mostrado en el diagrama (b), donde

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{5000} \Rightarrow R = \frac{5000R_1}{5000 + R_1}$$

Puesto que 4 V es la caída a través de la resistencia *R* y 8 V a través de la resistencia R_2, tenemos:

$4V = IR$ y $8V = IR_2$.

Luego $R = \dfrac{5000R_1}{5000 + R_1} = \dfrac{R_2}{2}$



Similarmente, de los diagramas (c) y (d), muestran la segunda conexión del voltímetro y del circuito equivalente, tenemos

$R' = \dfrac{5000R_2}{5000 + R_2}$ y $6V = IR_1 = I'R'$

Luego $R' = \dfrac{5000R_2}{5000 + R_2} = R_1$,

Por lo tanto, de las dos ecuaciones obtenidas, tenemos

$10000R_1 = 5000R_2 + R_1R_2$ y

$5000R_2 = 5000R_1 + R_1R_2$

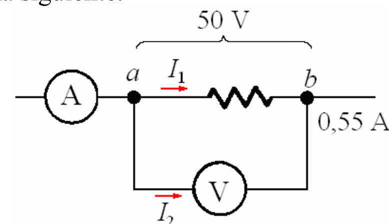
Restando estas ecuaciones, obtenemos

$$15000R_1 = 10000R_2 \Rightarrow R_1 = \frac{2}{3}R_2$$

Substituyendo nuevamente dentro de las ecuaciones, obtenemos

$R_1 = \dfrac{5000}{3} = 1667\Omega$ y $R_2 = \dfrac{5000}{2} = 2500\Omega$

Ejemplo 40. El valor de una resistencia se mide usando un voltímetro y un amperímetro. Cuando el voltímetro se conecta directamente a través de la resistencia, las lecturas obtenidas son 50 V y 0,55 A. Cuando el voltímetro se conectado a través del amperímetro y de la resistencia, las lecturas son 54,3 V y 0,54 A. La resistencia del voltímetro es 1000 Ω. Encuentre el valor de la resistencia y la resistencia del amperímetro.
Solución.
Sea el valor de la resistencia *R* y la resistencia del amperímetro *r*. La primera conexión se muestra en el diagrama siguiente.



Por la primera ley de Kirchhoff,

$I_1 + I_2 = 0{,}55\text{A}$.

Por la segunda ley de Kirchhoff,

$V_{ab} = I_1R = 1000I_2 = 50\text{V} \Rightarrow$

$I_2 = \dfrac{50}{1000} = \dfrac{1}{20}\text{A}$

e $I_1 = (0{,}55 - 0{,}05)\text{A} = 0{,}5\text{A} \Rightarrow$

$R = \dfrac{50\text{V}}{20\text{A}} = 100\Omega$

El segundo método de conexión se demuestra en

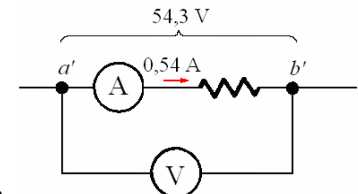
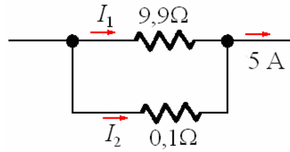


diagrama siguiente.
Aquí 54,3 V = 0,54 A x $(R + r)$.

Luego $r = \dfrac{51{,}3\text{V}}{o{,}54\text{A}} - R = 100{,}56 - 100 = 0{,}56\Omega$

Ejemplo 41. Un galvanómetro cuya resistencia es 9,9 Ω se le coloca una resistencia shunt de 0,1 Ω, cuando se utiliza como amperímetro con la desviación a escala completa de 5 A. ¿Cuál es la corriente del galvanómetro que lleva en la desviación máxima? ¿Qué resistencia se debe utilizar y cómo debe ser conectada si el galvanómetro va a ser utilizado como voltímetro con la desviación a escala completa de 50 V?
Solución.

Cuando el galvanómetro se utiliza como amperímetro debe conectarse tal como se muestra en el siguiente diagrama.



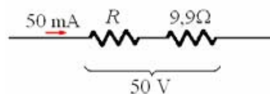
Por la primera ley de Kirchhoff,
$I_1 + I_2 = 5\text{A}$
Por la segunda ley de Kirchhoff,

$$-9{,}9I_1 + 0{,}1I_2 = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{99} \Rightarrow$$

$$\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{1}{100}$$

Luego $I_1 = \frac{5\text{A}}{100} = 50\text{ mA}$.

Cuando el galvanómetro se utiliza como voltímetro debe tener una resistencia en serie con él, como se muestra en el diagrama siguiente.

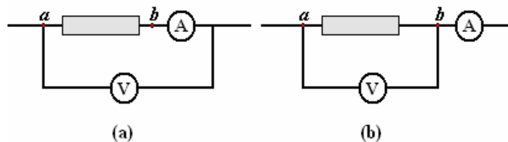


En la desviación a escala completa 50 mA afluyen a través del galvanómetro, según lo calculado en la primera parte del problema. La caída de potencial a través del galvanómetro debe por lo tanto ser
$V = IR = (50 \times 10^{-3}\text{ A})(9{,}9\Omega) = 0{,}495\text{V}$.
Pero 50 V caen a través de R y del galvanómetro. Así 49,505 V es la caída en la resistencia en serie. Por lo tanto tiene un valor.

$$R = \frac{49{,}505\text{V}}{50 \times 10^{-3}\text{ A}} = 990{,}1\Omega$$

MEDICION DE POTENCIAS

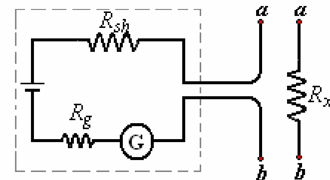
Como $P = V_{ab}I$ y $R = \frac{V_{ab}}{I}$, es necesario hacer la medición de V_{ab} e I, para esto hay dos formas posibles de conectar el voltímetro y el amperímetro como se muestra en le figura siguiente.



Forma a), en esta forma el voltímetro incluye la diferencia de potencial en el amperímetro, la que si es pequeña (Resistencia de amperímetro muy baja) no necesitaría corrección.
Forma b) en esta forma el amperímetro incluye la corriente que pasa por el voltímetro, si la resistencia del voltímetro es muy alta la corriente debe ser muy pequeña y no necesitaría corrección.

MEDICION DE RESISTENCIAS

Ohmímetro. Es un instrumento que sirve para medir resistencias rápidamente, consta de una pila y una resistencia en serie R_{sh} como se muestra en la figura a continuación.



El valor de R_{sh} está dado de tal manera que el galvanómetro marque desviación máxima al unirse a y b, lo que correspondería a una resistencia cero.
Sea R_x la resistencia a medir, se conecta a los terminales a y b y la ecuación del circuito es

$$\varepsilon - IR_{sh} - IR_x - IR_g = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_x + R_{sh} + R_g}$$

Como el valor de I depende de R_x y no tienen una relación lineal y además depende de la constancia de ε, este instrumento no es de alta precisión pero es de gran utilidad dada la rapidez de las lecturas.

Ejemplo 42. Con el galvanómetro de ejemplos anteriores proyectar un ohmímetro.
Solución.
Usemos el galvanómetro con una pila común de 1,5V. La deflexión máxima debe de producirse con $R_x = 0$ o sea

$$I = \frac{\varepsilon}{R_x + R_g}$$

Con los datos

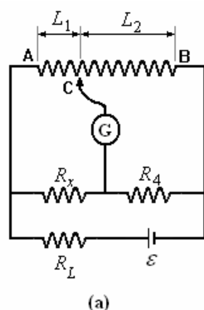
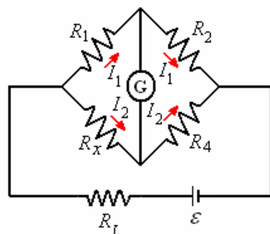
$$10^{-3} = \frac{1{,}5}{R_{sh} + 20}$$

De donde

$$R_{sh} = 1480\Omega$$

El galvanómetro hay que conectarlo en serie a una pila de 1,5 Voltios y a una resistencia de 1480Ω, luego proceder a su calibración.

Puente de Wheatstone. Usando el circuito conocido como Puente de Wheatstone se pueda medir resistencias con exactitud. La figura (a) muestra un esquema de este dispositivo.

Consiste de un alambre AB de alta resistencia y longitud 1 metro, un galvanómetro G con un terminal de posición variable C, una resistencia conocida *R*, una pila ε y una resistencia R_L limitadora de corriente. La figura (b) muestra la distribuci6n de las corrientes cuando se ha logrado que no haya paso de corriente a través de l mediante la variación de la posición C. Bajo estas condiciones tenemos:

$I_1R_1 = I_2R_x$ y $I_1R_2 = I_2R_4$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_4} \Rightarrow R_x = R_4\frac{R_1}{R_2}$$

Es aconsejable que el valor de sea del orden del valor de la resistencia por conocer.

Por otro lado, siendo uniforme el alambre que se usa (mismo material e igual sección).

$R_1 = \eta\dfrac{L_1}{A}$ y $R_2 = \eta\dfrac{L_2}{A}$

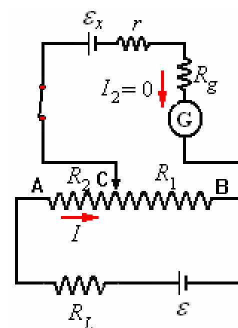
Tenemos que

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

De aquí

$$R_x = R_4\frac{L_1}{L_2}$$

Potenciómetro. Este dispositivo se usa para medir la fuerza electromotriz de un generador sin que pase corriente por él, La figura siguiente muestra un esquema de este dispositivo.



Consiste de un alambre de alta resistencia AB, un galvanómetro con resistencia interna R_g, una fuerza electromotriz ε, una resistencia limitadora R_2, una fuerza electromotriz patrón ε_p y por supuesto la fuerza electromotriz por conocer ε_x con resistencia interna r_i.

Se mueve el terminal variable hasta que el galvanómetro marque cero $(I_2 = 0)$.

La diferencia de potencial entre C y B es

$V_{CB} = IR_1$

También

$V_{CB} = I_2(R_g + r) - (-\varepsilon_x) = \varepsilon_x$

De tal manera que

$\varepsilon_x = IR_1$

Se repite la experiencia pero esta vez en lugar de la fem desconocida ε_x se pone la fem patrón ε_p, como I_2 es cero y el valor de $(R_1 + R_2)$ es constante el valor de I permanece igual, pero tenemos un nuevo R_1 que es R'_1.

$\varepsilon_p = IR'_1$

De estos resultados se ve que

$$\varepsilon_x = \varepsilon_p\frac{R_1}{R'_1}$$

Siendo R_1 y R'_1 el mismo alambre se puede decir que

$$\varepsilon_x = \varepsilon_p\frac{L_1}{L_2}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un alambre de cobre de sección transversal $3\text{x}10^{-6}$ m^2 conduce una corriente de 10 A. Hallar la velocidad media de los electrones en el alambre. Datos: carga del electrón $1{,}6\text{x}10^{-19}$ C. Peso atómico del cobre 63,5 g/mol, número de Avogadro $6{,}02\ 10^{23}$ átomos/mol, se supone que cada átomo de cobre contribuye con un electrón libre a la conducción.

2. La cantidad de carga (en C) que pasa a través de una superficie de área $2cm^2$ varía con el tiempo como $q = 4t^3 + 5t + 6$, donde t está en s.

a) ¿Cuál es la corriente instantánea a través de la superficie en $t = 1s$?

b) ¿Cuál es el valor de la densidad de corriente?

3. La corriente I (en Amperes) en un conductor depende del tiempo como $I = 2t^2 - 3t + 7$, donde

t está en s ¿Qué cantidad de carga pasa a través de una sección del conductor durante el intervalo comprendido entre $t = 2s$ y $t = 4s$?

4. Corriente en la atmósfera: En la atmósfera inferior de la Tierra existen iones negativos y positivos, creados por elementos radioactivos en el suelo y en los rayos cósmicos del espacio. En cierta región, la intensidad del campo eléctrico atmosférico es de 120 V/m dirigido verticalmente hacia abajo. Debido a este campo, los iones con una sola carga *e* positiva, que son 620 por cm^3, se dirigen hacia abajo con velocidad 1,7 cm/s, y los iones con una sola carga negativa, -*e*, 550 por cm^3, se dirigen hacia arriba con velocidad 1,7 cm/s.
a) ¿Cuál es la densidad de carga de los iones positivos en el aire?
¿Cuál es la densidad de carga de los iones positivos en el aire?
b) ¿Cuál es la densidad de corriente en el aire?
c) ¿Cuál es la resistividad del aire según los datos dados?

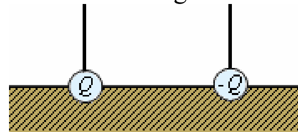
5. Un cable cilíndrico de Plata de 1 mm^2 de sección y 5m de largo, conduce una corriente de 0,5A.
Determinar:
a) La resistencia del conductor.
b) La diferencia de potencial ΔV entre los extremos del conductor.
c) El campo eléctrico E (uniforme) que determina ΔV en el conductor. (Resistividad de la Plata $\rho = 1{,}59 \times 10^{-8}\Omega\text{m}$).

6. Se tiene un cable de Nicromio de radio 0,321 mm.
a) ¿Cuál es la longitud de este si tiene una resistencia de 28 Ω?
b) ¿Cuál es la ΔV entre los extremos de este cable si conduce una corriente de 4,3 A?
c) Calcular la densidad de corriente y el campo eléctrico en el cable en el caso anterior.
(Resistividad del Nicromio $\rho = 1{,}5 \times 10^{-6}\Omega\text{m}$).

7. Al considerar la energía eléctrica en un circuito se suele despreciar la energía cinética de las cargas móviles. En este problema vamos a calcular esta energía cinética para un alambre de cobre de longitud 1 m y diámetro 1 mm, que conduce una corriente de 1 A.
Los electrones móviles tienen un movimiento aleatorio térmico de alta velocidad más una lenta deriva debido a la diferencia de potencial entre los extremos del alambre que da al electrón una velocidad promedio $\mathbf{v}_d$. Los electrones tienen una importante energía cinética media por el movimiento térmico. La deriva de un electrón debido a la diferencia de potencial agrega una cantidad ½ $m_e v_d^2$ a su energía cinética por encima de su energía térmica, donde m_e es la masa del electrón.

a) ¿Cuál es la velocidad de arrastre v_d en nuestro alambre cuando la corriente es de 1 A?
Datos: densidad del cobre: 8,95 g/cm^3; masa molar del cobre: 63,5 g/mol; número promedio de electrones móviles por átomo de cobre: 1,3.
b) ¿Cuál es la energía cinética (por encima de su energía térmica) de los electrones en el alambre?
c) Considerar los electrones que se encuentran en el primer mm del alambre en un instante inicial. ¿Cuánta energía potencial eléctrica pierden estos electrones viajando hasta el final del alambre? La resistividad de cobre es ρ = 1,7 × 10^{-8} Ω m.

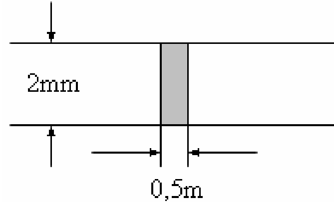
8. En la «prospección eléctrica» los geólogos ponen dos electrodos en la superficie de la Tierra y miden la resistencia entre ellos, la cuál depende de los materiales que hay entre los electrodos y por tanto brinda información sobre estos. En este problema vamos a tratar el caso más sencillo posible, en el cual que la Tierra consiste, hasta una profundidad debajo de casi todas las corrientes, de una mezcla de arena con agua con conductividad de la mezcla σ_0 y constante dieléctrica $k = 1$, y la superficie es un plano infinito. Supongamos además que los electrodos son esferas de radio *r* separadas por una distancia $R >> r$. Estas esferas están enterradas hasta sus ecuadores en el suelo como muestra el diagrama.



a) Si los electrodos esféricos tienen carga Q y $-Q$ respectivamente y no hay acumulaciones de carga presente fuera de los electrodos ¿cuál es la diferencia de potencial V entre los electrodos?
b) Usando la Ley de Ohm microscópica y la Ley de Gauss, ¿Cuál es la corriente total que entra en el electrodo negativo? (No olviden que I es el flujo de la densidad de corriente J: $\int_S \vec{J}\cdot\hat{n}dA = I_S$ es la corriente a través la superficie S en el sentido de la normal $\hat{n}$.)
c) ¿Cuál es la resistencia entre los electrodos? Si los electrodos están lejos uno del otro, la resistencia se acerca a un valor fijo independiente de la separación. Es como si cada electrodo fuera conectado por un alambre de resistencia fija R_{tierra} a un conductor perfecto (de resistencia cero) común. Esto es el motivo por lo cual se puede usar la Tierra como un cero de potencial: un conductor perfecto mantiene un potencial uniforme bajo todas circunstancias. Como se vio en c) esto funciona aun si la resistividad de la Tierra no es muy baja. R_{tierra} se llama la "resistencia de conexión a Tierra".
d) ¿Cuál es la resistencia de conexión a Tierra de nuestros electrodos esféricos enterrados hasta su mitad? ¿Cómo se puede disminuir esta resistencia?

9. Una resistencia real no tiene solo resistencia sino también una capacidad. De hecho son las cargas

acumuladas en la resistencia que producen el campo eléctrico, y por tanto la diferencia de potencial, a través de esta. Supongamos que una cierta resistencia consiste en un disco de carbón de grosor de radio 1 mm y 0,5 mm de altura. Cada una de las caras esta unida con un alambre de radio 1mm de un metal de resistividad despreciable (ver diagrama).



a) ¿Cuál es la resistencia del resistor? La resistividad de carbón es de 3×10^{-5} Ωm.
b) Supongamos que una corriente de 1A pasa por el conjunto, ¿cual es la diferencia de potencial entre los bornes del resistor? Como la resistividad de los alambres es despreciable el campo eléctrico también es despreciable en estos, y el potencial prácticamente constante. Por lo tanto el potencial es constante sobre cada borne.
c) ¿Cuál es el campo eléctrico en la resistencia? (El campo eléctrico es uniforme).
d) Según la Ley de Gauss ¿cuál es la carga eléctrica en las caras del resistor? La constante dieléctrica del carbón es $k = 2{,}7$, entonces la cantidad de carga libre (no de polarización) es mayor que la carga neta sobre cada borne. ¿Cuánta carga libre hay sobre las caras de la resistencia?
e) Se quiere modelar esta resistencia real con un dispositivo con dos bornes hecho de una resistencia ideal (que tiene resistencia pero no acumula carga alguna en su interior) y un condensador ideal (que se deja cargar pero que no deja pasar corriente alguna). Proponga un arreglo de estos elementos ideales que modela (es decir, que se comporta de manera similar a) el resistencia real.
f) En términos de la corriente y el voltaje a través del resistor real (las cantidades eléctricas más fácilmente medíbles) ¿se les ocurre alguna forma en cómo se manifiesta el hecho de que el resistencia real funciona también como condensador?

10. Un alambre de cobre de resistividad ρ =1,7 10^{-8} Ω m, tiene una longitud de 24 cm y una sección circular de diámetro 2 mm. Calcular la resistencia del alambre

11. Un anillo de radio R tiene una carga por unidad de longitud λ . El anillo gira con una velocidad angular ω alrededor de su eje. Hallar la expresión que nos da le corriente en un punto del anillo.

12. A una esfera metálica se le proporciona carga por medio de un alambre conductor de radio r, de acuerdo con la expresión $q = q_0 e^{-at}$.
a) Encuentre la expresión para la corriente eléctrica. .
b) Calcule la densidad de corriente para el tiempo t.

13. Un cable coaxial consiste en un cilindro metálico hueco de radios interior a y exterior b, y conduce la corriente en dirección radial desde el interior hacia el exterior. Hallar la resistencia del cable.

14. Si existe una caída IR de 1,5 V en un conductor de cobre de 20 metros de longitud, hallar:
a) El campo eléctrico en el conductor.
b) La densidad de la corriente en el conductor.
c) La corriente en el conductor si la sección transversal es igual a 2 mm^2.

15. La región comprendida entre dos esferas concéntricas de radios a y b esta llena de un material conductor de conductividad g. La esfera interior se mantiene a un potencial V_a y la exterior a un potencial V_b de tal modo que existe una corriente radial hacia afuera, encontrar:
a) La resistencia entre las esferas.
b) La intensidad de corriente.
e) La densidad de corriente.
d) La intensidad del campo eléctrico en un punto situado entre a y b.

16. La región comprendida entre dos cilindros conducto res de radio interior a y exterior b esta llene de una resistencia de resistividad η . El cilindro interior esta a un potencial V_a y el exterior a un potencial V_b de modo que la corriente se dirige radialmente hacia afuera, encontrar:
a) La resistencia correspondiente a una longitud L.
b) La intensidad del campo eléctrico entre los cilindros.

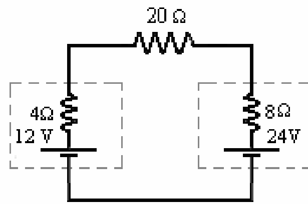
17. La resistividad de cierto material varía con la temperatura de acuerdo n la expresi6n: $\eta = \eta_{20}\left(1 + 2t - t^2\right)$. ¿A qué temperatura tendrá un alambre de este mate rial la resistencia mínima?

18. Mientras una carga de 2 pasa por una cierta fem, el trabajo realizado sobre la carga por fuerzas no eléctricas es de 16 Joules. ¿Cuál es la fem de la fuente?

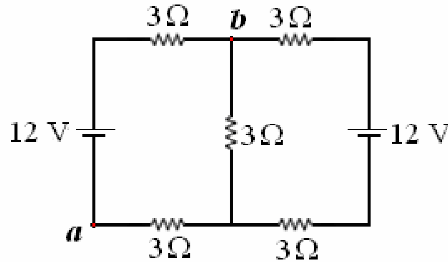
19. Una batería de 6 voltios suministre 30 amperes durante 3 segundos en el encendido de un motor de su automóvil. ¿Cuánta energía proporciona la batería?

20. Una refrigeradora conectada a 220 voltios funciona durante 150 horas cada mes.
a) Si la corriente requerida pera el funcionamiento es de l.6A. ¿Cuánta energía consume?
b) Comparar con el consumo de un receptor de televisión que requiere 1,2A a 220 voltios y funciona durante 90 horas al mes.

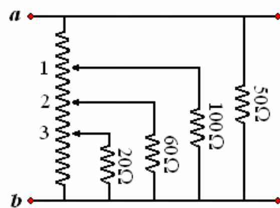
21. En el circuito simple de le figura. ¿Cuál es la potencia que suministra cada fuente?



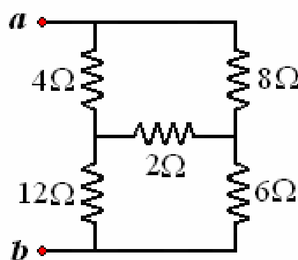
22. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* de la figura.



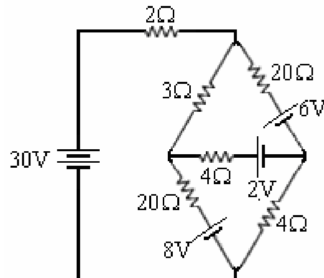
23. La resistencia larga entre *a* y *b* vale 32 Ω y está dividida en cuatro partes iguales por tres tomas de corriente.
a) ¿Cuál es la resistencia entre *a* y *b*?
b) Si la diferencia de potencial entre a y b es 220 voltios ¿cuál es la diferencia de potencial entre 2 y 3?



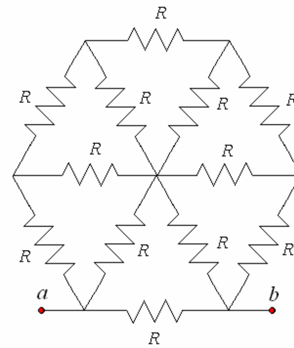
24. Hallar la resistencia equivalente entre los terminales *a* y *b*.



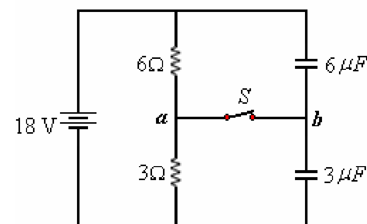
25. Encontrar la intensidad de corriente en cada una de las ramas del circuito de la figura.



26. ¿Cuál es la resistencia equivalente entre *a* y *b*?



27. En la figura. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* cuando la llave S está abierta?
b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre *a* y *b* cuando se cierra la llave, y cuánto cambia la carga de cada condensador?



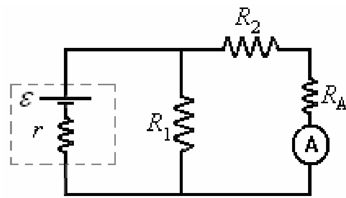
28. A un condensador de 0,l pF se le da una carga Q_0 . Después d 4 s se observa que su carga es Q_0 . ¿Cuál es la resistencia efectiva a través de este condensador?

29. Un conductor de capacidad 0,2 *pF* está aislado de tierra por medio de una placa de silicio de 2,5 mm de espesor y 5 cm^2 de área. ¿Cuál es la resistividad mínima del silicio si la razón de disminución de potencial no debe ser mayor que 0,1% por minuto?

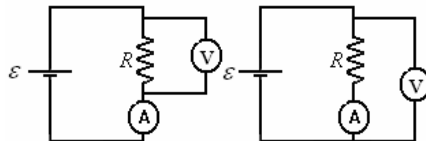
30. Un tubo de neón se conecta e través de un condensador de capacidad 25 μF el cual está siendo cargado continuamente a través de una resistencia de 0,5 MΩ de una fuente de 2500V. Un flash de duración despreciable descarga completamente al condensador cuando el potencial a través del tubo de neón alcanza 200V. ¿Cuántos flashes ocurren por minuto y cuánta energía se disipa en cada descarga?

31. Un galvanómetro cuya resistencia es 9,9 Ω se conecta con un-shunt de 0,1 Ω cuando se usa como amperímetro de 0 a 5A. ¿Cuál es la corriente de máxima deflexión?
¿Qué resistencia debe usarse pera tener un voltímetro de 0 a 50V?

32. En el circuito de la figura. ¿Cuál es la lectura del amperímetro?

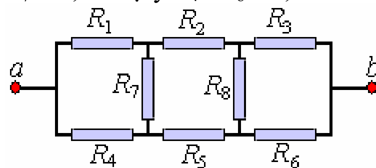


33. La figura muestra dos modos posibles para medir una resistencia incógnita.
La resistencia del amperímetro es 100 Ω veces la del amperímetro. El valor calculado de *R* se considera que es $R_c = \frac{V}{I}$, discutir en cuál de las formas se obtiene un mejor resultado



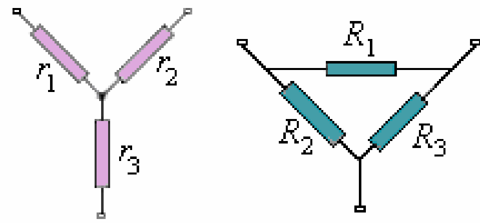
34. Se tiene un hilo conductor de 1 m de longitud y 0,5 mm de radio, cuya resistividad es 5×10^{-8} Ω m. Se aplica una diferencia de potencial entre sus extremos de 5 V. Calcule:
a) el campo eléctrico en el interior del conductor;
b) la densidad de corriente en el conductor;
c) la velocidad efectiva de desplazamiento de los portadores de carga.;

35. Hallar la resistencia entre los puntos *a* y *b* del circuito de la figura. $R_1 = R_5 = 1{,}00\ \Omega$, $R_2 = R_6 = 2{,}00\ \Omega$, $R_3 = R_7 = 3{,}00\ \Omega$ y $R_4 = R_8 = 4{,}00\ \Omega$ ..

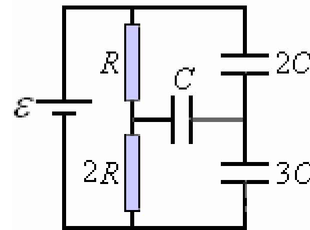


36. Para determinar el lugar de daño del aislamiento entre los conductores de una línea bifilar telefónica de longitud L = 4,0 km a un extremo de esta se coloca una fuente de fuerza electromotriz ε =15 V. Con esto resulta que si los extremos opuestos están separados, la corriente por la batería es I_1 = 1,0 A, y si se unen la corriente por la batería es I_2 = 1,8 A. La resistencia por unidad de longitud del conductor es λ = 1,25 Ω /km. Hallar el punto en que se encuentra el deterioro y la resistencia del aislamiento en dicho punto.
La resistencia de la batería se desprecia.

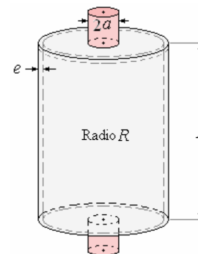
37. Encontrar la condición que deben satisfacer las resistencias R_1, R_2 y R_3, para que el arreglo de la figura sea equivalente eléctricamente al arreglo de la figura derecha conformado por las resistencias r_1, r_2 y r_3.



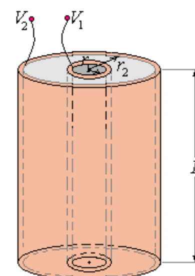
38. En el circuito de la figura, hallar la carga del condensador C después de que el circuito ha estado conectado por mucho tiempo. Despreciar la resistencia interna de la batería.



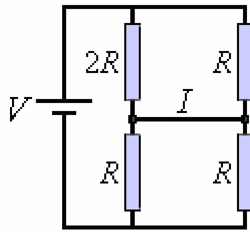
39. Considere un manto cilíndrico de largo *L*, radio medio *R* y espesor *e* (*R* >>*e*), con tapas en ambos extremos del mismo espesor *e*. El manto y las tapas están construidos de un material de conductividad *g*. En el centro de ambas tapas se han soldado electrodos circulares de radios *a* (*a* < *R*) de un metal de muy alta conductividad. Calcule la resistencia total entre ambos electrodos.



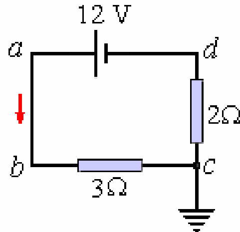
40. En la figura se muestran dos tubos cilíndricos de cobre de radios r_1 y r_2, el espacio entre ellos lleno de grafito. ¿Cuál es la resistencia entre los terminales? Indicación: Como la conductividad a temperatura ambiente del cobre es 10^5 mayor que la del grafito, suponga que cada tubo de cobre es una equipotencial.



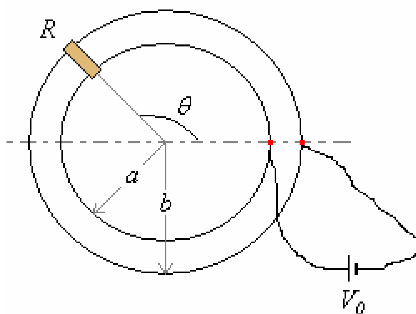
41. En el circuito de la figura, calcule la corriente *I* que circula por la rama central.



42. En el circuito de la figura la batería tiene una resistencia interna de 1 Ω. El punto *c* está conectado a tierra. Encuentre los potenciales en los puntos *b* y *d*.



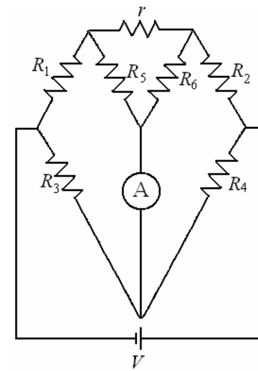
43. Considere un tren de juguete como se ilustra en la figura. Los rieles son circunferencias concéntricas de radios *a* y *b* respectivamente. Están conectados a una batería V_0. Suponga que los rieles tienen una resistencia por unidad de longitud λ. El tren a su vez se puede modelar como una resistencia *R*.
La posición del tren queda descrita por el ángulo θ de la figura.
a) Para un ángulo fijo encuentre el circuito equivalente de este sistema.
b) Para un ángulo fijo encuentre la corriente $I_{(\theta)}$ que circula por el tren (es decir, por la resistencia *R*).
c) ¿Para que posición angular la corriente es máxima? ¿Para que posición es mínima?



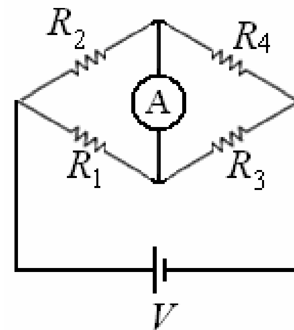
44. En el circuito de la figura, muestre que una condición de balance (es decir que no circule corriente por el amperímetro ideal) que es independiente del valor de *r* es:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_5}{R_6}$$

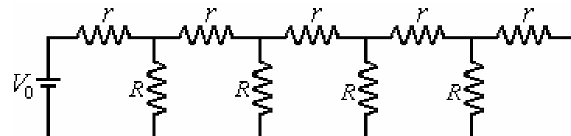
Este es el doble puente de Kelvin que se utiliza para medir resistencias pequeñas, del orden de 0,01 Ω.
La resistencia *r* representa una resistencia de contacto entre las dos resistencias R_1; R_2, y su valor no afecta el balance.



45. Se ubican tres resistencias R_1, R_2, R_3 cada una de 10 Ω. en tres de los brazos de un puente de Wheatstone y una cuarta resistencia R_4 es ajustada en el cuarto, de modo que el puente quede balanceado (es decir, no circula corriente por el amperímetro ideal de la figura). Luego se reemplaza la resistencia R_3 por una resistencia R_x y el balance se recupera poniendo en paralelo con R_4 una resistencia de 10,123 Ω. ¿Cuál es el valor de R_x?. Discuta las ventajas y desventajas de este método para medir resistencias cuando se requiere gran precisión.

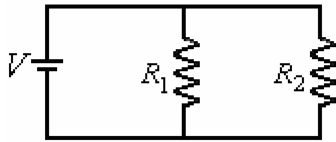


46. Una línea de transmisión consiste de un cable sostenido por postes. Si la resistencia del cable entre dos postes es *r* y la resistencia de fuga hacia tierra en cada poste es *R*, calcule la resistencia de la línea de transmisión.
Indicación: Considere que la tierra es un conductor perfecto.
Note que como la línea es muy larga, la resistencia no se altera al agregarle un poste y un segmento de cable más.

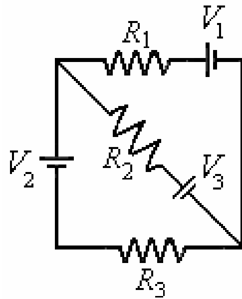


47. Un cubo tiene una resistencia *R* en cada una de sus aristas.
a) Calcule la resistencia entre dos vértices opuestos.
b) Calcule la resistencia entre dos vértices opuestos de una cara del cubo.

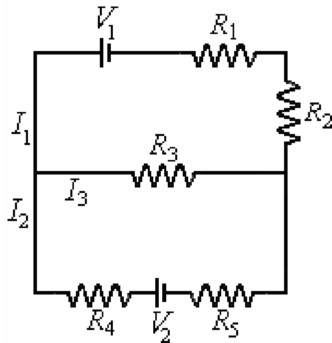
48. Demostrar que las corrientes en el circuito de la figura se distribuyen de modo que la pérdida de energía en forma de calor es mínima.



49. En el circuito de la figura, $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 4\,\Omega$, cada batería tiene una resistencia interna de $0{,}5\,\Omega$, $V_1 = 3$ V, $V_2 = 5$ V y $V_3 = 7$ V. Calcular las corrientes en las diferentes resistencias y los potenciales en las cuatro esquinas del cuadrado.



50. En el circuito de la figura, $R_3 = 8\,\Omega$, $R_4 = 1\,\Omega$ y $R_5 = 3\,\Omega$. Encuentre las corrientes I_1, I_2 e I_3.



51. Un foco de alumbrado de 0, 4 W se diseña para que trabaje con 2 V entre sus terminales. Una resistencia *R* se coloca en paralelo con la bombilla y la combinación se coloca en serie con una resistencia de 3 Ω y una batería de 3 V cuya resistencia interna es de 1/3 Ω. ¿Cuál deberá ser el valor de *R* si la lámpara ha de funcionar al voltaje diseñado?

52. La carga en un condensador de placas paralelas ha caído hasta el 95% de su valor original después de un día debido a las pérdidas a través del dieléctrico. Si la resistividad y la permitividad del dieléctrico son η y ε respectivamente, ¿cuál es la magnitud de $\eta\varepsilon$?

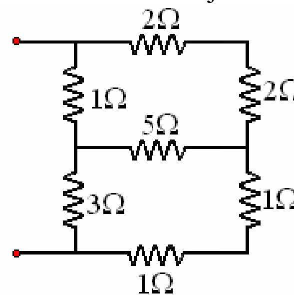
Respuesta. $1{,}68 \times 10^6\,\Omega\text{F}$

53. Una batería de fuerza electromotriz 4,5 V y resistencia interna 0,3 Ω está conectada en paralelo con una segunda batería de fuerza electromotriz 4,0V y resistencia interna 0,7 Ω. El sistema común proporciona la corriente para una resistencia externa de 10 Ω.

¿Cuál es la diferencia potencial a través de la resistencia externa y la corriente que atraviesa de cada batería?

Respuesta. 4,26 V; 0,978 A; - 0,372 A

54. Encuentre la resistencia equivalente de la red mostrada en el dibujo.



Respuesta. 2,27 Ω

CAPÍTULO 3. Campo magnético

INTRODUCCION

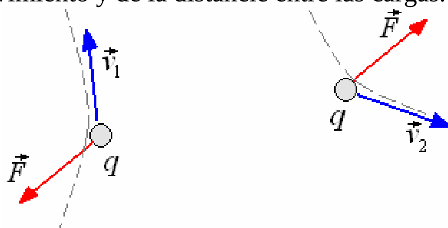
Otro campo que entra en el estudio de la electricidad y el magnetismo es el campo magnético. Los efectos de estos campos son conocidos desde tiempos antiguos. En la Grecia antigua era conocido que ciertas piedras procedentes de Magnesia (ahora denominadas magnetitas) atraían trocitos de hierro.



Magnetita

El descubrimiento de la propiedad de orientación de este material en sentido norte-sur, influyó profundamente en la navegación y exploración.

Aparte de esta aplicación el magnetismo tuvo poco uso y no fue explicado hasta cuando se inventó la pila voltaica. Le pila proporciona corrientes continuas del orden da amperios, con tales corrientes se descubrieron nuevos procesos une detrás de otro en rápida sucesión que relacionaron el magnetismo con la electricidad.
Como habíamos visto en la interacción de dos cargas eléctricas estática la existencia del campo eléctrico, cuando estas partículas cargadas están en movimiento aparece un cambio en el movimiento debido a una fuerza que no es mecánica ni electrostática, es la fuerza de interacción magnética y depende de las velocidades relativas de las partículas cargadas, de la carga de cada una, de la dirección relativa del movimiento y de la distancie entre las cargas.



En la figura anterior mostramos dos cargas en movimiento, estas experimentan fuerzas magnéticas $\vec{F}$. Una carga eléctrica en movimiento genera un campo magnético la otra carga eléctrica móvil sufre una fuerza debido a la influencia de dicho campo sobre ella. Este fenómeno tiene dos partes, primero la generación del campo magnético y segundo la influencia del campo magnético sobre cargas móviles. Por ahora solo nos ocuparemos de esta segunda parte.

DEFINICIÓN DE CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$

El campo magnético se define por sus efectos sobre una carga en movimiento. Supongamos una región del espacio que contiene varias fuentes magnéticas. Los experimentos que incluyen la observación de las trayectorias de las partículas cargadas que se desplazan por esa región demuestran que la fuerza que actúa sobre ellos tiene las características siguientes:

$\vec{F}$ es directamente proporcional a la carga (q)

$\vec{F}$ es directamente proporcional a la magnitud de la velocidad de la partícula (v)

$\vec{F}$ es perpendicular a $\vec{v}$ en toda la trayectoria de la partícula.

Debido a las propiedades experimentales mencionadas podemos definir el campo magnético que se asocia a las fuentes dadas mediante la relación

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

A $\vec{B}$ se le conoce también como:
Campo magnético vectorial
Inducción magnética
Densidad de flujo magnético
La magnitud de F está dada por $qvB\text{sen}\theta$,

siendo θ el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$.
El campo magnético B está dado por la relación

$$B = \frac{F}{qv}$$

En el sistema MKS, la unidad de B es

$$\frac{\text{N}}{\text{C}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N}}{\text{Am}}$$

A esta unidad se le conoce como tesla (T)
Otra denominación de esta unidad es

$$\frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

$$\text{T} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

También se usa el Gauss (G)

$$\text{G} = 10^{-4}\,\text{T}$$

Para tener una idea de la magnitud del Gauss daremos algunos ejemplos de campos magnéticos.

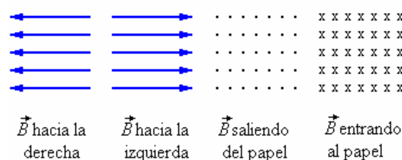
De la Tierra es del orden de 0,5 G
De un imán pequeño 100 G
De un imán grande 20000 G
De un acelerador de partículas 60000 G
Como la fuerza magnética sobre una partícula carga da se presenta además de la fuerza eléctrica con la formulación obtenida es posible escribir una expresión para la fuerza total experimentada por una partícula cargada. La fuerza electromagnética total sobre la partícula cargada es la suma vectorial de las fuerzas magnéticas y las fuerzas eléctricas, es decir,

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Esta ecuación es conocida como **la ley de Fuerza de Lorentz.**

EL FLUJO MAGNETICO

De la misma manera que en la teoría del campo eléctrico, asociaremos el campo magnético $\vec{B}$ a un flujo magnético; A las líneas del campo magnético se las llama líneas de inducción, una carga eléctrica moviéndose a lo largo de una línea de inducción experimenta una fuerza magnética igual a cero. Las líneas así definidas y trazadas en el espacio constituyen una representación del campo magnético. Cuando el campo tiene intensidad uniforme se representa por líneas rectas, uniformemente espaciadas, tal casa se muestra a continuación.



Si se construye un área S normal a la superficie, el flujo se define como:

$$\Phi_B = BS$$

Si el campo no es uniforme y la superficie no es uniforme, usaremos la expresión general

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

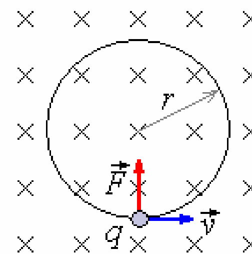
el sentido de $\hat{n}$ es hacia afuera para superficies cerradas.
El flujo neto a través de cualquier superficie es

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

El flujo magnético se mide en unidades de campo magnético por unidad de área o sea Weber (Wb). Se hará uso de ésta porte cuando discutamos la inducción electromagnética.

MOVIMIENTO DE UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO MAGNETICO

De la ecuación $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ se observa que una característica de la fuerza magnética que actúa sobre la partícula cargada es que siempre es perpendicular a la velocidad de la partícula. Cuando el campo magnético es uniforme y la velocidad inicial es perpendicular a $\vec{B}$, tanto la fuerza corno la veloci1ad quedan en un plano fijo perpendicular a $\vec{B}$. Como la fuerza es constante en magnitud y siempre perpendicular a $\vec{v}$ el movimiento es circular uniforme como se muestra a continuación.



Por la segunda ley de Newton

$$\sum F_r = ma_r = qvB$$

a_r es la aceleración centrípeta $\dfrac{v^2}{r}$

De aquí

$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$

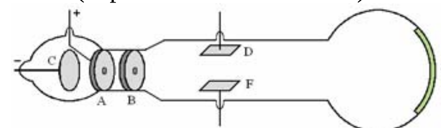
El radio es

$$r = \frac{mv}{qB}$$

La velocidad angular de la partícu1a $\omega = \dfrac{v}{r}$ es:

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

Ejemplo 1. Medida de la relación $\dfrac{q}{m}$ para electrones (experimento de Thomson)



La figura muestra el tubo de Thomson usado para la medición para la medición de $\dfrac{q}{m}$.
Los electrones proceden del cátodo C que c encuentra a una diferencia de potencial *V* con el ánodo A.
Los electrones pasan a través de las rendijas A y B con una velocidad que se calcula de la siguiente manera:
La carga *q* al moverse entra el cátodo y el ánodo que se encuentran a una diferencia de potencial ΔV gana una cantidad de energía igual al

producto $q\Delta V$, la que se convierte en energía cinética $E_K = \frac{1}{2}mv^2$, siendo *m* la masa de la carga y *v* la velocidad adquirida. De esto obtenemos la relación

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2$$

y de aquí $v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$

Cuando este haz de electrones ingresa en un campo magnético perpendicular forma una trayectoria circular cumpliéndose la relación

$\frac{mv}{r} = qB$, de donde

$$v = \frac{qBr}{m}$$

Igualando ambas expresiones para la velocidad:

$$\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \frac{qBr}{m}$$

Finalmente

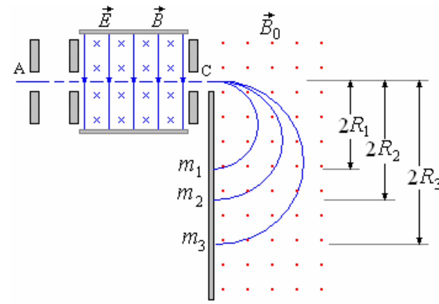
$$\frac{q}{m} = \frac{B^2 r^2}{2\Delta V}$$

Siendo las cantidades *B*, *r* y ΔV susceptibles de medición se encuentra la relación $\frac{q}{m}$ para el electrón

$$\frac{q}{m} = 1{,}76\times10^{11}\ \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

También puede utilizarse los efectos de campos magnéticos y eléctricos en la misma región. Si los campos y la velocidad son mutuamente perpendiculares entre sí y además se ajustan las magnitudes de los campos de tal forma que $qvB = qE$, tendremos que $v = \frac{E}{B}$. Esta medición puede combinarse con las otras a fin de obtener el valor de $\frac{q}{m}$.

Ejemplo 2. El espectrómetro de masas.
El espectrómetro de masas es un aparato que utiliza los principios anteriores para medir la masa de los isótopos. Mide la razón *q/m* de los iones, determinando la velocidad de estos y luego midiendo el radio de su órbita circular en el interior de un campo magnético uniforme



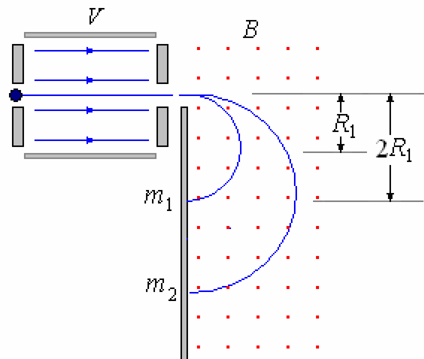
En la figura se muestran los elementos de un espectrómetro, la sección entre A y C actúa como se-lector de velocidades y pasan por la ranura C solo las partículas con velocidad común *v*.
Al salir de C estas partículas entran en una región en la que hay un campo magnético constante $\vec{B}_0$ perpendicular al plano de la figura, las partículas forman una trayectoria circular hasta que chocan con la pantalla o algún instrumento detector. La distancia a la que se detecta la partícula está dada por

$2R = \frac{2mv}{qB_0}$, por debajo e C

Como $v = \frac{E}{B} \Rightarrow R = m\left(\frac{E}{qBB_0}\right)$

Sendo conocido *q*, y pudiendo conocerse $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{B}_0$, es posible determinar la nasa *m* con la medición de *R*.

Ejemplo 3. Fuerzas sobre cargas eléctricas. Un ión de masa m_1 con carga eléctrica *q* se acelera desde el reposo por medio de una diferencia de potencial *V*. Luego el ión entra en una zona de campo magnético uniforme *B* perpendicular a su velocidad, por lo cual es desviado en una trayectoria semicircular de radio R_1.
Después de esta experiencia, un segundo ión e carga 2*q* y masa m_2 se acelera a través de la misma diferencia de potencial *V* y se le desvía mediante el mismo campo magnético *B* dando Como resultado una trayectoria semicircular de radio $R_2 = 2\ R_1$. ¿Cuál es la relación de las masas m_1 y m_2 de los iones?
Solución.



Para el ión 1:

$$qV = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \qquad (1),$$

$$q v_1 B = m_1 \frac{v_1^2}{R_1} \qquad (2)$$

Para el ión 2:

$$2qV = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad (3),$$

$$q v_2 B = m_2 \frac{v_2^2}{2R_1} \qquad (4)$$

Dividiendo (1): (3):

$$\frac{1}{2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_1^2}{v_2^2} \qquad (5)$$

Dividiendo (2): (4):

$$\frac{v_1}{2v_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{2v_1^2}{v_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_1}{v_2} \qquad (6)$$

Dividiendo (6)^2: (5):

$$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{m_1^2}{m_2^2} \frac{v_1^2}{v_2^2}}{\frac{m_1}{m_2} \frac{v_1^2}{v_2^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{8}$$

La relación de las masas m_1 y m_2 es 1/8.

Ejemplo 4. ¿Es posible diseñar o plantear un campo magnético capaz de modificar la trayectoria y velocidad de una partícula cargada a nuestra conveniencia? ¿Cómo? o ¿por qué?

Solución.

Con campos eléctricos y campos magnéticos.

Campos eléctricos

Causa una fuerza sobre la partícula cargada

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Campos magnéticos.

Causa una fuerza sobre la partícula cargada

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Ejemplo 5. Se lanza una partícula se lanza horizontalmente con una velocidad de 10^4 m/s en tal dirección que se mueve perpendicularmente a un campo magnético horizontal, de magnitud 4,9 x 10^{-5} Wb.m^2. La partícula, que lleva una sola carga electrónica, permanece en el mismo plano horizontal. ¿Cuál es su masa?

Solución.

Puesto que la partícula permanece en el mismo plano horizontal durante su movimiento, la fuerza magnética en ella debe equilibrar su peso. Puesto que el movimiento es perpendicular a la dirección de la inducción magnética, se deduce que

$-m\vec{g} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$, y así $mg = qvB$ y

$$m = \frac{qvB}{g}.$$

Reemplazando valores:

$$m = \frac{\left(1{,}6 \times 10^{-19}\right)\left(10^4\right)\left(4{,}9 \times 10^{-5}\right)}{9{,}8}$$

= 8,0 x 10^{-21} kg.

Ejemplo 6. Un haz de electrones acelerado por una diferencia de potencial de 300 V, se introduce en una región donde hay un campo magnético uniforme perpendicular al plano del papel y hacia el lector de intensidad 1,46 10^{-4} T. La anchura de la región es de 2,5 cm. Si no hubiese campo magnético los electrones seguirían un camino rectilíneo.

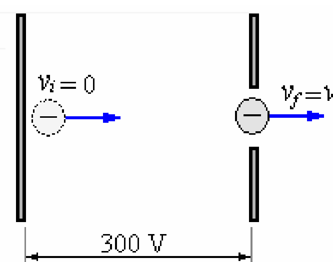
a) ¿Qué camino seguirán cuando se establece el campo magnético?

b) ¿Cuánto se desviarán verticalmente al salir de la región? Razónese las respuestas

Datos: masa del electrón 9.1 10^{-31} kg, carga 1,6 10^{-19} C.

Solución.

a)



El haz de electrones acelerado por una diferencia de potencial de 300 V adquiere una velocidad que se obtiene por:

$$q.V=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow$$

$$(1{,}6\times10^{-19})300=\frac{1}{2}9{,}1\times10^{-31}v^2 \Rightarrow$$

$$v=1{,}03\times10^7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

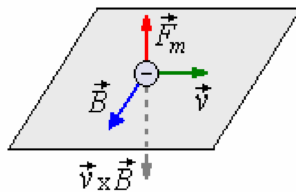
Cuando se establece el campo magnético:

$$\vec{F}_B=q\,\vec{v}\times\vec{B},\ F_B=qVB\text{sen}90^\text{o}$$

Por la segunda ley de Newton:

$$ma_c=F_B \Rightarrow m\frac{v^2}{r}=qVB \Rightarrow$$

$$r=\frac{mv}{qB}=0{,}4\ \text{m}$$

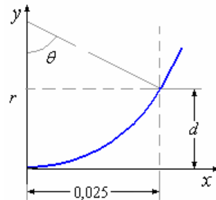


$$\vec{F}_B=q\,\vec{v}\times\vec{B},\ F_B=qvB\text{sen}90^\text{o}$$

Por la segunda ley de Newton: $ma_n=F_B$,

$$m\frac{v^2}{r}=qvB \Rightarrow r=\frac{mv}{qB}=0{,}4\ \text{m}$$

b) Al salir de la región deja de actuar el campo magnético y el haz de electrones continúa con su última dirección.



$$\text{sen}\,\theta=\frac{0{,}025}{r},$$

$d=r-r\cos\theta$ = 7,82 x 10^{-4}m.

Ejemplo 7. En un tipo de espectrómetro las partículas cargadas pasan a través de un selector de velocidades antes de ingresar al campo magnético. En otras las partículas pasan a través de un campo eléctrico fuerte antes de ingresar al campo magnético. Compare el cociente de los radios de iones simples de litio cargados de masas 6 amu y 7 amu en los dos casos.

Solución.

En el campo magnético un ion se mueve en un círculo, la fuerza centrípeta necesaria es proporcionado por la fuerza magnética sobre él.

Así $qvB=m\frac{v^2}{R}$. Cuando los iones han pasado a través de un selector de la velocidad, ambos iones del litio tienen la misma velocidad en el campo. Además, tienen la misma carga y la misma densidad magnética del flujo. Luego $R_6/m_6 = R_7/m_7$.

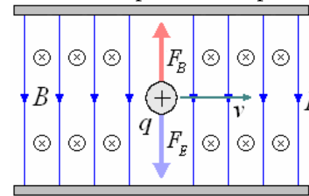
$$\therefore\ \frac{R_6}{R_7}=\frac{m_6}{m_7}=\frac{6}{7}=0{,}857\,.$$

Si los iones han pasado a través de un campo eléctrico fuerte, ambos han adquirido la misma energía. Pero, de la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{q^2B^2r^2}{2m}.$$

$$\therefore\ \frac{r_6^2}{m_6}=\frac{r_7^2}{m_7}\ \text{o}\ \frac{r_6}{r_7}=\sqrt{\frac{m_6}{m_7}}=0{,}926\,.$$

Ejemplo 8. Cierto tipo de selector de velocidades consiste en un par de las placas paralelas entre las cuales se establece un campo eléctrico *E*. Un haz de partículas de la masa *m*, carga *q*, y velocidad *v* es dirigido paralelamente a las placas en la región entre ellas. Se aplica un campo magnético *B* perpendicular a *E* y a *v*. en la figura B se dirige hacia el papel, según lo indicado. Determine una expresión para la velocidad de las partículas que no son deflectectadas por este dispositivo.



Solución.

La fuerza magnética *qvB* balancea la fuerza del campo eléctrico *qE*, tal que:

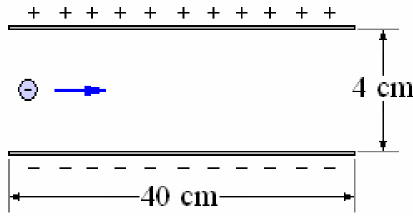
$$qvB=qE\ \text{y}\ v=\frac{B}{E}.$$

Ejemplo 9. Un electrón es acelerado por una diferencia de potencial de 300 V, entra en una región donde hay un campo eléctrico producido por las placas de un condensador de 40 cm de longitud y separadas 4 cm a las cuales se les aplica una diferencia de potencial de 100 V.

a) Calcular el punto de impacto o la desviación del electrón a la salida de las placas.

b) Ahora, aplicamos hay un campo magnético perpendicular al plano. Determinar la intensidad y el sentido (hacia dentro o hacia afuera) del campo magnético para que el electrón no se desvíe.

c) Se suprime el campo eléctrico, determinar el radio de la órbita del electrón. Dibujar su trayectoria. ¿Chocará contra las placas? Razónese todas las respuestas haciendo los esquemas correspondientes.



Datos: carga del electrón 1,6x10^{-19} C,
masa 9,1x10^{-31} kg.

Solución.

a) Para calcular la velocidad del electrón.
Por conservación de la energía

$$q\Delta V = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \ ,\ \Delta V = 300\ \text{V},$$

$$v_2 = v_0,$$

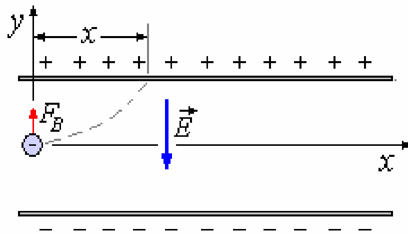
$$v_1 = 0\ \ 1{,}6\times 10^{-19}(300) = \frac{1}{2}9{,}1\times 10^{-31}v_0^2$$

$$\Rightarrow\ v_0 = 1{,}027\times 10^7\ \frac{m}{s}$$

La fuerza debido al campo eléctrico constante

$$F_E = qE\ ,\ E = \frac{\Delta V'}{d} = \frac{100}{0{,}04} = 2500\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

El movimiento del electrón en presencia del campo magnético es parabólico tal como el que se muestra en la figura siguiente:



Este movimiento esta dado por:

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{F_E}{m} = \dfrac{2500}{9{,}1\times 10^{-31}} = 2{,}75\times 10^{29}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\end{cases}$$

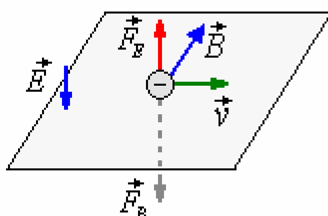
$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = a_y t\end{cases}\ \text{y}\ \vec{r}\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2}a_y t^2\end{cases}$$

Para $x = 0{,}4\,\text{m} \Rightarrow y = 0{,}033\,\text{m}$, impacta antes de salir

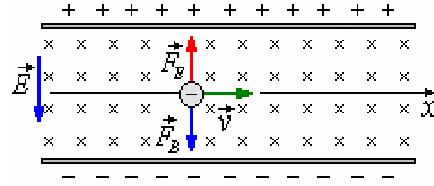
El punto de impacto es cuando

$y = 0{,}02\ \text{m} \Rightarrow x = 0{,}098\,\text{m}$

b) Para que el electrón no se desvíe.



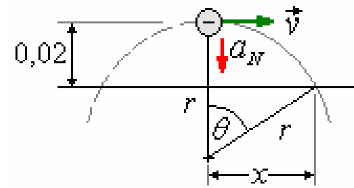
$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$, $\vec{F}_B$ es de signo contrario a $\vec{v}\times\vec{B}$, ya que la carga es negativa. Luego $\vec{B}$ debe de ser perpendicular al plano del papel y hacia adentro.



$$F_E = F_B\ ,\ qE = qvB\text{sen}90^\circ$$

$$\Rightarrow\ B = \frac{E}{v} = 2{,}43\times 10^{-4}\ \text{T}$$

c) Cuando se suprime el campo eléctrico.



Por la segunda ley de Newton

$$F_B = ma_N$$

$$qE = qvB\text{sen}90^\circ = m\frac{v^2}{r}$$

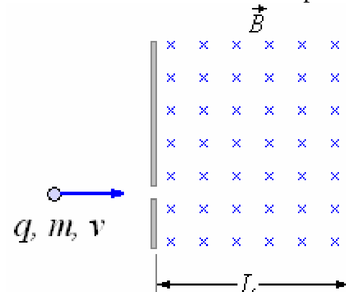
$$\Rightarrow\ r = \frac{mv}{qB} = 0{,}24\,\text{m}$$

Punto de impacto: $0{,}02 = 0{,}24 - 0{,}24\cos\theta$

$$\Rightarrow\ 0{,}02 + 0{,}24\cos\theta = 0{,}24\ \Rightarrow\ \theta = 23{,}6^\circ$$

$$x = 0{,}24\text{sen}\theta\ \Rightarrow\ x = 0{,}096\,\text{m}$$

Ejemplo 10. Se tiene un campo magnético uniforme tal como se muestra en la figura, una partícula de masa *m* y carga *q* ingresa perpendicularmente con velocidad *v*. ¿Cuál es la trayectoria cuando abandona el campo magnético?

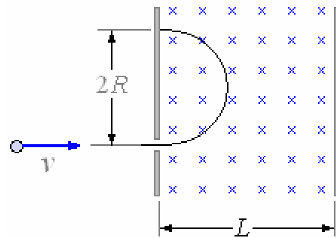


Solución.

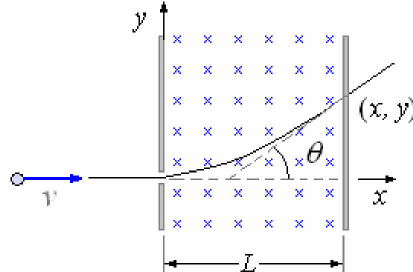
Al ingresar la partícula en el campo magnético esta toma una trayectoria circular cuyo radio es

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Si el valor de R es menor que L las partícula sale en sentido contrario al que ingreso tal como se nuestra en la figura a continuación.



Si el valor de R es mayor que L



el radio sigue siendo $R = \frac{mv}{qB}$

la ecuación de la trayectoria de la partícula es

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

El punto de salida es cuando $x = L$ y corresponde a

$$L^2 + (y - R)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$y - R = (R^2 - L^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$y = R + (R^2 - L^2)^{1/2}$$

la salida es en $x = L$, $y = R + (R^2 - L^2)^{1/2}$

La inclinación está dada por el ángulo θ.

Derivando con respecto a x la ecuación de la trayectoria:

$$2x + 2(y - R)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y - x}$$

Esta pendiente corresponde a $\tan\theta$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y - x}$$

En el punto salida

$$\tan\theta = -\frac{L}{(R^2 - L^2)^{1/2}}$$

Ejemplo 11. ¿Un protón (masa 1,67 x 10^{-27} kg) se mueve a lo largo de un arco de radio 32 cm cuando se mueve perpendicular a un campo magnético de 1,4 T. ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón y la cantidad de movimiento del protón?

Solución.

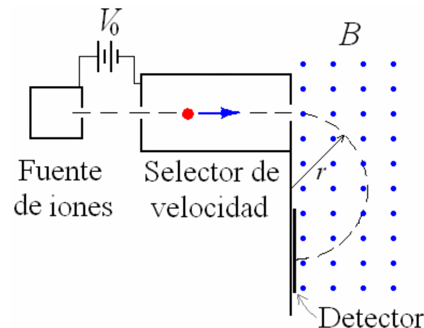
La cantidad de movimiento:

$mv = qBr$ = (1,6 x 10^{-19}C)(1,4T)(0,32m)
= 7,17 x 10^{20}kg.m/s

La frecuencia:

$$f_c = \frac{1}{2\pi}\frac{qB}{m} = \frac{(1,6\times10^{-19})(1,4)}{2\pi(1,67\times10^{-27})} = 21 \text{ MHz}$$

Ejemplo 12. Un espectrómetro de masas es un instrumento usado para separar los iones de masas ligeramente diferentes. Éstos son a menudo isótopos de un elemento, ellos tienen características químicas muy similares. La construcción de un espectrómetro de masas se muestra en la figura. Los iones de carga + q y masa m se aceleran con una diferencia potencial V_0. Los iones luego se mueven en un campo magnético perpendicular B, donde forman una trayectoria semicircular. Se detectan a una distancia $d = 2r$ de la puerta de la entrada. Determine la masa del ion en términos de los parámetros conocidos.



Solución.

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV_0 \text{ y } qvB = \frac{mv^2}{r}$$

Resolviendo:

$$m = \frac{qr^2}{2V_0}B^2$$

B puede ser variado para hacer que diversas masas lleguen al detector.

Solamente la componente de la velocidad perpendicular al campo magnético es cambiada por la fuerza magnética. Por lo tanto, una partícula que se mueve en ángulo con excepción de 90° al campo magnético se moverá en una trayectoria helicoidal.

Ejemplo 13. Sea la región del espacio $x \geq 0$, en la cual existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{k}$. Desde una posición $x < 0$ se dispara una partícula de carga positiva q con una velocidad $\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$.

a) Calcule el vector Fuerza Magnética que actúa sobre la partícula en el punto de ingreso a la región de campo magnético.

b) Para el caso que las componentes iniciales v_{0x}, y v_{0y}, sean iguales y positivas. Trace

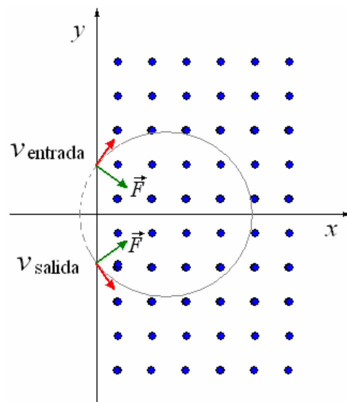
(esquemáticamente) la trayectoria de la partícula en la región de campo magnético. ¿Cuál es el vector velocidad de la partícula al salir de la región de campo magnético?

Solución.

a) $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = qB_0\hat{k}\times\left(v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}\right) = qB_0\left(v_{0x}\hat{j} - v_{0y}\hat{i}\right)$

b) Al ingresar la carga en la región del campo magnético tiene una trayectoria circular sobre el plano *xy*, el radio está dado por $R = \dfrac{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}}{qB}$

El gráfico muestra el caso en que $v_{0x} = v_{0y}$



Se puede observar que a en la salida del campo el vector velocidad continuará con el sentido que tenía en ese instante (tangente a la trayectoria).

$\vec{v}_{salida} = -v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$

Ejemplo 14. Un selector de velocidades se puede construir usando el principio siguiente: Los iones de carga *q* y masa *m* mueven hacia arriba comenzando en el origen con la velocidad v_0 a un ángulo θ con el eje de *z*. Un campo magnético *B* se establece a lo largo del eje de *z*. Determine el primer punto donde los iones regresan al eje de *z*.

Solución.

Los iones se mueven en una trayectoria helicoidal y volverán al eje de z después de un período de la frecuencia del ciclotrón. Durante este tiempo viajarán una distancia $z = v_0\cos\theta\, T$ a lo largo del eje *z*.

$$f_c = \frac{1}{2\pi}\frac{qB}{m} = \frac{1}{T} \text{ y } z = \frac{2\pi\, mv_0\cos\theta}{qB}$$

Ejemplo 15. En una emulsión fotográfica el trazo de un protón que se mueve perpendicular a un campo magnético de 0,60 T se observa que es una circunferencia de radio 1,2 cm. ¿Cuál es la energía cinética del protón en electronvoltios?

Solución.

$$r = \frac{mv}{qB},$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{r^2e^2B^2}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(0{,}012)^2\left(1{,}6\times10^{-19}\right)^2(0{,}60)^2}{\left(1{,}67\times10^{-27}\right)}$$

$$= \frac{3{,}97\times10^{-16}\text{ J}}{1{,}6\times10^{-19}\text{ J/eV}} = 2480\text{ eV}$$

Ejemplo 16. Un electrón se mueve con una de velocidad 3,2 x 10^5 m/s en la dirección positiva de *x* en presencia de un campo magnético $\vec{B} = 0{,}1\hat{i} + 0{,}3\hat{j} - 0{,}2\hat{k}$ (en teslas). ¿Qué fuerza experimenta el electrón?

Solución.

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$= -\left(1{,}6\times10^{-19}\right)\left[\left(2\times10^5\hat{i}\right)\times\left(0{,}1\hat{i} + 0{,}3\hat{j} - 0{,}2\hat{k}\right)\right]$$

$$= 0{,}96\times10^{-14}\hat{k} - 0{,}64\times10^{-14}\hat{j}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1{,}1\times10^{-14}\text{ N}$$

Ejemplo 17. Un ión de litio cargado tiene una masa de 1,16 x 10^{-26} kg. Se acelera con un voltaje de 600 V y después entra en un campo magnético perpendicular a su velocidad de 0,60 T. ¿Cuál es el radio de la trayectoria del ion en el campo magnético?

Solución. $qV = \dfrac{1}{2}mv^2$,

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

$$= \frac{1}{0{,}60}\sqrt{\frac{2\left(1{,}16\times10^{-26}\right)(600)}{1{,}6\times10^{-19}}} = 0{,}016\text{ m}$$

Ejemplo 18. Iones positivos, con carga simple se aceleran a través de una diferencia potencial y entran en un campo magnético uniforme normal a su línea de movimiento. ¿Si una diferencia potencial de 1000 voltios trae Li^6 al detector, qué diferencia potencial haría que los iones Li^7 atraviesen la misma trayectoria?

Solución.

En el campo magnético la fuerza que actúa en los iones provee la fuerza centrípeta necesaria para mantenerlos en una circunferencia. Por lo tanto

$$\frac{mv^2}{R} = qvB.$$

$\therefore\ v = \dfrac{qRB}{m}$ o $\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{q^2R^2B^2}{2m}$

Pero esta energía cinética es adquirida pasando a través de una diferencia de potencial V.

$\therefore\ qV\dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{q^2R^2B^2}{2m}$ o $V = \dfrac{qR^2B^2}{2m}$

Para ambos iones, *q*, *R*, y *B* son iguales. Por lo tanto $V_1 = \dfrac{k}{m_1}$ y $V_2 = \dfrac{k}{m_2}$,

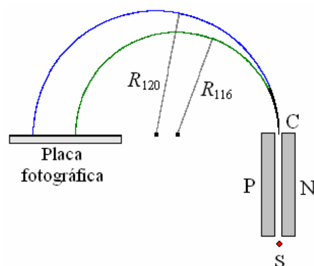
$\therefore\ \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{m_1}{m_2} \Rightarrow$

$V_2 = \dfrac{m_1}{m_2}V_1 = \left(\dfrac{6}{7}\right)(1000)$ = 857 V.

Ejemplo 19. La figura siguiente representa el dispositivo diseñado por Bainbridge para medir exactamente masas de isótopos. S es la fuente de iones cargados positivamente del elemento investigado. Todos los iones tienen la misma carga *e* pero tienen una gama de velocidades. A través de la región un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigida ingresando perpendicularmente a la página. Además, un campo eléctrico $\vec{E}$, dirigido paralelo al plano de la página, se instala entre los electrodos P y N.

a) Demuestre que solamente los iones que velocidad y iguala *E*/*B* emergerán en C.

b) Demuestre que la masa *m* de un ion es proporcional al radio *R* de su trayectoria semicircular.



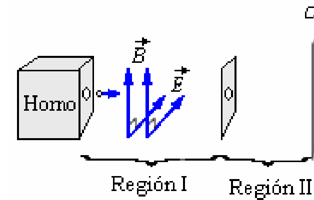
Solución.

a) De acuerdo a la figura anterior los iones que viajan de S a C está sujetos a una fuerza eléctrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y una fuerza magnética $\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$. Aquí $\vec{E}$ se dirige hacia la derecha (de P a N) y $\vec{v}\times\vec{B}$ señala en la dirección opuesta y tiene una magnitud vB.

Estas fuerzas se cancelan cuando $qE = qvB$ y $v = \dfrac{E}{B}$.

b) De $\dfrac{mv^2}{R} = evB \Rightarrow m = \dfrac{eB}{v}R = \dfrac{eB^2}{E}R$

Ejemplo 20. En un horno a altas temperaturas una muestra de sodio es calentada al punto de evaporarse, el gas de sodio resultante está formado por átomos que perdieron un electrón (carga del electrón, - *e*).



a) ¿Cuál debe ser la relación entre los módulos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en la región I, de manera que sólo los átomos con velocidad exactamente igual a v_0 sigan sin desviarse? Suponga que la masa de los átomos es m_0

b) Si queremos que los átomos se detengan exactamente cuando lleguen a la placa cargada con σ, ¿cuál es el espesor de la región II?

c) Considerando que el campo magnético de la tierra $\vec{B}_H$, está también presente en ambas regiones, en la misma dirección en la que se mueven las partículas cargadas. ¿Influirá en la trayectoria de los átomos cargados? ¿Cómo?

Solución.

a) $qv_0B = qE \Rightarrow \dfrac{E}{B} = v_0$

b) $\dfrac{1}{2}m_0v_0^2 = e\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Delta L \Rightarrow \Delta L = \dfrac{m_0v_0^2\varepsilon_0}{e}$

c) No, porque el campo magnético de la tierra $\vec{B}_H$, está en la misma dirección en la que se mueven las partículas cargadas

Ejemplo 21. .El elemento estaño se analiza en un espectrómetro de Bainbridge. Están presentes los isótopos de masas 116, 117, 118, 119, y 120 u. Los campos eléctricos y magnéticos *E* = 20 kV/m y *B* = 0,25 T. ¿Cuál es el espaciamiento entre las marcas producidas en la placa fotográfica por lo iones de estaño 116 y los iones de estaño -120?

Solución.

Del problema anterior, la distancia *x* del punto C a la imagen de un isótopo se da por

$x = 2R = \dfrac{2E}{eB^2}m$ por lo tanto,

$\Delta x = \frac{2E}{eB^2}\Delta m$ =

$\frac{2\left(2{,}0\times 10^4\right)}{\left(1{,}6\times 10^{-19}\right)}(4\text{u})\left(1{,}66\times 10^{-27}\ \frac{\text{kg}}{\text{u}}\right)$

= 2,66 x 10^{-2}mm.

Ejemplo 22. Una partícula con la carga *q* y masa *m* orbita alrededor perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Demostrar que su frecuencia del movimiento orbital es $\frac{BQ}{2\pi\, m}$ Hz.

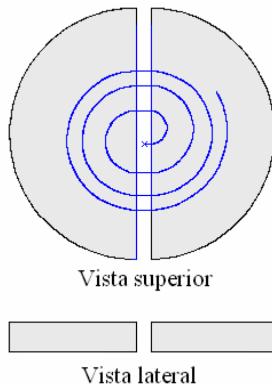
El hecho de que la frecuencia es independiente de la velocidad de la partícula es importante en los aceleradores de la partícula llamados ciclotrones; esta frecuencia se llama la frecuencia del ciclotrón

Solución.

El periodo es $\frac{2\pi\, r}{v}$, tal que $f = \frac{v}{2\pi\, r}$.

Usando $qvB = \frac{mv^2}{r}$, tenemos $f = \frac{qB}{2\pi\, m}$.

Ejemplo 23. Describa un **ciclotrón** y su operación.



Solución.

Un ciclotrón es un dispositivo para acelerar partículas nucleares. El corazón del aparato consiste en una caja metálica partida fortín. La figura muestra las vistas lateral y superior de las mitades llamadas Des. Una diferencia potencial oscilante se aplica entre las Des. Esto produce un campo eléctrico oscilante en el espacio entre el Des, la región dentro de cada D que esencialmente está libre de campo eléctrico. Las Des se encierran en un envase evacuado, y la unidad entera se pone en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ con dirección normal al plano de las Des. Una partícula cargada de la masa *m* y carga *q* en el espacio entre las Des es acelerada por el campo eléctrico hacia uno de ellos. Dentro de las Des, se mueve con velocidad constante en un semicírculo. Del problema anterior el período del movimiento circular uniforme es $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi\, m}{qB}$. Para la mitad de un círculo $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi\, m}{qB}$ y es independiente de la velocidad. Si el medio período del campo eléctrico oscilante es igual a este tiempo, la partícula cargada será acelerada otra vez cuando cruce el espacio entre las Des nuevamente, debido a la dirección inversa del campo eléctrico. Así ganará energía. Esto hace que el semicírculo siguiente tenga un radio más grande, según como se muestra en la figura. El aumento de energía se puede repetir muchas veces.

Ejemplo 24. Un ciclotrón tiene una frecuencia del oscilador de 11,4 MHz y un radio de 60 cm.

a) ¿Qué intensidad de campo magnético se requiere para acelerar los protones de la masa 1,67 x 10^{-27} kg y carga 1,6 x 10^{-19} C,

b) ¿Cuál es la energía final que adquieren?

c) ¿Qué error se comete si se asume que la masa de los protones sigue siendo constante?

Solución.

a) La frecuencia angular de los protones en el ciclotrón es, $\omega = \frac{Bq}{m}$ o $f = \frac{Bq}{2\pi m}$.

$\therefore$

$$B = \frac{2\pi\ fm}{q} = \frac{2\pi\left(11{,}4\times 10^6\right)\left(1{,}67\times 10^{-27}\right)}{1{,}6\times 10^{-19}}$$

= 0,748Wb/m^2.

b) La energía final de los protones es

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} = \frac{\left(1{,}6\times 10^{-19}\right)^2(0{,}748)^2(0{,}6)^2}{2\left(1{,}67\times 10^{-27}\right)}$$

= 0,154 x 10^{-11} J = $\frac{0{,}154\times 10^{-11}\ \text{J}}{1{,}6\times 10^{-13}\ \text{J/MeV}}$

= 9,64 MeV.

c) Desde $E = mc^2$, esta energía es equivalente a un incremento de masa

$\Delta m = \frac{0{,}154\times 10^{-11}\ \text{J}}{9\times 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}}$ = 0,017 x 10^{-27} kg.

Luego el error es

$\frac{\Delta m}{m}\times 100 = \frac{0{,}017}{1{,}67}\times 100$ =1,02%.

Ejemplo 25. Un ciclotrón está acelerando los deuterones los cuales son núcleos de hidrógeno pesado que llevan una carga + e y tienen una masa de 3,3 X 10^{-27} kg.

a) ¿Cuál es la frecuencia requerida del campo eléctrico oscilante si *B* = 1,5 T.

b) Si los deuterones deben adquirir el 15 meV de energía cinética y la diferencia de potencial a través de la separación es 50 kV, cuántas veces el deuterón experimenta la aceleración?

Solución.

a) El período de la oscilación del campo eléctrico debe igualar al período orbital, así que la frecuencia requerida de la oscilación es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi\, m_0} = \frac{(1{,}6\times 10^{-19})(1{,}5)}{2\pi(3{,}3\times 10^{-27})} = 11{,}6$$

MHz.

b) El deuterón al cruzar la separación, gana 50 keV = 5×10^4eV. Para ganar un total de 15 meV = 15×10^6 eV, el deuterón debe experimentar $(15 \times 10^6)/(5 \times 10^4) = 300$ travesías de la separación.

Ejemplo 26. Un ciclotrón se ha ajustado para acelerar deuterones. Debe ahora ser ajustado para acelerar, que tienen casi exactamente la mitad de la masa del deuterón.

a) ¿Qué cambio debe ser realizado si no hay cambio en la frecuencia, de la diferencia potencial oscilante aplicada entre el Des?

b) ¿Qué cambio debe ser realizado si cambio en campo magnético normal aplicado a las Des?

Solución.

a) La frecuencia angular del ciclotrón es

$\omega = \dfrac{qB}{m}$, así tenemos:

$$B = \frac{m\omega}{q}$$

Desde el protón y el deuterón tienen la misma carga $q_p = q_d$ y $m_p = \frac{1}{2} m_d$, el campo magnético debe ser disminuido a la mitad.

b) Referente a la ecuación $B = \dfrac{m\omega}{q}$. Si *B* debe permanecer invariable, la frecuencia de la oscilación del campo debe ser duplicada.

Ejemplo 27. ¿Cómo cada uno de los cambios en el problema anterior altera la energía máxima que los protones pueden adquirir?

Solución.

Si se asume que la mecánica no relativista es aplicable a través del movimiento, la energía cinética máxima

$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$ y $q v_{nax} B = \dfrac{m v_{mnax}}{R}$, donde

R es el radio R del dispositivo. (la cantidad *R* es un límite superior para el radio orbital de una partícula acelerada). Resolviendo para $K_{\max}$,

encontramos que $K_{\max} = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2 B^2 R^2}{m}$.

a) La energía cinética máxima se parte en dos:

$$K_{\max}(p) = \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] K_{\max}(d) = \left(\frac{1}{2}\right) K_{\max}(d)$$

(b) La energía cinética máxima se duplica:

$$K_{\max}(p) = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] K_{\max}(d) = 2K_{\max}(d)$$

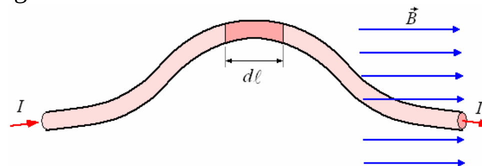
Ejemplo 28. .En un experimento de resonancia de ciclotrón, el campo magnético se dirige hacia arriba. Los resultados indican que las partículas cargadas están circulando a la izquierda según la vista de arriba. ¿Cuál es el signo de la carga en las partículas?

Solución.

Negativo (la fuerza debe estar dirigida al centro del círculo).

FUERZA SOBRE UN ALAMBRE CON CORRIENTE.

Cuando las cargas eléctricas se mueven en un conductor que esté en un campo magnético, existe una fuerza sobre el conductor que es la suma de las fuerzas magnéticas sobre las partículas cargadas en movimiento.



la figura muestra un conductor de sección *A* por el que pasa una corriente *I* y se encuentra en un campo magnético $\vec{B}$, producido por fuentes magnéticas diferentes. Tomemos un elemento infinitesimal $d\ell$ del alambre, consideremos que el flujo de corriente se debe a *N* portadores de carga por unidad de volumen, cada uno de los cuales se desplaza con velocidad v_d en la dirección de la corriente, por consiguiente la carga total que participa es $\Delta Q = qNAd\ell$ siendo *q* la carga de cada portador.

La fuerza $d\vec{F}$ sobre el elemento $d\ell$ podemos expresarla como

$$d\vec{F} = (\Delta Q)\vec{v}_d \times \vec{B} = qNA\,\vec{v}_d \times \vec{B}$$

En esta expresión podemos hacer un intercambio entre $d\ell$ y $\vec{v}_d$ donde el sentido vectorial sin

alterar la expresión o sea usar en cambio $d\vec{\ell}$ y v_d ($d\vec{\ell}$ con el sentido de *I*).

$$d\vec{F} = qNAv_d d\vec{\ell}\times\vec{B}$$

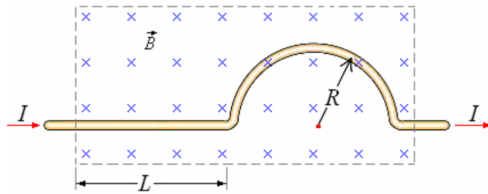
La corriente es $I = qNAv_d$, por consiguiente

$$d\vec{F} = I\, d\vec{\ell}\times\vec{B}$$

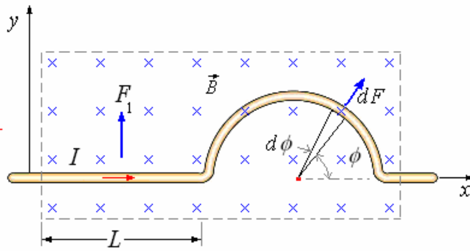
Que es la expresión para calcular la fuerza magnética sobre un alambre con corriente. Para una longitud dada *L*, la fuerza es:

$$\vec{F} = I\int_L d\vec{\ell}\times\vec{B}$$

Ejemplo 29. ¿Cuál es la fuerza sobre el alambre mostrado en la figura siguiente?



Solución.



La figura consta de dos partes, la parte recta y la parte curva.
La fuerza sobre la parte recta es

$$\vec{F}_1 = I\int_0^L d\vec{\ell}\times\vec{B}$$

Donde $d\vec{\ell} = dx\hat{i}$, $\vec{B} = -B\hat{k}$

$$\vec{F}_1 = I\int_0^L (dx\hat{i})\times(-B\hat{k}) = I\int_0^L Bdx\hat{j} = IBL\hat{j}$$

La fuerza sobre la parte curva es

$$\vec{F}_2 = I\int_0^\pi d\vec{\ell}\times\vec{B}$$

Donde $d\vec{\ell} = Rd\phi(\text{sen}\phi\,\hat{i} - \cos\phi\,\hat{j})$,

$\vec{B} = -B\hat{k}$.

$$\vec{F}_2 = I\int_0^\pi Rd\phi(\text{sen}\phi\,\hat{i} - \cos\phi\,\hat{j})\times(-B\hat{k}) =$$

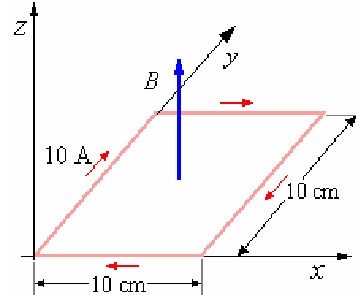
$$IRB\int_0^\pi(\text{sen}\phi\,\hat{j} + \cos\phi\,\hat{i})d\phi = IRB(2)\hat{j} =$$

$$2IRB\hat{j}$$

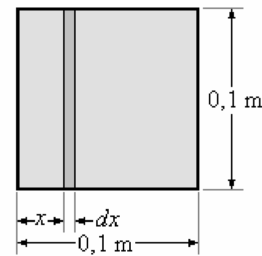
La fuerza total es

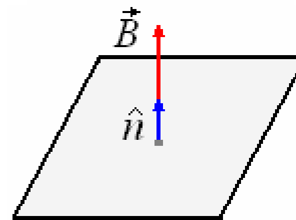
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = IB(L + 2R)\hat{j}$$

Ejemplo 30. Una espira de alambre cuadrada de 10 cm de lado yace en el plano *xy* tal como se muestra en la figura. Se aplica un campo magnético paralelo al eje *z*, que varía a lo largo del eje *x* de la forma *B* = 0,1 *x* T (donde *x* se expresa en metros).
a) Calcular el flujo del campo magnético que atraviesa la espira.
b) La fuerza (módulo, dirección y sentido) sobre cada uno de los lados de la espira.



Solución.
a)

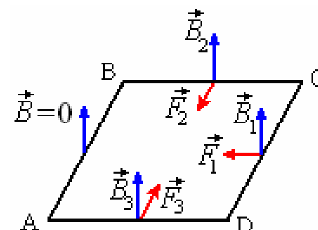




$$\Phi = \int \vec{B}\cdot\hat{n}dS = \int BdS\cos 0^\circ =$$

$$\int_0^{0,1}(0,1x)(0,1dx) = 0,01\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{0,1} = 5 \times 10^{-5}\text{Wb}$$

b)

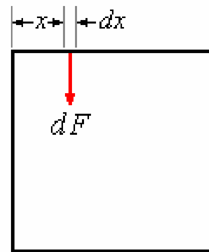


Lado AB: $B = 0 \Rightarrow \quad F = 0$
Lado CD: $B_1 = 0{,}1(0{,}1) = 0{,}01\,\text{T}$

$\Rightarrow F_1 = (10)(0{,}1)(0{,}01)\text{sen}90^\circ = 0{,}01\,\text{N}$, en el sentido negativo de *x*

$\vec{F}_1 = -0{,}01\hat{i}$

Para los lados BC y AD las fuerzas son iguales y de sentidos opuestos, como *B* no es constante hay que calcular la fuerza sobre un elemento *dx* y luego por integración la fuerza total sobre el lado.



Para el lado BC: $dF = (10)(dx)(0{,}1x)\text{sen}90^\circ = xdx$

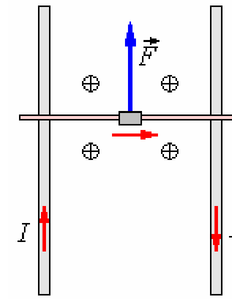
$F_2 = \int_0^{0,1} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,1} = 5\times 10^{-3}\,\text{N}$, fuerza aplicada en el extremo C del lado BC.

$\vec{F}_2 = -5\times 10^{-3}\,\hat{j}$

Para el lado AD: Es igual a F_2, pero de sentido opuesto, aplicada en el extremo D de AD.

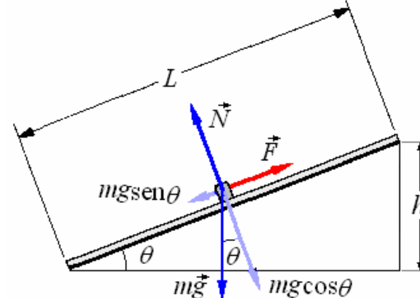
$\vec{F}_3 = 5\times 10^{-3}\,\hat{j}$

Ejemplo 31. Un príncipe científico ha encontrado un método de enviar mensajes secretos a una princesa hermosa que ese encuentra prisionera de un ogro travieso en el piso superior de su castillo a 15 m del suelo. El príncipe coloca dos barras ligeras del metal (demasiado ligeras para ser usadas para subir) contra el travesaño de la ventana, y entre las barras él monta un alambre 10 cm de largo, en el cual pone el mensaje y un imán, de tal manera que el alambre está permanentemente en un campo magnético de fuerza 0,049 Wb/m^2, perpendicularmente al plano de las barras. Cuando él pasa una corriente de 10 A por una barra, a través del alambre que conecta y vuelve por la otra barra, el mensaje, el alambre y el imán viajan con velocidad uniforme hacia arriba de las barras. El conjunto móvil tiene una masa de 0,25 kg. Despreciando la fricción, calcule cual debe ser la longitud de las barras.
Solución.



Del primer diagrama, vemos que el campo magnético debe ser perpendicular al plano de las barras y debe actuar hacia abajo. La magnitud de la fuerza experimentada por el alambre y los accesorios es

$F = I\ell B = (0{,}1)(10)(0{,}049) = 0{,}049\,\text{N}$



Del segundo diagrama, vemos en que las fuerzas que actúan sobre el alambre y los accesorios son tres: el peso que actúa verticalmente hacia abajo, la fuerza *F*, y *N*, la reacción normal. Puesto que el conjunto se mueve con velocidad uniforme,

$N = mg\cos\theta$ y $F = mg\text{sen}\theta$.

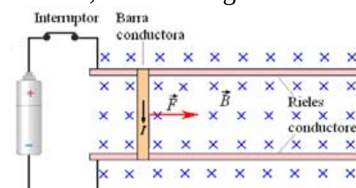
$\therefore\ \text{sen}\theta = \frac{0{,}049}{(0{,}25)(9{,}8)} = 0{,}02$

Del diagrama, $\frac{h}{L} = 0{,}02$

Luego $L = \frac{h}{0{,}02} = \frac{15}{0{,}02} = 750\,\text{m}$

Llevar tales barras sería absolutamente una hazaña. ¡El Príncipe mejor haría en recurrir a los servicios de una buena bruja!

Ejemplo 32. Un alambre que está a lo largo del eje de *x* lleva 2,0 A. La corriente fluye en la dirección positiva de *x*. Un campo magnético de 1,2 T paralelo al plano *xy* y que forma un ángulo de 30° con el eje de *x* (apuntando al primer cuadrante). ¿Cuál es la fuerza sobre un segmento de alambre de 0,40 m de longitud?



Solución.

$F = BIL\,\text{sen}\theta\,\hat{k}$

= (1,2 T)(2 A)(0,40 m) sen 30º $\hat{k}$

= 0,48 $\hat{k}$ N

Ejemplo 33. Un riel electromagnético para lanzar puede ser construido como sigue: Una barra conductora de masa *m* sobre dos carriles conductores horizontales paralelos separados una distancia *L*. Una fuente de poder hace circular una corriente *I* por los rieles y la barra A de la distancia para atravesar los carriles y la barra. Se mantiene un campo magnético vertical uniforme *B*. ¿Si la barra está inicialmente en reposo, cuál será la velocidad después de que haya movido una distancia *x*? Se ha sugerido que este dispositivo se podría utilizar para proyectar cargas útiles en órbita alrededor de la tierra, o transportar el mineral de la superficie de la luna a una fábrica en el espacio, o inducir reacciones de fusión nuclear con choques de alta velocidad.

Solución.

$$v^2 = v_0^2 + 2ax = 0 + 2\left(\frac{F}{m}\right)x \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2Fx}{m}}$$

Como $F = BIL$ **:**

$$v = \sqrt{\frac{2BILx}{m}}$$

Ejemplo 34. Un alambre recto que está a lo largo del eje de *x* y que lleva una corriente de 2,0 A en la dirección positiva de *x*. Un campo magnético uniforme de 0,08 T en el plano *xy* hace un ángulo de 60° con el alambre. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética en un segmento del 1,5 m del alambre.

Solución.

$F = BIL\text{sen}\theta$

= $(0{,}08)(2)(1{,}5)\text{sen}60^\circ$

= 0,21 N en la dirección positiva de *z*.

Ejemplo 35. Un alambre que está en una superficie horizontal en el plano *xy* lleva 1,5 A. Un extremo del alambre está en el origen y el otro está en (3 m, 4 m). El alambre sigue una trayectoria errática a partir de un extremo al otro. Un campo magnético de 0,15 T dirigido verticalmente hacia abajo está presente. ¿Que fuerza magnética actúa en el alambre?

Solución.

Divida la trayectoria en pasos pequeños *dx* hacia la derecha y *dy* hacia arriba. La fuerza en cada segmento es $d\vec{F} = BIdx\hat{j} + BIdy\left(-\hat{i}\right)$. La fuerza total luego es:

$$\vec{F} = (0{,}15\text{T})(1{,}5\text{A})\left(\hat{j}\int_0^3 dx - \hat{i}\int_0^4 dy\right) = 0{,}225\left(3\hat{j} - 4\hat{i}\right)$$

La magnitud de la fuerza es

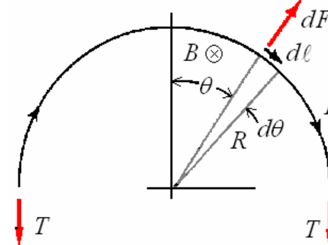
$F = (0{,}225)\sqrt{3^2 + (-4)^2}$ = 1,13 N

Observe que no importa la trayectoria exacta del alambre, desde que el alambre zigzaguea hacia adelante y hacia atrás, las fuerzas se cancelan en las partes que retroceden. La fuerza total es justamente la qué resultaría si el alambre fuera en línea recta de (0, 0) a (3, 4).

Ejemplo 36. Un lazo circular de alambre de radio *R* lleva una corriente *I*. Un campo magnético uniforme *B* actúa perpendicularmente al plano del lazo. ¿Cuál es la tensión en el alambre?

Solución.

La fuerza en la mitad superior del lazo es equilibrada por la fuerza de la tensión en cada extremo del semicírculo. Usando la regla derecha, se ve que la fuerza magnética está dirigida radialmente hacia fuera. Por simetría la fuerza resultante en el lazo está dirigida en la dirección *z*, donde $F_z = F\cos\theta$.



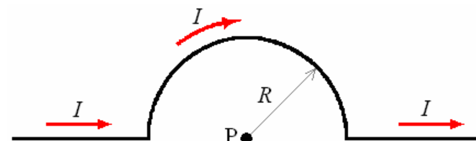
$F_z = \int_0^\pi BId\ell\cos\theta$, donde $d\ell = Rd\theta$

$F_z = 2\int_0^{\pi/2} BIR\cos\theta d\theta = 2BIR(\text{sen}\,\theta)_0^{\pi/2}$

$= 2BIR = 2T$

De aquí $T = BIR$

Ejemplo 37. ¿Un alambre recto largo que lleva una corriente *I* tiene una "torcedura semicircular" en ella de radio *R*. ¿Cuál es el campo magnético en el centro del semicírculo?



Solución.

Las secciones rectas no contribuyen nada a *B*, ya que para ellas $\theta = 0^\circ$ y $dx\text{sen}\theta = 0$. La contribución del semicírculo es justamente la que corresponde a la mitad de un círculo completo,

$B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R}$. Luego

$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Ejemplo 38. En un altoparlante un imán permanente crea un campo magnético de 0,12 T dirigido radialmente hacia fuera del eje de *z*. La bobina del altoparlante tiene 60 vueltas y un radio de 0,013 m y se coloca en el plano *xy*. ¿Qué fuerza actúa en la bobina cuando lleva una corriente de 1,5 A?
Solución.

$$F = NBIL\text{sen}\theta$$
$$= (60)(0{,}12)(1{,}5)(2\pi)(0{,}013)\text{sen}\theta$$
$$= 0{,}88 \text{ N}$$

Ejemplo 39. Un alambre con masa por unidad de longitud 0,04 kg/m lleva 3 A horizontalmente al este. ¿Qué campo magnético mínimo se requiere para equilibrar este alambre contra la fuerza de la gravedad?
Solución.

$F = BIL\text{sen}\theta = mg$, $m = \lambda L$,

$$B = \frac{\lambda L q}{IL} = \frac{(0{,}04)(9{,}8)}{3} = 1{,}13 \text{ T}$$

Ejemplo 40. Un lazo cuadrado de lado *L* y de *n* vueltas lleva una corriente *I*. Un lado del cuadrado está a lo largo del eje de *z*, y la corriente fluye hacia abajo en este lado. El resto del lazo está en el cuadrante *xy* positivo, y el plano del lazo hace un ángulo $\phi < 90°$ con el eje *x*. Un campo magnético *B* se dirige a lo largo del eje positivo de *x*. ¿Qué torque experimenta el lazo? ¿Cuándo es visto de arriba, en qué dirección el lazo tenderá para rotar?
Solución.

$$m = nIA = nIL^2$$
$$\tau = mB\text{sen}\theta = nIL^2 B\cos\phi$$

ya que $\theta + \phi = 90°$

El lazo rotará en el sentido antihorario.

Ejemplo 41. Un alambre de longitud *L* en forma de un lazo rectangular. ¿Lleva una corriente *I*. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para maximizar el torque en él cuando es colocado en un campo magnético?
Solución. $\tau = mB\text{sen}\theta$, τ es máximo cuando $m = IA$ es un máximo, es decir, cuando *A* es un máximo. Sea *x* = longitud de un lado

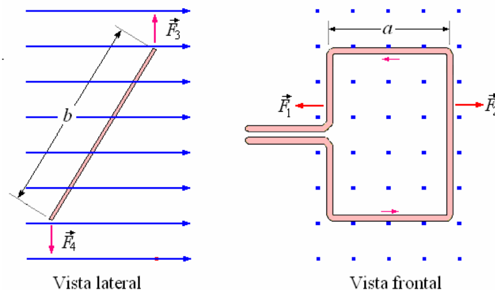
Luego $A = (x)\left(\frac{L}{2} - x\right)$,

$$\frac{dA}{dx} = 0 = \left(\frac{L}{2} - x\right) - x \Rightarrow x = \frac{L}{4}$$

Un lazo cuadrado da el torque máximo. (Un lazo circular da aún más torque para una longitud dada de alambre.)

FUERZA Y TORQUE SOBRE UNA ESPIRA CON CORRIENTE

Consideremos una espira rectangu1ar de lados *a* y *b*, situada en un campo magnético uniforme tal como se muestra en la figura siguiente.



Sobre los miembros verticales (lados de longitud *b*) actúan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que son iguales y opuestas cuyo efecto es tratar da abrir la espira o cerrarla en caso de invertir la corriente, nosotros consideramos una aspira rígida indeformable de tal manera que no causan efecto alguno.

Sobre los miembros horizontales (lados de longitud a) actúan las fuerzas $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$, tal que $F_3 = F_4 = IaB$.

Estas fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en sentido, formando así un par de fuerzas de valor

$$\tau = F_3 b\text{sen}\theta = IaBb\text{sen}\theta$$

con $ab = A$ (área de lo espira) podemos escribir

$$\tau = IAB\text{sen}\theta$$

Este par puede escribirse como producto vectorial de $\hat{n}$ (normal a la superficie *A*) y $\vec{B}$.

$$\vec{\tau} = IA\hat{n} \times \vec{B}.$$

Si llamamos momento magnético $\vec{m}$ a $IA\hat{n}$.

$$\vec{m} = IA\hat{n}$$

El par viene a estar dado por

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Esta expresión deducida para una espira rectangular es válida para una espira de forma cualquiera.

Ejemplo 42. Una bobina circular de alambre lleva 50 mA de corriente. La bobina tiene 50 vueltas y un área de 2,0 cm^2. Un campo magnético de 0,300 T orientado paralelo al plano de la bobina está presente. ¿Qué torque actúa sobre la bobina?
Solución.

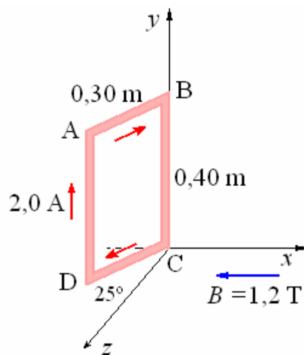
Cincuenta vueltas que llevan 50 mA son equivalentes a una vuelta que lleva (50)(50 mA), tal que

$\tau = NIAB\text{sen}\,\theta$ = 50(2 x 10^{-4})(50 x 10^{-3})(0,30)sen 90° = 1,5 x 10^{4} N.m

Si uno intenta rotar un dipolo magnético en un campo magnético, un torque $-\mu B\text{sen}\theta$ debe aplicarse. Así $U - U_0 = -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau B\text{sen}\theta d\theta =$ $-mB(\cos\theta - \cos\theta_0)$. Elegimos U_0 tal que $U = 0$ cuando $\theta = 90^o$, luego

$U = -\mu B\cos\theta = -\vec{m}\cdot\vec{B}$, energía potencial de un dipolo magnético.

Ejemplo 43. Un lazo rectangular rígido, que mide 0,30 m por 0,40 m, lleva una corriente de 2,0 A, como se muestra. Un campo magnético externo uniforme de la magnitud 1,2 T en la dirección negativa de *x* está presente. El segmento CD está en el plano *xz* y forma un ángulo 25° con el eje de z.



a) ¿Cuál es el valor de la componente *y* de la fuerza magnética en el segmento AB?
b) Un torque externo se aplica al lazo y lo mantiene en equilibrio estático. ¿Cuál es la magnitud del torque externo?
c) ¿Cuál es el flujo magnético a través del lazo debido al campo externo?

Solución.

a) $\vec{F} = I\vec{\ell}\times\vec{B}$

$= 2{,}0\left(-0{,}3\cos 25^o\hat{k} + 0{,}3\text{sen}25^o\hat{i}\right)\times\left(-1{,}2\hat{i}\right)$

$= +(7{,}2)(0{,}91)\hat{j} = +0{,}65\hat{j}$

F = + 0,65 N

b) $\vec{F} = I\vec{\ell}\times\vec{B} = 2{,}0\left(0{,}4\hat{j}\right)\times\left(-1{,}2\hat{i}\right)$

$= +0{,}96\hat{k}$

Esta fuerza es producida en los dos lados largos produciendo un par de fuerzas o cupla, para mantener en equilibrio se debe aplicar un torque opuesto a este, cuya magnitud es:

$\tau = (0{,}96)(0{,}3\text{sen}25^o) = (0{,}288)(0{,}42)$

= 0,12 N m

c) $\Phi = BA\cos 25^o$

$= (1{,}2)(0{,}4\times 0{,}3)\cos 25^o$ = 0,13 Wb

Ejemplo 44. Una bobina circular radio 4 cm y 100 vueltas lleva una corriente de 1,2 A. En presencia de un campo magnético de 0,80 T, orientado perpendicularmente al plano de la bobina. ¿Cuánto trabajo es requerido para dar una vuelta de 180° a la bobina?

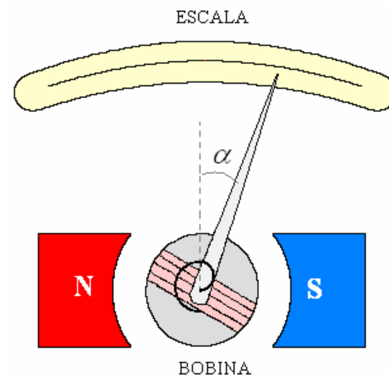
Solución.

$W = -\mu B(\cos 180° - \cos 0°)$

$= 2\mu B = 2NAIB$

$= 2(100)\left(\pi 0{,}04^2\right)(1{,}2)(0{,}8)$ = 0,97 J

Aplicación 1: El Galvanómetro de D'ansorval.
Como ya vimos anteriormente el **Galvanómetro** consiste de un campo magnético producido por un imán permanente y una bobine de *n* espiras, la cual tiene libertad de rotar contra un torque restaurador de un espiral de suspensión. El torque de rotación es causado por la corriente *I* que fluye por la bobina y es justamente la que queremos medir.



El torque producido por el movimiento es

$\tau = nIAB\cos\alpha$, siendo α el ángulo rotado desde la posición cero de equilibrio.

La rotación se detendrá cuando el torque restaurador producido por el resorte se iguala al torque magnético, para obtener la posición de equilibrio α con la corriente que pasa tenemos

$\kappa\alpha = nIAB\cos\alpha$

Si el ángulo de deflexión es pequeño, $\cos\alpha \approx 1$, la deflexión α directamente proporcional a la corriente I .

Ejemplo 45. Una bobina de un galvanómetro tiene 500 vueltas de alambre enrollado alrededor de un marco de 2 cm de largo y 1 cm de ancho. La bobina rota en un campo magnético de 0,05 Wb/m^2, siempre paralelo a su plano y perpendicular a su largo. ¿Qué torque actúa en la bobina cuando lleva una corriente de 10^{-8} A?

Solución.

La magnitud del torque que actúa en una sola vuelta de la bobina es,

$\tau = AIB\cos\alpha$.

Cuando la bobina tiene *n* vueltas,

$$\tau = nAIB\cos\alpha$$

$$= (500)(0{,}02\times 0{,}01)(10^{-8})(0{,}05)(1)$$

$= 5 \times 10^{-11}$ N.m.

Ejemplo 46. La bobina de un galvanómetro tiene 150 vueltas de área media 1 cm^2 y el par restaurador de la suspensión es 10^{-6} N.m por radián. La magnitud del campo magnético radial en la cual la bobina gira es 0,2 Wb/m^2. ¿Qué desviación será producida cuando una corriente de 10 μA atraviesa la bobina?

Las placas de un condensador de 1 μF se cargan a una diferencia potencial de 1 V y después se descargan a través de la bobina del galvanómetro, la desviación resultante que es 0,1 rad. ¿Cuál es el momento de la inercia de la bobina?

Solución.

La magnitud del torque que actúa en las 150 vueltas de la bobina debido al campo magnético es, $\tau = 150AIB$, el campo es radial.

La bobina gira hasta que este torsión es balanceado por el torque restaurador de la suspensión $\kappa\theta$. Así en la posición del equilibrio

$\kappa\theta = 150AIB$ o

$$\theta = \frac{150AIB}{\kappa} = \frac{150(10^{-4})(10^{-5})(0{,}2)}{10^{-6}}$$

= 0,03 rad.

Cuando se descarga el condensador, la carga que atraviesa la bobina del galvanómetro es

$Q = CV = (10^{-6})(1) = 10^{-6}$ V

Pero la carga y la desviación máxima resultante del galvanómetro están relacionadas por la ecuación $Q = \left(\frac{\sqrt{\kappa I'}}{nAB}\right)\theta_{max}$, donde *I'* es el momento de inercia de la bobina. Así

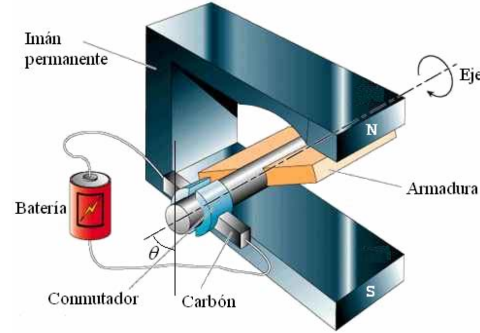
$$I' = \frac{n^2A^2B^2Q^2}{\kappa\theta_{max}^2} =$$

$$I\frac{(150)^2(10^{-4})^2(0{,}2)^2(10^{-6})^2}{(10^{-6})(10^{-1})^2}$$

$= 9 \times 10^{-10}$kg.m^2

Aplicación 2: Motor de corriente Continua.

Consideremos un motor a corriente continua muy simple como el motor en la figura siguiente.



El motor a corriente continua consiste en una armadura formada por varias vueltas de alambre, la cual se encuentra en un campo magnético *B* uniforme, los motores pequeños utilizan imanes pera producir este campo y los grandes tienen electroimanes para este fin. La armadura esta conectada al conmutador el cual es un anillo dividido. La finalidad del conmutador es invertir la corriente en la apropiada fase de rotación, tal que el torque sobre la armadura actúa en la misma dirección. La corriente es proporcionada por la batería a través de un par de resortes o escobillas que están en contacto con el conmutador, El torque del motor está dado por $\tau = NIAB\text{sen}\theta$.

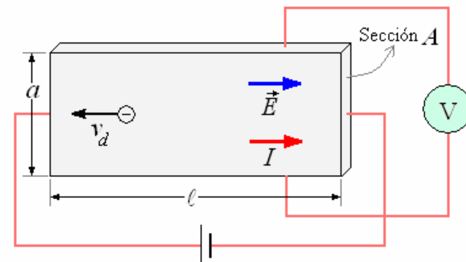
Cuando $\theta = 0$, no fluye corriente por la armadura y es el instante justo en que se invierte la corriente, en el proceso momentáneamente no interviene la batería. Pero como el motor ya esta funcionando, la inercia rotacional hace pasar la armadura a través de la región de torque cero.

EFECTO HALL

Un caso de efecto que produce un campo magnético sobre una corriente es el fenómeno descubierto por E.H. Hall en 1879, conocido como **Efecto Hall**. Este efecto nos permite determinar el signo de la carga situada en el portador y el número de portadores de carga por unidad de volumen (*n*) del conductor.

Para describir este fenómeno consideremos una lámina delgada de material conductor con sección *A*, ancho a y largo ℓ.

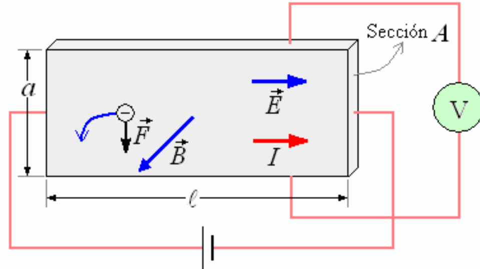
Conectamos una fuente de voltaje como se muestra en la figura a continuación, aparece un campo $\vec{E}$ y una cierta corriente I asociada a él, los electrones se desplazan con su velocidad v_d en una dirección opuesta al campo.



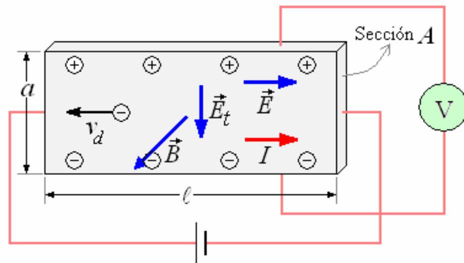
Si se conecta un voltímetro transversalmente a la lámina, dará una lectura cero, ya que el campo eléctrico no tiene componente a lo largo de la dirección vertical.
Ahora pongamos un campo magnético dirigido perpendicularmente fuera de la lámina como se muestra en la figura siguiente, la fuerza magnética sobre estas partículas estará en la dirección

$q\vec{v}_d \times \vec{B}$ (hacia abajo en la figura).

Los electrones se moverán hacia abajo con trayectoria curva.



Como consecuencia de este movimiento las cargas negativas se apilan en el fondo y en compensación aparecen cargas positivas en la parte superior. Como se muestra en la figura siguiente.



La apilación de cargas continuará hasta que la fuerza producida por el campo eléctrico transversal cancele la fuerza magnética, es decir

$q\vec{E}_t + q\vec{v}_d \times \vec{B} = 0$

Tomando en cuenta los sentidos y cancelando *q*, obtenemos

$E_t = v_d B$

La existencia de E_t queda evidente con el hecho de que ente la presencia de $\vec{B}$ $\left(\vec{B} \neq 0\right)$, el voltímetro en la figura marca una lectura V.

El valor de E_t está dado por

$$E_t = \frac{V}{a}$$

Como la corriente está dada por la expresión

$I = nqAv_d$, obtenemos: $v_d = \dfrac{I}{nqA}$

Reemplazando esta expresión de v_d en E_t:

$$E_t = \left(\frac{1}{nq}\right)\frac{IB}{A}$$

Ejemplo 47. Una cinta de metal de 2 cm. de ancho y 0,1 cm. de espesor lleva una corriente de 20A y está situada en un campo magnético perpendicular al plano de la cinta de 2,0 T. La fuerza electromotriz Hall se mide y resulta 4,27 μV. Calcular:

a) La velocidad de desplazamiento de los electrones en la cinta.

b) El número de portadores de carga por unidad de volumen de la cinta.

Solución.

a) Como $E_t = v_d B$

tenemos que, $v_d = \dfrac{E_t}{B} = \dfrac{V/a}{B}$

Siendo $V = 4{,}27\times 10^{-6}\,\text{V}$, $a = 2\times 10^{-2}\,\text{m}$, $B = 2{,}0\,\text{T}$.

Reemplazando valores

$$v_d = \frac{4{,}27\times 10^{-6}}{2\times 10^{-2}\times 2} = 1{,}06\times 10^{-4}\,\text{m/s}$$

b) Como

$$v_d = \frac{I}{nqA}$$

Tenemos que $n = \dfrac{I}{qAv_d}$

Siendo $I = 20\text{A}$, $q = 1{,}602\times 10^{-19}\,\text{C}$,

$v_d = 1{,}06\times 10^{-4}\,\text{m/s}$ y

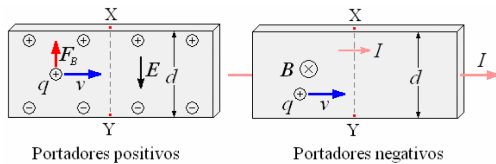
$A = \left(2\times 10^{-2}\right)\left(0{,}1\times 10^{-2}\right) = 0{,}2\times 10^{-4}\,\text{m}^2$

Reemplazando valores

$$n = \frac{20}{\left(1{,}602\times 10^{-19}\right)\left(0{,}2\times 10^{-4}\right)\left(1{,}06\times 10^{-4}\right)}$$

$$= 58{,}8\times 10^{28}\ \text{portadores / m3}$$

Ejemplo 48. Los semiconductores tales como el silicio se pueden dopar con impurezas de modo que los portadores de la carga sean negativos (los electrones) o positivos (agujeros). Esta es una característica importante en la construcción de dispositivos como los transistores. En la figura se bosqueja una disposición para medir el efecto Hall. Tal medida puede determinar el signo y la densidad de los portadores y, cuando está calibrado, se puede utilizar para medir la fuerza de un campo magnético.



Determine una expresión en términos de los parámetros dados para el voltaje Hall medido entre los puntos X e Y en el arreglo mostrado.

Solución.

La fuerza magnética desvía a los portadores hacia arriba de la muestra hasta que un campo eléctrico *E* aumenta lo suficiente hasta cancelarse por la fuerza magnética. Cuando sucede esto $qE = qvB$ y el voltaje entre X e Y es $V_H = Ed = v_d Bd$.

La corriente es $I = nAqv$, donde $A = ad$ y n es la densidad de del portadores. Luego:

$$\frac{V_H}{d} = \frac{I}{nAq}B \Rightarrow V_H = \frac{1}{nq}\frac{IB}{a}$$

1/*nq* es el coeficiente de Hall. Si los portadores son negativos, y la corriente es hacia la derecha, como en el dibujo, la velocidad del portador se dirige a la izquierda, y la fuerza magnética empuja otra vez los portadores hacia arriba. En este caso V_H es negativo, mientras que V_H es positivo para los portadores positivos. Así la medida del coeficiente de Hall determina el signo de los portadores y su densidad ya que casi siempre $q = e$.

Ejemplo 49. En un experimento de efecto Hall una muestra de 12 mm de espesor se utiliza con un campo magnético de 1,6 T. Cuando pasa una corriente de 10 A a través de la muestra, se observa un voltaje Hall de 0,080 V. ¿Cuál es la densidad del portador, asumiendo *q* = *e*?

Solución.

$$V_H = \frac{1}{nq}\frac{IB}{a} \Rightarrow n = \frac{IB}{eV_H a}$$

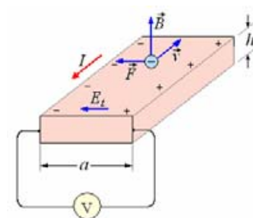
Reemplazando valores:

$$n = \frac{(10)(1,6)}{(1,6\times 10^{-19})(0,08\times 10^{-6})(12\times 10^{-3})} =$$

$1,04 \times 10^{29}$ m^{-3}

Ejemplo 50. Determinar la fuerza electromotriz Hall que se produce en una cinta de cobre (suponiendo para éste metal un electrón libre por átomo) de 0,2 cm de espesor, por la que circula una intensidad de corriente de 5 A, cuando se aplica un campo magnético uniforme de 1,5 T, perpendicular a la cinta. Densidad del cobre 8,95 g/cm3, masa atómica 63,5 g.

Solución.



El número de electrones libres por unidad de volumen del cobre será. $N = \dfrac{N_a \rho}{M_m}$

La fuerza electromotriz Hall es: $\varepsilon = Ed = vBa$

Además $J = \dfrac{I}{A} = Nqv \Rightarrow v = \dfrac{I}{NqA}$

De lo anterior: $\varepsilon = \dfrac{IaB}{NqA}$

$$\varepsilon = \frac{IBM_m}{N_A \rho e h} =$$

$$\frac{(5)(1,5)(63,5\times 10^{-3})}{(6,02\times 10^{23})(8,985\times 10^{3})(1,6\times 10^{-19})(2\times 10^{-3})}$$

$= 0,3\times 10^{-6}$ V

LEY DE AMPERE, LEY DE BIOT Y SAVART

Después de los experimentos de Oersted en 1820 que describen el movimiento de les agujas de una brújula por la acción de un alambre por el que circula corriente eléctrica, muchos científicos trabajaron sobre este fenómeno. Jean Baptiste Biot y Félix Savart anunciaron los resultados de las mediciones de la fuerza que actúa la aguja magnética en la cercanía del alambre con corriente. André Marie Ampere amplió estos experimentos y demostró que los propios elementos de corriente experimentan una fuerza en presencia de un campo magnético, demostró que dos corrientes ejercen fuerzas entre sí.

LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO

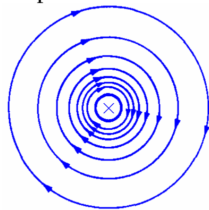
Como vimos en nuestros estudios de la electrostática, la ley de Gauss y la existencia de una función de potencial determinan, en gran parte, todas las características esenciales del campo electrostático. Hay dos leyes análogas, denominadas ley de Gauss para el magnetismo y ley de Ampere que desempeñan el mismo papel para el campo *B*. La finalidad de esta sección y la que sigue es analizar esas dos descripciones muy importantes del campo de inducción magnética. Como se verá en el capítulo que sigue, la importancia de estas dos leyes se debe, en general, al hecho de que son básicas para las ecuaciones de Maxwell. De hecho, la ley de Gauss para el magnetismo es una de las cuatro relaciones básicas. Además, para cualquier distribución dada de corrientes, las leyes de Ampere y Gauss,

cuando se toman juntas, constituyen una especificación completa del campo B en todas partes. Por tanto constituyen la generalización necesaria de la ley más restringida de Biot Savart, que se aplica sólo a los flujos de corriente en alambres delgados.
Por analogía con la definición del flujo eléctrico, definimos el flujo magnético a través de una superficie *S* mediante

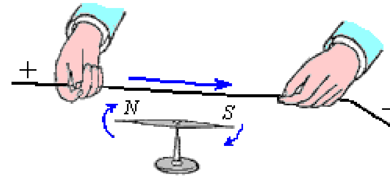
$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

en donde *dS* es un elemento de área normal a *S*, $\vec{B}$ es el valor del campo magnético en ese punto y la integral es sobre la superficie de *S*. En función de esta cantidad, la ley de Gauss para el magnetismo establece que el flujo magnético de todas las superficies cerradas desaparece. Por ende

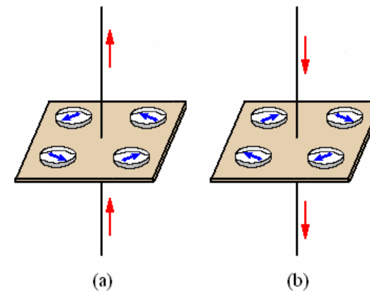
$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$, en donde *dS* es un elemento vectorial de área dirigido hacia el exterior a partir de la superficie cerrada *S*. La comparación con la ley de Gauss para el campo *E*, $\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, nos lleva a la conclusión de que no hay análogo magnético para la carga eléctrica. Con frecuencia describimos esto, diciendo que no hay monopolos magnéticos. La validez de (25-11) se estableció mediante un gran número de experimentos y a pesar de las investigaciones continuas, nadie ha detectado todavía la presencia de un monopolo magnético
Una de las consecuencias más importantes de la ecuación $\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$ es la de que todas las líneas de campo *B* tienen que ser continuas. Por lo tanto, en general, es cierta la propiedad de las líneas de campo *B*, como se ilustra en la figura abajo, de que siempre se cierran sobre sí mismas.



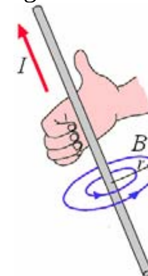
LEY DE AMPERE.
Hans Oersted en 1820 descubrió experimentalmente que una corriente que circula en un alambre produce efectos magnéticos sobre una brújula situada a su alrededor.



Al colocar varias brújulas en los alrededores del alambre estas se orientan tangencialmente a la circunferencia formada por la distancia radial al alambre, figura (a). Al invertir la corriente se orientan tangencialmente pero en sentido contrario, figura (b).



En la práctica se adopta la regla de la mano derecha orientando el pulgar con la corriente y la punta de los dedos con el campo magnético como muestra la figura siguiente.



Se observó experimentalmente que al alejarse del alambre el campo disminuía y al acercarse aumentaba. Asimismo, el campo aumentaba con el aumento de la intensidad de la corriente, es decir $B \propto \frac{I}{r}$ o $B = K\frac{I}{r}$, donde *K* es una constante igual a $2\text{x}10^{-7} \frac{\text{Tesla.m}}{\text{Ampere}}$ en el sistema MKSC.

También $K = \frac{\mu_0}{2\pi}$, donde μ_0 es la constante de permeabilidad en el vacío tiene un valor de

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Tesla.m}}{\text{Ampere}}$$

Finalmente $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$

Esta expresión es conocida como **la ley de Ampere**.
Debido a la dependencia radial de *B* y a que *r* es constante en la circunferencia, podemos expresarla en la siguiente forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Esta expresión es válida en general para cualquier arreglo de conductores con corriente, para cualquier trayectoria cerrada de integración y para cualquier campo *B*, siempre y cuando éste no varíe con el tiempo. La corriente *I* es la corriente encerrada por la integral de línea.
Se puede escribir en función de le densidad de corriente.

Como $\int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$

Donde la integral de superficie de la densidad de corriente corresponde al área encerrada por la integral de línea cerrada.
La ley de Ampere tiene aplicación muy limitada ya que solo puede evaluar problemas que tienen simetría.

Ejemplo 51. Se tiene un conductor cilíndrico largo y recto de radio - R que lleva una corriente 1 uniformemente distribuida. Calcular el campo magnético para puntos dentro y fuera del alambre.
Solución.
a) Campo magnético para $r > R$.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

b) Campo magnético: para $r < R$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

Como la corriente *I* es uniforme

$$J = \frac{I}{\pi R^2} ; \vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{n}$$

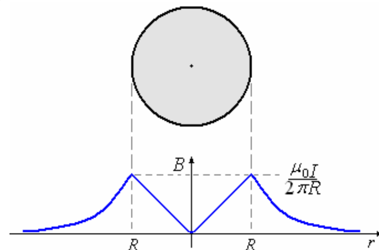
$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

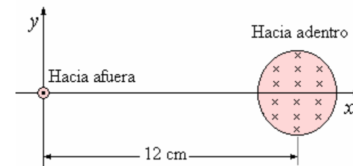
c) Para $r = R$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

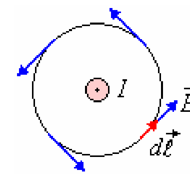
d) El gráfico de *B* versus *r* es



Ejemplo 52. Un hilo rectilíneo conduce una corriente de 4 A, un cable cilíndrico de 3 cm de radio conduce la misma corriente, uniformemente distribuida, pero en sentido contrario.
a) Determínese, aplicando la ley de Ampere, la expresión de campo magnético producido por cada una de las corrientes rectilíneas infinitas a una distancia *r*, de forma separada.
b) Hallar el campo magnético (módulo, dirección y sentido), en los puntos (13 cm, 0), y en el punto (0 cm, 4 cm) producido por las dos corrientes.
c) Por último, hallar la fuerza, (módulo, dirección y sentido) que ejerce el cable sobre la unidad de longitud del hilo rectilíneo.



Solución.
a) El campo magnético producido por el hilo rectilíneo



El campo es perpendicular al plano formado por la corriente y el punto, su sentido está dado por la regla de la mano derecha.
Se toma como camino cerrado una circunferencia concéntrica de radio *r*. Aplicando la ley de Ampere:

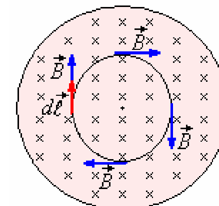
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I ,$$

B es constante en todos los puntos de la circunferencia

$$\oint B d\ell \cos\theta = B \oint d\ell = B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{2\mu_0}{\pi r}$$

El campo magnético producido por el cable cilíndrico.



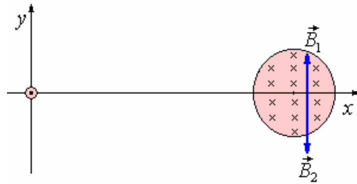
Para $r < 0{,}03\,\text{m}$ y la corriente está uniformemente distribuida $I = 4\frac{\pi r^2}{\pi (0{,}03)^2}$

$$B(2\pi r) = \mu_0 4 \frac{r^2}{0{,}03^2} \Rightarrow B = \frac{2\mu_0 r}{0{,}03^2 \pi}$$

Para $r > 0{,}03\,\text{m}$ $I = 4\,\text{A}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r} = \frac{2\mu_0}{\pi\, r}$$

b) Campo magnético resultante en el punto (13 cm, 0)



$$B_1 = \frac{2\mu_0}{\pi 0{,}13} = 0{,}62\times10^{-5}\ \text{T},$$

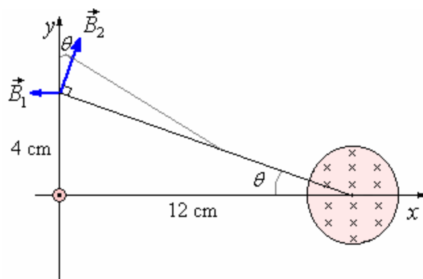
$$\vec{B}_1 = 0{,}62\times10^{-5}\,\hat{j}$$

$$B_2 = \frac{2\mu_0(0{,}01)}{\pi(0{,}03)^2} = 0{,}89\times10^{-5}\ \text{T},$$

$$\vec{B}_2 = -0{,}89\times10^{-5}\,\hat{j}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -0{,}27\times10^{-5}\,\hat{j}\ \text{T}$$

Campo magnético en el punto (0 cm, 4 cm).



$$B_1 = \frac{2\mu_0}{\pi 0{,}04} = 2\times10^{-5}\ \text{T},\ \vec{B}_1 = -2\times10^{-5}\,\hat{i}$$

$$B_2 = \frac{2\mu_0}{\pi\sqrt{0{,}12^2 + 0{,}04^2}} = 6{,}32\times10^{-6}\ \text{T},$$

$$\vec{B}_2 = B_2 \operatorname{sen}\theta\hat{i} + B_2\cos\theta\hat{j} =$$
$$2\times10^{-6}\hat{i} + 6\times10^{-6}\,\hat{j}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -1{,}8\times10^{-5}\hat{i} + 6\times10^{-6}\,\hat{j}\ \text{T}$$

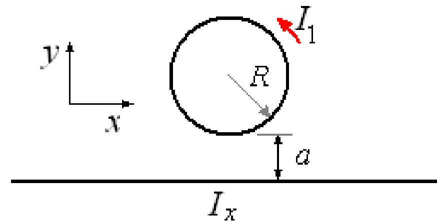
c) La fuerza, que ejerce el cable sobre la unidad de longitud del hilo rectilíneo.



$$B_2 = \frac{2\mu_0}{\pi 0{,}12} = 0{,}67\times10^{-5}\ \text{T}$$

$\vec{F}_B = I\,\vec{L}\times\vec{B}_2$, $F_B = (4)(1)B_2 \operatorname{sen}90^{\circ}$ = $2{,}7\times10^{-5}$ N en cada metro de hilo.

Ejemplo 53. La figura muestra dos alambres llevando corriente. La corriente en el anillo tiene un valor y dirección conocidos I_1. Halle el valor y dirección de la corriente I_x en el alambre recto e infinito de manera que el campo en el centro del anillo sea nulo.



Solución.
El campo producido por el anillo es:

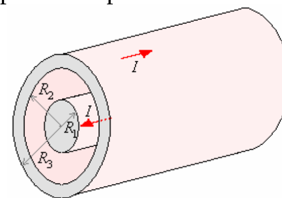
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2R}$$

Para que el campo en el centro del anillo sea nulo, el alambre debe producir un campo igual y de sentido opuesto

$$\vec{B}_a = -\frac{\mu_0 I_1}{2R}\hat{k} = -\frac{\mu_0 I_x}{2\pi(R+a)}\hat{k}$$

Para esto el valor de $I_x = I_1 \dfrac{\pi(R+a)}{R}$, con sentido negativo de *x*.

Ejemplo 54. Se tiene un cable coaxial, tal como se muestra en la figura. Calcular el campo magnético para todo punto.



Solución.
a) Para $r < R_1$

Resuelto en el problema anterior

$$B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$$

b) Para $r = R_1$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

c) Para $R_2 > r > R_1$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

c) Para $r = R_2$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

d) Para $R_3 > r > R_2$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\left(I - \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}dS\right) \Rightarrow$$

$$B2\pi r = \mu_0\left[I - \frac{\pi\left(r^2 - R_2^2\right)}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}I\right] \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left[1 - \frac{\left(r^2 - R_2^2\right)}{\left(R_3^2 - R_2^2\right)}\right]$$

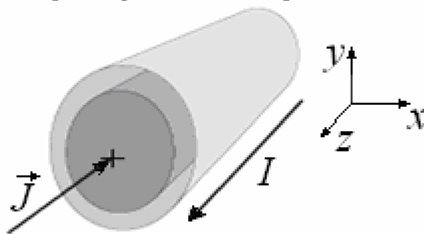
e) Para $r > R_3$

$$B = 0$$

Ejemplo 55. La figura muestra una sección de un alambre coaxial muy largo. Esta formado por un alambre interior de radio *a* y con densidad de corriente $\vec{J} = -\frac{I}{2\pi ra}\hat{k}$, y además por un cascarón muy delgado de radio *b* llevando una corriente *I* en su superficie. Hallar

a) La corriente neta en el alambre interior macizo.

b) El campo magnético en el espacio entre *a* y *b*.



Solución.

a) $I' = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{r=0}^{r=a}\left(-\frac{I}{2\pi ra}\hat{k}\right)\cdot\left(2\pi rdr\hat{k}\right)$

$$= -\frac{I}{a}\int_0^a dr = -I$$

b) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I\left(1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right)$

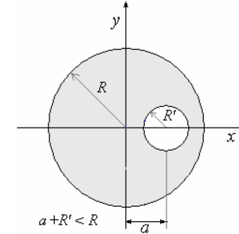
$$\Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I\left(1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right) \Rightarrow$$

$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}I\left(1 - \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right)$, en el sentido horario.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I\frac{r}{a} \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I\frac{r}{a} \Rightarrow$$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$, en el sentido horario.

Ejemplo 56. En el conductor cilíndrico hueco mostrado en la figura circula una corriente *I* uniforme hacia afuera. Calcular el campo magnético en la parte hueca.

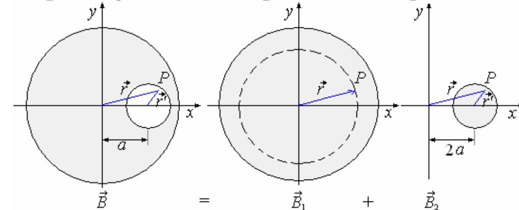


Solución.

Estando la corriente distribuida uniformemente, la densidad de corriente es

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi\left(R^2 - R'^2\right)}\hat{k}$$

En la figura siguiente se muestra gráficamente el campo magnético en un punto P en la parte hueca.



Cálculo de $\vec{B}_1$

$$\oint \vec{B}_1\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\int_S \vec{J}\cdot\hat{n}dS \Rightarrow$$

$$B_1 2\pi r = \mu_0 J\pi r^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_9 J}{2\pi}r$$

La dirección del vector $\vec{B}_1$ está en la dirección del vector $\vec{r}\times\vec{J}$ como $\vec{r}$ y $\vec{J}$ son perpendiculares podemos escribir.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\vec{r}\times\vec{J}$$

Cálculo de $\vec{B}_2$

Procediendo de igual manera

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \vec{r}' \times \vec{J}$$

Finalmente $\vec{B}$ es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 - \vec{B}_2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \vec{r} \times \vec{J} - \frac{\mu_9}{2\pi} \vec{r}' \times \vec{J}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\vec{r} - \vec{r}' \right) \times \vec{J} = \frac{\mu_0}{2\pi} a\hat{i} \times \vec{J}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} a\hat{i} \times J\hat{k} = \frac{\mu_0}{2\pi} aJ \ \hat{j}$$

Ejemplo 57. Un estudiante en un lugar donde la componente horizontal del campo magnético de la tierra es 1,7 x l0^{-7} Wb/m^2, está realizando un experimento usando una brújula en un laboratorio que también tiene un experimento con un alambre vertical largo que lleva una corriente de 50 A. ¿Qué distancia los experimentos deben estar separados para que la aguja de la brújula sea afectada insignificante por el campo del alambre?

Solución.

La componente horizontal del campo magnético de la tierra es 1,7 x l0^{-5} Wb/m^2. El efecto magnético debido al alambre vertical debe ser menor que 1/100 que esto para que su efecto sea insignificante a la exactitud de una aguja de brújula. Así si *r* es la distancia mínima por la cual los dos experimentos deben estar separados,

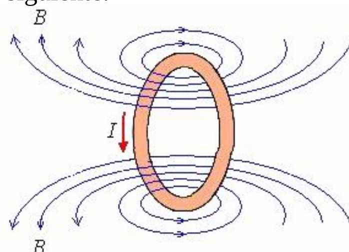
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\text{r}} = 1{,}7 \times 10^{-7} \text{Wb/m}^2$$

$$\Rightarrow \ r = \frac{\left(2 \times 10^{-7}\right)(50)}{1{,}7 \times 10^{-7}} = 58{,}8 \text{ m}$$

Ejemplo 58. Encontrar el campo magnético de un solenoide. Solenoide es un conductor enrollado en forma de hélice y se utiliza para producir un campo magnético interno y uniforme en una pequeña región. -

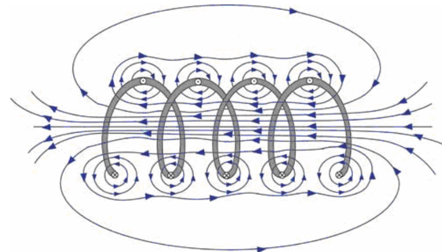
Solución.

Si hacemos pasar corriente por una espira, ésta nos da un campo magnético como el mostrado en la figura siguiente.

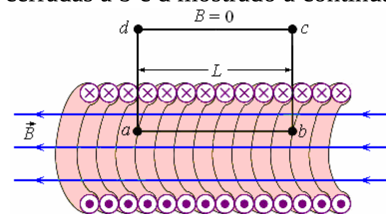


Si juntamos varias espiras de un mismo radio, conectadas entre si, colocadas una a continuación de otras formando una bobina que tiene una longitud grande comparada con el radio de las espiras.

Cuando circula corriente por el solenoide se produce la suma de los campos magnéticos de las espiras, tal como se muestra en la figura.



El campo magnético se refuerza en el interior del solenoide y se anula en la parte exterior. Así que podemos aplicar la ley de Ampere a lo largo de líneas cerradas a b c d mostrado a continuación.



Parte central del Solenoide

Aplicando la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (N\ell I)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

La única parte que tiene valor es $\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B\ell$

N es el número de espiras por unidad de longitud.

La corriente total encerrada por la superficie es $(N\ell I)$.

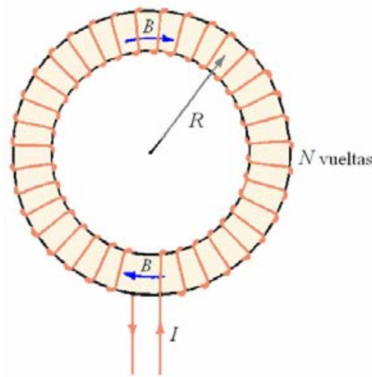
De esta manera

$$B\ell = \mu_0 (N\ell I)$$

Finalmente

$$B = \mu_0 NI$$

Ejemplo 59. El toroide. Determine el campo dentro de un toroide de *N* vueltas que llevan la corriente *I*. Un toroide es como un solenoide doblado en una forma de circunferencia.



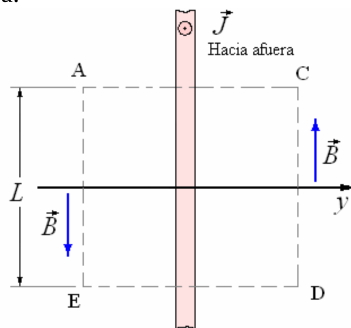
Solución.
Aplique la ley del amperio a una trayectoria circular dentro del toroide. Por simetría, *B* es tangencial a esta trayectoria y constante en magnitud a lo largo de la trayectoria, tal que

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B\oint d\ell = 2\pi RB = \mu_0 NI$$

$$\Rightarrow \; B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

Si la trayectoria integral está fuera del toroide, la corriente que atraviesa el plano encerrado por la trayectoria es cero, así el campo fuera de un toroide ideal es cero.

Ejemplo 60. Una hoja conductora infinita en el plano del *xz* lleva una densidad de corriente uniforme (por unidad de ancho) $\vec{J}_\ell$ en la dirección *x*. Determine el campo magnético fuera de la hoja.

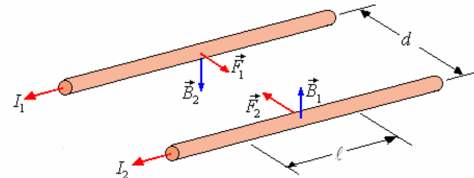


Solución.
Por medio de la regla de la mano derecha se ve que $\vec{B}$ está dirigido según se muestra en la figura. Por simetría, $\vec{B}$ es constante en magnitud. $\vec{B}$ y $d\vec{\ell}$ son perpendiculares a lo largo de la CA y de DE, tal que $\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 0$ allí. Aplicando la ley del Ampere

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 2BL = \mu_0 J_\ell L \;\; \Rightarrow \;\; B = \mu_0 \frac{J}{2}$$

FUERZA ENTRE DOS CONDUCTORES PARALELOS

Anteriormente vimos que cuando un alambre de longitud ℓ por el cual circula una corriente *I* se encuentra en un campo magnético sufre la acción de una fuerza $\vec{F} = I\,\vec{\ell}\times\vec{B}$.
Si tenemos dos alambres rectos paralelos por los cuales circulan corrientes I_1 e I_2 respectivamente como se muestra en la figura, separados una distancia d.



Debido a la corriente I_1 a la distancia *d* se forma un campo magnético $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$ produciendo sobre el alambre por el que circula una fuerza $F_2 = I_2 \ell B_1$ (dirigida hacia el alambre 1).
Reemplazando el valor de B_1

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d}$$

De igual modo encontramos el valor de F_1.

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d}$$ (dirigida hacia el alambre 2)

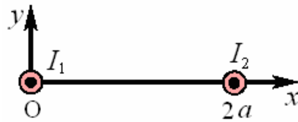
Por supuesto se cumple el principio de acción y reacción.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

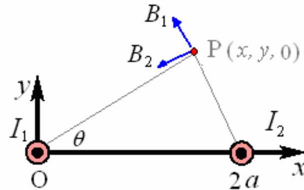
Si las corrientes son en sentidos opuestos la fuerza entre los alambres es de repulsión.

Ejemplo 61. Sean dos alambres rectos, muy largos, y paralelos entre sí, por los que pasa una corriente I_1 e I_2 en el mismo sentido. Suponga que el alambre I_1 coincide con el eje *z*, el alambre I_2 pasa por el punto $x = 2a$, y que las corrientes tienen el sentido positivo de *z*. La figura anexa muestra un corte transversal de los alambres.
a) Halle el vector de campo magnético en el punto $P_1 = (x; y; 0)$ debido a los dos alambres.
b) Se coloca un alambre recto de longitud *L*, paralelo a los alambres anteriores, cuyo centro coincide con el punto $P_2 = (a; a; 0)$, y por el que pasa una corriente I_3 en el mismo sentido de I_1. Suponga que $I_1 = I_2 = I$. Halle el vector de fuerza sobre el alambre I_3.

c) Suponga que cambia el sentido de I_2; es decir, $I_2 = I$. ¿Cómo cambia el vector de fuerza sobre el alambre I_3? Justifique su respuesta.



Solución,
a) Halle el vector de campo magnético en el punto $P_1 = (x; y; 0)$ debido a los dos alambres.



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\left[-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}\right]$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\left[(x-2a)^2+y^2\right]^{1/2}}\left[-\cos\theta\,\hat{i}-\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\right]$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}},\ \cos\theta = \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}$$

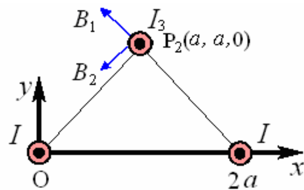
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 =$$

$$\frac{\mu_0}{2\pi\left[x^2+y^2\right]^{1/2}}\left[\frac{I_1\left(-y\hat{i}+x\hat{j}\right)}{\left[x^2+y^2\right]^{1/2}}+\frac{I_2\left(-x\hat{i}+y\hat{j}\right)}{\left[(x-2a)^2+y^2\right]^{1/2}}\right] =$$

$$\frac{\mu_0}{2\pi\left[x^2+y^2\right]^{1/2}}\left\{\left[\frac{-yI_1}{\left[x^2+y^2\right]^{1/2}}+\frac{-xI_2}{\left[(x-2a)^2+y^2\right]^{1/2}}\right]\hat{i}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{xI_1}{\left[x^2+y^2\right]^{1/2}}+\frac{yI_2}{\left[(x-2a)^2+y^2\right]^{1/2}}\right]\hat{j}\right\}$$

b) Se coloca un alambre recto de longitud *L*, paralelo a los alambres anteriores, cuyo centro coincide con el punto $P_2 = (a; a; 0)$, y por el que pasa una corriente I_3 en el mismo sentido de I_1. Suponga que $I_1 = I_2 = I$. Halle el vector de fuerza sobre el alambre I_3.



$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a}\left[-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[-\hat{i}+\hat{j}\right]$$

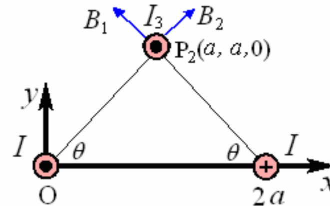
$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a}\left[-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i}-\cos\theta\,\hat{j}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[-\hat{i}-\hat{j}\right]$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{i}$$

$$\vec{F} = I_3\hat{k}\times\left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{i}\right) = -\frac{\mu_0 I I_3}{2\pi a}\hat{j}$$

c) Suponga que cambia el sentido de I_2; es decir, $I_2 = -I$. ¿Cómo cambia el vector de fuerza sobre el alambre I_3? Justifique su respuesta.



$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a}\left[-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i}+\cos\theta\,\hat{j}\right] =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[-\hat{i}+\hat{j}\right]$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a}\left[\cos\theta\,\hat{i}+\operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\right] =$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\hat{i}+\hat{j}\right]$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{j}$$

$$\vec{F} = I_3\hat{k}\times\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{j}\right) = \frac{\mu_0 I I_3}{2\pi a}\hat{i}$$

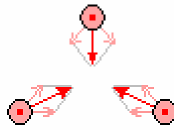
Ejemplo 62. Tres alambres paralelos e infinitos se colocan de manera que pasan por los vértices de un triángulo equilátero. ¿Es posible que los tres se repelan o los tres se atraigan simultáneamente? ¿Por qué?






Solución.
Corrientes en la misma dirección atraen y corrientes en direcciones opuestas repelen. Si los

tres alambres llevan corrientes en la misma dirección ellos se atraen uno a otro.



No hay forma de tener todos los pares con corrientes opuestas, de tal manera no es posible tener a los tres alambres repeliéndose uno a otro.

DEFINICIÓN DE LA UNIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA (AMPERE)

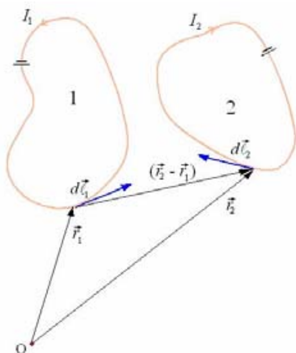
Anteriormente dejamos pendiente la definición de Ampere, la cual podemos hacerla ya en esta parte: Si por dos conductores paralelos muy largos situados a la distancia de 1 metro entre sí, se hacen circular corrientes iguales que causen una fuerza por unidad de longitud sobre cada conductor de $2x10^{-7}$ N/m. La corriente en cada uno de ellos es igual a un Ampere.

En la práctica se escogen separaciones muy próximas y no es necesario que los conductores sean tan largos, la fuerza resultante es lo suficientemente grande como para medirse con exactitud.

LEY DE BIOT Y SAVART

Hasta aquí solo hemos tratado con casos simétricos. Pero en general no es así y se presenta el problema de los casos carentes de simetría y esto lo veremos a continuación.

En la figura siguiente se muestran dos circuitos completos



Ampere encontró experimentalmente la relación que nos da la fuerza $\vec{F}_2$ ejercida sobre el circuito 2 debido a la influencia del circuito 1, esta relación expresada en un lenguaje de matemática moderna es

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_2 \times \left[d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right) \right]}{\left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|^3}$$

A pesar de la aparente falta de simetría se puede demostrar por medio del análisis vectorial que esta ecuación es simétrica, esto es $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, cumpliéndose así la tercera ley de Newton.

Sabemos que

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B},\ \vec{F} = \oint_c Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Esto implica que

$$\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right)}{\left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|^3}$$

y su forma diferencial

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right)}{\left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|^3}$$

Expresión conocida como ley de Biot y Savart, análoga a la ley de Coulomb. La causa del campo magnético es el elemento de corriente $d\ell$, del mismo modo que la carga q es la causa del campo eléctrico, el campo magnético al igual que el campo eléctrico disminuye proporcionalmente a la inversa del cuadrado de la distancia.

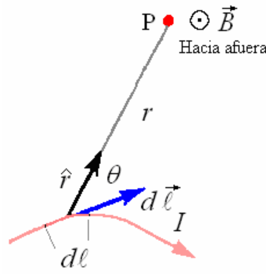
Mientras el campo electrostático señala en dirección radial el campo magnético es perpendicular tanto a la dirección radial como a la dirección del elemento de corriente $d\ell$.

Otra demostración. Considere una corriente *I* que fluye en un alambre. Rompa el alambre en pequeños pedazos de la longitud *ds*. El campo magnético debido a este pequeño pedazo de corriente se encuentra experimentadme que es.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \text{ o } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell \operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

Ésta es la ley de Biot y Savart. Aquí *r* es la distancia del elemento actual *I ds* en el punto P del campo donde deseamos encontrar el campo magnético *B*. $\hat{r}$ es un vector unitario apuntando a lo largo de $\vec{r}$. μ_0 es una constante de la naturaleza, es la permeabilidad del espacio libre.

Recuerde para determinar la dirección de $d\vec{\ell} \times \hat{r}$ usar la regla de la mano derecha, señale sus dedos a lo largo de $d\vec{\ell}$, y gírelos hacia $\hat{r}$. EL pulgar derecho apuntará a lo largo de $d\vec{B}$.

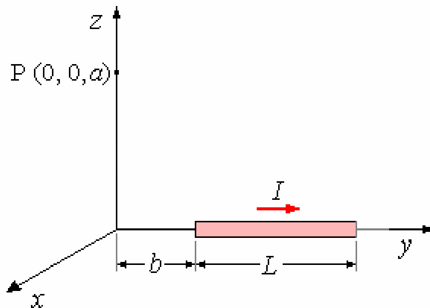


Para encontrar el campo magnético total debido a un conductor, sumamos las contribuciones de cada elemento de corriente integrando sobre el conductor entero. Así

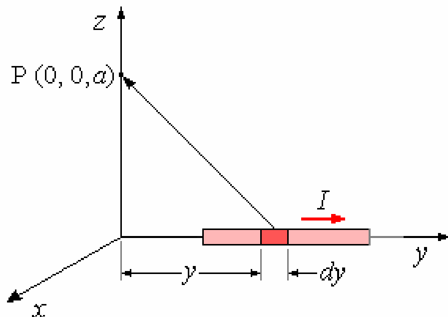
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$$

La ley de Biot y Savart fue descubierta experimentalmente, pero puede ser derivada de la ley de Coulomb usando la teoría de la relatividad especial.

Ejemplo 63. Campo magnético producido por un segmento de recta.



Solución.
Se quiere encontrar el campo magnético con el punto P, producido por el segmento mostrado en la figura siguiente.



En este caso

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_b^{b+L} \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$

Aquí: $I_1 = I$, $d\vec{\ell}_1 = dy\hat{j}$, $\vec{r}_1 = y\hat{j}$,
$\vec{r}_2 = a\hat{k}$, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = a\hat{k} - y\hat{j}$ y

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \left(a^2 + y^2\right)^{1/2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_b^{b+L} \frac{dy\hat{j}\times\left(a\hat{k} - y\hat{j}\right)}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}} =$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_b^{b+L} \frac{a dy}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}\hat{i}$$

Integrando

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\left[\frac{y}{a^2\sqrt{a^2+y^2}}\right]_b^{b+L}\hat{i}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\frac{b+L}{\sqrt{a^2+(b+L)^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]\hat{i}$$

En el caso de tratarse de una recta infinita los límites serían de $-\infty$ a ∞.

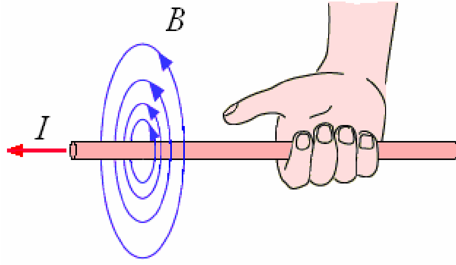
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}\left[\frac{y}{a^2\sqrt{a^2+y^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}\hat{i}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]_0^{\infty}\hat{i}$$

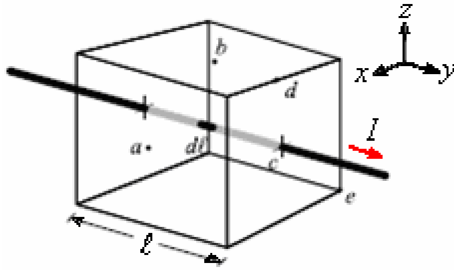
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{y^2}+1}}\right]_{-\infty}^{\infty}\hat{i}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{i}$$

CONDUCTOR RECTILÍNEO INFINITO.
El campo magnético debido a un conductor rectilíneo muy largo es tangente a una circunferencia concéntrica con él mismo. El sentido de $\vec{B}$ esta relacionado con el sentido de la corriente I por la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura a continuación.



Ejemplo 64. La figura muestra un alambre recto de corriente *I* que atraviesa un material no magnético en forma de un cubo de lado ℓ. Una sección $d\vec{\ell}$ situada en el centro del cubo produce un campo $d\vec{B}$. Hallar $d\vec{B}$ cuando lo calculamos en los puntos *a*, *b* , *c*, *d* y *e*. Los puntos *a*, *b* y *c* están en el centro de las caras que forma el cubo, el punto *d* en el punto medio de una arista y el punto *e* en el vértice.



Solución.
En *a*: cero
En *b*:

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$

$$d\vec{\ell}_1 = d\ell\,\hat{j},\ \vec{r}_2 = \frac{\ell}{2}\hat{k},\ \vec{r}_1 = 0$$

$$\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \frac{\ell}{2}\hat{k},\ \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \frac{\ell}{2}$$

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\ell\hat{j} \times \frac{\ell}{2}\hat{k}}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^3} = \frac{\mu_0}{\pi} I_1 \frac{d\ell}{\ell^2}\hat{i}$$

En *c*: cero
En *d*:

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$

$$d\vec{\ell}_1 = d\ell\,\hat{j},\ \vec{r}_2 = \frac{\ell}{2}\hat{j} + \frac{\ell}{2}\hat{k},\ \vec{r}_1 = 0$$

$$\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \frac{\ell}{2}\hat{j} + \frac{\ell}{2}\hat{k},\ \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\ell\hat{j} \times \left(\frac{\ell}{2}\hat{j} + \frac{\ell}{2}\hat{k}\right)}{\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\sqrt{2}\pi} I_1 \frac{d\ell}{\ell}\hat{i}$$

En *e*:

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$

$$d\vec{\ell}_1 = d\ell\,\hat{j},\ \vec{r}_2 = \frac{\ell}{2}\hat{i} + \frac{\ell}{2}\hat{j} + \frac{\ell}{2}\hat{k},\ \vec{r}_1 = 0$$

$$\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \frac{\ell}{2}\hat{i} + \frac{\ell}{2}\hat{j} + \frac{\ell}{2}\hat{k},$$

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$d\vec{B}_{(r_2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\ell\hat{j} \times \left(\frac{\ell}{2}\hat{i} + \frac{\ell}{2}\hat{j} + \frac{\ell}{2}\hat{k}\right)}{\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^3}$$

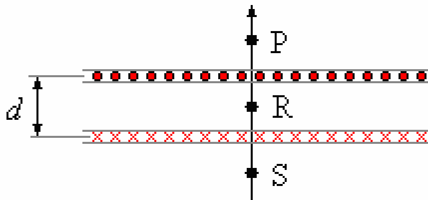
$$= \frac{\mu_0}{3\sqrt{3}\pi} I_1 \frac{d\ell}{\ell}\left(-\hat{k} + \hat{i}\right)$$

Ejemplo 65. Se dispone de alambres conductores delgados, infinitamente largos y revestidos de material aislante, los cuales se ubican uno al costado del otro para formar una lámina infinita de corriente, con *n* conductores por unidad de longitud, y cada conductor portando una corriente *I*.

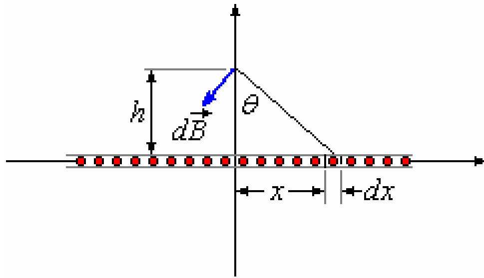
a) Calcule el campo magnético $\vec{B}$ producido por este arreglo de conductores en puntos situados a una distancia *h*, a ambos lados de la lámina.

Ahora, suponga que se ubican dos de estas láminas infinitas de corriente en forma paralela, separadas una distancia *d*, como lo muestra el dibujo siguiente. Cada conductor de la lámina de

arriba lleva una corriente I saliendo del plano del dibujo y cada conductor de la lámina de abajo también lleva una corriente I, pero entrando al plano del dibujo.
El número de conductores por unidad de longitud de la lámina de arriba es n_1 y el número de conductores por unidad de longitud de la de abajo es n_2. Suponga que $n_1 > n_2$ el eje de coordenadas x es horizontal.
Calcule la magnitud y dirección del campo magnético $\vec{B}$, producido por las dos láminas:
b) En el punto P, situado arriba de la lámina superior.
c) En el punto S. situado debajo de la lámina inferior.
d) En el punto R. equidistante de las láminas.
e) Cuál sería el campo en los mismos puntos P, R y S si $n_1 = n_2$.



Solución.
a)



$$dB = \frac{\mu_0 Indx}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)^{1/2}}$$

Al integrar desde – infinito a + infinito las componentes verticales se anulan, de tal modo que vamos a trabajar con la componente horizontal de $d\vec{B}$.

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 Indx}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)^{1/2}}\cos\theta\,\hat{i} =$$

$$-\frac{\mu_0 Indx}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)^{1/2}}\frac{h}{\left(x^2 + h^2\right)^{1/2}}\hat{i} =$$

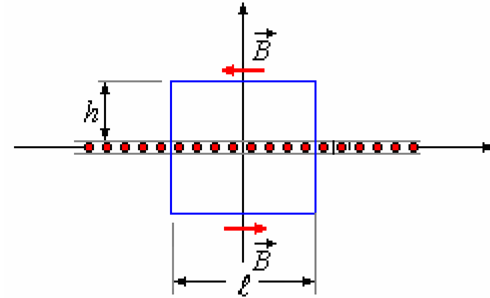
$$-\frac{\mu_0 Inhdx}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\hat{i}$$

$$\vec{B} = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0 Inhdx}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\hat{i}$$

$$= -\frac{\mu_0 Inh}{\pi}\hat{i}\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2 + h^2\right)} = -\frac{\mu_0 In}{\pi}\hat{i}\tan^{-1}\frac{x}{h}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{\mu_0 In}{2}\hat{i}$$

Otra manera de calcular es mediante la ley de Ampere, como en el ejemplo 60.
Debido a que el campo magnético producido por los infinitos alambres produce un campo uniforme, en la parte superior dirigido hacia la derecha y en la parte inferior hacia la izquierda es factible utilizar la ley de Ampere.

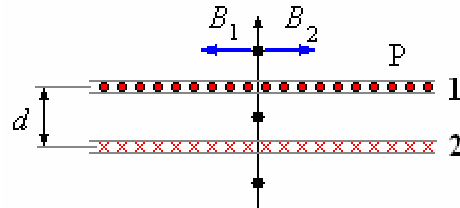


$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 n\ell I \Rightarrow B\ell + B\ell = \mu_0 n\ell I \Rightarrow$$

$$2B\ell = \mu_0 n\ell I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 nI}{2}$$

A la distancia h: $\overleftarrow{B} = -\frac{\mu_0 In}{2}\hat{i}$

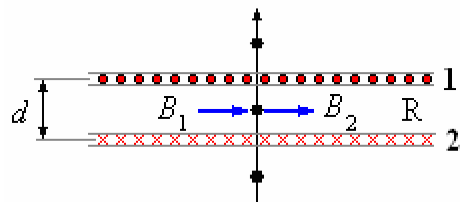
b) En el punto P:



$$\vec{B}_P = -\frac{\mu_0 In_1}{2}\hat{i} + \frac{\mu_0 In_2}{2}\hat{i} = -\frac{\mu_0 I}{2}\left(n_1 - n_2\right)\hat{i}$$

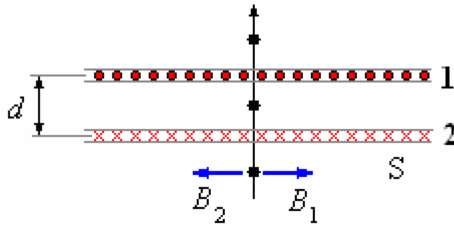
c) En el punto R:

$$\vec{B}_R = \frac{\mu_0 In_1}{2}\hat{i} + \frac{\mu_0 In_2}{2}\hat{i} = \frac{\mu_0 I}{2}\left(n_1 + n_2\right)\hat{i}$$



d) En el punto S:

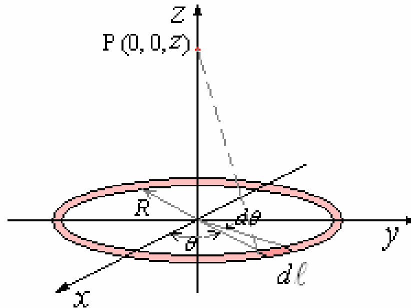
$$\vec{B}_S = \frac{\mu_0 In_1}{2}\hat{i} - \frac{\mu_0 In_2}{2}\hat{i} = \frac{\mu_0 I}{2}\left(n_1 - n_2\right)\hat{i}$$



e) Si $n_1 = n_2$:

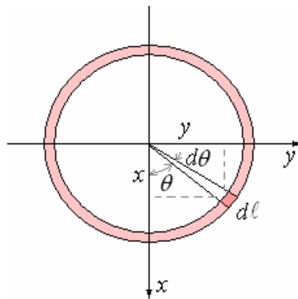
$$\vec{B}_P = 0,\ \vec{B}_R = \mu_0 In\hat{i},\ \vec{B}_S = 0$$

Ejemplo 66. Encontrar el campo magnético en el punto P en el eje de una espira circular de corriente.



Solución.
En este caso

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$



$$I_1 = I,\ d\vec{\ell}_1 = Rd\theta\left(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right),$$

$$\vec{r}_1 = R\left(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}\right),\ \vec{r}_2 = z\hat{k}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = z\hat{k} - R\left(\cos\theta\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\hat{j}\right),$$

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \left(R^2 + z^2\right)^{1/2}$$

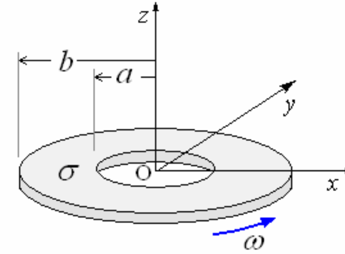
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{Rd\theta\left(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right) \times \left(-R\cos\theta\,\hat{i} - R\operatorname{sen}\theta\,\hat{j} + z\hat{k}\right)}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{\left(zR\cos\theta\,\hat{i} + zR\operatorname{sen}\theta\,\hat{j} + R^2\hat{k}\right)}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} d\theta$$

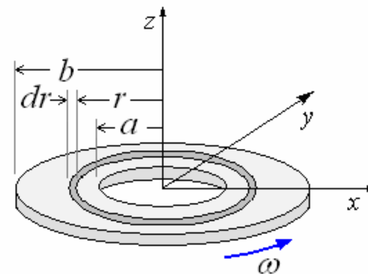
La integral de los términos en $\hat{i}$ y $\hat{j}$ da cero, finalmente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \hat{k}$$

Ejemplo 67. Una arandela delgada (o un disco con hueco concéntrico) de radio interno *a* y de radio externo *b*, tiene una densidad de carga superficial σ. Suponga que la arandela gira en torno a su eje con velocidad angular ω. Calcule el campo magnético en el centro de la arandela.



Solución.



$$i = \frac{2\pi r dr \sigma}{T} = \frac{2\pi r dr \sigma\omega}{2\pi} = \sigma\omega r dr$$

Esta corriente produce un campo magnético en el centro:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o i}{2r}\hat{k} = \frac{\mu_o \sigma\omega}{2} dr\hat{k}$$

El campo debido a toda la arandela lo encontramos integrando de *r* = *a* a *r* = *b*.

$$\vec{B} = \frac{\mu_o \sigma\omega}{2}\hat{k}\int_a^b dr = \frac{1}{2}\mu_o\sigma\omega(b - a)\hat{k}$$

Otra manera, como la arandela tiene poco ancho $(b \approx a)$

$$R_m = \frac{b + a}{2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2R_m}\hat{k} = \frac{\mu_o I}{2\left(\frac{b+a}{2}\right)}\hat{k} = \frac{\mu_o I}{(b + a)}\hat{k}$$

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\sigma\pi\left(b^2 - a^2\right)\omega}{2\pi} = \frac{\sigma\omega\left(b^2 - a^2\right)}{2}$$

Finalmente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o \frac{\sigma\omega\left(b^2 - a^2\right)}{2}}{(b+a)}\hat{k} = \frac{1}{2}\mu_o\sigma\omega(b-a)\hat{k}$$

Ejemplo 68. Determine el campo magnético en el centro de un cuadrado de lado $2a$ que lleva una corriente *I*.

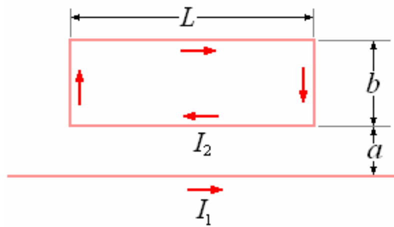
Solución.

El campo opuesto al punto medio de un segmento recto de longitud $2a$ con corriente está dado por la integral $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{dx\text{sen}\theta}{r^2}$.

Hay cuatro de tales segmentos en un cuadrado, tal que:

$$B = 4\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\left(\frac{2a}{a^2\sqrt{a^2+a^2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\mu_0 I}{a}$$

Ejemplo 69. Un alambre recto largo que lleva una corriente I_1 se coloca en el plano de un lazo rectangular que lleva una corriente I_2, ¿cuál es la fuerza neta en el lazo? ¿Es atraída o rechazada por el alambre?



Solución.

Las fuerzas en los extremos del rectángulo se cancelan, tal que:

$$F = B_1 I_2 L - B_2 I_2 L$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right)$$

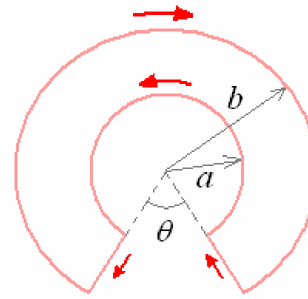
Ejemplo 70. Un solenoide largo de radio *R* y vueltas de *N* por el metro lleva una corriente I_0. En el eje del solenoide hay un alambre recto largo con una corriente I. ¿Qué valor de *I* dará lugar a un campo magnético en el punto *r* = 1/2 *R* que esté en 45º del eje del solenoide?

Solución.

Si el campo resultante está a 45º del eje, el campo del alambre debe tener la misma magnitud que el campo del solenoide, puesto que son perpendiculares. Así

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi\, r} = \mu_0 N I_0,\ r = \frac{R}{2},\ I = \pi R N I_0$$

Ejemplo 71. Encontrar *B* en el punto central del dispositivo de la figura.



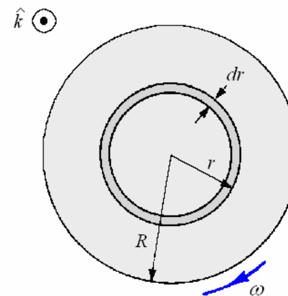
Solución.

Los segmentos rectos no hacen ninguna contribución al campo en el centro; los segmentos curvos dan, por la Ley de Biot y Savart,

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{a(2\pi-\theta)}{a^2} - \frac{b(2\pi-\theta)}{b^2}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I(b-a)(2\pi-\theta)}{4\pi ab}$$

Ejemplo 72. Un disco fonográfico de radio *R*, con una carga uniformemente distribuida *Q*, está rotando con velocidad angular ω. Demostrar que el campo magnético en el centro del disco está dado por $B = \frac{\mu_0\omega Q}{2\pi R}$.



Solución.

En la figura, se muestra el disco en rotación en sentido horario (visto de arriba) con una frecuencia f_c estándar de disco fonográfico. El anillo de carga dq entre los radios r y $r + dr$ constituye una corriente $di = \frac{dq}{T}$, donde

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ es el período de rotación del disco.

$\frac{dq}{Q} = \frac{2\pi\, rdr}{\pi R^2}$, de modo que $dq = \frac{2Q\, rdr}{R^2}$

Usar el resultado del campo magnético en el centro de un anillo, $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, en este caso $I = di$, $R = r$, luego la contribución del anillo diferencial es:

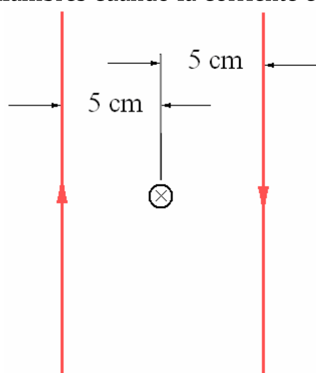
$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{di}{r} = \frac{\mu_0}{2}\frac{\omega}{2\pi}\frac{2Qrdr}{rR^2} = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2}dr$$

El campo magnético en el centro en el centro del disco lo hallamos por integración desde $r = 0$ a $r = R$.

$$B = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^2}\int_0^R dr = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}$$

Para $Q > 0$, el campo tiene la dirección $-\hat{k}$.

Ejemplo 73. La corriente de una fuente de corriente continua es conducida a un instrumento por medio de dos alambres paralelos largos, separados 10 cm. ¿Cuál es el campo magnético entre los alambres cuando la corriente es 100 A?



Solución.
El campo magnético debido a cada alambre en el diagrama en el punto situado entre ellos son perpendiculares e ingresando al papel. Los efectos debido a los alambres por lo tanto se suman en ese punto y el efecto total es dos veces el efecto de cualquiera de ellos. Por lo tanto, en el punto medio entre los alambres,

$$B = 2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} = 2\left(2\times 10^{-7}\right)\frac{100}{0{,}05}$$

= 8 x 10^{-4}Wb/m^2.

Ejemplo 74. Determine el campo magnético una distancia *R* de un alambre recto largo que lleva una corriente *I*.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

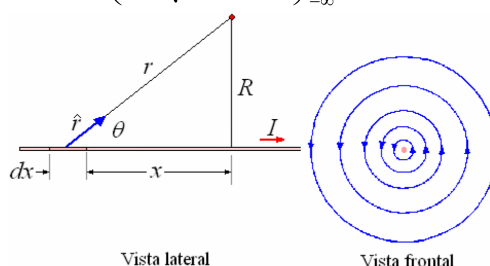
Solución.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

Donde $\operatorname{sen}\theta = \frac{R}{r}$ y $r = \sqrt{x^2 + R^2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Rdx}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{x}{R^2\sqrt{x^2 + R^2}}\right)_{-\infty}^{\infty}$$



En el dibujo de la tapa de la derecha *B* sale del papel. Las líneas de *B* son círculos concéntricos, con su espaciamiento aumentando a medida que se aleja del alambre.

Ejemplo 75. Determine el campo magnético en el centro de un lazo circular de radio *R* que lleva la corriente *I*.
Solución.

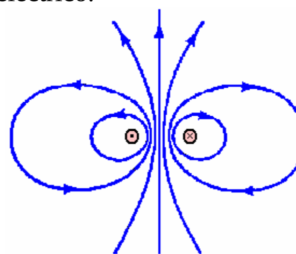
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dx\operatorname{sen}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Rd\theta}{R^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}(2\pi)$$

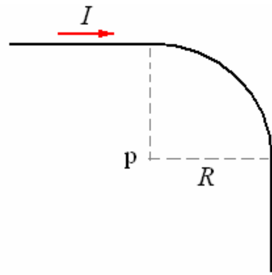
Donde $d\ell = Rd\theta$ y $\theta = 90^\circ$, luego

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

El campo magnético de un lazo pequeño con corriente es como el de un imán de barra pequeño, con las líneas de *B* que brotan fuera de un Polo Norte imaginario y que van al otro extremo a un polo sur imaginario. Así el campo de un lazo pequeño con corriente es el de un dipolo magnético, con el mismo aspecto que el campo de un dipolo eléctrico.



Ejemplo 76. ¿Un alambre recto largo que lleva una corriente *I* está doblad 90º en un arco circular del radio *R*. ¿Cuál es el campo magnético en el centro del arco?



Solución.
Cada sección recta es como una mitad de un alambre recto infinitamente largo, así que la contribución de estas dos secciones es

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$. La contribución de la sección curvada es el de un cuarto de un círculo completo, $B = \frac{1}{4}\frac{\mu_0 I}{2R}$. Luego en el centro

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{8R} = 0{,}28\frac{\mu_0 I}{R}$$

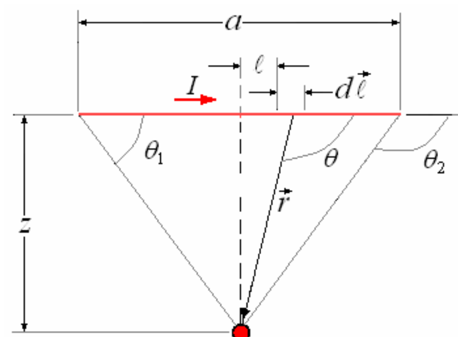
Ejemplo 77. ¿Un alambre largo, horizontal, rígido apoyado lleva una corriente de 50 A. Directamente sobre él y paralelo hay un alambre fino, cuyo peso es 0,075 N por metro, que llevar uno corriente de 25 A. ¿A qué distancia sobre el primer alambre debe estar el segundo alambre para ser sostenido por la repulsión magnética?
Solución.
Si el alambre superior va a ser soportado por la repulsión magnética, la fuerza magnética por longitud de unidad debe igualar el peso de una longitud de unidad del alambre. Además, las corrientes en los dos alambres deben estar en direcciones opuestas para que la fuerza entre los alambres sea de repulsión. Por lo tanto

$$\frac{mg}{\ell} = \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{II'}{r} \Rightarrow r = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{II'}{mg/\ell} =$$

$$2\times 10^{-7}\frac{(50)(25)}{0{,}075} = 0{,}33 \times 10^{-2}\text{m} = 0{,}33 \text{ cm}$$

Por lo tanto los alambres deben ser muy finos para permitir que sus centros estén muy cercanos.

Ejemplo 78. Determine el valor del campo magnético en el centro de una bobina rectangular de largo *a* y ancho *b*, que lleva una corriente *I*.
Solución.



Considere el alambre de longitud *a* en la figura arriba. Cualquier elemento $d\vec{\ell}$ tiene la dirección del flujo de la corriente y $d\vec{\ell}\times\vec{r}$ da un vector, para todo $d\vec{\ell}$, dirigido hacia el papel. Así la contribución de todos los $d\vec{\ell}$ está en la misma dirección y las magnitudes son sumadas directamente. Para el di elemento $d\vec{\ell}$ mostrado, la magnitud del campo magnético producido en O una distancia *z* del alambre es

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\ell}{r^2}sen\theta .$$

Pero $\frac{z}{r} = \text{sen}\theta$, $\frac{r}{\ell} = -\tan\theta$, por consiguiente

$$d\ell = r\cos ec^2\theta\, d\theta$$

$$\therefore\ dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{z\cos ec^2\theta\, d\theta .\text{sen}\theta}{z^2/\text{sen}^2\theta}$$

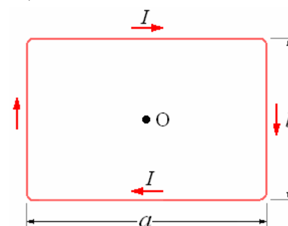
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi z}\text{sen}\theta\, d\theta$$

Para todo el alambre,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\text{sen}\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi z}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi z}\frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + z^2}} .$$



Del dibujo arriba, es obvio que, puesto que las corrientes entran en direcciones opuestas en los dos alambres de la longitud *a*, el campo debido a cada alambre en O es el mismo y *z* tiene el valor *b*/2. Es también obvio que es el valor de *B'*

debido a cada uno de los otros alambres de la longitud *b* es

$$B' = \frac{\mu_0 I}{4\pi(a/2)} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}}$$

El valor total del campo magnético en O es:

$$B_{Total} = 2(B + B')$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi\, a} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\, b} \frac{a/2}{\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}}$$

$$= \frac{2\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$= \frac{2\mu_0 I}{\pi ab}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo 79. ¿Dado un alambre que lleva una corriente, ¿Cuándo el campo magnético producido en el centro será mayor, doblando el alambre en un círculo o en un cuadrado?

Solución.

El campo en el centro de una espira rectangular de lados *a* y *b* es $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi ab}\sqrt{a^2 + b^2}$, Luego en el centro de una espira cuadrada de lado *a* será:

$$B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi\, a}$$

Aquí la longitud del alambre con corriente es 4*L*, luego *a* = *L* y así

$$B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi\, L}$$

El campo magnético en el centro de una bobina del radio *r* es

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{r}$$

Aquí $2\pi\, r = 4L$, $\Rightarrow\ r = \frac{2L}{\pi}$ o

$B_2 = \frac{\mu_0 \pi I}{4L}$. Finalmente:

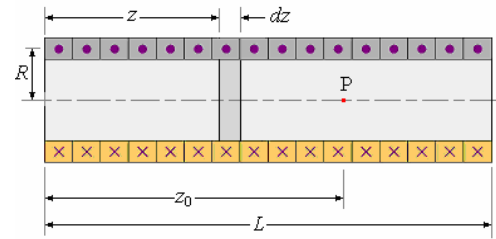
$$B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{L}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{L}(0{,}785 - 0{,}900) < 0$$

Así el campo debido a una bobina cuadrada es mayor que el de una bobina circular.

Ejemplo 80. Campo magnético en el eje de un solenoide.

Solución.



Sea el solenoide de *N* vueltas por unidad de longitud, longitud *L* y radio *R*.

El número de espiras del elemento dz es

$$\frac{NLdz}{L} = Ndz .$$

El campo magnético en un punto P debido a este elemento es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 NdzI}{2}\frac{R^2}{\left[R^2 + (z_0 - z)^2\right]^{3/2}}\hat{k}$$

El campo magnético del solenoide es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NIR}{2}\hat{k}\int_0^L \frac{Rdz}{\left[R^2 + (z_0 - z)^2\right]^{3/2}}$$

Cambiando la variable

$z_0 - z = Z$, $dz = -dZ$

Cuando $z = 0 \ \Rightarrow\ Z = z_0$

y $z = L \ \Rightarrow\ Z = z_0 - L$

de aquí $\vec{B} = -\frac{\mu_0 NIR^2}{2}\hat{k}\int_{z_0}^{z_0 - L}\frac{dZ}{\left[R^2 + Z^2\right]^{3/2}}$

Integrando

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 NIR^2}{2}\hat{k}\left[\frac{Z}{R^2(R^2 + Z^2)^{1/2}}\right]_{z_0}^{z_0 - L}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 NIR^2}{2}\hat{k}\left[\frac{Z}{R^2(R^2 + Z^2)^{1/2}}\right]_{z_0}^{z_0 - L} =$$

$$-\frac{\mu_0 NI}{2}\hat{k}\left\{\frac{(z_0 - L)}{R^2 + [(z_0 - L)]^{1/2}} - \frac{z_0}{(R^2 + z_0^2)^{1/2}}\right\}$$

Finalmente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2}\left\{\frac{z_0}{(R^2 + z_0^2)^{1/2}} + \frac{(z_0 - L)}{R^2 + [(z_0 - L)]^{1/2}}\right\}\hat{k}$$

En el caso de *L* >> *R*, la expresión entre llaves es igual a 2 y

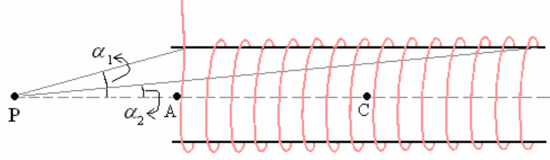
$$\vec{B} = \mu_0 NI\hat{k}$$

Ejemplo 81. Otra forma de solución.

Demuestre que el campo magnético en el punto P en el eje de un solenoide de la longitud finita y *N*

vueltas por unidad de longitud y radio R que lleva una corriente I es

$B = \frac{1}{2}\mu_0 NI(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$, donde α_1 y α_2 se muestran en el dibujo

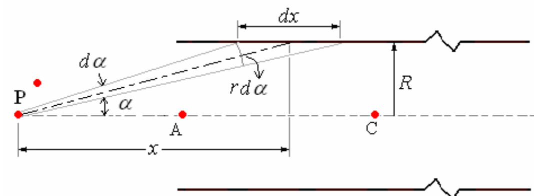


Solución.
Considere el solenoide como una serie de lazos circulares de radio R y ancho dx, cada uno con corriente $di = NdxI$.
El campo magnético a una distancia z en el eje de un lazo circular es $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$.

El campo magnético producido por un lazo circular de ancho diferencial es:

$dB = \frac{\mu_0 R^2 di}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NIR^2 dx}{2r^3}$ para encontrar el campo resultante integramos desde $x = x_1$ a $x = x_2$.

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{R^2 dx}{r^3}$$



De la figura anterior: $r = (R^2 + x^2)^{1/2}$,

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ y $dx \approx \frac{r}{\operatorname{sen}\alpha}$

$$\cos\alpha\, d\alpha = -\frac{R}{r^2}dr = -\frac{R}{r^3}dx$$

$$dr = \frac{xdx}{(x^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}dx$$

Con $r = (R^2 + x^2)^{1/2}$ y $dx \approx \frac{r}{\operatorname{sen}\alpha}$:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{R^2 dx}{r^3} = \frac{\mu_0 NI}{2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{R^2 r d\alpha}{r^3 \operatorname{sen}\alpha}$$

Con $\operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{r}$:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\, d\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

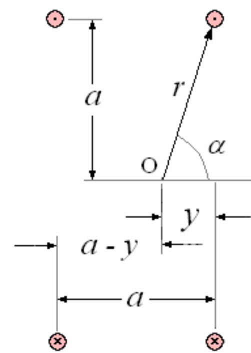
$$= \frac{\mu_0 NI}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 NI}{2}(-\cos\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

Finalmente $B = \frac{\mu_0 NI}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$

Ejemplo 82. Dos bobinas circulares de Helmholtz de 250 vueltas son paralelas una a otra y separadas por una distancia igual a su radio común. Encuentre el valor del campo magnético en un punto en el eje entre ellas cuando la corriente atraviesa ambas bobinas en el mismo sentido, y demuestre que el campo es casi uniforme sobre el punto medio.

Solución.
El campo magnético debido a una sola bobina en un punto a lo largo del eje una distancia y del plano de la bobina es

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ia\operatorname{sen}\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2}{r^3} = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$



Similarmente, en el mismo punto el campo magnético debido a una sola vuelta de la segunda bobina es

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2}{\left[a^2 + (a-y)^2\right]^{3/2}}$$

Éstos actúan en la misma dirección, y el efecto total en O debido a las vueltas de n de ambas bobinas es

$$B = n(B_1 + B_2)$$

$$= \frac{250\mu_0 Ia^2}{2}\left\{\frac{1}{(a^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{\left[a^2 + (a-y)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

= 0

Si $y = \frac{a}{2}$, entonces $B = \frac{8(250\mu_0 I)}{5^{3/2} a}$, mas adelante,

$$\frac{dB}{dy} = \frac{250\mu_0 Ia^2}{2}\left\{\frac{-3y}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \frac{3(a-y)}{\left[a^2+(a-y)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

, si $y = \frac{a}{2}$,

También

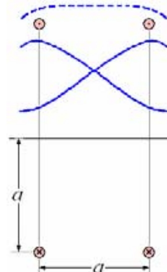
$$\frac{d^2B}{dy^2} = \frac{250\mu_0 Ia^2}{2}\left\{\frac{-3}{(a^2+y^2)^{3/2}} - \frac{3}{\left[a^2+(a-y)^2\right]^{3/2}} + \frac{15y^2}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \frac{15(a-y)^2}{\left[a^2+(a-y)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$= \frac{250\mu_0 Ia^2}{2}\left\{\frac{15y^2 - 3(a^2+y^2)}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \frac{15(a-y)^2 - 3\left[a^2+(a-y)^2\right]}{\left[a^2+(a-y)^2\right]^{3/2}}\right\} = 0,$$

si $y = \frac{a}{2}$,

Así $\frac{dB}{dy}$ y $\frac{d^2B}{dy^2}$ son cada uno igual a cero en el punto $y = \frac{a}{2}$, en el punto medio entre las bobinas. Por lo tanto de B difícilmente es cero alrededor de ese punto, dando una región grande de campo uniforme en la región central entre las bobinas.

Con este espaciamiento particular de las bobinas, al bajar el valor de B debido a una bobina cuando nos alejamos de ella es compensado por el aumento de B debido a la otra bobina para buena parte de la región entre ellas.



La situación se ilustra en el diagrama. Las líneas llenas dan la magnitud de B debido a cada bobina por separado a lo largo del eje. La línea discontinua muestra el efecto combinado de las dos bobinas, y la región del campo uniforme alrededor del punto medio del sistema se ve claramente.

Ejemplo 83. En un laboratorio de Física se requiere eliminar los efectos del campo magnético terrestre en un determinado punto P del mismo. Para ello, se produce un campo magnético contrario al campo magnético terrestre B_{tierra} por medio de un par de espiras circulares que comparten el mismo eje, ambas de radio R y separadas una distancia $2R$ entre sus centros, Las corrientes de ambas espiras circulan en el mismo sentido y el punto P esta ubicado en el punto medio del mencionado eje.

a) Suponga que el campo magnético de la tierra es paralelo a su superficie y se dirige hacia el norte, ¿Cuál es la posición en que tendrían que ponerse las espiras para lograr el efecto deseado en el punto P?

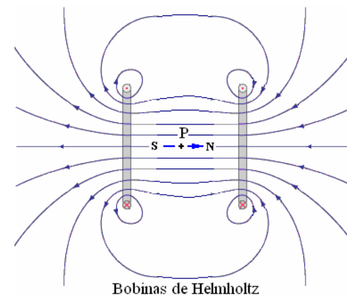
b) ¿Cuál es la magnitud de la corriente en las espiras que anulará el campo magnético terrestre en el punto P?

c) Obtenga la expresión de la magnitud del campo magnético resultante de las espiras $B_{espiras}$ en cualquier punto sobre el eje que comparten, tomando como origen el punto P.

d) A partir de su resultado en la parte anterior esboce un gráfico del campo $B_{espiras}$ a lo largo de dicho eje. Indique los valores críticos [máximo(s) o mínimo(s)] en su gráfico.

Solución.

a)



Bobinas de Helmholtz

Las bobinas deben estar orientadas de norte a sur, con las corriente como se indican en el dibujo de tal manera que el campo producido por estás esté en el mismo eje y opuesto al campo magnético terrestre.

b) El campo magnético debido a una sola bobina en un punto P en su eje a una distancia R del centro de la bobina es

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+R^2)^{3/2}}\hat{i} = -\frac{\mu_0 I}{2(2^{1,5})R}\hat{i}$$

Lo mismo para segunda bobina

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+R^2)^{3/2}}\hat{i} = -\frac{\mu_0 I}{2(2^{1,5})R}\hat{i}$$

El campo total producido por las dos bobinas es:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{(2^{1,5})R}\hat{i}$$

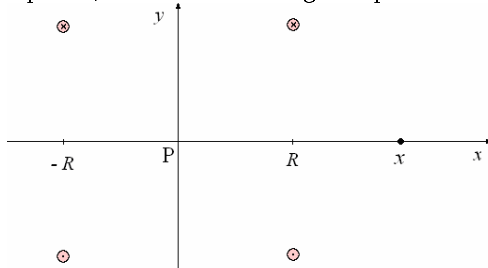
El campo magnético terrestre es de la Tierra es del orden de $0{,}5\text{x}10^{-4}$ T.
Para equiparar este campo debe de circular una corriente:

$$0{,}5\times 10^{-4} = \frac{4\pi\times 10^{-7} I}{2{,}83R} \Rightarrow$$

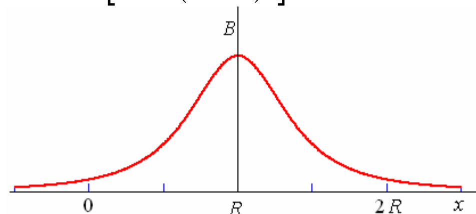
$$I = \frac{\left(0{,}5\times 10^{-4}\right)\left(2{,}83R\right)}{\left(4\pi\times 10^{-7}\right)} = 112{,}60\ R$$

(Amperes)

c) El campo magnético resultante de las espiras $B_{espiras}$ en cualquier punto sobre el eje que comparten, tomando como origen el punto P.

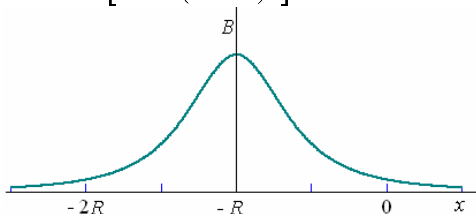


$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left[R^2 + (x+R)^2\right]^{3/2}}\hat{i}$$



Lo mismo para segunda bobina

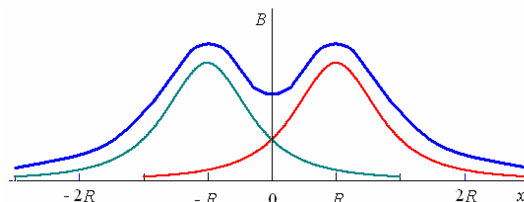
$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left[R^2 + (x-R)^2\right]^{3/2}}\hat{i}$$



El campo total producido por las dos bobinas es:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 =$$

$$-\frac{\mu_0 IR^2}{2}\left\{\frac{1}{\left[R^2 + (x+R)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + (x-R)^2\right]^{3/2}}\right\}\hat{i}$$



d) En el gráfico puede verse que los máximos están en $x = \pm R$ y el mínimo entre las espiras en el centro $x = 0$.

El máximo en $x = \pm R$ es:

$$B_{máx} = \frac{\mu_0 IR^2}{2}\left\{\frac{1}{\left[R^2 + (R+R)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + (R-R)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

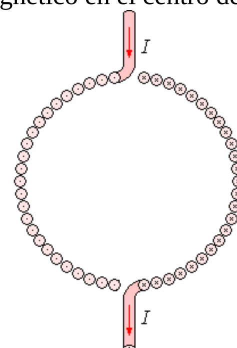
$$B_{máx} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{5^{3/2}} + 1\right) = 0{,}54\frac{\mu_0 I}{R}$$

El mínimo en $x = 0$. es:

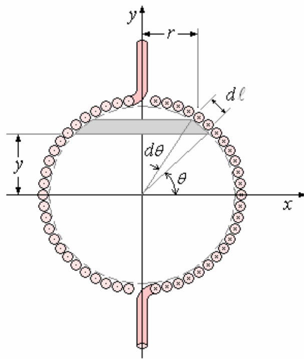
$$B_{\min} = \frac{\mu_0 IR^2}{2}\left\{\frac{1}{\left[R^2 + (0+R)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + (0-R)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$B_{\min} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{2^{3/2}}\right) = \frac{\mu_0 I}{2^{3/2} R} = 0{,}35\frac{\mu_0 I}{R}$$

Ejemplo 84. Sobre la superficie de una esfera de madera de radio *R* se enrolla en una sola capa un número *N* de vueltas muy próximos entre si con un alambre muy fino, cubriendo completamente la superficie de le esfera. Como se muestra en la figura. Si se hace circular una corriente *I* ¿cuál es el campo magnético en el centro de la esfera?



Solución.
El campo magnético formado en el centro de la esfera es la suma de los campos magnéticos de todas las espiras, como no es posible calcular una por una y sumar, encontraremos un elemento diferencial e integraremos.



La espira formada por el ángulo $d\theta$ y determinada por θ produce un campo en el centro de la esfera igual a

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 r^2 di}{2\left(r^2 + y^2\right)^{3/2}}\hat{j}$$

Donde

$$r = R\cos\theta\,,\; y = R\,\text{sen}\,\theta\,,$$

$$dI = \frac{NId\ell}{\ell} = \frac{NIRd\theta}{\pi R} = \frac{NI}{\pi}d\theta$$

Reemplazando

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 NIR^2\cos^2\theta d\theta}{2\pi R^3}\hat{j} \;\Rightarrow$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}\hat{j}\cos^2\theta d\theta$$

El campo magnético total es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}\hat{j}\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\theta =$$

$$\frac{\mu_0 NI}{2\pi R}\hat{j}\left|\frac{1}{2}\left(\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta\right)\right|_0^{\pi}$$

Finalmente $\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{4R}\hat{j}$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Estudiar el movimiento en el vacío de una partícula de masa *m*, carga *q*, que se encuentra en un campo magnético uniforme que forma un ángulo θ con la velocidad inicial de la partícula. No se considerará la influencia del peso.

2. Una partícula de masa *m* y carga *q* en el vacío está sometida a un campo eléctrico uniforme *E* vertical a un campo magnético *B* uniforme horizontal. La partícula con una velocidad inicial en el punto 0.
a) Estudiar el movimiento no tomando en cuenta la acción del peso. Considerar *B* paralelo al eje *y*.
b) ¿Cómo se manifestaría la acción del peso? ¿Es despreciable?

3. La armadura de un motor de corriente continua, porta 24 bobinas espaciadas por igual, cada una con 10 vueltas, conectada en serie con sus puntos de conexión en los 24 segmentos del conmutador rotatorio. Unas “escobillas” de carbón hacen contacto con el conmutador para poder admitir corriente en las bobinas; la disposición de las escobillas y la geometría del campo magnético en que gira la armadura son tales que cada alambre paralelo el eje gira en un campo de 8500 Gauss en promedio y los paras son todos del mismo sentido. Si, en cualquier instante, todas las bobinas están conectadas a las escobillas de tal manera que haya dos trayectorias iguales y paralelas a través de la combinación, y se entrega a las escobillas una corriente de 12 amperes, encontrar el par promedio desarrollado en la armadura. Tómese cada bobine como un cuadrado de 8 cm. de lado, con los alambres paralelos al eje del motor a una distancia de 5 cm. del eje.

4. Un protón de 2MeV se desplaza en una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme de una intensidad 10 V/m y un campo magnético uniforme en ángulo recto con él. Si la dirección tanto del campo eléctrico como del campo magnético y el protón no se acelere, calcular la intensidad y el sentido del campo

5. Un electrón describe una trayectoria circular de 0,2m de radio en un campo magnético de 0,002 Tesla. Calcular:
a) Su velocidad
b) Su periodo de revolución
c) Su energía cinética en MeV

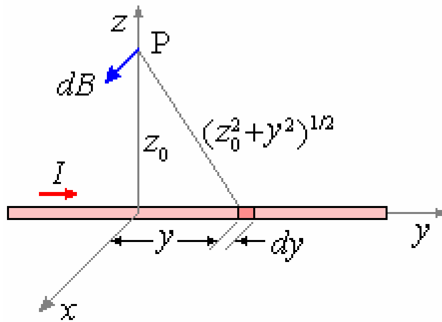
6. Una barra conductora de masa 50g en reposo, y a ángulos rectos, dos carriles horizontales separados 10 cm. Una corriente de 20 A pasa a través de la barra a partir de un carril al otro. El coeficiente de la fricción estática entre la barra y los carriles es 0,30. ¿Cuál es el menor campo magnético perpendicular al plano de la barra y de

los carriles que moverá a la barra sobre los carriles?
Respuesta. 0,0735 Wb/m^2

7. El alambre de la figura tiene una longitud total de 2ℓ y el punto P está en la bisectriz perpendicular con las coordenadas (0, 0, *z*).

Demuestren que $\vec{B}$ se dirige en el sentido del eje *x* en la figura y tiene la magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi z}\frac{\ell}{\left(z^2 + \ell^2\right)^{1/2}} .$$



8. Una corriente de 10 amperios fluye por un lazo de alambre con la forma de un triángulo equilátero de 50cm de lado. Utilicen el resultado del problema anterior y calculen *B* en el centro del lazo.
Respuesta. 3,6 x10^{5}T

9. Un alambre de 2ℓ de longitud lleva una corriente *I* y reposa en el eje *z* de cierto sistema de coordenadas con su centro en el origen.

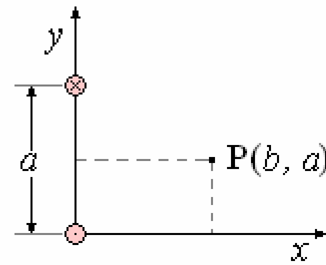
Demuestren que el campo $\vec{B}$ en un punto con las coordenadas (*x*, 0, *z*), tiene la magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left\{\frac{\ell - z}{\left[(\ell - z)^2 + x^2\right]^{1/2}} + \frac{\ell + z}{\left[(\ell + z)^2 + x^2\right]^{1/2}}\right\}$$

y determinen su dirección.

10. Dos alambres paralelos e infinitos están separados por una distancia 2*a* y llevan corrientes *I*, en direcciones opuestas, como se muestra en la figura.

a) Calculen $\vec{B}$ en un punto P que se encuentra u una distancia *b* a lo largo de la bisectriz perpendicular, de tal modo que, en función del sistema de coordenadas que se muestra, las coordenadas de P son (*b*, *a*) ¿Cuál será su respuesta cuando *b* = 0?

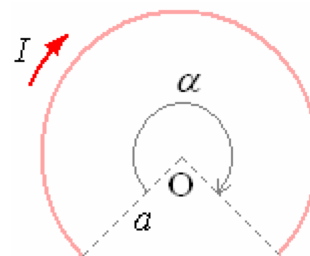


b) Repitan el problema, calculando el campo en un punto general con las coordenadas (*x*, *y*). ¿Es una restricción esencial la de que no introduzcamos la coordenada *z* del punto de campo?
c) Repitan el problema, suponiendo esta vez que las corrientes en los dos alambres se dirigen perpendicularmente hacia abajo.
Respuesta. b)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\left[\frac{y - 2a}{x^2 + (y - 2a)^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right]\hat{i} + \left[\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + (y - 2a)^2}\right]\hat{j}\right\}$$

11. ¿Qué corriente debe circular por un lazo circular de alambre de radio de 50 cm para que el campo en el centro sea de 5 x 10^{-3} tesla? ¿Qué corriente debe de fluir para que el campo tenga una intensidad de dos. teslas?
Respuesta. 40A; 1,6 x 10^{6}A

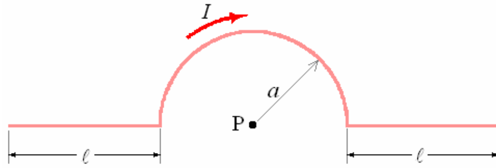
12. Una corriente *I* fluye en un segmento de un lazo circular de radio *a* y un ángulo α como se muestra en la figura. Calcular $\vec{B}$ en el centro O del lazo, desdeñando los alambres de alimentación de la corriente.



Respuesta.
$\dfrac{\mu_0 I\alpha}{4\pi a}$ (abajo)

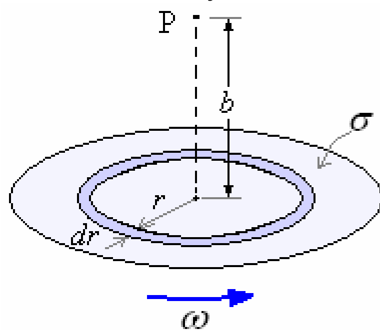
13. Supongan que hubiera una corriente circular en torno a la Tierra, en el ecuador. ¿Cuál sería la intensidad de esta corriente para producir el campo observado en los polos de aproximadamente 7,5 x 10^{-5} tesla? ¿Iría la corriente de este a oeste o en dirección opuesta?

14. Calculen en el punto P la intensidad del campo magnético debido a la corriente I a través del alambre de la figura. (Indicación:



15. Una línea de carga circular de radio a y carga por unidad de longitud λ, gira a una velocidad angular ω en torno a su eje.
a) Demuestren que este movimiento corresponde a una corriente I que fluye en un lazo circular de radio a y está dada por $I = \lambda a \omega$.
b) Calculen $\vec{B}$ en un punto sobre el eje de la línea de carga y a una distancia b de su centro.

16. Un disco de radio a lleva una carga uniforme por unidad de área σ . y gira con una velocidad angular ω en torno a su eje.



a) Demuestren que el campo magnética dB en el punto P sobre el eje, debida a un anillo de radio r y espesor dr es

$$dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^2 dr}{2\left(r^2 + b^2\right)^{3/2}}$$

b) Demuestren que el campo total B en el punto P es

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\left[\frac{a^2 + 2b^2}{\left(a^2 + b^2\right)^{1/2}} - 2b\right]$$

17. Un solenoide de 0,5 cm de radio y 20 cm de longitud lleva una corriente de 10 A y tiene 1000 vueltas. Calculen el campo magnético sobre el eje de la bobina en los puntos siguientes: a) el centro de la bobina, b) el borde de la bobina, y c) a una distancia de 100 cm al centro de la bobina, d) tracen una gráfica de B en función de la posición sobre el eje de la bobina.

18. ¿Qué cantidad de vueltas por unidad de longitud se requieren para que un solenoide largo que lleva una corriente de 2,0 A tenga un campo magnético sobre su eje de 1,5 x 10^{-2} T?

19. Una corriente de 0,5 A fluye en torno a un solenoide de radio de 1,0cm y 40 cm de longitud. Si el campo magnético uniforme cerca del centro del solenoide es de 10^{-3} T, ¿qué cantidad de vueltas por unidad de longitud tendrá el solenoide?
Respuesta. 1,6 x 10^3 vueltas/m

20. Supongan que el campo sobre el eje de un solenoide muy largo con 1000 vueltas por metro es de 50 x 10^{-3}T.
a) Cuál es la corriente?
b) Si se pone ahora un alambre que lleva una corriente de 10 A con N vueltas por unidad de longitud en torno al solenoide original, de tal modo que el campo sobre el eje se reduzca a 2,5 x 10^{-3}T,calculen N. ¿Son los flujos de corriente paralelos en las dos bobinas?

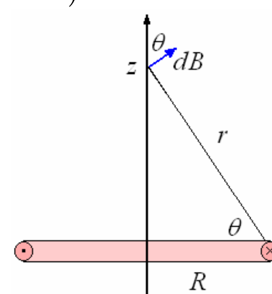
21. Un protón se desplaza a una velocidad de 5,0 x 10^5 m/s a lo largo del eje de un solenoide, que tiene 1000 vueltas por metro y lleva una corriente de 2,0 A. Calculen la aceleración del protón. ¿De qué modo diferiría su respuesta, si se desplazan en paralelo, pero no a lo largo del eje?
Respuesta. Cero

22. Un hombre camina hacia el norte por debajo y en sentido paralelo a una línea de potencia en la que fluye una corriente directa de 100 A. Si está a 10 m por debajo de la línea, ¿qué campo magnético más allá del que se debe a la Tierra, medirá? ¿Tendrá esto una interferencia grave con una lectura de la brújula en este punto?

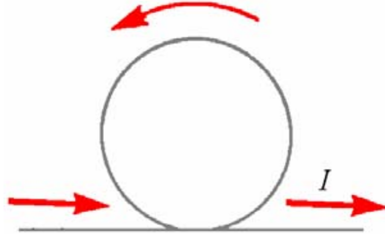
23. ¿Cuál es el campo magnético en el eje de un lazo circular de radio R con una corriente I a una distancia z del centro del lazo?
Respuesta.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Rd\phi}{r^2}\cos\theta \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{1/2}}$$



24 ¿Un alambre recto muy largo con una corriente I tiene un lazo circular de radio *R*. ¿Cuál es el campo magnético en el centro del lazo?



Respuesta. Sobreponga el campo de un alambre recto, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$, con el campo de un lazo, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{2R}$$

25. Tres alambres largos, rectos, paralelos, cada uno con corriente I en la misma dirección. Son equidistantes uno de otro con la misma separación a. ¿Qué fuerza por unidad de longitud un alambre experimenta debido a los otros dos?
Respuesta.

$$B = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi\, a}\cos 30°\,,\ F = BIL = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{\mu_0 I^2}{a}$$

26. ¿Un disco del radio *R* lleva una densidad uniforme σ de carga superficial. Rota sobre su eje con velocidad angular ω. cuál es el campo magnético en el centro del disco?
Respuesta.
Considere los anillos anulares de ancho *dr* . Cada uno es como un lazo con corriente $\sigma\, dAf$, donde $dA = 2\pi r dr$ y $f = \omega/2\pi$ .Luego el campo en el centro de un lazo es:

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0 (r\sigma\omega dr)}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma\omega R}{2}$$

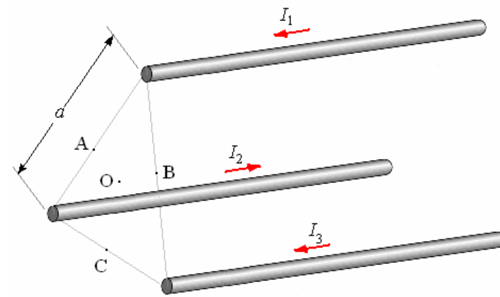
27. ¿Qué campo magnético es producido por un solenoide muy largo con 150 vueltas por metro que lleva una corriente de 20 A?
Respuesta. $B = \mu_0 NI = (4\pi 10^{-7})(150)(20)$ = 3,77 x 10^{-3}T.

28. Un conductor recto, largo y de radio a, lleva una corriente I_0, se ha diseñado de tal manera que la densidad de corriente dentro del conductor varía de acuerdo a la expresión

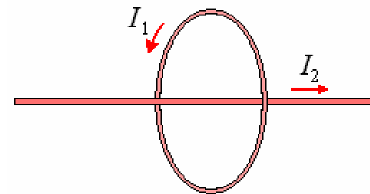
$$J = \frac{3}{2} I_0 \frac{r}{\pi\, a^3}$$

Determinar el carpo magnético para todo punto.

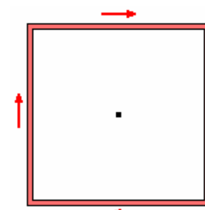
29. Se tiene tres conductores paralelos como se muestra en la figura. Calcular el campo magnético en los puntos A, B, C y O.
$I_1 = 1\,\text{A}$, $I_2 = 2\,\text{A}$, $I_3 = 3\,\text{A}$.



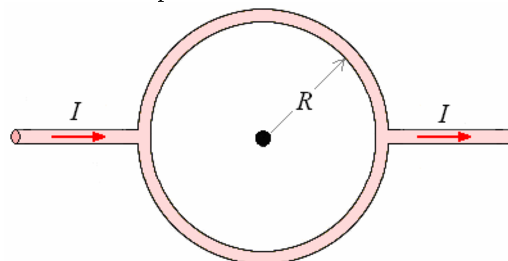
30. Una espira lleva una corriente de 4 A y tiene un radio de l0 cm. Si colocamos un alambre recto y largo en el eje de la espira con una corriente de 1 A, determinar la fuerza que ejerce la espira sobre el alambre por unidad de longitud.



31. Una aspira cuadrada de alambre de lado a a lleva una corriente I, determinar el valor de B en el centro de la espira.



32. Calcular el campo magnético en el eje de la espira radio *R* que está conectada en ambos lados como se muestra en la figura y pasa una corriente I por ella. ¿Cual es el valor del campo en el centro de la espira?

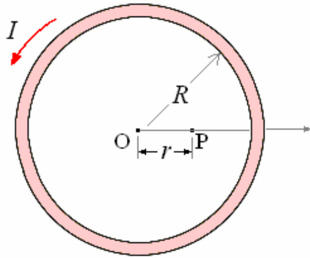


33. Un disco de plástico de radio a tiene una carga uniformemente distribuida en su superficie $(\sigma\ \text{C/m}^2)$. Si el disco gira con velocidad angular

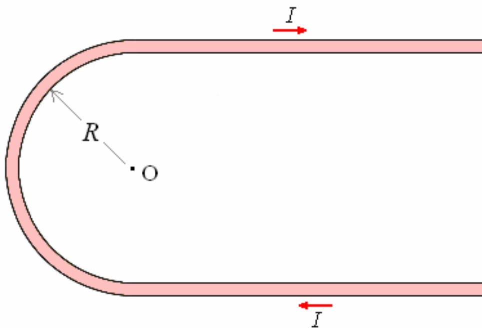
ω, encontrar el campo magnético en el centro del disco.

34. Dada una tira delgada de metal de ancho a y muy larga. La corriente es longitudinal y vale I. Encontrar el campo magnético en el plano de la tira a una distancia b del borde más cercano.

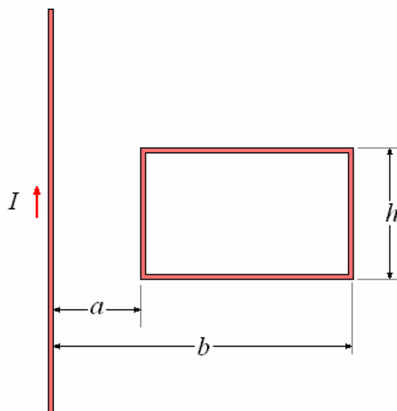
35. calcular es Campo magnético B creado por una espira circular de radio R por la que circula una corriente I, en un punto P sobre el plano del anillo. Realizar un desarrollo en potencia de limitarse el segundo orden.



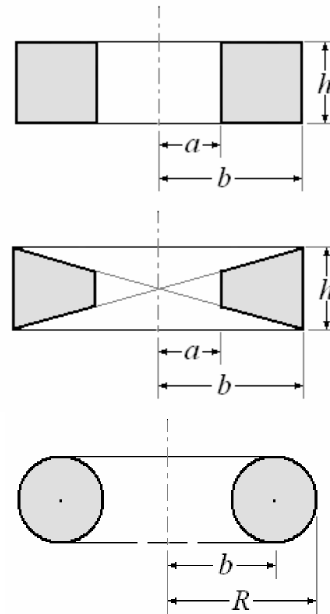
36. Determinar el campo magnético en el punto O en la figura. Los alambres rectos se consideran muy largos.



37. Determinar el flujo magnético a través del contorno rectangular mostrado en la figura creado por la corriente *I* que pasa por el alambre recto infinito.



38. Determinar el flujo magnético a través de las secciones de los toroides mostrados en la figura. Las bobines están arrolladas densamente con *N* vueltas y pasa una corriente *I*.



39. Una bobina cuadrada de 1 cm de lado, con 15 vueltas, está colgada en el centro de un solenoide largo de 200 vueltas por metro y conduce 300 mA. Si el plano de la bobina forma un ángu1o de 20º con el eje del solenoide y la bobina conduce 1 mA, encontrar el par sobre ella.

40. ¿Cual es el trabajo necesario para voltear la bobina cuadrada del problema anterior de una posición en que la normal positiva a la bobina sea paralela a la dirección $\vec{B}$ en el solenoide a una posición invertida en 180°?

41. Las bobinas de Helmholtz son dos bobinas circulares planas (asimilarlo a dos espiras circulares de radio *R*), idénticas, con eje común, por las que pasa una misma corriente *I* en el mismo sentido. La distancia entre las bobinas es 2*d*.

Calcular el campo magnético $\vec{B}$ en un punto P Situado en el ejes la distancia x del centro O da las dos bobinas

42. Dos placas delgadas infinitas, paralelas de ancho a y la distancia entre ellas es b, llevan corrientes igual a I pero opuestas. Encontrar la fuerza por unidad de longitud de cada placa.

43. Determinar el campo magnético debido a dos planos paralelos con iguales densidades de corriente superficial i constante. Considere los dos casos cuando las corrientes fluyen en el mismo sentido y en sentidos opuestos.

44. Una esfera de radio a tiene carga uniforme sobre su superficie con una carga total q, rota alrededor de un diámetro con velocidad angular constante ω. Encontrar el campo magnético dentro y fuera de la esfera.

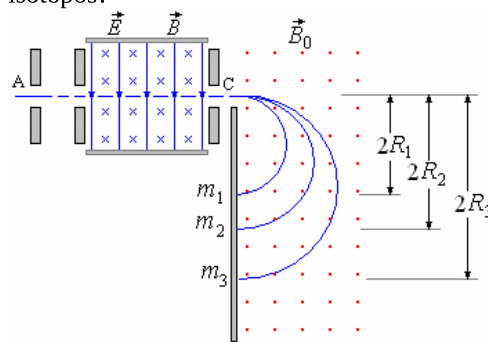
45. Un protón en la capa superior de la atmósfera se desplaza a una velocidad de 10 m/s en ángulo recto con el campo de la Tierra, que tiene una intensidad de 5,0 x 10^{-5} T en este punto.
a) ¿Cuál es el radio de la órbita del protón?
b) ¿Cuánto tiempo necesita el protón para completar una órbita?
c) ¿Cuál es su frecuencia de ciclotrón?
Respuesta. a) 210 m; b) 1,3x 10^{-3}s; c) 4,8 x 10^{3} rad/s

46. Un electrón se desplaza en ángulo recto con un campo magnético uniforme de una intensidad de 3,0 x 10^{-2} T. Si su energía es de 50 keV (1 keV = 10^{-3} MeV), calculen:
a) su velocidad, b) el radio de su órbita y c) la frecuencia del ciclotrón.

47. Un protón y una partícula alfa se desplazan en direcciones paralelas a la misma velocidad, cuando entran a una región del espacio en la que hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Supongan que se desplazan en ángulo recto con el campo.
a) ¿Cuál es la razón de los radios de sus órbitas?
b) ¿Cuál es la razón de sus frecuencias de ciclotrón?
c) Cuál es la razón de sus energías?
Respuesta.
a) $\frac{R_\alpha}{R_p} = 2$, b) $\frac{\omega_\alpha}{\omega_p} = \frac{1}{2}$, c) $\frac{K_\alpha}{K_p} = 4$

48. Un protón de 2 MeV se desplaza en una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme de una intensidad de 10^{5} V/m y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ en ángulo recto con él. Si la dirección de movimiento del protón es perpendicular a la dirección tanto del campo eléctrico como del campo magnético y el protón no se acelera, calculen la intensidad y el sentido de dirección del campo $\vec{B}$.

49. Un haz que contiene una mezcla de los isótopos Li y 7Li entra en la región de campo magnético uniforme $\vec{B}_0$ por la ranura C del espectrómetro de masas. Si los iones Li^{6} se detectan a una distancia de l0 cm por debajo de la ranura C, ¿dónde aparecerán los iones Li^{7}? ¿Cuál es la razón de las energías cinéticas ale esos dos isótopos?



Respuesta.
5, l2 cm bajo la ranura; $\frac{K(Li^7)}{K(Li^6)} = \frac{7}{6}$

50. Un ciclotrón que se utiliza para acelerar protones tiene un radio de 0,5 m y un campo magnético de 0,75 T.
a) ¿Cuál es la energía de los protones que salen? Exprese su repuesta en Joules y en Mev.
b) ¿Cuál es la velocidad final de los protones expulsados?
c) ¿Cuáles serían las energías de partículas alfa si se vieran aceleradas por este ciclotrón?.

51. Con el ciclotrón del problema anterior.
a) ¿Cuál es la frecuencia del oscilador ω para este ciclotrón, cuando acelera protones?
b) Si los protones recogen 100 keV cada vez que cruzan el espacio entre las Des, ¿cuántas órbitas semicirculares completarán los protones antes de verse expulsados?
c) Calculen el tiempo necesario para acelerar los protones hasta sus velocidades finales.
Respuesta.
a) 7,2 x 10^{7} rad/s; b) 69 órbitas; c) 3,0 x10^{-6}s

52. Si se utilizara el mismo el ciclotrón para acelerar electrones, entonces, desdeñando los efectos relativistas, ¿cuáles serían las energías finales de los electrones? ¿Tenemos razones para suponer que los efectos relativistas son desdeñables?
Respuesta. 9,l.2 x 10^{4} MeV; no.

53. Un ciclotrón con un campo magnético de 2,0 T se usa para acelerar protones.
a) ¿Cuál debe ser la frecuencia (en Hz) del campo oscilador entre las Des?
b) Si se utiliza este ciclotrón para acelerar deuterones, ¿a qué frecuencia se deberá ajustar la frecuencia de este campo oscilador?

54. Si E_0 es la energía de un ciclotrón, cuando acelera protones, demuestren que puede acelerar

iones, de masas atómicas *A* y con *Z* unidades de carga, a la energía

$$E = \left(\frac{Z^2}{A}\right)E_0$$

55. Si existiera un monopolo magnético de intensidad ε , entonces, el campo magnético asociado a él sería de $\vec{B} = \left(\frac{\varepsilon}{r^3}\right)\vec{r}$, en donde *r* es la posición en el espacio, medida a partir del monopolo.
a) Escriban la ecuación del movimiento para una partícula de carga *q* y masa *m* que se desplace en el campo de un monopolo.
b) Demuestren que la energía cinética de la partícula es una constante de movimiento.

Respuesta. a) $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\varepsilon\frac{\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$

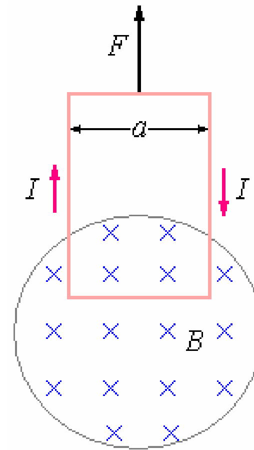
56. Para el sistema físico del problema anterior, demuestren que:

a) La cantidad de movimiento angular $m\vec{r}\times\vec{v}$ (en relación al monopolo) de la partícula no es constante en general.

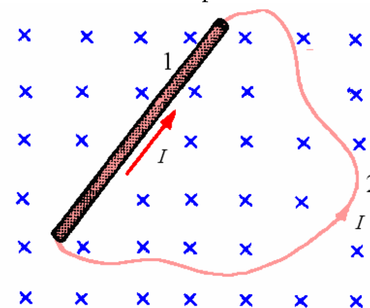
b) La cantidad $\frac{d\left(m\vec{r}\cdot\vec{v}\right)}{dt}$ es constante y determinen su valor en función de la velocidad inicial $\vec{v}_0$.

57. Se ha estimado que en la superficie de una estrella de neutrones, el campo B puede ser de hasta 10^9 T. Para un protón de lo MeV que se desplace en ese campo, determinen:
a) su frecuencia de ciclotrón y b) el radio de su órbita.
Respuesta. a) 9,6 x 10^{16} rad/s b) 4,6x 10^{-10}m

58. Una bobina rectangular de alambre lleva una corriente *I* y tiene una anchura *a*. Si el extremo inferior de la bobina se mantiene entre los polos de un electroimán con un campo magnético *B* y dirigido como se muestra en la figura, calculen la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ necesaria para sostener la bobina, por encima de la gravedad.



59. Demuestren que la fuerza sobre una porción de alambre que lleva una corriente en un campo magnético uniforme es la misma para todos los alambres que tengan los mismos puntos extremos. O sea, demuestren que la fuerza sobre los alambres 1 y 2 en la figura es la misma que si pasara la misma corriente por cada uno de ellos.



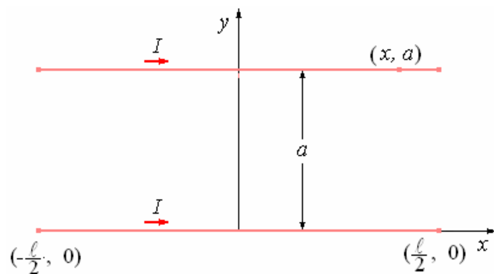
60. Una corriente de 5,0 A fluye en un lazo cuadrado de lado de 10 cm. Calculen la fuerza total en dos de sus lados adyacentes, producida por una inducción magnética externa perpendicular al plano del lazo y una intensidad de 0,1 T.

61. Una corriente de una intensidad *I* fluye en una bobina que tiene la forma de un pentágono regular de lado *a*. Supongan que hay un campo magnético uniforme *B* perpendicular al plano de la bobina.
a) Calculen la fuerza producida por el campo externo en cada segmento.
b) Al utilizar los resultados de (a) demuestren explícitamente que la fuerza total sobre el lazo es cero.
Respuesta. a) IaB dirigido perpendicularmente al alambre en el plano de la bobina

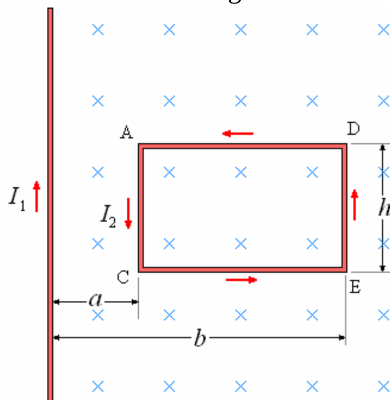
62. Sean dos alambres paralelos, cada uno de ellos con una longitud ℓ , que tienen las mismas corrientes *I* y están separados por una distancia *a*, como en la figura.
a) Demuestren que el campo magnético *B* en el punto (*x*, *a*) del alambre superior, debido a la corriente en el interior, tiene la magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{a}\left\{\frac{(\ell/2)-x}{\left[(x-\ell/2)^2+a^2\right]} + \frac{(\ell/2)+x}{\left[(x+\ell/2)^2+a^2\right]}\right\}$$

¿Cuál es la dirección de *B*?
b) Calculen la fuerza *dF* sobre el elemento de longitud *dr*, situado en el punto (*x*, *a*) del alambre superior.
c) Demuestren por integración que la fuerza total *F* sobre el alambre superior es descendente y tiene la intensidad $F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\left(\frac{1}{a}\right)\left[\left(\ell^2+a^2\right)^{1/2}-a\right]$



63. En la figura, si a = 3,0 cm, b = 5,0 cm,c = 3,0 cm, I_1 = 5,0 A e I_2 = 2,0 amperios, calculen:
a) la fuerza en el segmento AC que se debe a la corriente en el alambre largo, y
b) la fuerza en el segmento AE que se debe a la corriente en el alambre largo.



64. Sea nuevamente el sistema del problema anterior. Esta vez, calculen la fuerza sobre el alambre recto y largo debida a la medición magnética producida por el lazo rectangular.
Respuesta.
$\frac{\mu_0 I_1 I_2 h}{2\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$, (izquierda)

65. Un lazo rectangular de alambre de lados de 10 y 30 cm lleva una corriente de 15 A. Calcular las fuerzas mutuas de repulsión entre los dos pares de alambres opuestos.

Respuesta. 9,7 x 10^{-5} N entre alambres más largos;
2,4 x 10^{-6} N entre alambres más cortos

66. Sean dos alambres de longitudes ℓ y L en ángulo recto entre sí, de la figura. Supongan que las corrientes I_1 e I_2 se dirigen como se muestra.

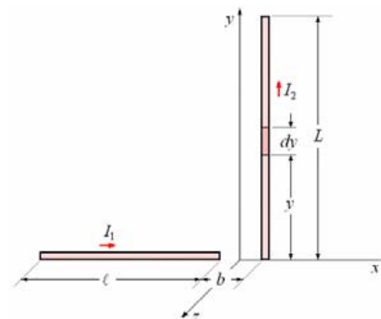
a) Demuestren que el campo magnético $\vec{B}$ en la posición del elemento de longitud *dy* situado en el punto (0, y, 0) es

$$\vec{B} = \hat{k}\frac{\mu_0 I_1}{4\pi y}\left\{\frac{-b}{\left(b^2+y^2\right)^{1/2}} + \frac{b+\ell}{\left[(b+\ell)^2+y^2\right]^{1/2}}\right\}$$

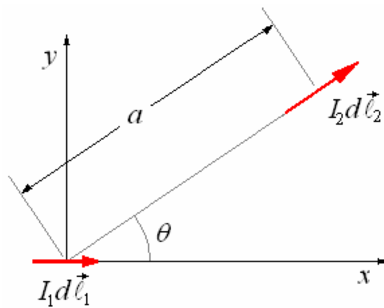
b) Demuestren que la fuerza magnética *dF* sobre el elemento *dy* es

$$d\vec{F} = \hat{i}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi y}dy\left\{\frac{-b}{\left(b^2+y^2\right)^{1/2}} + \frac{b+\ell}{\left[(b+\ell)^2+y^2\right]^{1/2}}\right\}$$

c) Calculen la fuerza total $\vec{F}$ sobre alambre de longitud *L*.



67. Dos elementos de corrientes $I_1 d\vec{\ell}_1$ e $I_2 d\vec{\ell}_2$ se colocan uno en relación al otro, como se muestra en la figura.
a) Calculen la fuerza que ejerce el elemento $I_1 d\vec{\ell}_1$ sobre el otro.
b) Calculen la fuerza que ejerce el elemento $I_2 d\vec{\ell}_2$ sobre el otro.
c) Expliquen la razón por la que, cuando los resultados en (a) y (b) no sean iguales y opuestos, no haya contradicción esencial con la ley de Newton de la acción y la reacción.



68. En cierto sistema de coordenadas fluye una corriente I_2 a lo largo de un alambre infinitamente largo que se encuentra a lo largo del eje *x*. Demuestren que la fuerza magnética sobre el segundo alambre de longitud ℓ y que lleva una corriente I_1 cuyos puntos extremos están en los puntos (0, 0, *a*) y (0, ℓ, *a*) es

$$\vec{F} = \hat{i}\,\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\ln\left(1+\frac{\ell^2}{a^2}\right)$$

69. Sea la misma situación que en el problema anterior, suponiendo esta vez que los puntos extremos del segmento más corto están en los puntos (0, $-\ell/2$ -, *a*) y (0, $\ell/2$, *a*).

a) Demuestren que esta vez no hay fuerza sobre el segmento más corto.

b) Calculen el torque en torno al punto (0,0, *a*) sobre el segmento más corto.

70. Calculen los momentos dipolares magnéticos asociados a cada uno de los lazos planos siguientes (suponiendo que en cada caso, la corriente es de 2,0 A y que hay 10 vueltas en cada lazo):

a) Un lazo circular de radio de 10 cm.

b) Un lazo rectangular de lados de 2 y 10 cm.

c) Un lazo de forma elíptica de eje semi mayor de 10cm y semi menor de 5cm.

Respuesta.

a) 0,63 A.m^2, b) 4,0 x 10^{-2} A.m^2, c) 0,31 A.m^2

71. Al calcular el trabajo que se requiere para hacer girar un lazo de corriente de momento dipolar en un campo magnético $\vec{B}$, demuestren que la energía *U* asociada con él es

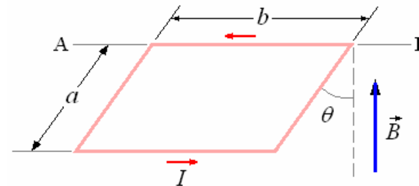
$$U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

(Indicación: El trabajo *dW* que se re quiere para hacer girar un dipolo en un pequeño ángulo $d\alpha$ es $rd\alpha$, donde τ es el torque que se tiene que aplicar.)

72. Una bobina circular de alambre de radio de 10cm y 150 vueltas lleva una corriente de 10^{-2} A. Cuál es el torque máximo que se puede ejercer sobre esta bobina mediante un campo magnético uniforme de una intensidad de 0,2 T.

Respuesta. 9,4 x 10^{-3} N.m

73. Se suspende un lazo rectangular de lados *a* y *b* de tal modo que tenga libertad para girar en torno al eje horizontal AB. Si tiene una masa *m* y si la corriente en torno es *I*, calculen el ángulo θ al que estará en equilibrio en presencia de un campo magnético vertical uniforme $\vec{B}$.



74. Sea un lazo plano de alambre que lleva una corriente *I* en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B}$.

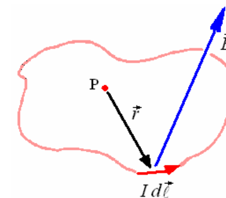
a) Demuestren que el torque τ en torno a un punto P dentro del lazo se puede expresar, utilizando, en la forma $\vec{\tau} = \hat{i}\int \vec{r}\times\left(d\vec{\ell}\times\vec{B}\right)$,

en donde $\vec{r}$ es el vector del punto P al elemento $Id\vec{\ell}$.

b) Utilizando el hecho de que la integral se debe llevar en torno a un lazo cerrado, demuestren que otra fórmula equivalente para τ es

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2}\hat{i}\left(\oint \vec{r}\times d\vec{\ell}\right)\times\vec{B}$$

c) Finalmente, demuestren que la integral $\frac{1}{2}\oint \vec{r}\times d\vec{\ell}$ es el área vectorial del lazo y, en esa forma, establezcan la validez general de $\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}$.



75. Demuestren que $\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}$ es válido para un lazo de forma arbitraria, reemplazando el lazo dado de corriente por un conjunto de lazos rectangulares contiguos y muy delgados, cada uno de los cuales tenga la misma corriente *I*.

76 Sea un alambre de longitud fija ℓ y que lleve una corriente *I*. Este alambre se puede formar en varios lazos, tales como el cuadrado del lado $\ell/4$, *n* lazos circulares cada uno de ellos de

radio $1/2\pi\ n$, etc. Demuestren que el torque máximo en cualquiera de ellos en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ se logra cuando el alambre forma un circulo de radio $1/2\pi$ y calculen la torque en este caso.

Respuesta.

$$\frac{I\ell^2 B}{4\pi}$$

77. Un lazo circular de alambre de masa m y radio a lleva una corriente I y tiene libertad para girar en torno a un diámetro horizontal AC en presencia de un campo $\vec{B}$ uniforme, dirigido verticalmente hacia arriba. Si está distribuido en una cantidad ligera a partir de su posición de equilibrio, demuestren que oscilará en torno a AC con un movimiento armónico simple de periodo

$$T = \left(\frac{2\pi\ m}{IB}\right)^{1/2}$$

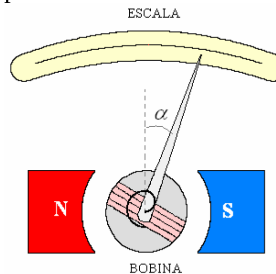
(Nota: El momento de inercia de este lazo en torno a un diámetro es de $I_{inercia} = \frac{1}{2}ma^2$.)

78. En un experimento para medir el efecto de Hall en el sodio, supongan que se utiliza un campo magnético de una intensidad de 0,8 T y se mide una corriente de 10 A. Suponiendo que el área de corte transversal de la lámina metálica sea de 2 cm^2 y que E_t = l0 V/m, calculen:

a) La velocidad de deriva de los electrones.
b) El valor del coeficiente de Hall.
e) El número de portadores de carga por unidad de volumen, comparando esto con el número de átomos de sodio por unidad de volumen. La masa atómica del sodio es de 23 y su densidad de l0 kg/m^3.

Respuesta.
a) 1.3 x 10^{-5} m/s, b) 2,5x 10^{-10} m^3/C, c) 2,5 x 10^{28} portadores de carga/m^3

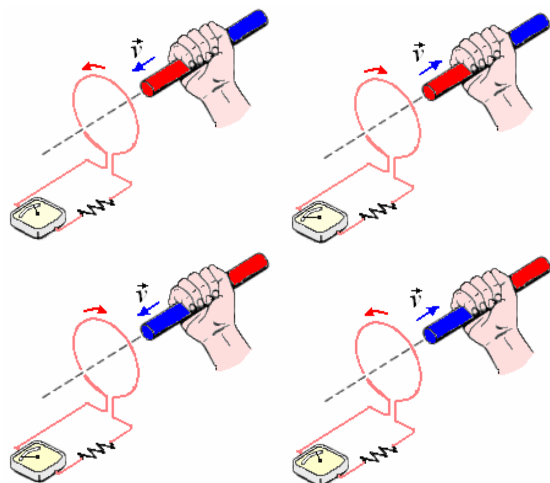
79. Supongan que el galvanómetro de bobina pivotante de la figura tiene un campo radial $\vec{B}$ de una intensidad de 0,3 T, y que la bobina misma tenga 200 vueltas y un área de 3,0 cm^2. Calculen la constante de resorte (torsión/desplazamiento angular), suponiendo que una corriente de 1,0 mA produzca una deflexión angular de 15°.



CAPÍTULO 4. Ley de Faraday e inductancia

INTRODUCCION
Si tenemos una carga q, ésta ocasiona un campo eléctrico $\vec{E}$ y si esta carga está moviéndose con una velocidad $\vec{v}$ ocasionará también un campo magnético. Es decir, tenemos asociados tanto un campo eléctrico en movimiento con un campo magnético. En 1839 fue Michael Faraday quien presentó un informe de sus observaciones de un campo eléctrico asociado con un campo magnético en movimiento. A partir de estos experimentos se han desarrollado los generadores modernos, los transformadores, etc.
En este Capítulo trataremos de la formulación de las leyes de la inducción y su aplicación en casos simples.

LEY DE FARADAY
Faraday observó experimentalmente la asociación de un campo magnético variable en el tiempo $\vec{B}$ con un campo eléctrico.
En la figura siguiente se muestra un imán en movimiento y el efecto que hace sobre una aspira de alambre conectada a un galvanómetro.
Se ve efecto solamente cuando el imán está en movimiento no así cuando está estático.



El resultado de un gran número de experimentos puede resumirse asociando a una fuerza electromotriz con un cambio de flujo magnético.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Esto se conoce como la **Ley de Faraday.**

Como $\varepsilon = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

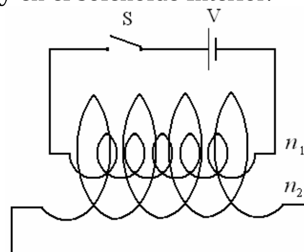
y $\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS$

Podemos escribir que

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}dS$$

LEY DE LENZ. Hasta este momento no hemos explicado el signo menos, esto nos indica que la fuerza electromotriz aparece en oposición al cambio que se produce sobre él. Es decir, si incrementamos el flujo magnético a través del circuito, la fuerza electromotriz indicada tiende a causar corriente en tal dirección que el flujo decrezca, si tratamos de introducir un imán en una bobina, la corriente inducida tendrá un sentido tal que forma un campo magnético que tiende a repeler el polo magnético.
Quien estableció el sentido de las corrientes Inducidas fue H.F. Lenz, contemporáneo de Faraday con el siguiente enunciado conocido como **Ley de Lenz**: "La corriente que es inducida tendrá una dirección de tal forma que se oponga a la causa que la produce"; que es una consecuencia de la conservación de la energía, de no ser así la corriente inducida podría seguir induciendo corriente y a la vez aumentándola, lo que no es cierto.

Ejemplo 1. Un solenoide de longitud ℓ y n_2 vueltas, diámetro D_2 y resistencia R en su interior hay un solenoide de igual longitud y n_1 vueltas, diámetro D_1 conectado a una pila por medio de una llave S.
Determinar la corriente que circula en el solenoide exterior al momento de cerrar le llave S en función de la corriente y en el solenoide Interior.



Solución.
El campo magnético producido por el solenoide interior es

$$B = \mu_0 N_1 I_1 = \mu_0 \frac{n_1}{\ell} I_1$$

El flujo magnético es

$$\Phi = BA = \mu_0 \frac{n_1}{\ell} I_1 \left(\frac{\pi D_1^2}{4}\right)$$

Es fuerza electromotriz inducida en el solenoide exterior es:

$$\varepsilon = -n_2 \frac{d}{dt}\Phi = -n_2 \frac{d}{dt}\frac{\mu_0 n_1 \pi D_1^2}{4\ell} I_1$$

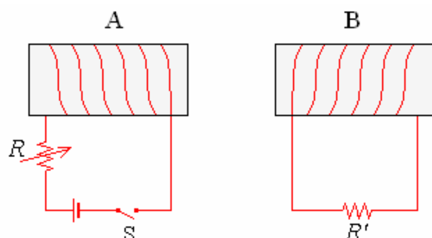
$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 n_1 n_2 \pi D_1^2}{4\ell}\frac{dI_1}{dt}$$

La corriente es:

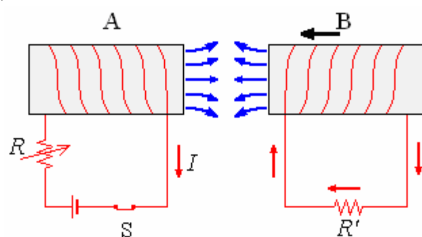
$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 n_1 n_2 \pi D_1^2}{4R\ell}\frac{dI_1}{dt}$$

De este resultado deducimos que tendremos corriente I_2 mientras la corriente I_1 este variando, o sea, mientras sube de su valor cero hasta que toma su valor máximo.

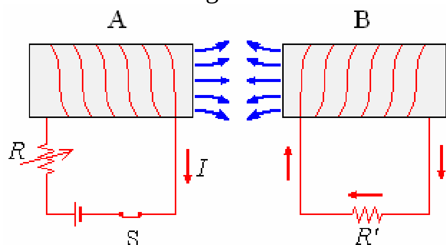
Ejemplo 2. Tenemos dos circuitos como los mostrados en la figura. Usar la ley de Lenz para determinar la dirección de la corriente inducida en la resistencia R', cuando.
a) Le bobina A se acerca a la bobina B.
b) Se disminuye la resistencia R.
c) Se abre la llave S.



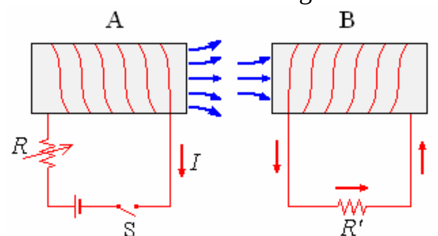
Solución.
a) Al acercarse B hacia A el flujo magnético aumenta en B, para contrarrestar esto debe aparecer un campo magnético en oposición. Este campo magnético sería originado por una corriente como la indicada en la figura.



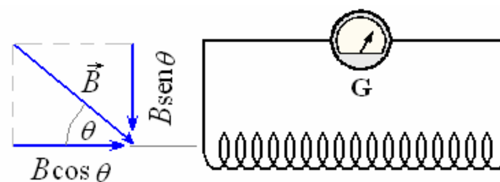
b) A1 disminuir 1a resistencia *R* aumenta la corriente y al aumentar la corriente el flujo magnético se incrementa. En oposición a este cambio debe aparecer un campo magnético originado por una corriente como la indicada en la figura.



c) Al abrir la llave la corriente empieza a disminuir su valor hasta cero, esto ocasiona una disminución de flujo magnético. En oposición a este cambio debe aparecer un campo magnético originado por una corriente como la indicada en la figura.

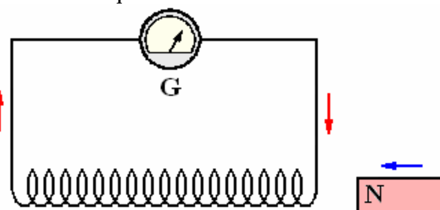


Ejemplo 3. El eje de una bobina de 250 vueltas y del área 0,002 m^2 se alinea a 40° con un campo magnético uniforme. ¿El campo magnético disminuye a partir de 0,08 a 0,02 T en 0,020 s. cuál es la fuerza electromotriz media generada en la bobina?
Solución.



$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{nA\Delta B}{\Delta t}\cos\theta$$
$$= \frac{(250)(0,002)(0,06)(\cos 40^\circ)}{0,02}$$
$= 1,15$ V

Ejemplo 4. Acercando un imán a una bobina de 2000 espiras se incrementa el flujo magnético que corta a la bobina de 0 a 1,5 x 10^{-5} Wb en 1/10 de segundo. Si la resistencia de la bobina es de 20 Ω, determine la corriente media que se induce en la misma.



Solución.
$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{20}$$
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -2000\frac{1,5\times 10^{-5}}{10^{-1}}$$
$= - 0,3$ V
$$I = \frac{0,3}{20} = 0,015 \text{ V}$$

Ejemplo 5. A través de un solenoide de 1000 vueltas pasa un flujo magnético de 10^{-3} Wb. Si el flujo se reduce en 10^{-3} s a 10^{-4} Wb. ¿Cuál será en voltios la fuerza electromotriz que se induce?
Solución.
La variación de flujo magnético es
$$\Delta\Phi = 10^{-3} - 10^{-4} = 9\times 10^{-4}\,\text{Wb}$$
y, por tanto, la fuerza electromotriz inducida es:
$$\varepsilon = \left| n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = 1000\frac{9\times 10^{-4}}{10^{-3}}$$
$= 900$ V.

Ejemplo 6. Un solenoide alargado transporta una corriente que produce un campo magnético *B* en su centro. Se introduce el solenoide dentro de una bobina estrecha de 20 espiras y área 2 cm^2 que tiene

una resistencia total de 1 Ω. Al conectar los extremos de la bobina e invertir la corriente que circula el solenoide se produce en la bobina una corriente inducida de 10 μA durante 0,1 s. Calcule el campo *B*.

Solución.

Al invertir la corriente la variación del flujo es:

$$\Delta\Phi = nBA - (-nBA) = 2nBA$$

De aquí

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{2nBA}{\Delta t}$$

$$= \frac{2 \times 20B\left(2\times 10^{-4}\right)}{0,1} = 8\times 10^{-2}B$$

La corriente inducida es:

$$I = 10\times 10^{-6} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{8\times 10^{-2}B}{1}$$

De donde resulta:

B = 1,25 x 10 T.

Ejemplo 7. Un campo magnético se puede medir de la manera siguiente: Una bobina de 250 vueltas y de área 1,80 cm^2 se coloca en un imán permanente de modo que el flujo magnético máximo pase a través de la bobina. Se conecta con un galvanómetro que mide el flujo total de la carga. Cuando la bobina se mueve de un tirón rápidamente fuera del imán, se observa que fluye una carga de 0,25 mC. El circuito del galvanómetro de bobina tiene una resistencia de 4 Ω. ¿Cuál es el campo magnético?

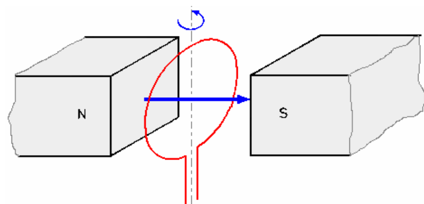
Solución.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\Delta\Phi_B}{R\Delta t} = \frac{nAB}{R\Delta t}$$

$$\Rightarrow B = \frac{R\Delta q}{nA} = \frac{(4)\left(0,25\times 10^{-3}\right)}{(250)\left(1,8\times 10^{-4}\right)}$$

= 0,022 T

Ejemplo 8. Una espira circular de radio 10 cm está situada perpendicularmente al campo magnético de 0,5 T de un electroimán. ¿Cuál es la fuerza electromotriz que se induce en la espira cuando gira alrededor de su diámetro con una velocidad de 1 200 rpm?



Solución.

$$\omega = 1200\text{ rpm} = \frac{1200}{60} = 20\text{ rps}$$

En 1/4 de vuelta (equivalente a 1/80 segundos) la espira pasa de una posición de máximo número de líneas de flujo cortadas a otra posición de mínimo (cero). Por tanto,

$$\varepsilon = n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = n\frac{BA}{\Delta t}$$

$$= 1\times\frac{0,5\pi(0,1)^2}{1/80} = \frac{40\pi}{100} = 0,4\pi$$

= 1,26 V.

Ejemplo 9. Una bobina de *n* vueltas y de área *A* se coloca en un campo magnético *B* y se la hace rotar con velocidad angular constante ω sobre un diámetro perpendicular al campo magnético. Derive una expresión para la fuerza electromotriz inducido en la bobina.

Solución.

$$\Phi_B = nAB\cos\theta = nAB\cos\omega t,$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = nAB\,\text{sen}\,\omega t$$

Ésta es la base para un generador de corriente alterna. Por medio de los contactos convenientes, puede generarse corriente continua.

Ejemplo 10. Una bobina de 1 000 espiras y radio 5 cm conectada a un galvanómetro, y situada perpendicularmente al campo de un electroimán se extrae bruscamente del mismo. El galvanómetro, cuya resistencia es de 1 000 Ω, acusa en este proceso una carga total inducida de 10 C. Determínese la inducción magnética del electroimán, sabiendo que la bobina tiene una resistencia de 20 Ω.

Solución.

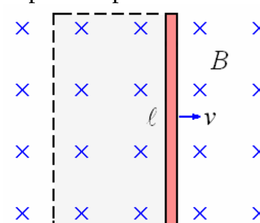
$$\varepsilon = n\frac{\Phi}{t} = IR,$$

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{ItR}{nA} = \frac{\left(10^{-3}\right)(1020)}{(1000)\left(\pi 0,05^2\right)}$$

= 0,13 T

FUERZA ELECTROMOTRIZ DEL MOVIMIENTO

Un ejemplo interesante de una fuerza electromotriz inducida ocurre cuando un conductor se mueve a través de un campo magnético. En la figura a continuación una barra del metal de longitud ℓ orientada perpendicularmente a un campo magnético uniforme y movido con velocidad constante perpendicular a su longitud y al campo. Un portador positivo de carga experimentará una fuerza $q\vec{v}\times\vec{B}$ dirigida hacia la parte superior de la barra.



La carga positiva se acumulará en el extremo superior de la barra y formará un campo eléctrico $\vec{E}$, tal que en el $qE = qvB$ en la situación constante. Esto significa que se desarrollará una fuerza electromotriz entre los extremos de la barra,

$\varepsilon = \int Edy = E\ell = B\ell v$. Podríamos también llegar este resultado usando la ley de Faraday.

Considere un lazo rectangular imaginario, indicado por la línea discontinua. La barra forma un lado del lazo. En el tiempo dt la barra se mueve una distancia vdt hacia la derecha, aumentando el área del lazo $vdt\ell$. Esto aumenta el flujo a través del lazo en $d\Phi_B = Bv\ell dt$, tal que $\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = Bv\ell$.

Esta clase de fuerza electromotriz es conocida como fuerza electromotriz de movimiento.

$\varepsilon = Bv\ell$

Ejemplo 11. Se ha sugerido que Las aves podrían utilizar la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de sus alas por el campo magnético de la tierra como un medio para ayudarles en su navegación durante la migración. Qué fuerza electromotriz sería inducida para que un ganso de Canadá con una extensión de alas de 1,5 m que vuela con una velocidad de 10 m/s en una región donde la componente vertical del campo de la tierra es 2 x 10^{-5} T.

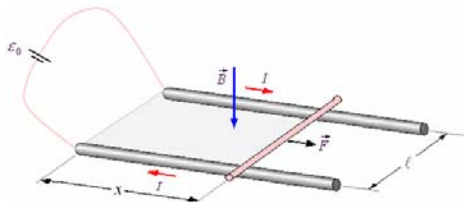
Solución.

$\varepsilon = B\ell v$ = (2 x 10^{-5})(1,5)(10)
= 3 x 10^{-4} V = 0,3 mV.

Esto probablemente es demasiado pequeño para ser detectado por las aves, puesto que los voltajes celulares son típicamente 70 mV. Sin embargo, para los jets 747 con una extensión de alas de 60 m y una velocidad de 900 km/h, el efecto es apreciable.

Fuerza electromotriz producida por un alambre que se desliza en un campo magnético.

Supongamos dos rieles horizontales paralelos separados una distancia ℓ, como se muestra en la figura.



Sea un campo magnético perpendicular al plano. Debido a la corriente *I*, el conductor sufre una fuerza de magnitud $F = \ell IB$ F hacia la derecha. Esta fuerza lo acelera hacia la derecha, de tal manera que en un determinado lapso de tiempo se mueve con una velocidad v.

El flujo magnético a través de la aspira es:

$\Phi = BA = B\ell x$

Al moverse el conductor con velocidad *v* se produce un cambio en este flujo

$$\frac{d\Phi}{dt} = B\ell\frac{dx}{dt} = B\ell v$$

Por la ley de Faraday esto produce una fuerza electromotriz.

$$\varepsilon' = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v$$

Haciendo circular una corriente *I’* en oposición a *I* (por la Ley de Lenz)

$$I' = \frac{\varepsilon'}{R} = -\frac{B\ell v}{R}$$

Siendo *R* la resistencia del circuito.

Otra manera de encontrar esta fuerza electromotriz inducida es mediante la fuerza de Lorentz y la conservación da la energía.

La potencia suministrada es $\varepsilon_0 I$, se consume $I^2 R$ en la resistencia y Fv en mover al alambre con una velocidad v.

De tal modo que: $\varepsilon_0 I = I^2 R + Fv$

El valor de I es menor que $\frac{\varepsilon_0}{R}$, el valor en caso estático.

Para evitar esta dificultad sumamos una variable adicional con el fin de mantener a I constante.

$(\varepsilon_0 + \varepsilon')I = I^2 R + Fv$

Aquí corresponde $\varepsilon_0 I = I^2 R$

Dejando $\varepsilon' I = Fv = (I\ell B)v \Rightarrow \varepsilon' = B\ell v$

ε' no es la fuerza electromotriz inducida, es el negativo de ella, cuyo fin es mantener la corriente constante

$$\varepsilon' = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ejemplo 12. Una barra horizontal de 5 m de longitud orientada en la dirección Este-Oeste cae desde lo alto de un precipicio formando un ángulo recto con la componente horizontal del campo magnético de valor 2,4 x 10^{-5} T. ¿el valor instantáneo de la fuerza electromotriz inducida en la barra a los 5 s y a los 10 s de caída?

Solución.

La velocidad de la barra a los 5 s y 10 s de caída será, respectivamente,

$v_5 = gt_5 = 9{,}81 \times 5$ = 49,05 m/s,

$v_{10} = gt_{10} = 9{,}81 \times 10$ = 98,10 m/s.

La fem inducida en la barra en cada caso será:

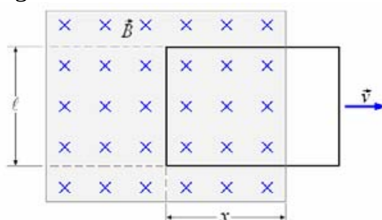
$\varepsilon_5 = B\ell v_5$ = 49,05 x 2,4 x 10^{-5}
= 58,86 x 10^{-4} V

$\varepsilon_{10} = B\ell v_{10}$ = 98,10 x 2,4 x 10^{-5}

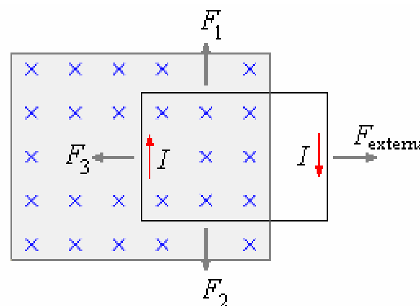
= 117,72 x 10^{-4} V

Ejemplo 13. ¿Qué fuerza electromotriz se induce en el eje frontal de un automóvil que se dirige hacia el Norte a la velocidad uniforme de 100 km/h si el eje tiene 1,5 m de longitud y la componente vertical del campo magnético terrestre es de 5 x 10^{-5} T? ¿Qué extremo del eje estará a mayor potencial?
Solución.
El eje se desplaza con una velocidad de: 100 km/h =27,78 m/s.
Por tanto, la fuerza electromotriz inducida en un campo de 5 x 10^{-5} T será:
$\varepsilon = B\ell v$ = 27,78 x 5 x 10^{-5} x 1,5
= 2,08 x 10^{-3} V.
Las cargas positivas (regla de la mano derecha) se desplazan en estas condiciones de E a O. Por tanto, estará a mayor potencial el extremo izquierdo (oeste) del eje.

Ejemplo 14. Espira rectangular en presencia de un campo magnético.

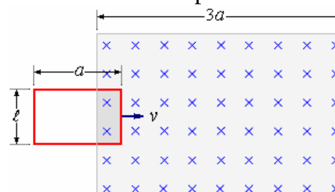


Demostrar que la potencia entregada es igual a la potencia disipada.
Solución.
Supongamos una espira como la mostrada en la figura de resistencia *R* y que sale con velocidad *v* de la acción del campo *B*.
El flujo magnético encerrado por la espira en un momento dado es
$\Phi = B\ell x$
Como *x* está variando
$$\frac{d\Phi}{dt} = B\ell\frac{dx}{dt} = B\ell v$$
La fuerza electromotriz inducida es:
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v$$
La corriente producida es
$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$
El sentido en oposición a la disminución de líneas de flujo seria el indicado en la figura siguiente.



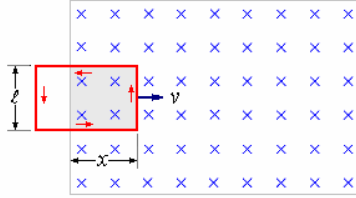
Al inducirse corriente aparecen fuerzas sobre la espira, F_1 y F_2 son iguales en magnitud y opuestas en sentido, $F_3 = I\ell B$ en el sentido indicado, como la espira se desliza a velocidad constante la fuerza externa $F_{externa}$ es igual a F_3.
$F_{externa} = I\ell B$
La potencia desarrollada por el agente externo
$P = (F_{externa})v = I\ell Bv$
Como $I = \frac{B\ell v}{R}$, tenemos
$$P = \frac{B^2\ell^2v^2}{R}$$
La potencia disipada en al circuito es
$P = I^2R$, con $I = \frac{B\ell v}{R}$:
$$P = \frac{B^2\ell^2v^2}{R}$$
Con lo que demostramos que la potencia entregada es igual a la potencia disipada.

Ejemplo 15. Una espira rectangular de dimensiones ℓ y a con resistencia *R* se mueve con velocidad constante v hacia la derecha como se muestra en la figura, penetra en una región donde hay un campo magnético uniforme perpendicular al plano del papel y hacia dentro de módulo *B*. Calcular y hacer un gráfico de:
a) El flujo, la fuerza electromotriz y la fuerza sobre la espira, en función de la posición de la espira, es decir, cuando la espira se está introduciendo, está introducida, y está saliendo de la región que contiene el campo magnético.
b) Explíquese el mecanismo (fuerza sobre los portadores de carga) de establecimiento de la corriente inducida en los tres casos citados.
c) Grafique el flujo, la fuerza electromotriz y la fuerza neta en función de la posición *x*.



Solución.

a) El flujo, la fuerza electromotriz y la fuerza sobre la espira, en función de la posición de la espira, es decir, cuando la espira se está introduciendo, está introducida, y está saliendo de la región que contiene el campo magnético.



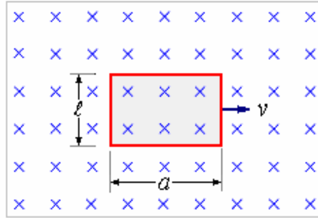
$$\Phi = B(\ell x)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell\frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{B\ell v}{R}$$

El sentido de la corriente es antihorario.

Cuando la espira se encuentra dentro del campo magnético.

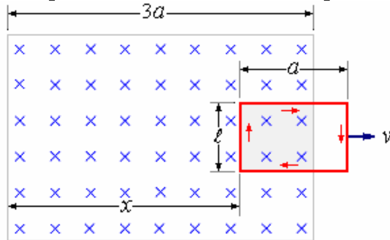


$$\Phi = B\ell a$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

No hay corriente inducida, $I = 0$

Cuando la espira esta saliendo del campo magnético.



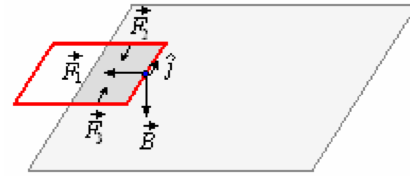
$$\Phi = B[a - (3a - x)]\ell = B(x - 2a)\ell$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ell\frac{dx}{dt} = B\ell v$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

El sentido de la corriente es horario.

Fuerza sobre las corrientes.
Ingresando la espira.



$\vec{F}_1 = I(\ell\hat{j}) \times \vec{B}$ (ℓ lleva el sentido de la corriente *I*)

$$F_1 = I\ell B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)\ell B = \frac{B^2\ell^2 v}{R}$$

Fuerza neta de F_1 hacia la izquierda $(-\hat{i})$.

$\vec{F}_2 = I(-\hat{i}x) \times \vec{B}$ (*x* lleva el sentido de la corriente *I*)

$$F_2 = IxB = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)xB = \frac{B^2\ell x}{R}$$

Fuerza neta de F_2 hacia abajo $(\hat{j})$.

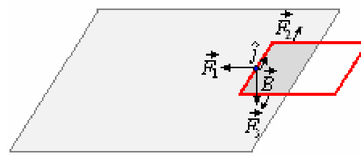
$\vec{F}_3 = I(\hat{i}x) \times \vec{B}$ (*x* lleva el sentido de la corriente *I*)

$$F_3 = IxB = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)xB = \frac{B^2\ell x}{R}$$

Fuerza neta de F_3 hacia arriba $(-\hat{j})$.

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

Saliendo la espira.



$\vec{F}_1 = I(x - 2a)(-\hat{i}) \times \vec{B}$ [(*x* – 2*a*) lleva el sentido de la corriente *I*]

$$F_1 = I\ell B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)\ell B = \frac{B^2\ell^2 v}{R}$$

Fuerza neta de F_1 hacia la izquierda $(-\hat{i})$.

$\vec{F}_2 = I(x - 2a)\hat{i} \times \vec{B}$ [(*x* – 2*a*) lleva el sentido de la corriente *I*].

$$F_2 = I(x - 2a)B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)(x - 2a)B = \frac{B^2\ell(x - 2a)}{R}$$

Fuerza neta de F_2 hacia arriba $(-\hat{j})$.

$\vec{F}_3 = I(x - 2a)(-\bar{i}) \times \vec{B}$ [(*x* – 2*a*) lleva el sentido de la corriente *I*].

$$F_3 = I(x-2a)B = \left(\frac{B\ell v}{R}\right)(x-2a)B$$

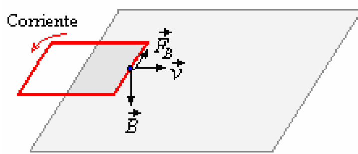
$$= \frac{B^2\ell(x-2a)}{R}$$

Fuerza neta de F_3 hacia abajo $(\hat{j})$.

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

b) El mecanismo (fuerza sobre los portadores de carga) de establecimiento de la corriente inducida en los tres casos citados.

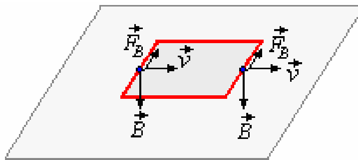
Cuando se introduce la espira rectangular.



$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$$

Fuerza neta $\vec{F}_1$ hacia la izquierda $\left(-\hat{i}\right)$

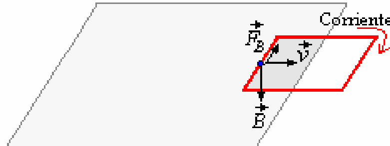
Con toda la espira rectangular en el campo magnético.



$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$$

No hay corriente, se compensan.

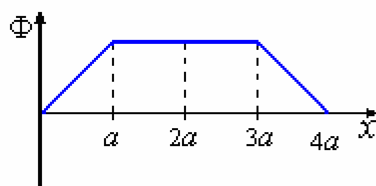
Cuando se saca la espira rectangular.

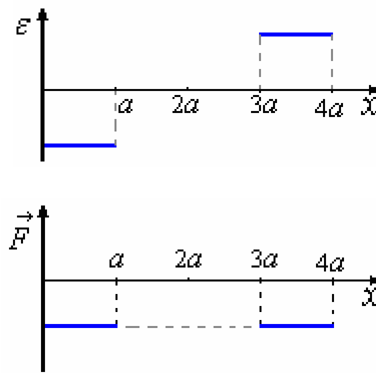


$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$$

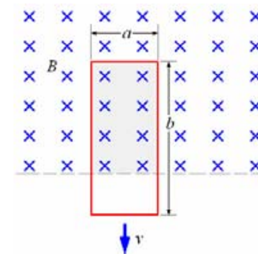
Fuerza neta $\vec{F}_1$ hacia la izquierda $\left(-\hat{i}\right)$

c) Gráficos del flujo, la fuerza electromotriz y la fuerza neta en función de la posición *x*.





Ejemplo 16. Un lazo rectangular de dimensiones *a* x *b*, resistencia *R*, y masa *m* está orientado perpendicularmente a un campo magnético uniforme horizontal. Se suelta del reposo y baja de modo que parte del lazo esté fuera del campo, como se muestra en la figura. ¿Qué velocidad terminal máxima alcanza el lazo?



Solución.

Cuando la fuerza magnética en la corriente inducida es igual al peso del lazo, la fuerza actuante será cero y el lazo tendrá aceleración cero.

$$F_B = mg$$

Las fuerzas exteriores en las dos ramas laterales se cancelan. La fuerza ascendente en la porción superior es $F_B = IaB$, donde

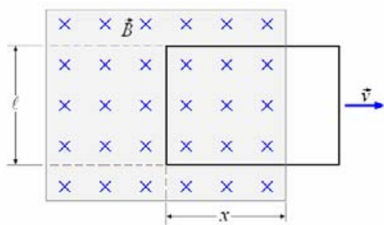
$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{Badx}{Rdt} = \frac{Bav}{R}$$

Así

$$mg = B\left(\frac{Bav}{R}\right)a = \frac{B^2a^2v}{R} \text{ y } v = \frac{mgR}{B^2a^2}$$

Observe que la corriente inducida fluye a la derecha en un intento de mantener el flujo dentro del lazo constante.

Ejemplo 17. Supongamos una espira como la mostrada en la figura de resistencia *R* y que sale con velocidad $\vec{v} = v_0\hat{i}$ de la acción del campo $\vec{B} = B_0\hat{j}$.



a) Calcule el flujo magnético y la corriente inducida (valor y dirección) cuando un segmento x aún no sale la región con campo. Justifique.
b) Calcule en es mismo instante las fuerzas magnéticas sobre cada lado de la espira.
c) Si la velocidad de la espira y el campo magnético tienen valores constantes, calcule la fuerza externa necesaria para que este movimiento se realice.
d) Calcule el trabajo por unidad de tiempo realizado por la fuerza externa y la potencia disipada por la corriente inducida. Comente los resultados.

Solución.

a) El flujo magnético encerrado por la espira en un momento dado es

$$\Phi = B\ell x$$

Como x está variando

$$\frac{d\Phi}{dt} = B\ell\frac{dx}{dt} = B\ell v$$

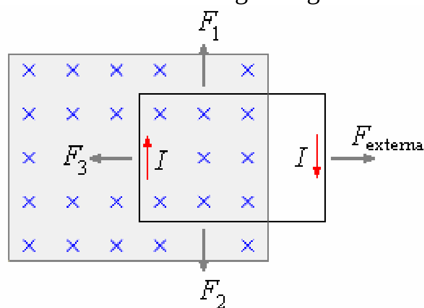
La fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v$$

La corriente producida es

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

El sentido en oposición a la disminución de líneas de flujo seria el indicado en la figura siguiente.



b)
Al inducirse corriente aparecen fuerzas sobre la espira, F_1 y F_2 son iguales en magnitud y opuestas en sentido, $F_3 = I\ell B$ en el sentido indicado.

$$F_1 = F_2 = IBx$$

c) Como la espira se desliza a velocidad constante la fuerza externa $F_{externa}$ es igual a F_3.

$$F_{externa} = I\ell B$$

d) La potencia desarrollada por el agente externo

$$P = (F_{externa})v = I\ell Bv$$

Como $I = \dfrac{B\ell v}{R}$, tenemos

$$P = \frac{B^2\ell^2v^2}{R}$$

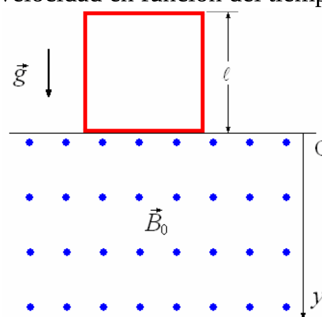
La potencia disipada en al circuito es

$P = I^2R$, con $I = \dfrac{B\ell v}{R}$:

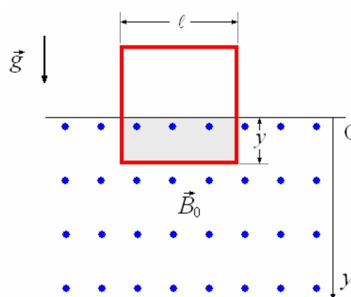
$$P = \frac{B^2\ell^2v^2}{R}$$

Con lo que demostramos que la potencia entregada es igual a la potencia disipada.

Ejemplo 18. Una espira cuadrada de lado ℓ, masa m, y resistencia R. se encuentra en la frontera de una zona donde actúa un campo magnético uniforme $\vec{B}_0$, perpendicular al plano del papel y saliendo de él, como lo muestra la figura.
En t = 0, se deja caer la espira la cual se introduce progresivamente en el campo magnético $\vec{B}_0$. Se pide:
a) Hallar el flujo magnético en la espira en función de la distancia vertical y.
b) Encontrar la fem y la corriente inducida en la espira. ¿Cuál es el sentido de dicha corriente?
c) Mostrar en un diagrama de cuerpo libre las diferentes fuerzas que actúan sobre la espira, e indicar los valores respectivos.
d) Plantear la ecuación diferencial del movimiento vertical en función de la velocidad de la espira.
e) Resolver la ecuación diferencial planteada en (d), y obtener la velocidad en función del tiempo.



Solución.
a)



El flujo magnético en la espira en función de la distancia vertical y:

$$\Phi_B = B_0A = B_0\ell y$$

b) La fem:

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

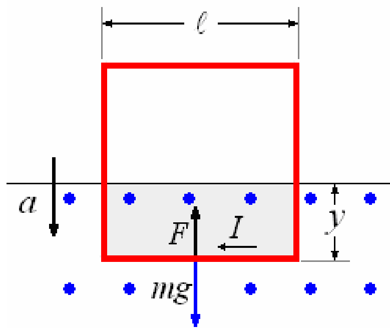
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B_0 \ell \frac{dy}{dt} = -B_0 \ell v$$

La corriente inducida en la espira

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B_0 \ell v}{R}$$

Como el campo durante la caída esta aumentando hacia el papel, por la ley de lenz en oposición a ese aumento debe aparecer un campo magnético opuesto, este se debería a una corriente en la espira en sentido horario.

c)



$$F = I\ell B_0 = \frac{B_0^2 \ell^2 v}{R}$$

$$\sum F = ma$$

$$mg - F = ma \Rightarrow mg - I\ell B_0 = ma \Rightarrow$$

$$mg - \frac{B_0^2 \ell^2 v}{R} = m\frac{dv}{dt}$$

La ecuación diferencial del movimiento vertical en función de la velocidad de la espira. Es:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B_0^2 \ell^2 v}{mR} - g = 0$$

d)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 \ell^2 v}{mR} + g \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 \ell^2}{mR}\left(v - \frac{mRg}{B_0^2 \ell^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{\left(v - \frac{mRg}{B_0^2 \ell^2}\right)} = -\frac{B_0^2 \ell^2}{mR} dt$$

Integrando:

$$\ln\left(v - \frac{mRg}{B_0^2 \ell^2}\right)\Bigg|_0^v = -\frac{B_0^2 \ell^2}{mR} t\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\ln\frac{v - \frac{mRg}{B_0^2 \ell^2}}{-\frac{mRg}{B_0^2 \ell^2}} = -\frac{B_0^2 \ell^2}{mR} t \Rightarrow$$

$$\frac{v - \frac{mRg}{B_0^2 \ell^2}}{-\frac{mRg}{B_0^2 \ell^2}} = e^{-\frac{B_0^2 \ell^2}{mR} t} \Rightarrow$$

$$v - \frac{mRg}{B_0^2 \ell^2} = -\frac{mRg}{B_0^2 \ell^2} e^{-\frac{B_0^2 \ell^2}{mR} t} \Rightarrow$$

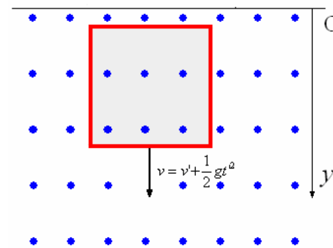
$$v = \frac{mRg}{B_0^2 \ell^2}\left(1 - e^{-\frac{B_0^2 \ell^2}{mR} t}\right)$$

Esta velocidad es mientras la espira está ingresando en el campo, después de haber ingresado completamente la velocidad llega a un valor v'.

$$v' < v_{límite} = \frac{mRg}{B_0^2 \ell^2} \quad \text{(Cuando } a = 0\text{)}.$$

Desde este instante en adelante la velocidad estará dada por:

$$v = v' + \frac{1}{2} g t'^2 .$$

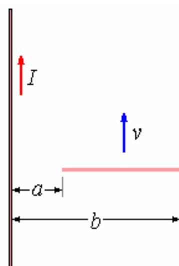


Ejemplo 19. Sabiendo que el módulo del campo magnético producido por una corriente rectilínea indefinida de intensidad *I* a una distancia *r* vale

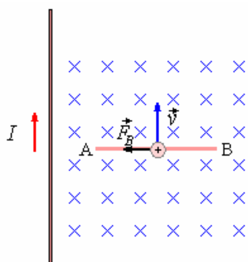
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a) Calcular la diferencia de potencial entre los extremos A y B de una varilla que se mueve paralelamente a la corriente rectilínea con velocidad *v*.

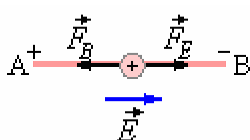
b) ¿Cuál es el potencial más alto de los dos?. Razonar las respuestas



Solución.
a) Un portador de carga positiva de la varilla, al moverse con velocidad *v*, en el campo magnético producido por la corriente rectilínea indefinida experimente una fuerza $F_B = qvB\text{sen}90^o$, dirigida a lo largo de la varilla hacia A.



Las cargas positivas se acumulan en A y las negativas en B.



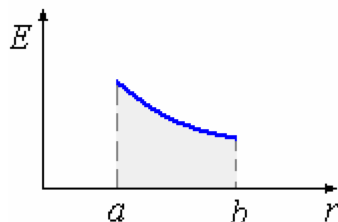
Surge un campo eléctrico $\vec{E}$ entre A y B, que se opone a que se siga acumulando carga.
En el equilibrio

$$F_B = F_E \Rightarrow qvB = qE \Rightarrow E = vB = v\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$V_A - V_B = \int_a^b Edr = \int_a^b v\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr = v\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

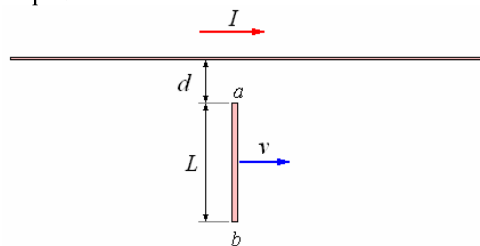
$$= v\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

b) El potencial más alto esta en *a* (+), es un punto mas cercano al alambre con corriente.

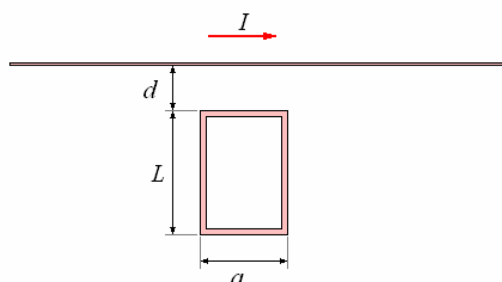


Ejemplo 20. El alambre recto y largo conduce una corriente constante *I*. Una barra metálica de longitud *L* se desplaza a velocidad constante *v*, como se muestra en la figura. El punto *a* está a una distancia *d* del alambre. Calcule la fem inducida en la barra.

¿Cuál punto *a* o *b* es el de mayor potencial? Justifique.

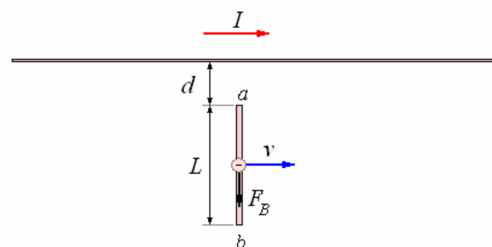


b) Suponga que se sustituye la barra por una espira rectangular de alambre de resistencia *R*. Calcule el flujo magnético y la corriente inducida en la espira. ¿Cuál es el sentido de la corriente inducida?

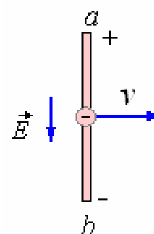


c) Lo mismo que la parte anterior, pero para una corriente variable en el tiempo en el alambre igual a $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$, donde α . es una constante positiva de unidad s^{-1}.
d) Para la situación de la parte c). ¿Cuál es la fuerza magnética resultante sobre la espira? El resultado puede ser expresado en función de la corriente inducida I_{ind} de la espira.

Solución.
a) Un portador de carga de la varilla, al moverse con velocidad *v*, en el campo magnético producido por la corriente rectilínea experimente una fuerza $\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$, dirigida a lo largo de la varilla hacia *b*.



Las cargas positivas se acumulan en *a* y las negativas en *b*.



Surge un campo eléctrico $\vec{E}$ entre *a* y *b*, que se opone a que se siga acumulando carga.

En el equilibrio $F_B = F_E \;\Rightarrow\; qvB = qE$

$$\Rightarrow\; E = vB = v\frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}$$

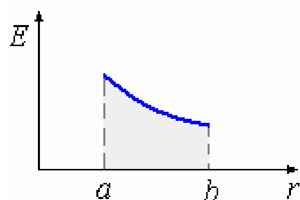
La fem inducida en la barra.

$$V_a - V_b = \int_d^{d+L} Edr$$

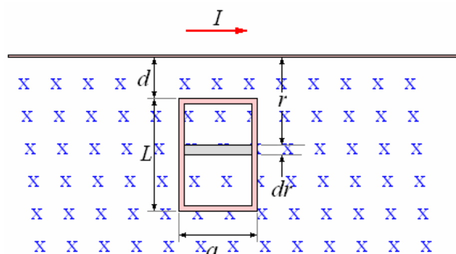
$$= \int_d^{d+L} v\frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}dr = v\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+L}\frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{d+L}{d}$$

El punto de mayor potenciales *a*.



b) Suponga que se sustituye la barra por una espira rectangular de alambre de resistencia *R*. Calcule el flujo magnético y la corriente inducida en la espira. ¿Cuál es el sentido de la corriente inducida?



$$\Phi_B = \int_d^{d+L}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}adr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$$

Como el flujo es constante no hay fem inducida, por lo tanto tampoco corriente inducida.

No hay corriente inducida, puesto que el flujo magnético es constante en el tiempo.

c) Si la corriente en el alambre igual a $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt},\; \Phi_B = \int_d^{d+L}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}adr$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$$

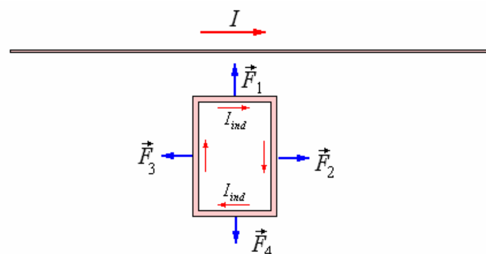
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 a I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{\mu_0 a I_0 \alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)e^{-\alpha t}$$

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 a I_0 \alpha}{2\pi R}\left(\frac{d+L}{d}\right)e^{-\alpha t}$$

El sentido de la corriente inducida de acuerdo con la ley de Lenz, como la corriente va disminuyendo, el campo magnético también, luego para que aparezca un campo en oposición la disminución del campo debe circular una corriente inducida en sentido horario.

d) Para la situación de la parte c). ¿Cuál es la fuerza magnética resultante sobre la espira? El resultado puede ser expresado en función de la corriente inducida I_{ind} de la espira.



$$\vec{F}_1 = I_{ind}\, a\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{j}$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

$$\vec{F}_4 = -I_{ind}\, a\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+L)}\hat{j}$$

La fuerza magnética resultante sobre la espira

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_4 = I_{ind}\, a\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{j} - I_{ind}\, a\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+L)}\hat{j}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I I_{ind}\, a}{2\pi}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{(d+L)}\right]\hat{j}$$

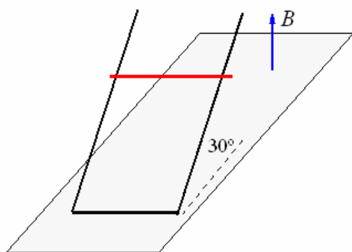
En oposición al ingreso.

Ejemplo 21. Una varilla conductora de masa 10 g desliza sobre carriles paralelos distantes 20 cm y que forman un ángulo de 30º con el plano horizontal. Los carriles se cierran por la parte inferior, tal como se indica en la figura. En la región existe un campo magnético uniforme y perpendicular al plano horizontal de intensidad 1 T.

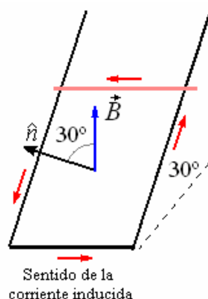
a) Calcular la fuerza electromotriz en función de la velocidad constante de la varilla. La intensidad de la corriente inducida si la resistencia del circuito es de 10 Ω. La(s) fuerza(s) sobre la varilla.

b) ¿Cuánto valdrá la velocidad de la varilla cuando desliza con movimiento uniforme? (se desprecia el rozamiento).

Razonar las respuestas dibujando los esquemas



Solución.
a)



El sentido de la corriente inducida es en oposición a la disminución del flujo magnético.
El flujo es

$$\Phi = \vec{B} \cdot \hat{n} A = BA\cos 30^{\circ}$$

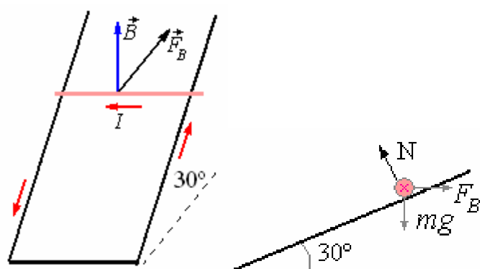
$$= (1)\left(0{,}2x\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}1\sqrt{3}\ x \text{ Wb}$$

b) La fuerza electromotriz es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -0{,}1\sqrt{3}\frac{dx}{dt} = 0{,}1\sqrt{3}\ v \text{ V}$$

Y la corriente $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{0{,}1\sqrt{3}}{10}v$

Fuerzas sobre la varilla



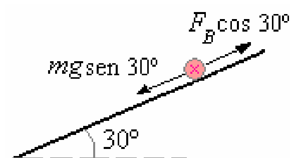
$$\vec{F}_B = I\,\vec{\ell} \times \vec{B},$$

($\vec{\ell}$ lleva el sentido de la corriente I)

$$F_B = I(0{,}2)(1)\text{sen}90^{\circ} = 0{,}02\frac{0{,}1\sqrt{3}}{10}v$$

$$= 0{,}02\sqrt{3}v \ \text{ N}$$

Para que vaya a velocidad constante ambas fuerzas deben ser iguales.

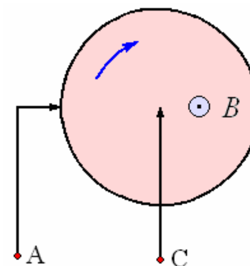


$$mg\text{sen}30^{\circ} = F_B \cos 30^{\circ}$$

$$(0{,}01)(9{,}8)(0{,}5) = 0{,}002\sqrt{3}v\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\ v = \frac{50}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 22. Faraday inventó un dispositivo ingenioso llamado generador homopolar, o disco de Faraday. Un disco de cobre del radio *r* se monta con su eje paralelo a un campo magnético uniforme *B*. El disco rota en la frecuencia angular ω. el contacto eléctrico con las escobillas que conducen se hace en los puntos A y C, en el perímetro y el eje del disco. ¿Qué fuerza electromotriz se genera entre los terminales A y C?

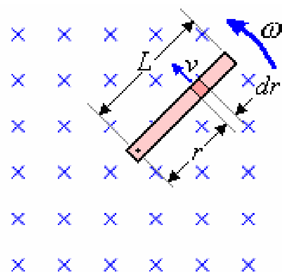


Solución.
Imagine un lazo cerrado consistente en de las conexiones mostradas, más un segmento que conecta A y C, más un pedazo radial del disco del centro a un punto en la circunferencia, más un arco a lo largo de la circunferencia.
En el tiempo dt este pedazo radio barre un triángulo pequeño de área $\frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2\omega dt$. Esto aumenta el flujo a través del lazo en

$d\Phi_B = BdA = \frac{1}{2}Br^2\omega dt$. Así la fuerza electromotriz inducida entre A y C es:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2}Br^2\omega$$

Ejemplo 23. Determinar la diferencia de potencial entre los extremos de una barra metálica que gira con velocidad angular uniforme ω dentro de un campo magnético *B* como el mostrado en la figura.



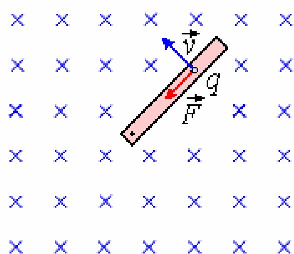
Solución.
Escogemos un elemento diferencial *dr* a una distancia *r* del centro, tendrá una velocidad tangencial $v = \omega r$. El elemento de longitud *dr* se mueve con une velocidad *v* en un campo *B* perpendicular el. De allí que la fuerza electromotriz entre sus extremos es:

$$d\varepsilon = B(dr)v = B(dr)(\omega r) = B\omega rdr$$

La fuerza electromotriz entre los extremos del alambre es:

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^L B\omega rdr = B\omega \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^L = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

Calculo por medio de la Fuerza de Lorentz. Otra forma de llegar al mismo resultado es mediante la Fuerza de Lorentz



$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B},\ F = qvB$$

El trabajo realizado por la fuerza en la distancia *dr* es:

$$dW = Fdr = qvBdr = qB\omega rdr$$

el trabajo total es

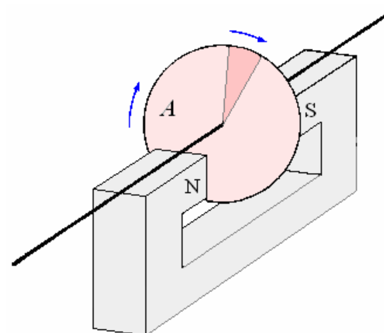
$$W = \int dW = \int_0^L qB\omega rdr = qB\omega \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^L$$

$$= \frac{1}{2}qB\omega L^2$$

El trabajo total por unidad de carga es

$$\frac{W}{q} = \Delta V = \varepsilon = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

Ejemplo 24. Un disco de cobre de 25 cm gira con una velocidad angular de 400 rpm alrededor de su eje y perpendicularmente a un campo magnético de 1 T. ¿Qué diferencia de potencial se induce entre el borde del disco y su centro?

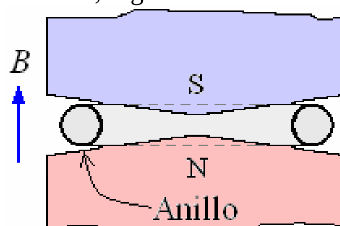


Solución.
Consideremos una banda radial del disco. Como $\omega = 2400 \text{ rpm} = \frac{2400}{60} = 40 \text{ rps}$, en una vuelta, o sea en 1/40 segundos cada banda radial del disco cortará todas las líneas de flujo que cubre su área A. Por tanto,

$$\Phi = BA = 1\times\pi(0{,}25)^2 = 0{,}196 \text{ Wb},$$

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{0{,}196}{1/40} = 7{,}85 \text{ V}.$$

EL BETATRÓN. Un campo magnético que cambiante en el espacio crea un torbellino como campos eléctricos, y esto es verdad sin o con un conductor presente. Tales campos se utilizan en el betatrón para acelerar electrones a alta velocidad. Un “anillo” evacuado se coloca en el campo de un electroimán grande, y los electrones viajan en órbitas circulares. El campo magnético se varía sinusoidalmente, y por un cuarto del ciclo los electrones son acelerados por el campo eléctrico inducido. Así el campo magnético sirve para hacer girar a los electrones en órbitas circulares y acelerarlos. Para lograr esto, el campo magnético debe ser más débil en la órbita que en el interior de la trayectoria circular, según lo indicado en la figura.



Ejemplo 25. Demuestre que el campo magnético en la órbita en un betatrón debe ser la mitad del campo magnético promedio sobre el área encerrada por la órbita.

Solución.
La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria, tal que $qvB = \frac{mv^2}{r}$. La fuerza electromotriz inducida es

$$\varepsilon = \int \vec{E}\cdot\hat{n}dS = 2\pi rE = \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Por la segunda ley de Newton, la fuerza sobre el electrón es

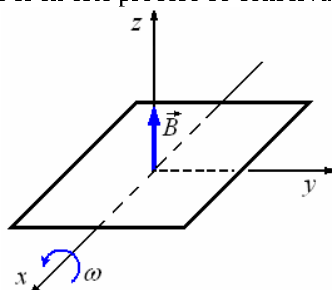
$$F = \frac{d(mv)}{dt} = qE = \frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Desde que $v = 0$ en $t = 0$,

$$mv = \frac{1}{2\pi r}\Phi_B = qrB$$

Pero $\Phi_B = \pi r_2 B_m$, tal que $B = \frac{1}{2}B_m$.

Ejemplo 26. La espira conductora cuadrada en el plano *xy* de la siguiente figura de lado ℓ y resistencia *R* gira con velocidad angular ω uniforme alrededor del eje *x*. La espira se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme *B* que tiene la dirección del eje *z*.
a) Si el movimiento empieza cuando el flujo es máximo, calcule el valor de flujo magnético inicial y el sentido de la corriente inducida por el movimiento.
b) ¿Cuál es la corriente inducida en función del tiempo?
c) Calcule el momento o torque necesario para mantener la espira girando a velocidad angular constante.
d) Explique si en este proceso se conserva la energía.

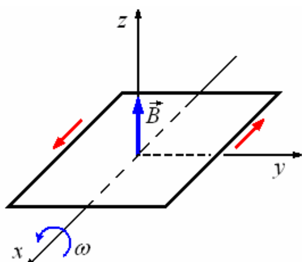


Solución.

a) $\Phi_B = \vec{B}\cdot\hat{n}A$

El flujo magnético inicial $\Phi_B = B\hat{k}\cdot\hat{k}\ell^2 = B\ell^2$

Si consideramos que el movimiento se inicia en la posición mostrada en el dibujo $(\theta = 0)$, para $\theta = \pi/2$, el flujo es cero, para $\theta = \pi$, el flujo es máximo nuevamente pero en sentido contrario, como la fuerza electromotriz inducida es alterna, la corriente también es alterna. Como al inicio el flujo es máximo y va disminuyendo, la fuerza electromotriz es en oposición a ese cambio, la corriente inicial será en el sentido indicado en el dibujo.



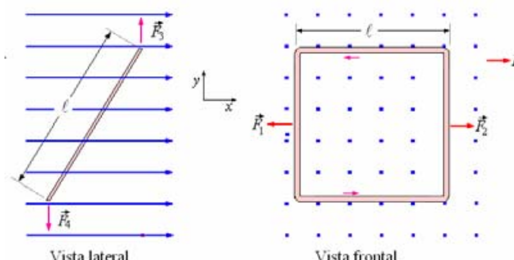
b) $i = \frac{\varepsilon}{R}$, $\Phi_B = \vec{B}\cdot\hat{n}A = B\ell^2\cos\omega t$

Luego $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}B\ell^2\cos\omega t$

$= B\ell^2\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$

Finalmente $i = \frac{B\ell^2\omega}{R}\mathrm{sen}\,\omega t$

c) La figura muestra la vista lateral y la vista frontal sobre el plano *xy*.



Actúan las fuerzas $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$, tal que

$F_3 = F_4 = I\ell B$.

Estas fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en sentido, formando así un par de fuerzas de valor

$\tau = F_3\ell\,\mathrm{sen}\,\theta = I\ell B\ell\,\mathrm{sen}\,\theta$

con $\ell^2 = A$ (área de lo espira) podemos escribir

$\tau = IAB\,\mathrm{sen}\,\theta$

Este par puede escribirse como producto vectorial de

$\hat{n}$ (normal a la superficie *A*) y $\vec{B}$.

$\vec{\tau} = IA\hat{n}\times\vec{B}$.

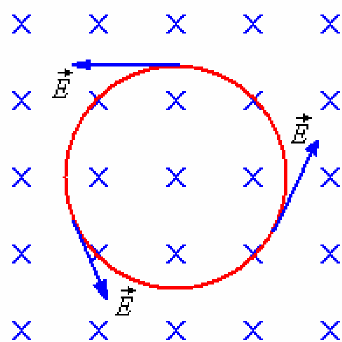
d) No se conserva la energía, se disipa en forma de calor por la resistencia de la espira debido al efecto Joule.

CAMPOS ELECTRICOS INDUCIDOS POR CAMPOS MAGNETICOS VARIABLES CON EL TIEMPO.

Tenemos que

$$\varepsilon = \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell} \text{ y } \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

es decir un campo magnético que varia con el tiempo nos induce un campo eléctrico. El sentido del campo eléctrico lo obtenemos mediante la ley de Lenz, consideremos una espira circular en presencia de un campo magnético tal como se muestra en la figura a continuación, si el campo magnético se está incrementando, se produce un campo eléctrico tangente a la trayectoria circular con una dirección contraria al sentido de las agujas del reloj



si el campo va en disminución el sentido del campo eléctrico será en el sentido horario.

La diferencia entra el campo eléctrico producido por carga eléctrica y los inducidos es que los primeros son conservativos.

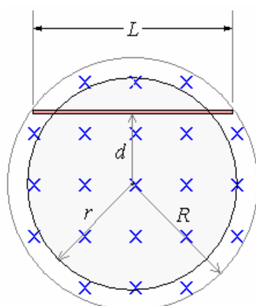
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Los segundos no lo son

Los segundos no lo son

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ejemplo 27. Encontrar el campo eléctrico inducido en una barra metálica de longitud L que se encuentra en una región cilíndrica de radio *R* en el espacio donde el campo magnético cambia con una razón $\dfrac{dB}{dt}$.



Solución.

Para cualquier punto dentro da la región cilíndrica con respecto al centro, el campo eléctrico se puede obtener a partir de:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Como $\Phi = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow$

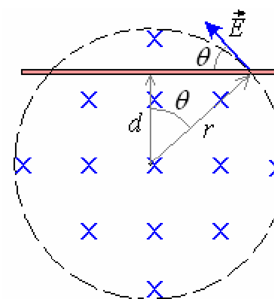
$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \hat{n} dS \text{ y } \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

A lo largo de la circunferencia de radio *r*

$$E 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

En la figura siguiente mostramos el detalle de la región de radio *r*



El campo en la barra es

$$E_{barra} = E\cos\theta$$

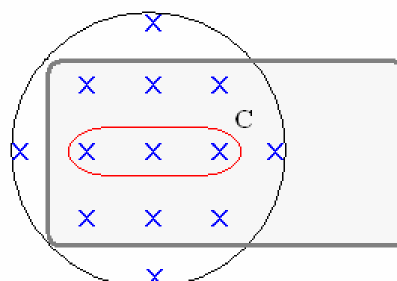
Como $\cos\theta = \dfrac{d}{r}$

$$E_{barra} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\left(\frac{d}{r}\right) = -\frac{d}{2}\frac{dB}{dt}$$

En esta expresión observamos que el campo eléctrico en la barra es constante en cualquier punto.

CORRIENTES DE FOUCAULT

Acabamos de ver que por un flujo magmático variable se establecen circuitos definidos. Frecuentemente se establecen corrientes circulares denominadas **Corrientes de Foucault** o de **Eddy** en un trozo de metal como en el núcleo de un transformador. Por ejemplo, consideremos un bloque conductor situado entre los polos de un electroimán, si el campo magnético varía con el tiempo se induce una fuerza electromotriz en cualquier trayectoria cerrada en el interior del metal, tal como la curva C.



La fuerza electromotriz inducida produce una corriente en el circuito. Las corrientes de Foucault pueden reducirse construyendo el bloque mediante láminas o tiras la resistencia del trayecto aumente debido al pegamento que se utiliza entre láminas, de esta manera se rompen los grandes circuitos y se reduce en gran manera la pérdida de potencia, una aplicación de esta corriente es el freno magnético debido a esta corriente y al campo magnético aparece una fuerza magnética en oposición al movimiento del bloque metálico.

Ejemplo 28. Un disco de resistividad η, de radio *a*, y de espesor *b* se coloca con su plano perpendicular a un campo magnético variable, $B = B_o \operatorname{sen}\omega t$. Se inducen corrientes circulares llamadas las corrientes de Foucault, y la energía se disipa en el disco. Calcule el índice de la disipación de la energía. Esta pérdida de energía termal presenta un problema en

dispositivos tales como transformadores. Este efecto tiene aplicación en los detectores de metales usados en los aeropuertos, para encontrar monedas enterradas y en hornos de inducción.
Solución.
Considere un anillo de ancho *dr* y radio *r*. el flujo a través de este anillo es $\Phi = \pi r^2 B_0 \text{sen}\omega t$,
La fuerza electromotriz inducida en el anillo es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \omega B_0 \cos\omega t .$$

La resistencia del anillo es

$$R = \eta\left(\frac{L}{A}\right) = \eta\left(\frac{2\pi r}{bdr}\right),$$

La energía total disipada en el disco es

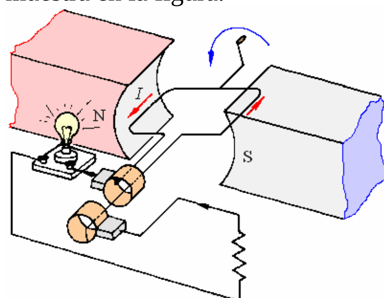
$$P = \int \frac{\varepsilon^2}{R} = \int_0^a \frac{\left(\pi r^2 \omega B_0 \cos\omega t\right)^2 bdr}{2\pi r \eta}$$

$$= \frac{1}{8\eta}\pi ba^4\omega^2 B_0^2 \cos^2 \omega t$$

La disipación de energía depende de la cuarta potencia del radio del disco, y esta dependencia se encuentra para otras formas también, así que los núcleos de los transformadores con hojas laminadas finas de metal ayudan a reducir las pérdidas perceptiblemente. El promedio de $\cos^2 \omega t$ en un período es 1/2, tal que:

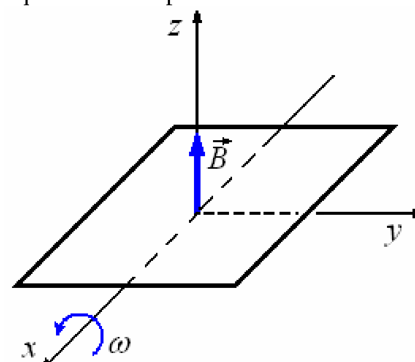
$$P_m = \frac{1}{16\eta}\pi ba^4\omega^2 B_0^2$$

GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA
La aplicación principal de la Ley da Faraday es el generador de corriente alterna.
Un generador de corriente alterna básicamente consiste una bobina cuadrada con *n* vueltas que gira con cierta frecuencia *f* (velocidad angular $\omega = 2\pi f$) en un campo magnético *B* uniforme, tal como se muestra en la figura.



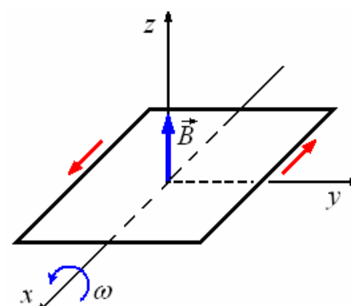
De acuerdo a la Ley de Faraday al venir el flujo magnético se induce una diferencia de potencial en los terminales de la bobina. El potencial que se obtiene es una función senoidal, habrá un voltaje máximo cuando $\vec{B}$ y la sección $A = ab$ de la bobina (el vector $\hat{n}$) están en la misma dirección y mínima cuando están en direcciones opuestas.

Ejemplo 29. La espira conductora cuadrada en el plano *xy* de la siguiente figura de lado ℓ y resistencia *R* gira con velocidad angular ω uniforme alrededor del eje *x*. La espira se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme *B* que tiene la dirección del eje *z*.
a) Si el movimiento empieza cuando el flujo es máximo, calcule el valor de flujo magnético inicial y el sentido de la corriente inducida por el movimiento.
b) ¿Cuál es la corriente inducida en función del tiempo?
c) Calcule el momento o torque necesario para mantener la espira girando a velocidad angular constante.
d) Explique si en este proceso se conserva la energía.



Solución.
a) $\Phi_B = \vec{B}\cdot\hat{n}A$

El flujo magnético inicial $\Phi_B = B\hat{k}\cdot\hat{k}\ell^2 = B\ell^2$
Si consideramos que el movimiento se inicia en la posición mostrada en el dibujo $(\theta = 0)$, para $\theta = \pi/2$, el flujo es cero, para $\theta = \pi$, el flujo es máximo nuevamente pero en sentido contrario, como la fuerza electromotriz inducida es alterna, la corriente también es alterna. Como al inicio el flujo es máximo y va disminuyendo, la fuerza electromotriz es en oposición a ese cambio, la corriente inicial será en el sentido indicado en el dibujo.

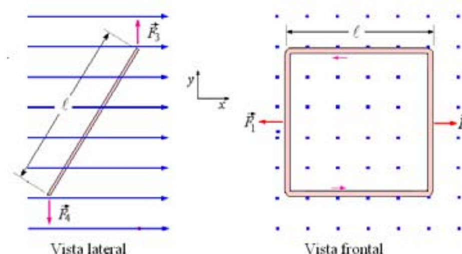


b) $I = \frac{\varepsilon}{R}$, $\Phi_B = \vec{B}\cdot\hat{n}A = B\ell^2\cos\omega t$

Luego $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}B\ell^2\cos\omega t = B\ell^2\omega\,\text{sen}\omega t$

Finalmente $I = \frac{B\ell^2\omega}{R}\,\mathrm{sen}\,\omega t$

c) La figura muestra la vista lateral y la vista frontal sobre el plano *xy*.



Actúan las fuerzas $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$, tal que

$F_3 = F_4 = I\ell B$.

Estas fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en sentido, formando así un par de fuerzas de valor

$\tau = F_3\ell\,\mathrm{sen}\,\theta = I\ell B\ell\,\mathrm{sen}\,\theta$

con $\ell^2 = A$ (área de lo espira) podemos escribir

$\tau = IAB\,\mathrm{sen}\,\theta$

Este par puede escribirse como producto vectorial de $\hat{n}$ (normal a la superficie *A*) y $\vec{B}$.

$\vec{\tau} = IA\hat{n} \times \vec{B}$.

d) No se conserva la energía, se disipa en forma de calor por la resistencia de la espira debido al efecto Joule.

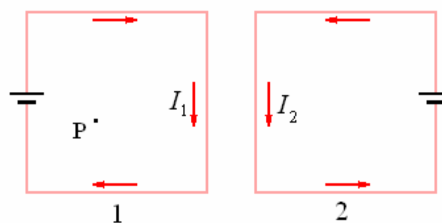
INDUCTANCIA

Hemos estudiado dos elementos constituyentes de un circuito, resistencia y condensador. Mientras la resistencia solo disipa energía, los condensadores y la capacidad están relacionados con los campos eléctricos, similarmente tenemos para con los campos magnéticos un elemento que almacena la energía magnética, este elemento es la inductancia.



DEFINICIÓN DE INDUCTANCIA

Consideremos que tenemos dos circuitos como los mostrados en la figura y que en las cercanías no hay ninguna fuente de campo magnético y todo el flujo magnético será debido a las dos espiras.



El campo magnético n un punto P en el interior espira 1 puede calcularse con la ley de Biot y Savart y es la suma de los campos producidos por la espira te 1 (corriente I_1) y por la espira 2 (corriente I_2). Por lo tanto podernos escribir que el flujo a través de la espira 1 es proporcional a I_1 y a I_2, es decir, es función de I_1 y de I_2.

$\Phi_1 = \Phi_1(I_1, I_2)$

La fuerza electromotriz inducida de la espira 1 es:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}\Phi_1(I_1, I_2) =$$

$$-\frac{d\Phi_1}{dI_1}\frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_1}{dI_2}\frac{dI_2}{dt} = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M_{21}\frac{dI_2}{dt}$$

Definimos

AUTOINDUCTANCIA de la espira 1

$$L_1 = -\frac{d\Phi_1}{dI_1}$$

INDUCTANCIA MUTUA

(efecto de la espira 2 sobre 1)

$$M_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dI_2}$$

L_1 solo depende de la geometría del circuito 1 mientras que M_{21} depende de la disposición de ambos circuitos.

Es fácil demostrar que

$M_{21} = M_{12}$

Asimismo, si en lugar de tener 2 circuitos tenemos *n* circuitos la inductancia mutua de cualquiera de ellos será

$$M_{ij} = -\frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \quad i \neq j$$

La unidad de inductancia es el HENRY (H) en honor de Joseph Henry, científico norteamericano que descubrió la ley de inducción electromagnética en la misma época que Faraday.

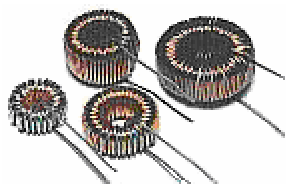
Comumente se usan los submúltiplos

milihenry (mH) 10^{-3}H

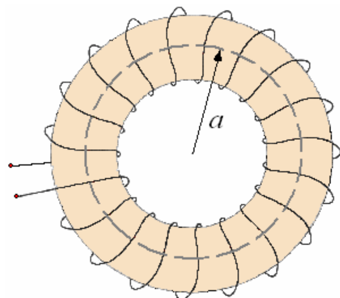
microhenry μH = 10^{-6}H

Aplicación. El toroide

Autoinductancia de un toroide.



Consideremos un toroide (bobina larga a la que se da forma circular) mostrado en la figura siguiente, con n_1 vueltas y corriente I_1,



El campo magnético en su interior se encuentra aplicando la ley de Ampere

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B_1 2\pi a = \mu_0 n_1 I_1 \Rightarrow$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 n_1 I_1}{2\pi a}$$

El flujo magnético a través de A debido a las n_1 vueltas

$$\Phi_1 = (B_1 A)n_1 = \left(\frac{\mu_0 n_1 I_1 A}{2\pi a}\right)n_1 = \frac{\mu_0 n_1^2 A I_1}{2\pi a}$$

La autoinductancia

$$L_1 = \frac{d\Phi_1}{dI_1} = \frac{\mu_0 n_1^2 A}{2\pi a}$$

La inductancia mutua. En el mismo ejemplo consideremos que tenemos un segundo arrollamiento toroidal añadido al anterior, esta vez n_2 vueltas y con corriente I_2.

El flujo

$$\Phi_{21} = (B_2 A)n_1 = \left(\frac{\mu_0 n_2 I_2}{2\pi a} A\right)n_1 = \frac{\mu_0 n_1 n_2 A}{2\pi a} I_2$$

La inductancia mutua

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_2} = \frac{\mu_0 n_1 n_2 A}{2\pi a}$$

De igual manera podemos encontrar la autoinductancia del segundo arrollamiento

$$L_2 = \frac{d\Phi_2}{dI_2} = \frac{\mu_0 n_2^2 A}{2\pi a}$$

Y la inductancia mutua

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_1} = \frac{\mu_0 n_1 n_2 A}{2\pi a}$$

Observando los valores hallados, encontramos

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$$

En general

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

donde k es el coeficiente de acople

$$|k| \leq 1$$

Ejemplo 30. Determine la autoinductancia de un toroide con n vueltas de sección transversal cuadrada a x a y radio interno R.

Solución.

De la ley de Ampere $2\pi rB = \mu_0 nI$:

$$\Phi_B = n\int BdS = n\int_R^{R+a}\left(\frac{\mu_0 nI}{2\pi r}\right)(adr)$$

$$= \frac{\mu_0 n^2 Ia}{2\pi}\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+a)^2}\right]$$

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 n^2 a}{2\pi}\left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+a)^2}\right]$$

Ejemplo 31. Determine la autoinductancia por unidad de longitud de un cable coaxial recto largo de radio interno a y de radio externo b.

Solución.

De la ley de Ampere $2\pi rB = \mu_0 I$.

Para la unidad de longitud.

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{1}{I}\int_a^b\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo 32. ¿Cuál es la autoinductancia de un solenoide largo del radio a con N vueltas por metro?

Solución.

El campo dentro de un solenoide es $\mu_0 NI$, así que el flujo con una vuelta es

$\pi a^2 B = \pi a^2 \mu_0 NI$.

En 1 m hay N vueltas, así que el flujo con estas N vueltas es

$\Phi_B = N(\pi a^2 \mu_0 NI)$ y

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \pi \mu_0 N^2 a^2$$

Ejemplo 33. Encontrar la inductancia de un solenoide de gran longitud ℓ , n vueltas muy juntas y sección A.

Solución.

Aplicando la ley de ampere encontramos el campo magnético en el interior del solenoide.

$$B = \frac{\mu_0 nI}{\ell}$$

Cuando nos piden encontrar la inductancia en realidad están pidiendo la autoinductancia.

El flujo magnético es

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 n I A}{\ell}$$

La inductancia

$$L = n\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 n^2 A}{\ell}$$

Ejemplo 34. Dos bobinas circulares de los radios *a* y *b* (*a* >> *b*) concéntricas y coplanares. La bobina más grande tiene n_1 vueltas, y la más pequeña tiene n_2 vueltas.¿Cuál es su inductancia mutua?

Solución.

El campo magnético en el centro de la bobina grande es $B_1 = \frac{\mu_0 n_1 I_1}{2a}$.

Así el flujo a través de la bobina pequeña es aproximadamente $\Phi_{B21} = n_2 \pi b^2 B_1$,

tal que $M = \frac{\Phi_{B21}}{I} = \mu_0 n_1 n_2 \pi\left(\frac{b^2}{2a}\right)$

Ejemplo 35. Determínense las dimensiones del cociente *L*/*R*. ¿Cuánto vale 1 henrio/ohmio?

Solución.

Recordando las expresiones

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \text{ y } V = IR$$

Resulta

$$1\text{V} = 1\text{H}\frac{1\text{A}}{1\text{s}} \Rightarrow \text{H} = \frac{(1\text{V})(1\text{s})}{1\text{A}}$$

$$1\text{V} = (1\text{A})(1\Omega) \Rightarrow (1\Omega) = \frac{(1\text{V})}{(1\text{A})}$$

Por tanto,

$$\frac{1\,\text{H}}{\Omega} = \frac{\frac{(1\,\text{V})(1\,\text{s})}{1\text{A}}}{\frac{1\,\text{V}}{1\,\text{A}}} = 1\text{s}$$

Dimensiones $\left|\frac{L}{R}\right| = |\text{tiempo}|$

$$\frac{1\,\text{H}}{\Omega} = 1\text{s}$$

Por esta razón el cociente *L*/*R* suele llamarse constante de tiempo.

Ejemplo 36. Dos bobinas A y B situadas una junto a la otra poseen 1000 y 2000 espiras respectivamente. Cuando por A circula una corriente de 3 A se produce en a un flujo de 3 x 10^{-3} Wb, y en B un flujo de 1,3 x 10^{-3} Wb.

a) Calcule la autoinducción de A y la inductancia mutua de las bobinas A y B.

b) Calcúlese la fuerza electromotriz inducida en la bobina B del ejercicio anterior si corriente que circula por A se extingue en 0,1 segundos.

A B n_A n_B

Solución.

a) $L_A = \frac{n_A \Phi_A}{I_A} = \frac{(1000)(3\times 10^{-3})}{5}$ = 0,60 H.

$M_{AB} = \frac{n_B \Phi_B}{I_A} = \frac{(2000)(1{,}3\times 10^{-3})}{5}$ = 0,52 H.

b) $\varepsilon_B = M_{AB}\frac{\Delta I_A}{\Delta t} = 0{,}52\frac{5-0}{0{,}1}$ = 26,0 V.

o también

$\varepsilon_B = n_B\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = 2000\frac{1{,}3\times 10^{-3}}{0{,}1}$ = 26,0 V.

Ejemplo 37. Una corriente continua de 5 A en una bobina de 1000 vueltas da lugar a un flujo de 10^{-3} Wb en el interior de la misma. Calcúlese:

a) La fuerza electromotriz de autoinducción inducida en la bobina si la corriente se interrumpe en 0,1s.

b) la autoinducción de la bobina.

Solución.

a) $\varepsilon = n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 1000\left(\frac{10^{-3}-0}{0{,}1}\right)$ = 10 V

b) $\varepsilon = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$

$10 = L\frac{(5-0)}{0{,}1} = 50L \Rightarrow L = \frac{10}{50}$ = 0,20 H.

o también $L = \frac{n\Phi}{I} = \frac{1000\times 10^{-3}}{5}$ = 0,20 H.

Ejemplo 38. Una bobina de autoinducción *L* = 1 henrio se conecta a una batería de 24 V. Calcule $\frac{dI}{dt}$:

a) en el instante de conectar la bobina a la batería;

b) en el momento en que la corriente alcanza el 90 por 100 del valor correspondiente a la ley de Ohm.

Solución.

a) En el instante inicial, *I* = 0 y, por tanto, *IR* = 0

$V - L\frac{dI}{d} = IR = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} = \frac{24}{1}$ = 24 A/s.

b) Valor máximo de la corriente (ley de Ohm):

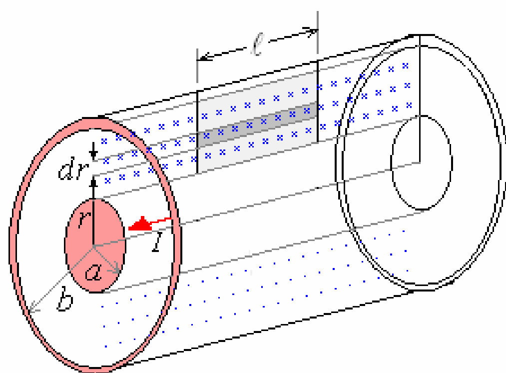
$$I_{\max} = \frac{V}{R} = \frac{24}{R},\ V - L\frac{dI}{d} = IR,$$

$$24 - 1\frac{dI}{d} = \left(0{,}90\frac{24}{R}\right)R = 21{,}6$$

$$\frac{dI}{dt} = 24 - 21{,}6 = 2{,}4 \text{ A/s.}$$

Ejemplo 39. Un cable coaxial está formado por un conductor cilíndrico interno de radio *a*, y un cascarón cilíndrico exterior (coaxial al cilindro interno) de radio *b*. Demuestre que su auto-inductancia por unidad de longitud es igual a $L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Solución.



El campo magnético de un conductor cilíndrico está dado por:

Para $r < a$ $\quad B = 0$

Para $a < r < b$ $\quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Para $r > b$ $\quad B = 0$

El flujo magnético a través de la sección diferencial $dS = \ell dr$ es:

$$d\Phi_B = BdS = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)(\ell dr) = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\frac{dr}{r}$$

Integrando:

$$\Phi_B = \int d\Phi_B \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La autoinductancia:

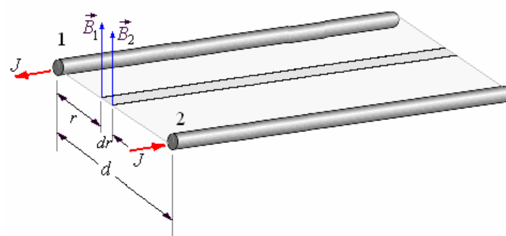
$$L = \frac{d\Phi_B}{dI} == \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La auto-inductancia por unidad de longitud es igual a

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ejemplo 40. Determinar la autoinductancia por unidad de longitud de una línea de dos alambres paralelos. El radio de los alambres es *a* y la separación entre ellos *d* (*d* >> *a*).

Solución.



La figura muestra una sección de la línea. El campo magnético en la sección diferencial es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

El flujo magnético por unidad de longitud a través del área diferencial es

$$d\Phi_B = Bdr = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right]dr$$

El flujo por unidad de Longitud es

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right]dr =$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln r - \ln(d-r)\right]_a^{d-a} =$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\frac{(d-a)}{a} - \ln\frac{d-(d-a)}{(d-a)}\right] =$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\frac{(d-a)}{a} - \ln\frac{a}{(d-a)}\right] =$$

$$\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{(d-a)}{a}$$

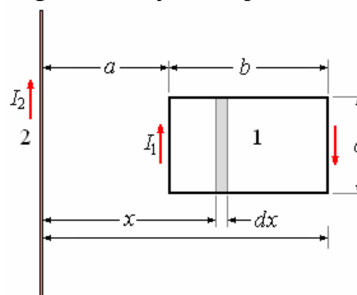
Como $d >> a$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d}{a}$$

La inductancia por unidad de longitud es

$$L = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d}{a}$$

Ejemplo 41. Encontrar la inductancia mutua entre un alambre delgado finito y una espira cuadrada.



Solución.

Vamos a calcular la inductancia mutua entre 1 (el alambre) y 2 (la espira).

Tomemos un elemento diferencial tal como el mostrado en la figura.

El flujo a través del área diferencial es

$$d\Phi_{21} = B_2 dA_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} cdx$$

El flujo total es

$$\Phi_{21} = \int d\Phi_{21} = \frac{\mu_0 c I_2}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 c I_2}{2\pi}\ln x\Big|_a^{a+b} = \frac{\mu_0 c I_2}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

La inductancia mutua es

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI} = \frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

Como $M_{21} = M_{12} = M$

La inductancia mutua M es

$$M = \frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

Ejemplo 42. Una bobina de 10 vueltas se envuelve apretadamente alrededor de un solenoide largo del 2 cm de radio y 200 vueltas por metro. ¿Cuál es la inductancia mutua del sistema?

Solución.

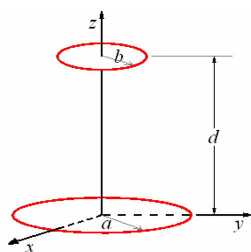
$$M = \frac{\Phi_B}{I_1} = \frac{n\mu_0 N I_1 \pi r^2}{I_1}$$

$$= (10)(4\pi\times 10^{-7})(200)\pi(0{,}02)^2$$

$= 3{,}2 \times 10^{-6}$ H.

Ejemplo 43. Encontrar la inductancia mutua de dos espiras, de radios *a* y *b*, dispuestas de manera que sus centros están en el mismo eje (eje *z*), sus planos son perpendiculares al eje *z*, y sus centros están a una distancia *d*. Si una de las espiras es muy pequeña, *d* >> *a*.

Solución.



El campo magnético, en el eje de la espira mayor (de radio *a*) es

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Como la espira menor es muy pequeña, el campo en cualquier punto de ella debe ser constante, de valor

$$B_{z(z=d)} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}$$

Luego el flujo enlazado por la espira de radio *b*, debido a la otra espira es

$$\Phi_{ab} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I}{2\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}.$$

Con esto, el coeficiente de inducción mutua es

$$M = \frac{\Phi_{ab}}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2\left(a^2+d^2\right)^{3/2}}$$

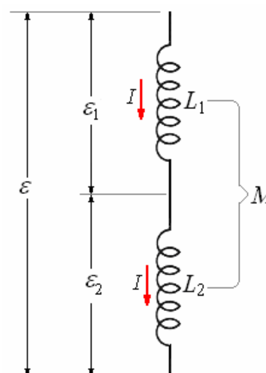
INDUCTANCIAS EN SERIE Y EN PARALELO

En los esquemas de circuitos 1as inductancias aparecen bajo e! símbolo indicado en las figuras siguientes.



Inductancias en serie

Consideremos dos elementos en serie con autoinductancias L_1 y L_2 respectivamente e inductancia mutua *M*.



Con la corriente *I* común

$$\varepsilon_1 = -L_1\frac{dI}{dt} - M\frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2\frac{dI}{dt} - M\frac{dI}{dt}$$

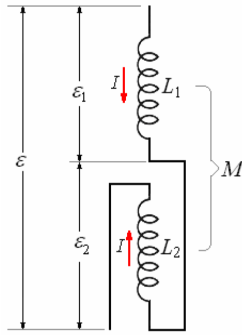
y $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Tenemos: $\varepsilon = -\left(L_1 + L_2 + 2M\right)\dfrac{dI}{dt}$

El valor efectivo de la inductancia es

$$L_{ef} = L_1 + L_2 + 2M$$

En el caso que las inductancias estuvieran en oposición, como se muestra en la figura a continuación, las inductancias mutuas hacen un efecto en sentido contrario.



$$\varepsilon_1 = -L_1\frac{dI}{dt} + M\frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2\frac{dI}{dt} + M\frac{dI}{dt}$$

y $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Tenemos: $\varepsilon = -(L_1 + L_2 - 2M)\dfrac{dI}{dt}$

El valor efectivo de la inductancia es

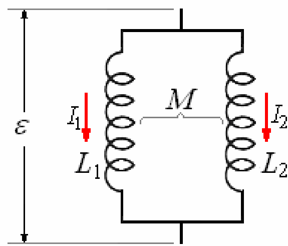
$$L_{ef} = L_1 + L_2 - 2M$$

Si las inductancias están muy alejadas, de tal manera que la inductancia mutua sea despreciable

$$L_{ef} = L_1 + L_2$$

Inductancias en paralelo

Conectemos ahora las inductancias en paralelo



Tenemos que

$$\varepsilon = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} \qquad (1)$$

$$\varepsilon = -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt} \qquad (2)$$

Tenemos que obtener dos ecuaciones una dependiente de I_1 solamente y otra dependiente de I_2 solamente.

Para eliminar I_2.

$$(1)\times L_2 \;\rightarrow\; \varepsilon L_2 = -L_1L_2\frac{dI_1}{dt} - ML_2\frac{dI_2}{dt}$$

$$(2)\times M \;\rightarrow\; \varepsilon M = -ML_2\frac{dI_2}{dt} - M^2\frac{dI_1}{dt}$$

Restando estas dos últimas obtenemos:

$$\varepsilon(L_2 - M) = -(L_1L_2 - M^2)\frac{dI_1}{dt} \qquad (1)\text{ a}$$

Para eliminar I_1.

$$(1)\times M \;\rightarrow\; \varepsilon M = -ML_1\frac{dI_1}{dt} - M^2\frac{dI_2}{dt}$$

$$(2)\times L_1 \;\rightarrow\; \varepsilon L_1 = -L_1L_2\frac{dI_2}{dt} - ML_1\frac{dI_1}{dt}$$

Restando estas dos últimas obtenemos:

$$\varepsilon(L_1 - M) = -(L_1L_2 - M^2)\frac{dI_2}{dt} \qquad (2)\text{ a}$$

Sumando (1)a y (2)a

$$\varepsilon(L_1L_2 - 2M) = -(L_1L_2 - M^2)\frac{d}{dt}(I_1 + I_2)$$

Con $I = I_1 + I_2$

$$\varepsilon = -\frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_1 + L_2 - 2M)}\frac{dI}{dt}$$

La inductancia efectiva es

$$L_{ef} = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_1 + L_2 - 2M)}$$

Si están alejados de tal manera que la inductancia mutua sea despreciable

$$L_{ef} = \frac{L_1L_2}{L_1 + L_2} \text{ o } \frac{1}{L_{ef}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Es decir, la inductancia, inversa equivalente es igual a la suma de las inversas de las inductancias componentes en paralelo.

ENERGÍA ALMACENADA POR UNA INDUCTANCIA

Cuando conectamos una bobina a una fuerza electromotriz. ε_0 (por ejemplo una batería) se produce un flujo magnético cambiante en aumento hasta que se estabiliza la corriente. Durante ese intervalo se induce una fuerza electromotriz ε.

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

Para producir esta fuerza electromotriz tiene que realizarse un trabajo, que es desarrollado por la fuente que produce la corriente.

La potencia instantánea que nos proporciona la fuente es

Potencia $= \dfrac{dW}{dt} = \varepsilon I$

Sustituyendo la magnitud de ε

$$\frac{dW}{dt} = IL\frac{dI}{dt}$$

Como los diferenciales de tiempo son iguales

$$dW = ILdI = LIdI$$

El trabajo realizado en llevar la corriente de $I = 0$ a su valor constante estacionario I

$$W = \int dW = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

Este trabajo es realizado por la batería y equivale a la energía almacenada en forma de campo magnético por la bobina, esto es

Energía magnética, U_B.

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

Esta energía almacenada se puede recuperar como lo veremos en la sección siguiente, esta ecuación vale para cualquier inductancia y es similar a la de la energía eléctrica almacenada en un condensador que tiene una diferencia de potencial *V*.

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2$$

De igual manera a como hicimos para los condensadores podemos para la inductancia encontrar una expresión de la energía almacenada en función del campo magnético. Consideremos una bobina larga de longitud ℓ, sección *A* y *N* vueltas por unidad de longitud $(n = N\ell)$, su inductancia es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = \mu_0 n^2 \ell A$$

La energía almacenada

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \ell A I^2$$

Su volumen $Vol = A\ell$

Considerando que la energía almacenada esta distribuida uniformemente, definimos

Densidad de energía u_B:

$$u_B = \frac{U_B}{Vol} = \frac{\frac{1}{2}\mu_0 n^2 \ell A I^2}{A\ell} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

Recordando que para una bobina

$$B = \mu_0 nI$$

Reemplazando

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Esta expresión es aplicable para cualquier caso, similar al caso de los condensadores en que

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Ejemplo 44. ¿Determine la energía almacenada por unidad de longitud y la energía almacenada por unidad de volumen en un solenoide muy largo del radio *a* con *N* vueltas por metro y que lleva una corriente *I*?

Solución.

Tenemos que la inductancia de un solenoide muy largo de radio *a* con *N* vueltas por metro es

$$L = \pi\,\mu_0 N^2 a^2.$$

La energía es:

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\left(\pi\mu_0 N^2 a^2\right)I^2$$

El volumen por unidad de longitud es $\pi\, a^2$, así que la densidad de energía magnética es

$$u_B = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 I^2 \text{ (en J/m}^3\text{)}.$$

En términos del campo magnético $B = \mu_0 NI$, esto puede ser escrito:

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Ejemplo 45. ¿Cuánta energía se almacena en un solenoide de longitud 10 cm y diámetro 1,2 cm si tiene 200 vueltas y lleva 1,2 A?

Solución.

Con las aproximaciones de un solenoide muy largo, tenemos $L = \mu_0 \pi N^2 a^2$.

$$U_B = \frac{1}{2}\mu_0 \pi N^2 a^2 I^2$$

$$= (0,5)\left(4\pi\times10^{-7}\right)(\pi)\left(\frac{200}{0,10}\right)^2 (0,006)^2 (1,2)^2$$

$= 4,1 \times 10^{-4}$ J

Ejemplo 46. Determinar la energía almacenada por un toroide de *n* vueltas, longitud media ℓ, sección transversal *A*, la corriente que circula es I.

Solución.

La inductancia del toroide es

$$L = \frac{\mu_0 n^2 A}{\ell}$$

La energía almacenada es

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 n^2 A}{\ell}\right)I^2$$

Ejemplo 47. Se propone el uso de grandes inductores como dispositivos para almacenar energía. ¿Cuál es la inductancia que necesitamos para que al circular una corriente de 60 A, la energía sea la suficiente para encender un foco de 100 vatios por una hora?

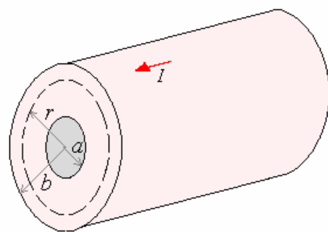
Solución.

$$U = P\Delta t = (100)(3600) = 3,6\text{x}10^5 \text{ J}$$

$$U = \frac{1}{2}LI_{ef}^2 \Rightarrow L = \frac{2U}{I^2} = \frac{2\left(3,6x10^5\right)}{60^2} = 2 \text{ H}$$

Ejemplo 48. Calcular para todo punto la densidad de energía magnética para un conductor largo, cilíndrico de radio *b* con una cavidad cilíndrica concéntrica de radio *a* y lleva una corriente *I*.

Solución.



Para $r < a$
No hay corriente encerrada, no hay campo magnético por consiguiente no hay energía almacenada.
Para $a < r < b$
Aplicando la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

donde $J = \dfrac{I}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}$

$$B 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{\pi\left(b^2 - a^2\right)} \pi\left(r^2 - a^2\right) \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{\left(r^2 - a^2\right)}{\left(b^2 - a^2\right)}$$

La densidad de energía es

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 \left(r^2 - a^2\right)^2}{8\pi^2 r^2 \left(b^2 - a^2\right)^2}$$

Para $r > b$
Aplicando la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

La densidad de energía es

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

La energía almacenada podemos evaluarla por integración

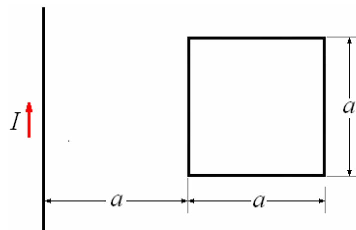
$$U = \int_{Vol} \mu_B dVol$$

$$dVol = 2\pi r \ell dr$$

$$U = \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\right) 2\pi r \ell dr = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \ln r \Big|_a^b = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ejemplo 49. Un alambre recto largo se coloca en el plano de una espira conductora cuadrada de lado *a* y resistencia *R*. el alambre es paralelo al lado más cercano del cuadrado y a una distancia *a* de él. ¿Cuál es la energía media disipada en la espira cuando la corriente en el alambre es $I = I_0 \text{sen}\omega$?



Solución.
El campo magnético del alambre es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

El flujo en el lazo es

$$\Phi_B = \int_a^{2a} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$$

La fuerza electromotriz en el lazo es

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 2 \frac{dI}{dt}$$

La potencia en la espira es:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 a \ln 2}{2\pi}\right)^2 \left(I_0 \omega \cos \omega t\right)^2$$

Tenemos que:

$$\left(\cos^2 \omega t\right)_m = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t dt ,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ y } \cos^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$$

De aquí $\left(\cos^2 \omega t\right)_m = \dfrac{1}{2}$

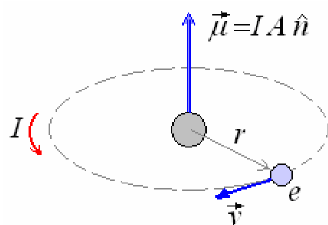
Finalmente:

$$P_m = \frac{\mu_0 a \ln 2\left(I_0^2 \omega^2\right)}{8\pi^2 R} = \frac{1}{2R}\left[\frac{\left(\mu_0 a \ln 2\right)\left(I_0 \omega\right)}{2\pi}\right]^2$$

MATERIALES MAGNETICOS

Hasta esta parte hemos estudiado los campos magnéticos producidos por distribuciones de corrientes eléctricas específicas. Por ejemplo, podemos calcular el campo magnético en el vacío producido por un alambre con la ayuda de la ley de Biot y Savart, pero si rodeamos el alambre por un medio material, el campo magnético se altera, ya que la materia esté constituida por átomos, y cada átomo consiste de electrones en movimiento, estos circuitos de electrones, cada uno de los cuales confinado en un átomo, son llamadas corrientes atómicas las cuales producen campos magnéticos que se suman al efecto del campo magnético producido por la corriente circulante por el alambre.

EL ÁTOMO COMO UN IMÁN.



Hemos visto anteriormente que el campo magnético en el eje de una espira con corriente *I* es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r^2}{2\left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

Cuando $z = 0$ es el campo en el centro del anillo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r}\hat{k}$$

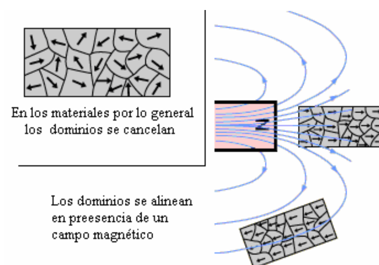
Si ponemos en función del área $A = \pi r^2$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IA}{2r(\pi r^2)}\hat{k} = \frac{\mu_0 IA}{2\pi r^3}\hat{k}$$

El campo magnético es proporcional al producto IA y con sentido perpendicular al área *A*.
Para pequeños círculos de corriente definimos momento magnético $\vec{\mu} = IA\hat{n}$, tal que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r^3}\vec{\mu}$$

EL FERROMAGNETISMO Y EL PARAMAGNETISMO.
En algunos materiales, tales como hierro, los átomos se comportan como pequeños lazos de corriente o dipolos magnéticos, actúan como imanes de barra pequeños, y obran recíprocamente de modo que se alinean espontáneamente y dan lugar algunas veces a un material "magnetizado". Tales sustancias son las **ferromagnéticas**, y se utilizan para hacer los imanes permanentes con los cuales estamos familiarizados. Si un elemento ferromagnético se calienta sobre cierta temperatura crítica (la temperatura de Curie), la agitación termal hace que los pequeños imanes se desordenen, y el material pierde su ferromagnetismo. Cuando los imanes no se alinean espontáneamente, son los **paramagnéticos**. El paramagnetismo, así como el ferromagnetismo, son de gran importancia práctica. Por ejemplo, el campo en un solenoide de base de aire debido a la corriente en las bobinas es típicamente muy débil. Sin embargo, cuando un solenoide se llena con hierro paramagnético, el campo débil debido a la corriente es suficiente para hacer que los dipolos del hierro se alineen, y produzcan un campo magnético muy grande.



Por lo tanto, en dispositivos tales como electroimanes o inductores, el hierro o algún otro material "permeable" se inserta para realzar los efectos magnéticos. Una medida del grado de magnetización obtenido es la **permeabilidad relativa** μ_r.
En cálculos de los efectos magnéticos, por ejemplo, de la inductancia o el campo magnético resultante generalmente es suficiente sustituir μ_0 en nuestras ecuaciones anteriores por $\mu = \mu_r\mu_0$. μ_r, no tiene dimensiones.

Ejemplo 50. Sobre un núcleo de hierro de 1 m de longitud y 2 cm de radio se arrollan dos solenoides. Uno de ellos, que actúa de primario, posee 1000 espiras y por él circula una corriente de 5 A. ¿Qué fuerza electromotriz se inducirá en el secundario, que posee 5000 espiras, cuando la corriente del primario se extingue en 1/10 de segundo? Para el hierro, $\mu' = 50$.

Solución.
Flujo inicial

$$\Phi = BA = \mu'\mu_0\frac{n_1 I}{\ell}A$$

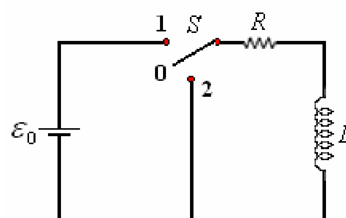
$$= (50)\left(4\pi\times10^{-7}\right)\frac{(1000)(5)}{1}\left(\pi 0{,}02^2\right)$$

= 3,94 x 10^{-4} Wb

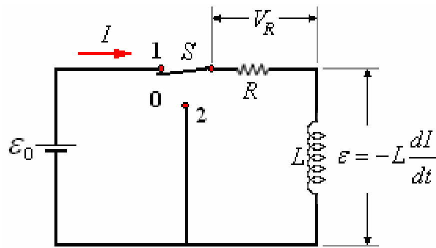
$$\varepsilon_{(secundario)} = n_2\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 5000\frac{3{,}94\times10^{-4}}{1/10}$$

= 19,7 V.

CIRCUITOS RL, LC y RLC
CIRCUITO RL.



La figura muestra una inductancia *L*, una resistencia *R* que se conectan a una fuerza electromotriz ε_0 por medio de una llave *S* de tres posiciones, la corriente en el circuito inicialmente es cero, en el momento $t = 0$ se pone la llave en posición 1.



Al ir aumentando la corriente existe una fuerza electromotriz inducida ε en oposición, en la resistencia *R* existe una caída de potencial *IR*.
Aplicando la segunda regla de Kirchoff, tenemos:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon - IR = 0$$

$$\varepsilon_0 - L\frac{dI}{dt} - IR = 0$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I - \frac{\varepsilon_0}{L} = 0$$

Resolviendo la ecuación para las condiciones iniciales, para $t = 0$, y para un tiempo t genérico.

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{\varepsilon_0}{R}\right)$$

$$\frac{dI}{\left(I - \frac{\varepsilon_0}{R}\right)} = -\frac{R}{L}dt$$

Integrando

$$\int_o^I \frac{dI}{\left(I - \frac{\varepsilon_0}{R}\right)} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$= \ln\left(I - \frac{\varepsilon_0}{R}\right)\Bigg|_0^I = -\frac{R}{L}t\Big|_0^t$$

$$= \ln\frac{I - \frac{\varepsilon_0}{L}}{-\frac{\varepsilon_0}{L}} = -\frac{R}{L}t$$

De aquí:

$$\frac{I - \frac{\varepsilon_0}{R}}{-\frac{\varepsilon_0}{R}} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

Finalmente

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

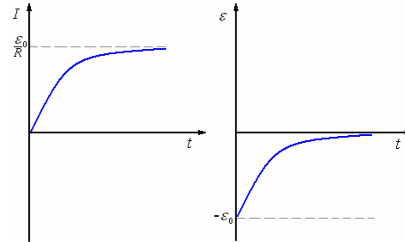
Para $t = 0 \rightarrow I = 0$, para $t = \infty \rightarrow I = \frac{\varepsilon_0}{R}$,

Como $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$

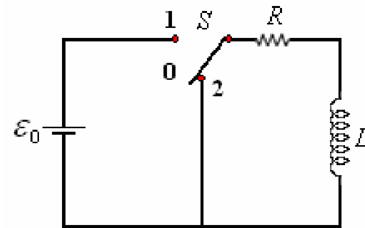
$$\varepsilon = L\frac{d}{dt}\frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = -\varepsilon_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Para $t = 0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$, para $t = \infty \rightarrow \varepsilon = 0$,

La figura siguiente muestra los gráficos $I - t$ y $\varepsilon - t$.



Después de pasado un tiempo en el que consideramos que la corriente ha alcanzado su valor estacionario $I = \frac{\varepsilon_0}{R}$ pasamos la llave *S* a la posición 2.



En este circuito la inductancia actúa como fuente de voltaje hasta que se disipa en la resistencia la energía que tenia almacenada.
Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito.

$$\varepsilon = -IR = 0 \Rightarrow -L\frac{dI}{dt} - IR = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$$

Las condiciones son para $t = 0 \rightarrow I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$ y para un t genérico tenemos una *I* genérica.

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \Rightarrow \ln I\Big|_{I_0}^I = -\frac{R}{L}t\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

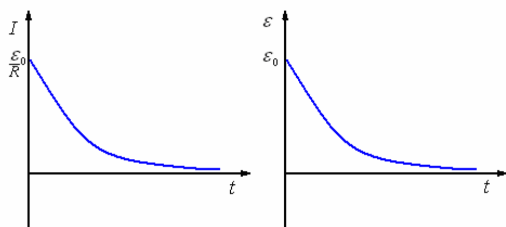
Como $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$

$$\varepsilon = -L\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \varepsilon_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

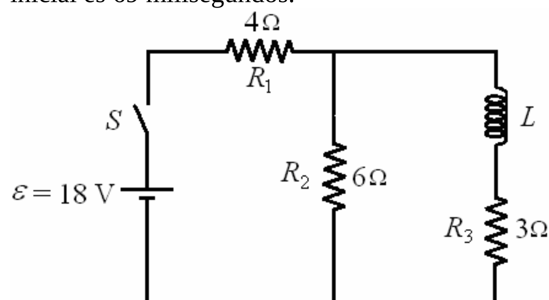
Para $t = 0 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$.

Para $t = \infty \rightarrow \varepsilon = 0$.

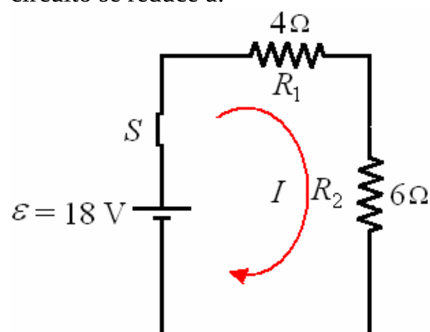
La figura siguiente muestra 1os gráficos $I - t$ y $\varepsilon - t$.



Ejemplo 51. En la figura suponga que el interruptor S se cierra en $t = 0$. Determine:
a) La corriente que pasa por cada resistencia a $t = 0$.
b) La corriente que pasa por cada resistencia para un tiempo muy largo.
Luego de un tiempo muy largo, el interruptor S se abre (suponga ahora este instante $t = 0$. Considere la corriente inicial I_0 como la corriente que pasaba por L en la parte b).
c) Plantee y resuelva la ecuación diferencial, para encontrar la ecuación de la corriente en la inductancia L, como una función del tiempo.
d) Calcule el valor de L, sabiendo que el tiempo que tarda la corriente en disminuir la mitad de su valor inicial es 69 milisegundos.



Solución.
a) Para $t = 0$, La corriente por la inductancia L es cero y la corriente por R_3 también es cero. Luego el circuito se reduce a:

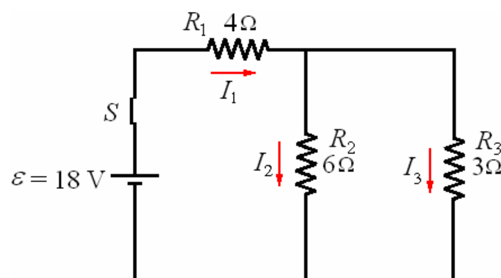


La corriente que pasa R_1 y R_2 es:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{18}{4+6} = 1{,}8 \text{ A}$$

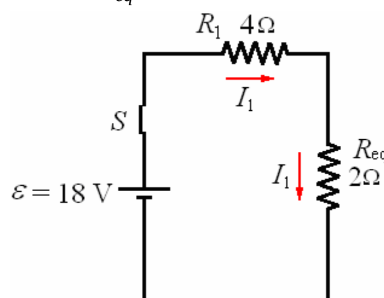
$$I_1 = I_2 = 1{,}8 \text{ A}, \; I_3 = 0$$

b) Para un tiempo muy largo la corriente en la Inductancia tiene su valor máximo, el circuito es equivalente al siguiente:



R_2 y R_3 están en paralelo, la resistencia equivalente es: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow R_{eq} = 2\Omega$$



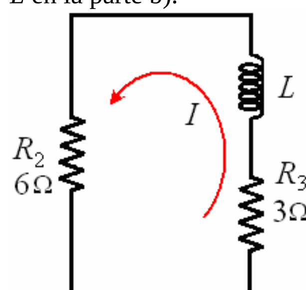
$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_{eq}} = \frac{18}{4+2} = 3 \text{ A}$$

También tenemos: $I_2 + I_3 = I_1 = 3$ y

$$I_2 R_2 = I_3 R_3 \Rightarrow \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Luego $I_2 = 1$ A e $I_3 = 2$ A

Luego de un tiempo muy largo, el interruptor S se abre (suponga ahora este instante $t = 0$). Considere la corriente inicial I_0 como la corriente que pasaba por L en la parte b).



c) Aplicando la segunda regla de Kirchhoff.

$$IR_2 + L\frac{dI}{dt} + IR_3 = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{(R_2 + R_3)}{L} I = -\frac{9}{L} I$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{9}{L} dt$$

Integrando de $t = 0$ a $t = t$:

$$\ln I\Big|_{I_0}^{I} = -\frac{9}{L}t\Big|_0^t \Rightarrow \ln\frac{I}{I_0} = -\frac{9}{Lt} \Rightarrow$$

$$I = I_0 e^{-\frac{9}{L}t}$$

d) Para t = 0,069 s $I = I_0/2$

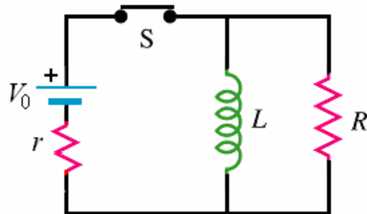
$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\frac{9}{L}(0,069)} \Rightarrow \frac{9(0,069)}{L} = \ln 2$$

$$\Rightarrow L = \frac{9(0,069)}{\ln 2} = \frac{9(0,069)}{0,693} = 0,9 \text{ H}$$

Ejemplo 52. Una bobina tiene un valor de auto-inductancia *L*, y se conecta en paralelo a una resistencia *R*. Los dos elementos se conectan en *t* = 0 a una fuente electromotriz "real" que esta formada por una fuente ideal de potencial V_0 constante; una resistencia interna en serie *r*. Calcule los siguientes acápites, justificando físicamente los valores que encuentre:

a) El valor de la corriente en la fuente en $t \to 0$.
b) El valor de la corriente en la fuente a un tiempo muy largo.
c) Un esbozo del gráfico de la magnitud de la corriente en la resistencia *R* en función de *t*.
d) Las ecuaciones de Kirchhoff que permitan encontrar los valores de todas las corrientes del circuito.
e) Plantee la ecuación diferencial que permita obtener la corriente instantánea $I(t)$ en la resistencia interna *r* de la fuente electromotriz. No resuelva la ecuación diferencial.

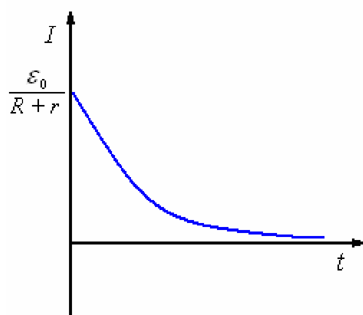
Solución.



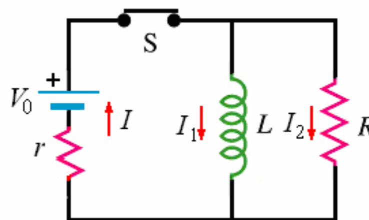
a)Para *t* = 0: $I = \dfrac{V_0}{R + r}$

b) Para $t = \infty$: $I = \dfrac{V_0}{r}$

c) Esbozo del gráfico de la magnitud de la corriente en la resistencia *R* en función de *t*.



d) Las ecuaciones de Kirchhoff que permitan encontrar los valores de todas las corrientes del circuito.



Por la primera ley de Kirchhoff

$$I = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

Por la segunda ley de Kirchhoff

$$-Ir + V_0 - L\frac{dI_1}{dt} = 0 \qquad (2)$$

$$-Ir + V_0 - I_2 R = 0 \qquad (3)$$

e) La ecuación diferencial que permite obtener la corriente instantánea $I(t)$ en la resistencia interna *r* de la fuente electromotriz.

Derivando (3) y multiplicando por *L*:

$$-rL\frac{dI}{dt} - RL\frac{dI_2}{dt} = 0 \qquad (3a)$$

Multiplicando (2) por *R*:

$$-IRr + V_0 R - RL\frac{dI_1}{dt} = 0 \quad (2a)$$

Sumando (2a) y (3a):

$$-IRr - rL\frac{dI}{dt} + V_0 R - RL\frac{d(I_1 + I_2)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow -IRr - rL\frac{dI}{dt} + V_0 R - RL\frac{dI}{dt} = 0$$

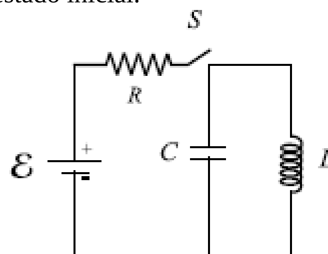
$$\Rightarrow -IRr + V_0 R - (R + r)L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow (R + r)L\frac{dI}{dt} + R(V_0 - Ir) = 0$$

Finalmente:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R(V_0 - Ir)}{L(R + r)} = 0$$

Ejemplo 53. En el circuito mostrado, se conecta el interruptor *S* y después de un tiempo muy largo se desconecta. Ese instante lo consideramos como el estado inicial.



a) Establezca la ecuación diferencial para hallar la corriente.

b) Resuelva la ecuación, teniendo en cuenta que una función *f*(*t*) que cumple que $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\omega^2 f(t)$, tiene solución $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Halle A, ω y ϕ.

Solución.

a) $\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C}I + L\frac{d^2 I}{dt^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0$

b) $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

Para $t = 0$, $I = I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$, $\varphi = 0$

Ejemplo 54. Un solenoide tiene una inductancia de 30 H y una resistencia de 20 Ω. Si se conecta a una batería de 12 V, ¿cuánto tiempo tarda la corriente en alcanzar la tercera parte de su valor de equilibrio?

Solución.

El valor de equilibrio *I* = *V*/*R* = 12/20 = 0,6 A se alcanza para $t \to \infty$.

La tercera parte de este valor se alcanza cuando se cumple:

$$\frac{1}{3}\frac{V}{R} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

es decir,

$$\frac{2}{3} = e^{-t/\tau}, \ \ln\frac{2}{3} = \frac{t}{\tau}$$

y como $\tau = \frac{L}{R}$ resulta:

$$t = \frac{L}{R}\ln\frac{2}{3} = \frac{30}{20}\ln\frac{2}{3} = 0{,}61 \text{ s.}$$

Ejemplo 55. Un instrumento sensible de detección en un vehículo espacial tiene una resistencia de 180 Ω y se diseña para funcionar con una corriente de 42 mA. Sin embargo, es necesario que la subida de corriente sea no más del 10 por ciento de este valor de funcionamiento dentro de los primeros 50 ms después de aplicar el voltaje. Para alcanzar esto, se conecta una inductancia en serie con el dispositivo.

a) ¿Qué voltaje se requiere?
b) ¿Cuál es la mínima inductancia requerida?
c) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito?

Solución.

a) $\varepsilon = IR = \left(42\times10^{-3}\right)(180) = 7{,}56$ V

b) $I = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 0{,}1 I_0 \Rightarrow e^{-t/\tau} = 0{,}9$

$\Rightarrow \ln\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \ln 0{,}9 \Rightarrow \tau = 2{,}46t$

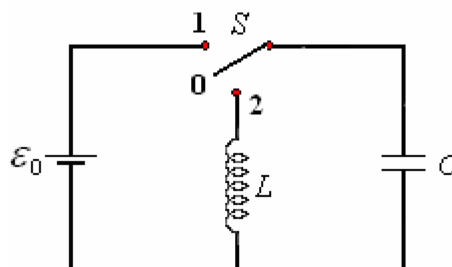
Como $\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow$

$\frac{L}{R} = 2{,}46t = 2{,}46\left(50\times10^{-6}\right) = 1{,}23 \times 10^{-4}$

Finalmente $L = 1{,}23 \times 10^{-4} R = 1{,}23 \times 10^{-4}(180) =$ 0,022 H

c) $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}022}{180} = 0{,}122$ ms

CIRCUITO LC.



La figura arriba muestra un circuito *LC*, que vamos a considerar ideal (sin resistencias propias). Si ponemos la llave *S* en la posición 1 se carga al condensador hasta tener un voltaje igual a la fuerza electromotriz y almacena una energía igual a

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Donde $Q = V_0 C$

Si pasamos el interruptor a la posición 2, el condensador se descarga a través de la inductancia, a medida que el condensador se descarga la energía pasa a la inductancia, una vez que el condensador queda descargado, la corriente alcanza su valor máximo, como no hay fuente que siga manteniendo esta corriente comienza a decrecer llevando carga al condensador hasta que la corriente es cero y el condensador queda cargado, pero esta vez con polaridad invertida, como el circuito es ideal no hay resistencia, se re pite el proceso y así siguen intercambiando energía de tal manera que la energía total del circuito es constante.

$U_B + U_E = U$ = constante

o $\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = U$

Derivando respecto al tiempo

$$LI\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

Como $I = \frac{dq}{dt}$ y $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$

Tenemos

$$L\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

La solución de esta ecuación es el caso de movimiento armónico simple.

$q = A\cos(\omega t + \delta)$

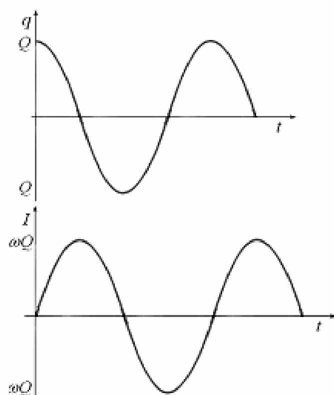
Donde $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$, A es el valor máximo de q y depende de las condiciones iniciales, en nuestro caso $A = Q$ y debe ser cero porque la carga es máxima para $t = 0$, de aquí:

$q = Q\cos(\omega t + \delta)$

y la corriente es

$I = \dfrac{dq}{dt} = -\omega Q \operatorname{sen}\omega t$

La figura a continuación muestra los gráficos de $q - t$ e $I - t$.



Podemos ver es un circuito oscilante, con frecuencias.

$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ periodo

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$

Con los valores de Q e I podemos demostrar que la energía total es constante para cualquier tiempo t.

$U_B + U_E = U$

$\dfrac{1}{2}LI^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C} = U$

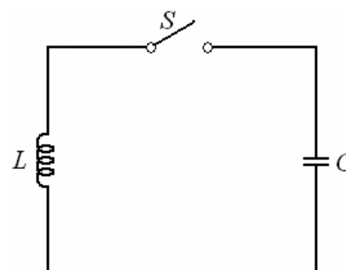
$\dfrac{1}{2}L\omega^2 Q^2 \operatorname{sen}^2\omega t + \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}\cos^2\omega t = U$

Como $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$

$\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}\left(\operatorname{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = U$

Tal como esperábamos.

Ejemplo 56. ¿Cuál es la frecuencia resonante del circuito de la figura si L = 260 mH y C = 8,0 pF?



Solución.

$f = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\left(2,6\times10^{-3}\right)\left(8\times10^{-2}\right)}} =$ 1,1 MHz.

Ejemplo 57. Un receptor de radio de amplitud modulada (AM) utiliza un circuito resonante LC cuya frecuencia empareja la frecuencia de las ondas de radio entrantes. ¿Si una inductancia de 16 μH se utiliza, qué rango de capacidad variable se requiere para sintonizar sobre la banda AM a partir de 500 a 1700 kHz?

Solución.

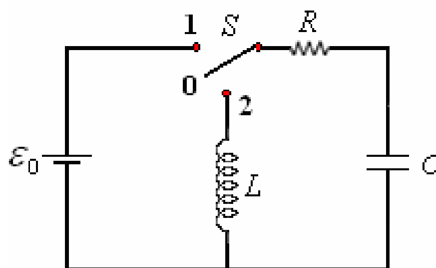
$f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \dfrac{1}{L(2\pi f)^2}$

Con 500 kHz $\rightarrow$ 6,3 x 10^{-9} F

Con 1700 kHz $\rightarrow$ 5,5 x 10^{-10} F

De tal modo que C varía de 5,5 x 10^{-10} a 6,3 x 10^{-9} F.

CIRCUITO RLC.



La figura arriba muestra un circuito RLC, en la posición 1 el condensador se carga. Al pasar a la posición 2, la energía almacenada en el condensador se descarga, parte se disipa en la resistencia y parte se almacena en la inductancia, entonces la inductancia repite el proceso, parte se disipa en la resistencia y parte se almacena en el condensador y así periódicamente hasta que la energía que tenia inicialmente el condensador se disipa totalmente en la resistencia.

Aplicando la segunda Ley de Kirchoff

$\dfrac{q}{C} + L\dfrac{dI}{dt} + IR = 0$

Como $I = \dfrac{dq}{dt}$ y $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$

Nos queda la ecuación

$\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{LC}q = 0$

Ecuación que corresponde a la de las oscilaciones amortiguadas, cuya solución es

$$q = e^{-\beta t}\left(Be^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + De^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

Donde $\beta = \dfrac{1}{2}\dfrac{R}{L}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

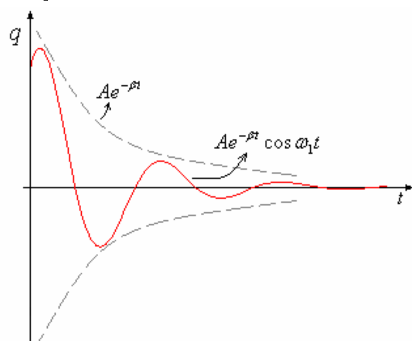
B y D dependen de las condiciones iniciales.
La forma de la solución depende de los valores de R, L y C, los cuales determinan si $\beta^2 - \omega_0^2$ es menor, igual o mayor que cero siendo para cada caso una oscilación subamortiguada, críticamente amortiguada o sobreamortiguada respectivamente.
En el caso de oscilación subamortiguada,

$$\beta^2 - \omega_0^2 < 0 .$$

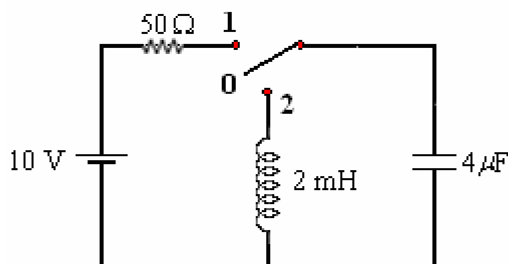
$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega_1$$

$$q = Ae^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \delta) \qquad q = Ae^{-\beta t}\cos\omega_1 t$$

La figura a continuación muestra el grafico $q - t$ para el caso en que $\delta = 0$.



Ejemplo 58. En la figura tenemos un circuito RC cuando pone la llave en la posición 1 y un circuito LC en la posición 2. Después de tener un tempo largo en la posición 1 se pasa la llave a la posición 2.
Calcular:
a) La frecuencia de oscilación del circuito LC.
b) La energía máxima almacenada por la inductancia.



Solución.
Al estar en posición 1 la corriente circula hasta que se carga el condensador completamente.

La expresión de la carga del condensador vimos que es:

$$q = \varepsilon C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Cuando pasa un tiempo largo t

$$Q = \varepsilon C$$

Cuando pasa a la posición 2 tenemos un circuito LC con el condensador con carga inicial

$Q = (10)\left(4\times10^{-6}\right)$ = 40 x 10^{-6} C.

a) La frecuencia de oscilación del circuito LC depende solamente de los valores de L y C.

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{\left(2\times10^{-3}\right)\left(4\times10^{-6}\right)}} = \sqrt{\frac{10}{8}\times10^8} = 1{,}12 \times 10^4 \text{ rad/s.}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1{,}78 \times 10^3 \text{ Hz.}$$

b) La energía almacenada en el condensador es

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{\left(40\times10^{-6}\right)^2}{4\times10^{-6}} = 2 \times 10^{-4}\text{ J.}$$

Como la energía pasa del condensador a la inductancia y así sucesivamente, la energía máxima almacenada por la inductancia es

U_B = 2 x10^{-4} J.

Ejemplo 59. Se ha sugerido que la energía sobrante de una planta de generación se podría almacenar en el campo magnético de un toroide gigante. ¿Si el campo magnético en el toroide fuera de 12 T (muy grande), qué volumen sería necesario para almacenar 10^6 kWh de energía? ¿Si el toroide fuera en forma de anillo, con el radio interno R y el radio externo 2R, cuán grande tendría que ser R?
Solución.

$$U = \left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)(\text{volumen})$$

$$\approx \left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)(2\pi)\left(\frac{3}{2}R\right)\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)$$

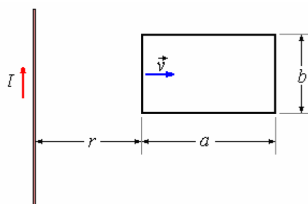
$$U \approx \frac{3}{8}\pi^2R^2B^2$$

$$R = \left(\frac{8U}{3\pi^2B^2}\right)^{1/3} \approx \left[\frac{8\left(10^6\times3{,}6\times10^6\right)}{3\pi^2(12)^2}\right]^{1/3}$$

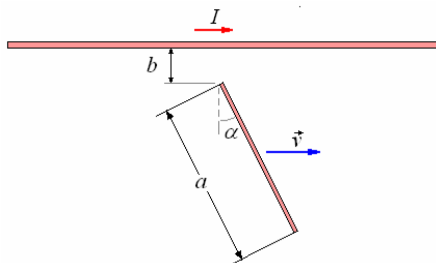
= 1890 m ¡demasiado grande!

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

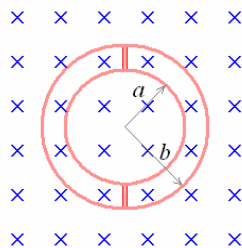
1. Si una aspira rectangular conductora de lados *a* y *b* se aleja con una velocidad constante $\vec{v}$ de un alambre largo recto con una corriente *I*.
Determinar la corriente inducida en la espira como función del tiempo, pera $t = 0$, $r = r_0$.



2. Una barra metálica de longitud *a* e inclinación α, separada *b* de un alambre recto y largo con corriente *I*. La barra se desplaza una velocidad constante paralela al alambre. Calcular la fuerza electromotriz inducida en la barra.

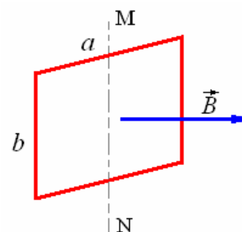


3. Dos espiras circulares metálicas de radios *a* y *b* están conectadas por dos barras metálicas, como se muestra en la figura. Si este conjunto rota con velocidad angular ω perpendicular a $\vec{B}$. ¿Cuál es la fuerza electromotriz inducida entre las espiras?



4. Un circuito plano de resistencia *R*, compuesto de *n* espiras, con una superficie *A*, se coloca perpendicular a un campo magnético alterno uniforme tal que $B = B_0 \cos \omega t$.
Encontrar la expresión de la intensidad eficaz de corriente I_{ef} inducida en el circuito.

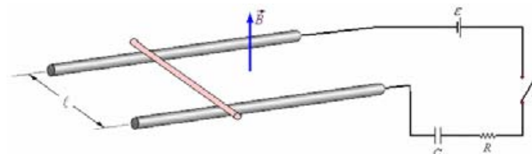
5. Un conductor rectangular de lados a y b se coloca en un campo magnético $\vec{B}$ uniforme y horizontal, rota alrededor del eje vertical MN perpendicular a la velocidad angular $\vec{\omega}$. En al instante *t* = 0, es normal al plano del conductor. Calcular en función del tiempo, el flujo del campo magnético a. través del cuadro. Deducir le fuerza electromotriz de inducción ε.



6.- Una bobine de 100 vueltas y sección circular esté arrollada compactamente de tal modo que las espiras están en un mismo plano. El radio promedio de la bobine es 3 cm. La bobina rota alrededor de un diámetro a 900 rpm. Cuando el eje de rotación está vertical, la fuerza electromotriz promedio inducida es 0,50 mV. ¿Qué se puede decir del campo magnético terrestre en ese lugar?

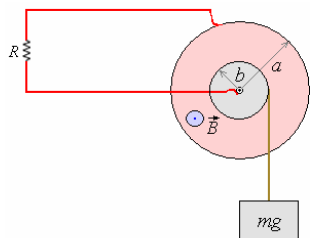
7.- Un disco rota alrededor de su eje con velocidad angular ω. El disco está hecho con metal de conductividad *g*, y su espesor es *t*. El disco se coloca entre los polos de un imán que produce un campo magnético uniforme *B* sobre una pequeña área cuadrada de tamaño a^2 a la distancia promedio r del eje, *B* es perpendicular al disco. Calcular el torque aproximado sobre el disco.

8. Sea el circuito en serie constituido por una fuerza electromotriz ε, un interruptor S, un condensador de capacidad *C*, un sistema consistente en una barra que desliza sin fricción sobre dos rieles horizontales y paralelos separados una distancia ℓ en presencia de un campo magnético $\vec{B}$ uniforme y vertical. La resistencia total del circuito es *R*.
La masa de la barra móvil es *m*.

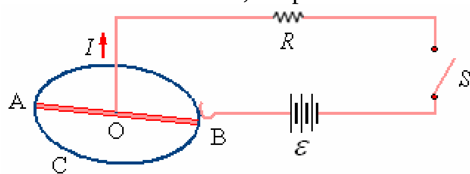


En $t = 0$ se cierra el interruptor, inicialmente la barra está en reposo y el condensador descargado. Escribir las expresiones de la velocidad y la carga del condensador.

9. Una rueda de Barlow de radio *a* rota sin fricción en un campo magnético $\vec{B}$ uniforme y normal al plano de la rueda. Sobre su eje horizontal se fija un cilindro de radio *b* sobre el que se enrolla una cuerda que soporta un peso *mg*. El conjunto, rueda, eje, cilindro tiene un momento de inercia I_{rB}. El circuito eléctrico de la rueda de Barlow está conectado a una resistencia total *R*. Estudiar el movimiento a partir del reposo, no tomar en cuenta las corrientes de Foucault.

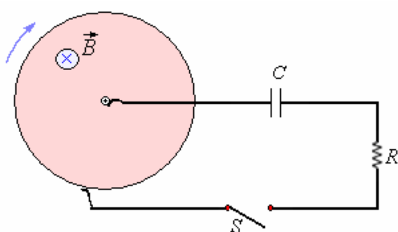


10. Un conductor rectilíneo AOB puede rotar alrededor de un eje vertical que pasa por O. Está en contacto con un conductor C circular horizontal de radio *a*. El conjunto está colocado en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, vertical dirigido hacia arriba. Se hace pasar una corriente por medio de una fuerza electromotriz ε. La resistencia de C es despreciable y la del circuito es constante e igual a *R*. Determinar la ley de la variación de la velocidad después de cerrar la llave S, despreciar la fricción.

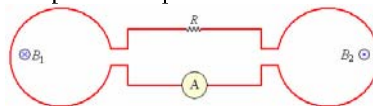


11. Una rueda de Barlow de radio *a* rota sin fricción en un campo magnético $\vec{B}$ normal el plano de la rueda, el circuito de la rueda está en serie con un condensador *C* inicialmente descargado, una llave S y la resistencia total del circuito es *R*. La rueda rota con una velocidad angular ω_0. Se cierra la llave S, estudiar el movimiento de la rueda a partir de este instante.

El momento de inercia de la rueda es I_{rB}. Despreciar las corrientes de Foucault.



12. En el circuito mostrado en la figura tenemos dos espiras circulares iguales de sección *A* = l m^2 cada una, pero con diferentes campos magnéticos que varían con el tiempo $B_1 = 2t^2 + 4t$ y $B_2 = -5t^2$. Determine la magnitud y dirección de la corriente que registra el amperímetro para *t* = 4 s si *R* = 10 Ω.

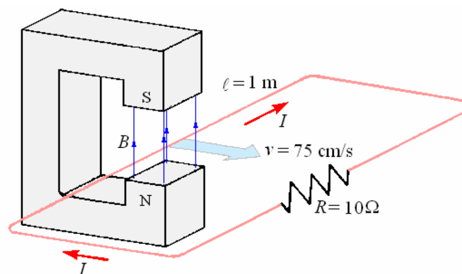


13. Dos solenoides (S_1) y (S_2) indeformables y coaxiales, de secciones A_1 y A_2, ($A_2 < A_1$) tienen respectivamente N_1 y N_2 espiras por unidad de longitud, son recorridos por corrientes iguales y del mismo sentido, I_1 e I_2 constantes. El solenoide S_2 penetra una longitud *x* en el interior de S_1 donde el campo magnético se supone uniforme.

a) Si consideramos que el flujo que atraviesa las espiras de S_2 exterior a S_1 se escribe $\Phi_0 = KI$, donde *K* es una constante, calcular el flujo total que atraviesa S_2 debido a S_1.

b) ¿Cuál es la fuerza magnética actuante sobre el solenoide S_2? ¿Cuál es la acción que origina esta fuerza?

14. Un alambre de cobre de 1 m de longitud se mueve con velocidad de 75 cm/s perpendicularmente a un campo magnético de 1 T. ¿Qué fuerza electromotriz se induce en la barra? Si sus extremos se conectan a una resistencia de 10 Ω. ¿Cuál es la potencia disipada en el movimiento del alambre?



Respuesta.

$\varepsilon = B\ell v$ = 1 x 1 x 0,75 = 0,75 V,

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{0{,}75^2}{10} = 0{,}056 \text{ W.}$$

15. La hélice de un aeroplano mide2,0 m de un extremo al otro extremo, gira a 18000 RPM. ¿Si el aeroplano está volando dirigido al norte debido en un punto donde la componente horizontal del campo magnético de la tierra es 1,2 x 10^{-5} T, qué voltaje se genera entre las extremos de la hélice?

Respuesta.

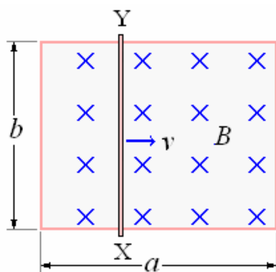
Cada mitad del propulsor barre un área πr^2 en cada revolución, tal que $\varepsilon = 2B\pi \; r^2 f$.

$$\varepsilon = 2\left(1{,}2\times10^{-5}\right)\pi\left(1{,}0\right)^2\left(\frac{18000}{2\pi 60}\right) = 0{,}0036 \text{ V}$$

16. Dos rieles conductores paralelos largos están separados una distancia *d*. En un extremo están unidos por medio de una resistencia *R*. Una barra conductora de longitud *d* se hace resbalar con

velocidad constante v a lo largo de los rieles. La barra y los carriles tienen resistencia insignificante.
a) ¿Qué corriente fluye en el circuito?
b) ¿Qué potencia se requiere para mover la barra?
c) ¿Cuál es la potencia disipada en la resistencia compararla con la potencia requerida para mover la barra?
Respuesta.
$\varepsilon = Bdv$,
a) $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bdv}{R}$.
b) $P_1 = Fv = (IdB)v = \frac{B^2 d^2 v^2}{R}$, y
c) $P_2 = I^2 R = \left(\frac{Bdv}{R}\right)^2 = P_1$

17. Un alambre de resistencia insignificante se dobla formando un rectángulo de lados *a* y *b*. Hay un campo magnético uniforme perpendicular al plano del lazo. ¿Una barra de resistencia *R* se coloca entre los puntos X e Y sobre el lazo y se mueve a la derecha la con velocidad constante v. ¿Qué corriente fluye en la barra? ¿En qué dirección va la corriente?



Respuesta.
La corriente fluye hacia abajo en la barra. Ambos lazos contribuyen a la fuerza electromotriz inducida, tal que:
$$I = \frac{2Bbv}{R}$$
18. Un solenoide largo, delgado tiene 750 vueltas por el metro, y su corriente se aumenta con una razón de 60 A/s. ¿Cuál es el campo eléctrico inducido dentro del solenoide en un punto a 5 mm del eje y a mitad de la distancia entre los extremos?
Respuesta.
Considere el flujo a través de un círculo de radio *r*.
$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 N \frac{dI}{dt} = 2\pi rE$$
$$E = \frac{1}{2}\mu_0 r N \frac{dI}{dt}$$
$$= (0,5)(4\pi \times 10^{-7})(5\times 10^{-3})(750)(60)$$
$= 1,4 \times 10^{-3}$ V/m

19. Un tren se desplaza de Norte a Sur con una velocidad uniforme de 120 km/h. Si la componente vertical del campo magnético terrestre es de 0,54 gauss, ¿cuál es la diferencia de potencial inducida que se genera entre los extremos de un eje de las ruedas del tren si su longitud es de 1,25 m?
Respuesta. $22,4 \times 10^{-4}$ V.

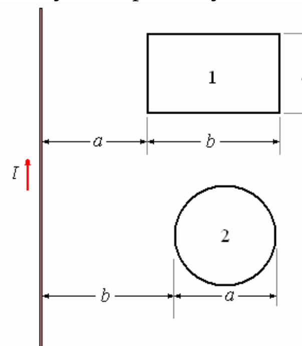
20. Una barra metálica de 1 m de longitud se deja caer desde una altura de 20 m permaneciendo horizontal con sus extremos apuntando en la dirección Este-Oeste. ¿Qué diferencia de potencial se induce entre sus extremos en el instante justo antes de llegar al suelo? (Componente horizontal del campo magnético terrestre: $B_H = 0,17$ gauss.)
Respuesta. $3,37 \times 10^{-4}$V..

21. Una bobina de 100 espiras es extraída en una décima de segundo de su posición entre los polos de un imán donde existe un flujo de 50×10^{-5} Wb. ¿Cuál es la fuerza electromotriz media inducida en la bobina?
Respuesta. 0,5 V.

22. Una espira cuadrada de área 500 cm^2 se sitúa perpendicularmente a un campo de intensidad 1 T. La espira se voltea hasta que su plano es paralelo al campo en un tiempo de 0,1 s. ¿Cuál es la fuerza electromotriz media inducida?
Respuesta. 0,5 V.

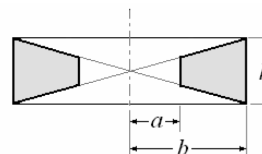
23. Encontrar la autojnductancia de un solenoide de longitud finita *h* y radio *a* (*h* >> *a*) en términos de las potencias de *a*/*h*.

24. ¿Cual es la inductancia mutua entre un alambre delgado infinito y las espiras 1 y 2..



25. ¿Cuál es la inductancia mutua entre la bobina toroidal con *n* vueltas densamente enrolladas y una espira cerrada encerrando el toroide

26. ¿Cuál es la autoinductancia del toroide mostrado en la figura?



27. Encontrar la autoinductancia de un toroide de radio *b*, *n* vueltas, y sección circular de radio *a*.

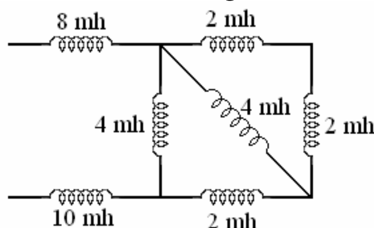
28. Determinar aproximadamente la inductancia mutua entre dos anillos delgados, coaxiales, de radios *a* y *b*, si la distancia *d* entre sus planos es mucho mayo que *a* y *b*.

29. Determinar la inductancia mutua de dos cuadrados idénticos de lado *a* colocados a una distancia ℓ y coincidentes con las caras opuestas de un paralelepípedo. Encontrar la fuerza entre ellos.

30. Determinar la autoinductancia de un cuadrado de lado *b* hecho de un alambre de radio *a* (*a* << *b*).

31. Mostrar que cuando dos bobinas se conectan en serie la autoinductancia de la combinación es $L = L_1 + L_2 \pm 2M$. Explicar para que conexión es + y para cual es -.

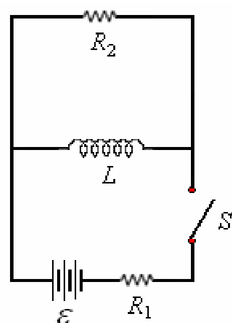
32. Encuentre la inductancia equivalente en el circuito que se muestra en la figura.



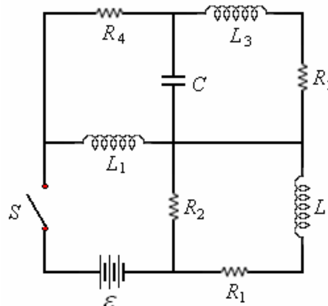
33. Un alambre largo y recto de radio *a* lleva una corriente *I*. ¿Cuál es la densidad de energía magnética en la superficie del alambre?
Calcular la energía magnética almacenada por unidad de longitud en el interior del alambre.

34. La máxima energía almacenada por un circuito *LC* es 10^{-4} Joules y la capacidad es 4 μ f. Si la corriente máxima que circula por el circuito es 2A, calcular:
a) La inductancia del circuito.
b) La frecuencia de oscilación.

35. Sea el circuito da la figura y supongan que el interruptor S está cerrado en $t = 0$,
a) Describir la trayectoria seguida por la corriente inmediatamente después de que se cierra el interruptor.
b) ¿Cuál es la trayectoria de la corriente después de mucho tiempo?



36. Para el Circuito de la figura. Encontrar;
a) El valor inicial de la corriente a través de la batería.
b) La corriente final por R_2.
c) La corriente final por R_1.
d) La corriente final por la batería.



37. A una batería de 2,73 V se conecta una resistencia de 1,73 Ω y dos autoinducciones en serie de 10 mh cada una. Calcúlese la inductancia mutua entre ellas, sabiendo que, a los 0,01 s de conectar, la corriente que circula es de 1 A.
Respuesta. M =1,35 mH.

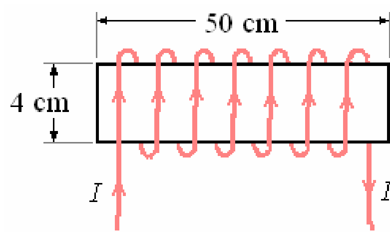
38. Una bobina tiene una inductancia de 10 h y una resistencia de 40 Ω. Si se aplica una fuerza electromotriz de 200 V, ¿Cuál es la energía almacenada en el campo magnético una vez que la corriente alcanza su valor máximo?
Respuesta. 126 J...

39. Calcúlese la autoinducción de una bobina de *n* espiras, sección *A* y radio medio *R*.
Respuesta.
$$L = \frac{\mu_0 A n^2}{2\pi R}$$

40. Determínese la energía por unidad de volumen almacenada en la Inductancia formada por un solenoide toroidal de longitud ℓ y sección *A* que el paso de una corriente crea en su interior un campo magnético *B*.
Respuesta.
$$\frac{W}{A\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

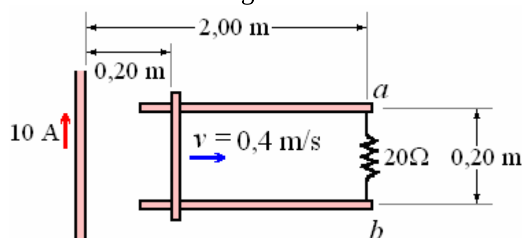
41. Por un solenoide recto de 500 espiras, longitud 1 m y sección 10 cm^2 circula una corriente de 10 A. Sobre este solenoide se arrolla una pequeña bobina de 50 espiras colocadas en su centro. ¿Cuál es la inductancia mutua?
Respuesta. 3,14 x 10^{-4} h.

42. Un solenoide con 400 vueltas, 4 cm de diámetro y 50 cm de largo. Lleva una corriente en el sentido mostrado en la figura. La corriente produce un campo magnético, de magnitud 1,5 mT, en el centro del solenoide.



a) ¿Cuál es la corriente?
A) 1,1 A B) 1,3 A **C)** 1,5 A D) 1,7 A E) 1,9 A
b) ¿Cuál es el flujo magnético en el solenoide?
A) lxl0^6 Wb B) 2x10^6 Wb C) 4x10^6 Wb D) 6x 10^6 Wb **E)** 8x10^6 Wb

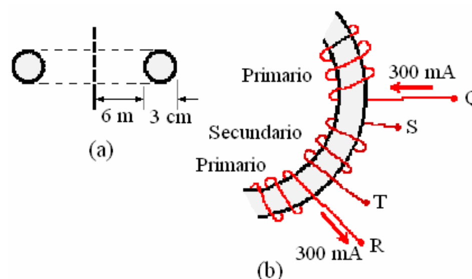
43. Un alambre vertical largo lleva una corriente constante de 10 A. Un par de carriles horizontales y separados 0,20 m. Una resistencia de 20 ohmios conecta los puntos *a* y *b*, en el extremo de los carriles. Una barra está en contacto con los carriles, y es movida por una fuerza externa con una velocidad constante de 0,40 m/s, como se muestra. La barra y los carriles tienen resistencia insignificante. En un instante t_1 dado, la barra está a 0,20 m del alambre, como se muestra en la figura.



a) En el instante t_1, la corriente inducida y su dirección a través de la resistencia es cercanamente igual a:
A) 0,02 μ A, de *a* a *b*
B) 0,02 μ A, de *b* a *a*
C) 0,04 μ A, de *a* a *b*
D) 0,04 μ A, de *b* a *a*
E) 0,02 μ A, de *b* a *a*

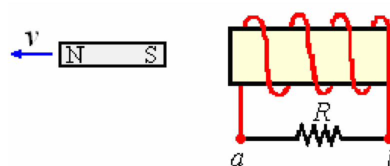
b) En el instante t_2, inmediato posterior, la diferencia potencial a través de la resistencia es 0,30 μV. El intervalo del tiempo, $\Delta t = t_2 - t_1$ es cercanamente igual a:
A) 0,5 s B) 1,0 s **C)** 1,5 s D) 2,0 s E) 2,5 s

44. La figura (a) muestra la sección transversal de un toroide. Una bobina primaria tiene 400 vueltas, que se arrollan totalmente alrededor de la forma toroidal. Los terminales de la bobina primaria son Q y R. Una bobina circular secundaria de 3 vueltas se arrolla firmemente alrededor de la forma toroidal, con los terminales S y T. Las bobinas primarias y secundarias se muestran en la figura (b). Se provee una corriente constante de 300 mA a la bobina primaria por medio de una batería que no se muestra. Un interruptor (no mostrado) se abre, que desconecta los terminales Q y R de la batería. La corriente en la bobina primaria baja a cero en un intervalo del tiempo de 0,20 S.



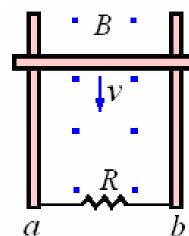
a) La fuerza electromotriz media en la bobina primaria, en el intervalo de los 0.20 s, es cercanamente igual a:
A) cero B) 0,25 μ V **C)** 0,45 μ V D) 0,65 μ V E) 0,85 μ V
b) La fuerza electromotriz media en la bobina secundaria, en el intervalo de los 0.20 s, es cercanamente igual a:
A) 3 μ V B) 4 μ V C) 5 μ V D) 6 μ V E) 7 μ V
c) Las polaridades de la fuerza electromotriz inducidas en las bobinas primaria y secundaria son:
A) Q y R están al mismo potencial; S es positivo y T es negativo
B) Q es positivo y R es negativo; S es positivo y T es negativo
C) Q es positivo y R es negativo; T es positivo y S es negativo
D) R es positivo y Q es negativo; S es positivo y T es negativo
E) R es positivo y Q es negativo; T es positivo y S es negativo

45. En la figura, un imán de barra se aleja del solenoide. La corriente inducida a través de la resistencia *R* es:



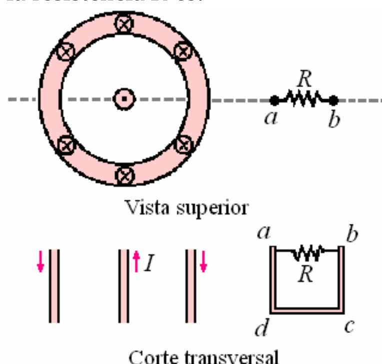
A) cero
B) de *a* a *b*
C) de *b* a *a*

46. En la figura, una barra está en contacto con un par de carriles paralelos. Un campo magnético constante, uniforme, perpendicular al plano de los carriles, está presente. La barra está en el movimiento con la velocidad v. La corriente inducida a través de la resistencia *R* es:



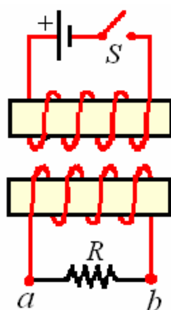
A) Cero **B)** de *a* a b C) de *b* a *a*

47. En la figura se muestra, un alambre recto largo que lleva una corriente constante *I*, y un cilindro coaxial largo por el que vuelve la misma corriente. Un lazo rectangular *abcd* está fuera del cilindro. Se puede observar una vista superior, y una vista de la sección transversal, a través de la línea punteada. La corriente *I* está aumentando. La corriente inducida a través de la resistencia *R* es:



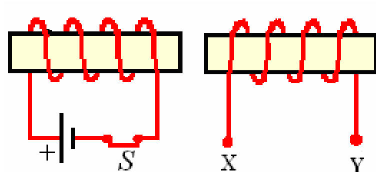
A) Cero
B) de *a* a *b*
C) de *b* a *a*

48. En la figura, dos solenoides están frente a frente. El interruptor S, inicialmente abierto, es cerrado. La corriente inducida a través de la resistencia *R* es:



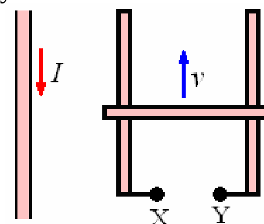
A) cero
B) de *a* a *b*
C) de *b* a *a*

49. En la figura los dos solenoides están alineados. El interruptor S, cerrado inicialmente, se abre. La polaridad de los terminales inducidos de la fuerza electromotriz en X e Y es:



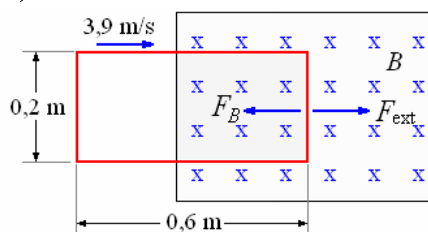
A) X e Y están al mismo potencial.
B) X es positivo e Y es negativo
C) Y es positivo y X es negativo

50. En la figura, un alambre recto lleva una corriente constante *I*. Una barra está en contacto con un par de carriles y está en el movimiento con velocidad *v*. La polaridad de la fuerza electromotriz inducida entre los terminales X y Y es:



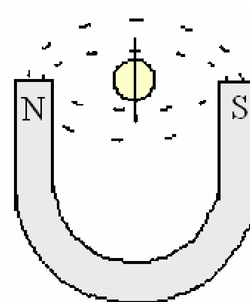
A) X e Y están al mismo potencial.
B) X es positivo e Y es negativo
C) Y es positivo y X es negativo

51. En la figura, hay un campo magnético uniforme de la magnitud *B* = 1,5 T y dirigido hacia el plano del papel en la región mostrada. Fuera de esta región el campo magnético es cero. Un lazo rectangular de 0,20 m por 0,60 m y de resistencia 3 Ω está siendo jalado hacia el campo magnético por una fuerza externa, como se muestra.



a) ¿Cuál es la dirección (horario u antihorario) de la corriente inducida en el lazo?
b) Calcular la magnitud de la fuerza externa F_{ext} requerida para mover el lazo con un de velocidad constante de v = 3.9 m/s. La masa del lazo es 0,008 kilogramos.
Respuesta. a) antihorario, b) 1 x 10^{-1} N

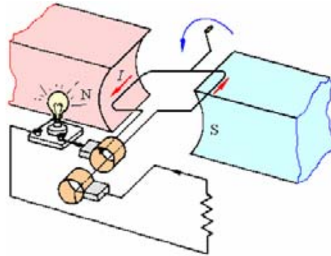
52. En la figura, un lazo circular del área 0,050 m^2 con 50 vueltas y resistencia 7,0 Ω se pone entre los polos de un imán de herradura en forma de "U" grande, donde el campo magnético es 0,11 T. El lazo rota sobre un diámetro. ¿Cuánta carga atraviesa el alambre en 1/4 de revolución?



Respuesta. 0,039 C

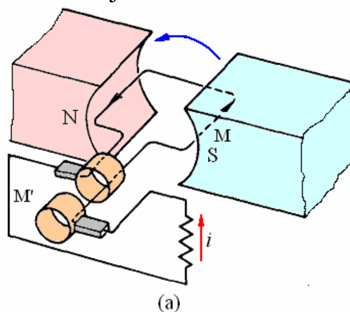
CAPÍTULO 5. Corriente alterna

GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA.
Un generador eléctrico transforma energía mecánica en energía eléctrica. Se ha visto que se induce una fem en un conductor cuando éste experimenta un cambio en el flujo que lo eslabona. Cuando el conductor forma un circuito cerrado, puede detectarse una corriente inducida. En un generador, una bobina de alambre gira en un campo magnético, y la corriente inducida se trasmite por alambres a gran distancia de su origen.



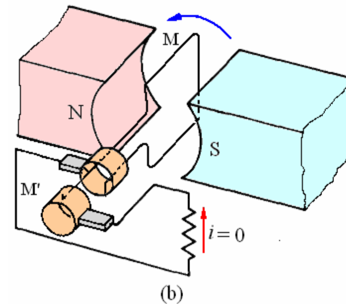
En la figura anterior se muestra la construcción de un generador simple. Básicamente hay tres componentes: un inductor, una armadura y un conmutador de anillos colectores de deslizamiento con escobillas. El inductor puede ser un imán permanente o un electroimán. La armadura del generador de la figura consiste en una sola espira de alambre (inducido) suspendida entre los polos del inductor. Un par de anillos colectores de deslizamiento se conectan a cada de la espira y giran junto con ella en el campo magnético. La corriente inducida se obtiene del sistema mediante escobillas de grafito, las cuales están montadas sobre cada anillo de deslizamiento. Se suministra energía mecánica al generador al girar la armadura en el campo magnético y se genera energía eléctrica en corriente inducida.

Producción de una corriente alterna. A fin de comprender la operación de un generador de corriente alterna, es conveniente seguir los pasos de la espira a través de una rotación completa, y observación de la corriente en el proceso de rotación. Supóngase que se hace girar la espira mecánicamente en sentido contrario a las manecillas del reloj.



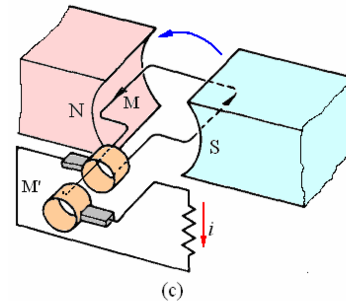
(a)

En la figura (a) la espira está en posición horizontal, con el lado M encarando al polo sur del imán en este punto, se entrega una corriente máxima en la dirección mostrada.



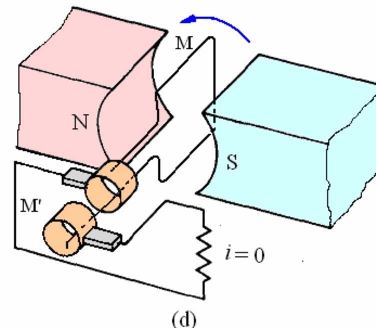
(b)

En la figura (b) la espira está en posición vertical con el lado M en la parte superior, en el punto no se cortan las líneas de flujo y la corriente inducida decae a 0.



(c)

Cuando la espira se encuentra otra vez horizontal como en la figura (c), el lado M está ahora frente al polo norte del imán. Por consiguiente, la corriente suministrada al anillo colector M' ha cambiado de dirección. Una corriente fluye a través de la resistencia externa en una dirección opuesta a la que se experimentó anteriormente.

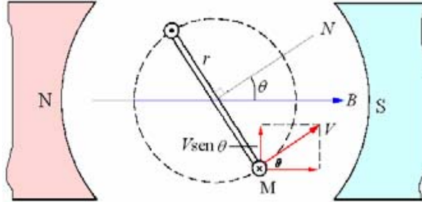


(d)

En la figura (d) la espira está en posición vertical nuevamente, pero ahora el lado M está en la parte inferior; no se cortan líneas del flujo, y otra vez la corriente inducida decae a cero. A continuación la espira regresa a su posición horizontal, como se muestra en la figura (a), y el ciclo se vuelve a repetir. Así pues, la corriente suministrada por tal generador alterna en forma periódica, y la dirección cambia dos veces en cada rotación.
La fem generada en cada segmento de la espira en rotación debe cumplir la relación

$\varepsilon = B\ell v \operatorname{sen}\theta$, donde v es la velocidad de un segmento de alambre en movimiento de longitud ℓ en un campo magnético B. La dirección de la velocidad v con respecto al campo B en cualquier instante se denota por medio del ángulo θ.

Cálculo de la fem inducida. Considérese el segmento M de la espira giratoria cuando alcanza la posición indicada en la figura a continuación.



La fem instantánea en esa posición queda expresada por la ecuación $\varepsilon = B\ell v \operatorname{sen}\theta$. Si la espira gira en un círculo de radio r, la velocidad instantánea v puede encontrarse de $v = \omega r$, donde ω es la velocidad angular en radianes por segundo. La fuerza electromotriz instantánea se encuentra al sustituir la velocidad instantánea en la ecuación $\varepsilon = B\ell v \operatorname{sen}\theta$

$$\varepsilon = B\ell \omega r \operatorname{sen}\theta$$

En el segmento de alambre opuesto a M se induce una fuerza electromotriz idéntica y no se genera una fuerza electromotriz neta en los otros segmentos. De aquí que la fem instantánea total sea el doble del valor expresado por la ecuación $\varepsilon = B\ell \omega r \operatorname{sen}\theta$, o

$$\varepsilon_{máx} = 2B\ell \omega r \operatorname{sen}\theta$$

Pero el área A de la espira es

$$A = \ell \times 2r$$

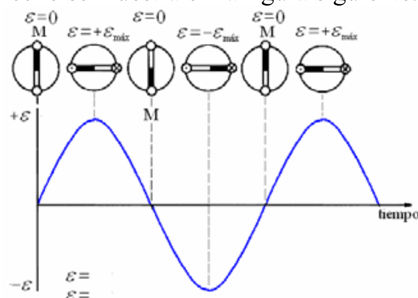
Y la ecuación $\varepsilon_{máx} = 2B\ell \omega r \operatorname{sen}\theta$ puede escribirse como:

$\varepsilon_{máx} = nBA\omega \operatorname{sen}\theta$, donde n es el número de vueltas de alambre.

Esta ecuación expresa un principio muy importante que está relacionado con el estudio de las corrientes alternas:

Si la armadura gira con una velocidad angular constante en un campo magnético constante, la magnitud de la fuerza electromotriz inducida varía sinusoidalmente en función del tiempo.

Este hecho se muestra en la figura siguiente.



La fuerza electromotriz varía desde un valor máximo cuando θ = 90° a un valor de cero cuando θ = 0º. La fuerza electromotriz instantánea máxima es, por consiguiente, $\varepsilon_{máx} = nBA\omega$, ya que sen 90° = 1. Si se establece la ecuación $\varepsilon_{máx} = nBA\omega \operatorname{sen}\theta$ en términos de la fuerza electromotriz máxima, entonces

$$\varepsilon = \varepsilon_{máx} \operatorname{sen}\theta$$

Para ver la variación explícita de la fem generada en función del tiempo necesario recordar que

$$\theta = \omega t = 2\pi f\, t$$

Donde f conocida como frecuencia es el número de revoluciones por segundo que realiza la espira.

La unidad en el SI para la frecuencia es el hertz (Hz), que se define como 1 ciclo por segundo.

1 Hz = 1 ciclo/s

Por lo tanto, una corriente alterna de 60 ciclos por segundo tiene una frecuencia de 60 Hz.

De este modo la ecuación $\varepsilon = \varepsilon_{máx} \operatorname{sen}\theta$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \varepsilon_{máx} \operatorname{sen}\omega t = \varepsilon_{máx} \operatorname{sen}2\pi f\, t$$

La unidad en el SI para la frecuencia es el hertz (Hz), que se define como 1 ciclo por segundo.

1 Hz = 1 ciclo/s

Por lo tanto, una corriente alterna de 60 ciclos por segundo tiene una frecuencia de 60 Hz.

Puesto que la corriente inducida es proporcional a la fuerza electromotriz inducida, de acuerdo con la ley de Ohm la corriente inducida también variaría sinusoidalmente según la expresión

$$i = i_{máx} \operatorname{sen}2\pi f\, t$$

La corriente máxima ocurre cuando la fuerza electromotriz inducida es máxima. La variación sinusoidal es análoga a la representada gráficamente en la figura anterior.

Ejemplo 1. La armadura de un generador simple de ca consta de 100 vueltas de alambre, cada una de ellas con un área de 0,2 m^2. La armadura gira con una frecuencia de 60 rev/s en un campo magnético constante de densidad de flujo 10^{-3} T. ¿Cuál es la fem máxima que se genera?

Solución.

Primero es necesario calcular la velocidad angular de la bobina.

$\omega = 2\pi(60)$ = 377 rad/s.

Si este valor se sustituye y también los otros parámetros conocidos en la ecuación $\varepsilon_{máx} = nBA\omega$, se obtiene

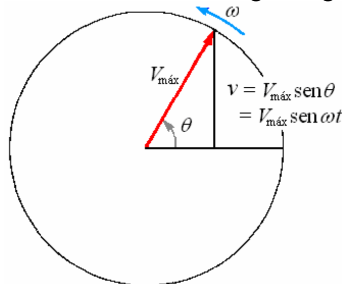
$\varepsilon_{máx} = nBA\omega = (100)(10^{-3})(0,2)(377)$
$= 7,54$ V

ANGULO DE FASE. FASORES.
Una manera conveniente de representar una cantidad que varia sinusoidalmente (es decir, $\text{sen}\,\theta$ como varía con θ) con el tiempo está en términos de un vector que rota llamado **fasor**.

En el caso de un voltaje de corriente alterna, la longitud del fasor $\vec{V}_{máx}$ corresponde a $V_{máx}$, y lo imaginamos que rota f veces por segundo en sentido antihorario.
La componente vertical del fasor en todo momento corresponde al voltaje instantáneo v desde que la componente vertical de $\vec{V}_{máx}$, es

$$v = V_{máx}\text{sen}\,\theta = V_{máx}\text{sen}\,2\pi f\,t = V_{máx}\text{sen}\,\omega t$$

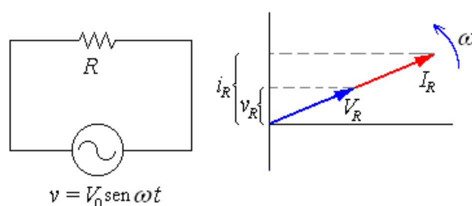
El resultado es mostrado en la figura siguiente.



En una manera similar un fasor $I_{máx}$ se puede utilizar para representar una corriente alterna I.
Los fasores son útiles porque el voltaje y la corriente en una corriente alterna en un circuito de corriente alterna o en un elemento del circuito tiene siempre la misma frecuencia f pero los picos en V e I pueden ocurrir en diferentes tiempos.

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA CON RESISTENCIA, INDUCTANCIA Y CONDENSADOR.

Una resistencia conectada a un generador de corriente alterna



La ecuación de este circuito simple es:

(Intensidad por resistencia igual a la fem)

$$i_R R = V_0 \text{sen}\,\omega t$$

$$\Rightarrow i_R = \frac{V_0}{R}\text{sen}\,\omega t$$

La diferencia de potencial en la resistencia es

$$v_R = V_0 \text{sen}\,\omega t$$

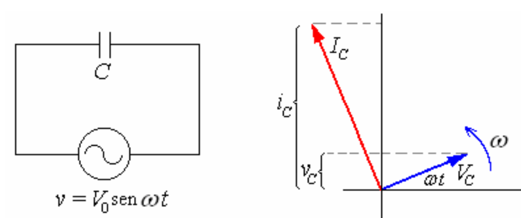
En una resistencia, la **intensidad** i_R y la diferencia de potencial v_R **están en fase**. La relación entre sus amplitudes es

$$I_R = \frac{V_R}{R}$$

Con $V_R = V_0$, la amplitud de la fuerza electromotriz alterna

Como vemos en la representación vectorial de la figura, al cabo de un cierto tiempo t, los vectores rotatorios que representan a la intensidad en la resistencia y a la diferencia de potencial entre sus extremos, ha girado un ángulo ωt. Sus proyecciones sobre el eje vertical son, los valores en el instante t de la intensidad que circula por la resistencia y de la diferencia de potencial entre sus extremos.

Un condensador conectado a un generador de corriente alterna



$$v_C = V_0 \text{sen}\,\omega t$$

En un condensador la carga q, la capacidad C y diferencia de potencial v entre sus placas están relacionadas entre sí

$$q = Cv$$

Si se conecta las placas del condensador a un generador de corriente alterna

$$q = CV_0 \operatorname{sen} \omega t$$

La intensidad se obtiene derivando la carga respecto del tiempo, $i = \dfrac{dq}{dt}$

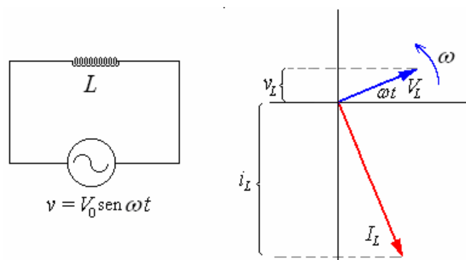
$$i_C = C\omega V_0 \cos \omega t = C\omega V_0 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Para un condensador, la **intensidad** i_C **está adelantada 90º** respecto a la diferencia de potencial v_C. La relación ente sus amplitudes es

$$I_C = C\omega V_C$$

Con $V_C = V_0$, la amplitud de la fuerza electromotriz alterna

Una inductancia conectada a un generador de corriente alterna



$$v_L = V_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Ya hemos estudiado la autoinducción y las corrientes autoinducidas que se producen en una bobina cuando circula por ella una corriente *i* variable con el tiempo.

La ecuación del circuito es (suma de fuerzas electromotrices es igual a la intensidad por la resistencia), como la resistencia es nula:

$$-L\frac{di}{dt} + V_0 \operatorname{sen} \omega t = 0$$

Integrando esta ecuación obtenemos i_L en función del tiempo

$$i_L = -\frac{V_0}{\omega L}\cos \omega t = \frac{V_0}{\omega L}\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La **intensidad** i_L de la en la bobina **está retrasada 90º** respecto de la diferencia de potencial entre sus extremos v_L. La relación entre sus amplitudes es

$$I_L = \frac{V_L}{\omega L}$$

Con $V_L = V_0$, la amplitud de la fuerza electromotriz alterna

REACTANCIA.

La reactancia inductiva de una inductancia es una medida de su eficacia en resistir el flujo de una corriente alterna en virtud de la de la fuerza electromotriz autoinducida por el cambio de la corriente en ella. A diferencia con el caso de una resistencia, no hay energía disipada en una inductancia pura. La reactancia inductiva X_L del cualquier inductor cuya inductancia es *L* (en henrios) cuando la frecuencia de la corriente es *f* (en hertzios) la reactancia inductiva es

$X_L = 2\pi f\ L = \omega L$.

Cuando una diferencia potencial *V* de frecuencia *f* se aplica a través de una inductancia cuya reactancia es X_L con la frecuencia *f*, fluirá la corriente $I = \dfrac{V}{X_L}$. La unidad de X_L es el ohmio.

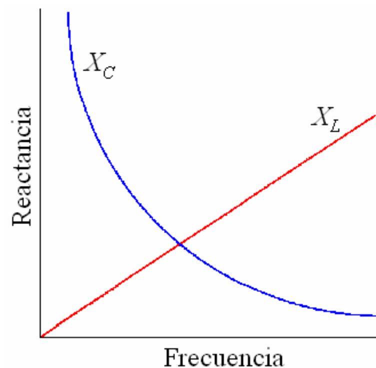
La reactancia capacitiva de un condensador es una medida de su eficacia en resistir el flujo de una corriente alterna en virtud de la diferencia potencial inversa a través del debido a la acumulación de carga en sus placas. No hay pérdida de energía asociada a un condensador en un circuito de corriente alterna. La reactancia capacitiva X_C de un condensador cuya capacitancia es *C* (en faradios) cuando la frecuencia de la corriente es *f* (en hertzios) es

$X_C = \dfrac{1}{2\pi f\ C} = \dfrac{1}{\omega C}$.

Cuando una diferencia potencial *V* de frecuencia *f* se aplica a través de un condensador cuya reactancia es X_C con la frecuencia *f*, fluirá la

corriente $I = \frac{V}{X_C}$. La unidad de X_C es el ohmio.

Ejemplo 2. a) Muestre gráficamente cómo X_C y X_L varían con la frecuencia.
b) ¿Qué sucede a X_C y X_L en el límite $f = 0$?
c) ¿Cuál es el significado físico de la respuesta a (b)?
Solución.
a)



b) Cuando $f = 0$, $X_L = 2\pi fL = 0$ y $X_C = 1/2\pi fC = \infty$.
c) Una corriente con $f = 0$ es una corriente continua.
Cuando una corriente constante fluye en una inductancia, no hay una fuerza electromotriz inducida para obstaculizar la corriente, y la reactancia inductiva es por consiguiente cero.
Una corriente directa no puede pasar a través de un condensador porque sus placas se aíslan uno de la otra, así que la reactancia capacitiva es infinita e $I = V/X_C = 0$ cuando $f = 0$.
Una corriente alterna no pasa realmente a través de un condensador sino son oleadas hacia adelante y hacia atrás en el circuito en ambos lados de él.

Ejemplo 3. Un condensador de $10\ \mu$F se conecta a una fuerza electromotriz de 15 V, 5 kHz. Encontrar
a) La reactancia del condensador.
b) El flujo de corriente. .
Solución.

a) $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$

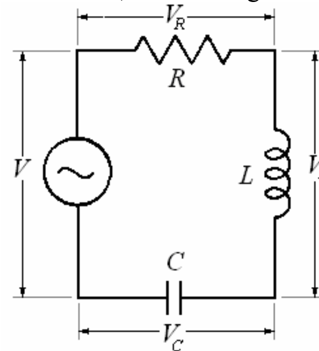
$= \frac{1}{2\pi(5\times 10^3)(10\times 10^{-6})} = 3{,}18\Omega$

b) $I = \frac{V}{X_C} = \frac{15}{3{,}18}$
$= 4{,}72$ A

Ejemplo 4. La reactancia de una inductancia es 80 Ω a 500 Hz. Encontrar la inductancia.
Solución.
Como $X_L = \omega L = 2\pi fL$

$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{80}{2\pi(500)} = 0{,}0255$ H
$= 25{,}5$ mH

CIRCUITO RLC EN SERIE
Ahora consideramos un circuito de corriente alterna que contenga resistencia, inductancia, y capacitancia en serie, como en figura siguiente.

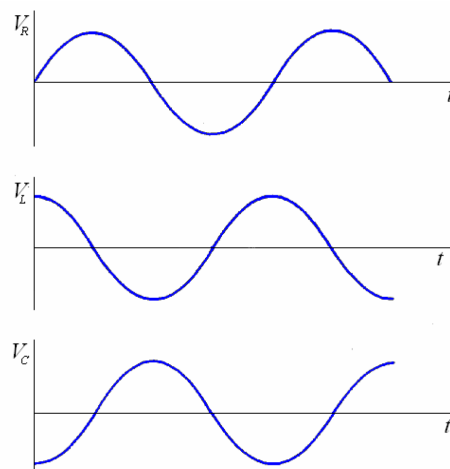


La corriente es igual para todos los elementos:
$i = i\text{sen}\omega t$
$i = I_R\text{sen}\omega t = I_L\text{sen}\omega t = I_C\text{sen}\omega t$
En todo momento el voltaje aplicado v es igual a la suma de las caídas de voltaje v_R, v_L, y v_C:
$v = v_R + v_L + v_C$

$v = V_R\text{sen}\omega t + V_L\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$+ V_C\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

Los voltajes instantáneos a través de los elementos de circuito son
$V_R = IR \quad V_L = IX_L \quad V_C = IX_C$



Porque v_R, v_L, y v_C están fuera de fase el uno con el otro, esta fórmula es solamente para los voltajes instantáneos, no para los voltajes efectivos.
Puesto que deseamos trabajar con voltajes y corrientes efectivos, no los instantáneos, debemos consideramos considerar las diferencias de fase. Para hacer esto, podemos utilizar los fasores para representar las diferentes cantidades efectivas. Esto se hace en las figuras a continuación para los voltajes. Para encontrar la magnitud *V* de la suma $\vec{V}$ de los diferentes voltajes efectivos, procedemos de esta manera:

1. Encuentre la diferencia $\vec{V}_L - \vec{V}_C$. Si $V_L > V_C$, $\vec{V}_L - \vec{V}_C$ será positivo y señalará hacia arriba, si $V_L < V_C$, $\vec{V}_L - \vec{V}_C$ será negativo y señalará hacia abajo.
2. Sume $\vec{V}_L - \vec{V}_C$ a $\vec{V}_R$ para obtener $\vec{V}$.

Como $\vec{V}_L - \vec{V}_C$ es perpendicular a $\vec{V}_R$, utilice el teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud *V*:

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

Porque $V_R = IR$ $V_L = IX_L$ $V_C = IX_C$

Podemos escribir la expresión para *V* en la forma

$$V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Impedancia de un circuito en serie

La cantidad $Z = \frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

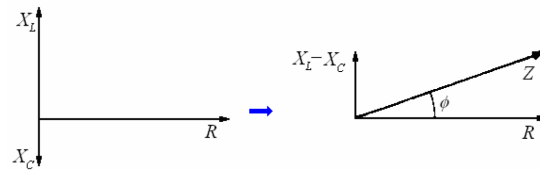
Es conocida como la impedancia del circuito y corresponde a la resistencia de la corriente continua. La unidad de Z es el ohm. Cuando un voltaje de corriente alterna cuya frecuencia es *f* se aplica a un circuito cuya impedancia es *Z* a tal frecuencia, el resultado es la corriente

$$I = \frac{V}{Z}$$

La figura siguiente muestra los diagramas de fasores de la impedancia. El ángulo de fase puede ser calculado por cualquiera de las dos fórmulas siguientes.

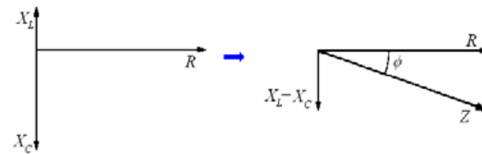
$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{o} \quad \cos\phi = \frac{R}{Z}$$

Cuando $X_L > X_C$:



$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Cuando $X_L < X_C$:



$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Ejemplo 5. Una resistencia, un condensador y una inductancia están conectados en serie a una fuente de corriente alterna. Los voltajes efectivos a través de los componentes del circuito son:
$V_R = 5\text{V}$, $V_C = 10\text{V}$, y $V_L = 7\text{V}$. Encontrar:
a) El voltaje efectivo de la fuente y
b) El ángulo de fase en el circuito.

Solución.

a) $V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$
$= \sqrt{5^2 + (7-10)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2}$
$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34} = 5{,}8$ V

Se puede notar que los voltajes efectivos a través de *C* y *R* son mayores que el voltaje

b) $\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{7-10}{5} = -\frac{3}{5}$
$= -0{,}6$
$\Rightarrow \phi = -31^\circ$

El ángulo de fase negativo significa que el voltaje a través de la resistencia está adelantado al voltaje aplicado. Equivalentemente podemos decir que la corriente en el circuito se adelanta al voltaje, (Los **fasores** rotan en el sentido antihorario).

Ejemplo 6. Una fuerza electromotriz alterna de tensión eficaz, 110 V y frecuencia 10 Hz está aplicada a un circuito formado por una resistencia de 7 Ω en serie con un condensador. Determínese la capacidad de éste, si la intensidad que circula es de 5 A.

Solución.

Aplicando la fórmula de la ley de Ohm de las corrientes alternas, tenemos:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{110}{\sqrt{7^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$
$= 5$ A.

De donde:

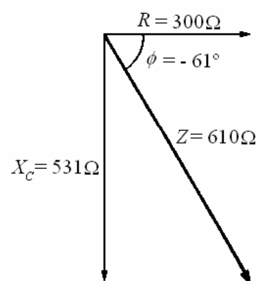
$$\frac{1}{\omega C} = 20{,}85\Omega,$$

$$C = \frac{1}{20{,}85\omega} = \frac{1}{20{,}85(2\pi 60)}$$
$= 127 \times 10^{-6}$ F

Ejemplo 7. Un condensador de 5 μ F está en serie con una resistencia de 300 Ω, y a la combinación se aplica un voltaje de120 V y 60 Hz. Encuentre
a) la corriente en el circuito y
b) el ángulo de la fase.

Solución.
a) La reactancia del condensador a 60 hertzios es

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(60)(5\times 10^{-6})} = 531\Omega$$



Como $X_L = 0$, la impedancia del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (-X_C)^2}$$
$$= \sqrt{R^2 + X_C{}^2} = \sqrt{300^2 + 531^2}$$
$$= 610\Omega$$

Luego la corriente es

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120}{610} = 0{,}197 \text{ A}$$

b)

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{0 - 531}{300}$$
$= - 1{,}77$
$\Rightarrow \phi = -61^\circ$

El ángulo negativo de la fase significa que la corriente en el circuito adelanta al voltaje.

Ejemplo 8. Una inductancia de 5 mH, 20 Ω está conectado a una fuente de energía de 28 V, 400 Hz. Encuentre
a) La corriente en la inductancia y
b) el ángulo de la fase.

Solución.
a) La reactancia de la inductancia es:

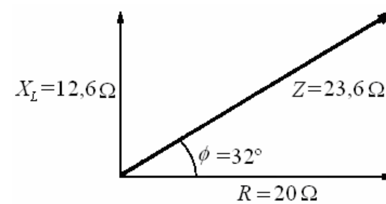
$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(400)(5\times 10^{-3})$$
$$= 12{,}6\Omega$$

Y su impedancia es;

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{20^2 + 12{,}6^2}$$
$$= 23{,}6\Omega$$

Por lo tanto la corriente es

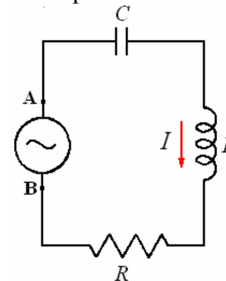
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{28}{23{,}6}$$
$= 1{,}18$ A



b) $\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{12{,}6 - 0}{20}$
$= - 0{,}63$
$\Rightarrow \phi = 32^\circ$

El ángulo positivo de la fase significa que el voltaje en el circuito adelanta a la corriente.

Ejemplo 9. Si al circuito anterior le conectamos un generador que suministre tensión *v* alterna dada por $v = v_A - v_B = V_0 \operatorname{sen}\omega t$, hallar la intensidad *I* que circula y la diferencia de potencial entre los dos extremos izquierdo y derecho de cada elemento cuando los transitorios hayan desaparecido prácticamente.



Solución.

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

Con $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$

Entre los extremos de *R*:

$$v = IR$$

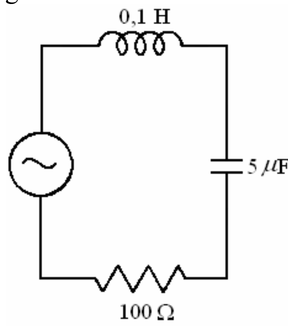
Entre los extremos de *L*:

$$v = \frac{V_0 \omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

Entre los extremos de *C*:

$$v = \frac{V_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi - \pi)$$

Ejemplo 10. Un circuito está formado por una autoinducción de 0,1 H, un condensador de 5 μF y una resistencia de 100 Ω en serie. Calcúlese el valor del potencial instantáneo cuando la corriente es nula, si la intensidad eficaz del circuito es de 2,12 A y el generador es de 50 ciclos.



Solución.
La impedancia del circuito vale

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$
$$= \sqrt{100^2 + \left(100\pi 0{,}1 - \frac{1}{100\pi 5 \times 10^{-6}}\right)^2}$$
$$= 615\Omega$$

Con ello la fuerza electromotriz es:

$$V = IZ = (2{,}12)(615)$$
$$=1303 \text{ V.}$$

El ángulo de fase es:

$$\tan\phi = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} = \frac{(31{,}4 - 637)}{100}$$
$$= -6{,}056,$$
$$\Rightarrow \phi = -80°37'$$

La intensidad instantánea resulta nula cuando se cumple:

$$I_m \text{sen}(\omega t - \phi) = 0$$

Es decir, cuando $(\omega t - \phi) = 0$,

$$\Rightarrow \omega t = \phi = -80°37'$$

Con ello la fuerza electromotriz instantánea es:

$$v = V_m \text{sen}\omega t = 1303\sqrt{2}\text{sen}(-80°37')$$
$$= 1843(-0{,}9866)$$
$$= -1818 \text{ V.}$$

RESONANCIA EN SERIE
La impedancia en un circuito de corriente en serie es un mínimo cuando $X_L = X_C$; bajo estas circunstancias $Z = R$ e $I = \frac{V}{R}$.

La frecuencia de la resonancia f_R de un circuito es aquella frecuencia en la cual $X_L = X_C$:

$$2\pi f_R L = \frac{1}{2\pi f_R C} \Rightarrow f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Cuando la diferencia potencial aplicada a un circuito tiene la frecuencia f_R, la corriente en el circuito es un máximo. Esta condición se conoce como resonancia. En la resonancia el ángulo de la fase es cero ya que $X_L = X_C$.

Ejemplo 11. Un condensador de 10 μF, una inductancia de 0,10 H, y una resistencia de 60 Ω se conectan en serie a través de una fuente de poder de 120 V, 60Hz. Encontrar.
a) La corriente en el circuito y
b) El ángulo de fase.

Solución.
a) Las reactancias son.

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi(60)(0{,}1)$$
$$= 38\Omega$$
$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(60)(10 \times 10^{-6})}$$
$$= 265\Omega$$

Luego la impedancia es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$= \sqrt{60^2 + (38 - 265)^2}$$
$$= 235\Omega$$

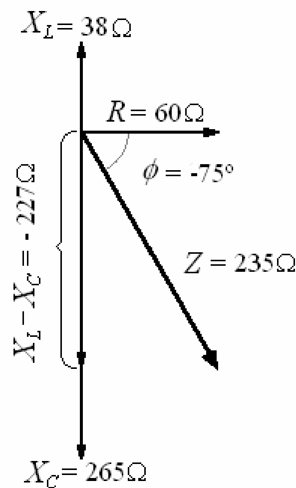
De aquí la corriente del circuito es.

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120}{235}$$
$$= 0{,}51 \text{ A}$$

b) $\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$

$$= \frac{38 - 265}{60} = \frac{-227}{60} = -3{,}78$$
$$\Rightarrow \phi = -75°$$

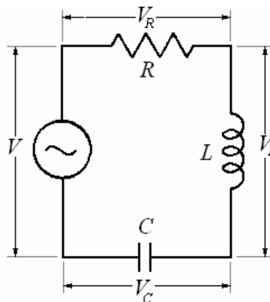
El ángulo negativo de la fase significa que la corriente en el circuito adelanta al voltaje.



Ejemplo 12. Corriente alterna. El voltaje instantáneo del generador de un circuito *RLC* en serie está dado por la relación: $v(t) = 200\cos(100t)$ en voltios. Los valores de la resistencia, la inductancia; el condensador son: 80 Ω : 0,40 H y 100 μ F, respectivamente. Calcule:

i) La corriente instantánea del circuito.
ii) La amplitud (o valor máximo) del voltaje en la resistencia, en la inductancia y en el condensador. Dibuje el diagrama de fasores de la corriente y voltajes del circuito, indicando sus valores respectivos.

Solución.



i) La corriente instantánea del circuito.
La corriente es igual para todos los elementos:

$$i(t) = I_{máx}\cos(\omega t + \phi)$$

$$R = 80\Omega,\ X_L = \omega L = 100(0,40) = 40\Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100(100\times 10^{-6})} = 100\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} =$$

$$\sqrt{80^2 + (40-100)^2} = 100\ \Omega$$

$$I_{máx} = \frac{V_{máx}}{Z} = \frac{200}{100} = 2\text{ A.}$$

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{40-100}{80} = -0,75 \Rightarrow$$

$$\phi = -36,87°$$

Luego: $i(t) = 2\cos(100\,t - 36,87°)$

ii) La amplitud (o valor máximo) del voltaje en la resistencia, en la inductancia y en el condensador.

$$I_{máx} = \frac{V_{máx}}{Z} = \frac{200}{100} = 2\text{ A.}$$

Como La corriente es igual para todos los elementos:

$$i(t) = I_{máx}\cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = I_R\cos(\omega t + \phi) = I_L\cos(\omega t + \phi) = I_C\cos(\omega t + \phi)$$

$$I_R = I_L = I_C = I_{máx} = 2\text{A.}$$

El diagrama de fasores de la corriente y voltajes del circuito,

$$i(t) = 2\cos(100\,t - 36,87°)$$

$$v(t) = 200\cos 100\,t$$

$$v(t) = V_R\cos 100\,t + V_L\cos\left(100t + \frac{\pi}{2}\right)$$

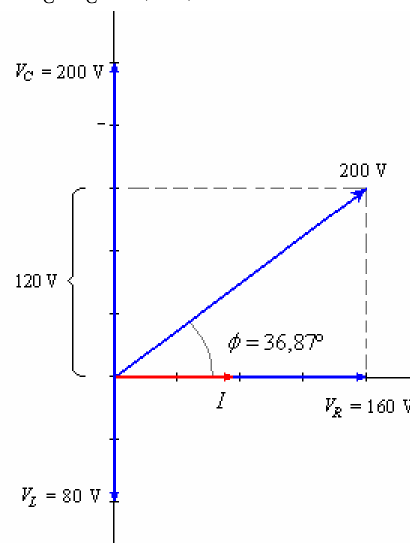
$$+ V_C\cos\left(100\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Con.

$$R = 80\Omega,\ X_L = \omega L = 100(0,40) = 40\Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100(100\times 10^{-6})} = 100\Omega$$

$V_R = I_R R = 2(80) = 160$ V.
$V_L = I_L X_L = 2(40) = 80$ V.
$V_C = I_C X_C = 2(100) = 200$ V.



Ejemplo 13. En el circuito de la antena de un receptor de radio sintonizado en una determinada estación, $R = 5\ \Omega$, $L = 5$ mH, y $C = 5$ pF.
a) Encontrar la frecuencia de la estación.

b) Si la diferencia de potencial aplicada al circuito es 5x10^{-4} V, encontrar la corriente que fluye.

Solución.

a) $f_R = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$= \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(5\times10^{-3})(5\times10^{-12})}}$

= 1006 kHz

b) En resonancia, $X_L = X_C$ y

$Z = R.$

Luego

$I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{5\times10^{-4}}{5}$

= 0,1 mA.

Ejemplo 14. En el circuito de la antena del problema anterior, la inductancia es fija pero la capacidad del condensador es variable.. ¿Cuál debe ser la capacidad para recibir una señal de radio de 800 kHz?

Solución.

$C = \dfrac{1}{(2\pi\ f)^2 L} = \dfrac{1}{2\pi(800\times10^3)(5\times10^{-3})}$

= 7,9 x 10^{-12} F = 7,9 pF

Ejemplo 14. En un circuito de corriente alterna en serie $R = 20\Omega$, $X_L = 10\Omega$, y $X_C = 25\Omega$.

Cuando la frecuencia es 400 Hz.

a) Encontrar la impedancia del circuito.

b) Encontrar el ángulo de fase.

c) ¿Es la frecuencia de la resonancia del circuito mayor o menor de 400 Hz?

d) Encuentre la frecuencia de resonancia.

Solución.

a) $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

$= \sqrt{20^2 + (10-25)^2} = 25\Omega$

b) $\tan\phi = \dfrac{X_L - X_C}{R} = \dfrac{10-25}{20}$

= - 0,75

$\Rightarrow \phi = -37^\circ$

Un ángulo negativo de la fase significa que el voltaje se retrasa de la corriente.

c) En la resonancia $X_L = X_C$. A 400 Hz, $X_L < X_C$, así que la frecuencia se debe cambiar de tal manera en cuanto aumente X_L, disminuya X_C. Como $X_L = 2\pi\ fL$ y $X_C = \dfrac{1}{2\pi\ fC}$, está claro que el aumento de la frecuencia tendrá este efecto. Por lo tanto la frecuencia de la resonancia debe ser mayor de 400 Hz.

d) Siendo $X_L = 10\Omega$ y $X_C = 25\Omega$,

Cuando f = 400 Hz,

$L = \dfrac{X_L}{2\pi\ f} = \dfrac{10}{2\pi(400)}$

= 4 x 10^{-3} H.

$C = \dfrac{1}{2\pi\ fX_C} = \dfrac{1}{2\pi(400)(25)}$

= 1,6 x 10^{-5} F.

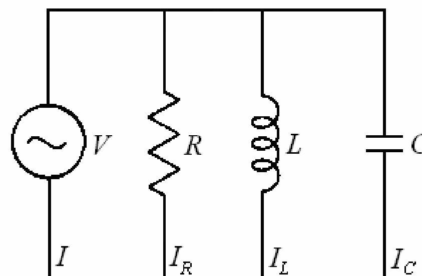
De aquí

$f_R = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(4\times10^{-3})(1,6\times10^{-5})}}$

= 629 Hz,

CIRCUITO RLC EN PARALELO.

Ahora consideramos un circuito de corriente alterna que contenga resistencia, inductancia, y condensador en paralelo, como en figura siguiente.



El voltaje es igual para todos los elementos:

$v = V\text{sen}\omega t$

$v = V_R\text{sen}\omega t = V_L\text{sen}\omega t = V_C\text{sen}\omega t$

Cuando una resistencia, una inductancia, y un condensador se conectan en paralelo a través de una fuente de corriente alterna, el voltaje es igual a través de cada elemento de circuito:

$V = V_R = V_L = V_C$

En todo momento la corriente aplicada i es igual a la suma de las caídas de voltaje i_R, i_L, y i_C:

$i = i_R + i_L + i_C$

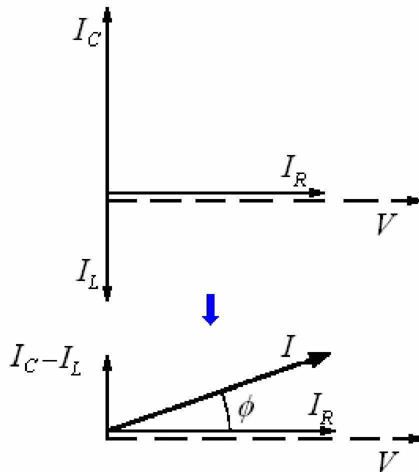
$i = I_R\text{sen}\omega t + I_L\text{sen}\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$+ I_C\text{sen}\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$i = I\text{sen}(\omega t + \phi)$

La corriente instantánea total es la suma de las corrientes instantáneas en cada rama. Aunque el I_R la corriente en la resistencia está en fase con V, la corriente I_C en el condensador se adelanta a V por 90° y la corriente I_L en la inductancia se retrasa a V por 90°. Para encontrar la corriente

total I, los fasores que representan a I_R, a I_C y a I_L se deben sumar vectorialmente, como en figura siguiente.



Las corrientes de las ramas en el circuito en paralelo están dadas por:

$$I_R = \frac{V}{R},\quad I_C = \frac{V}{X_C},\quad I_L = \frac{V}{X_c}$$

La suma de estas corrientes vectorialmente con la ayuda del teorema de Pitágoras da:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

El ángulo de fase ϕ entre la corriente y el voltaje está especificado por.

$$\cos\phi = \frac{I_R}{I}$$

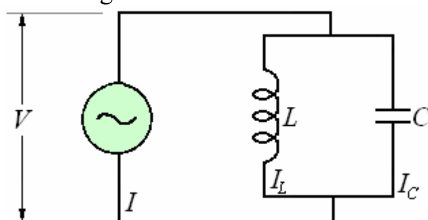
Si I_C es mayor que I_L la corriente adelanta al voltaje y el ángulo de la fase se considera positivo; si I_L es mayor que I_C, la corriente se retrasa al voltaje y el ángulo de la fase se considera negativo.

Impedancia del circuito paralelo *RLC*:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$$

RESONANCIA EN UN CIRCUITO EN PARALELO.

La figura muestra una inductancia y un condensador conectados en paralelo con una fuente de energía.

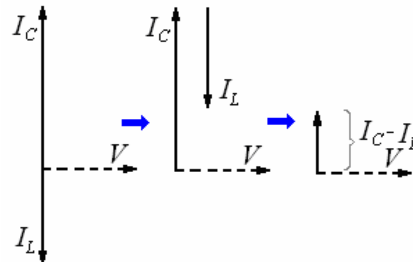


La corriente en la inductancia y en el condensador está desfasados 180º.

La corriente total I en el circuito es la diferencia entre corriente en *L* y en *C*.

$I = I_C - I_L$

La corriente que circula entre la inductancia y el condensador sin contribuir a I es conocida como corriente tanque y puede ser mayor de I.



En caso que $X_C = X_L$, las corrientes I_C e I_L sean también iguales. Puesto que I_C e I_L están 180° fuera de fase, la corriente total *I* = 0. Las corrientes en la inductancia y el condensador se cancelan. Esta situación se llama resonancia.

En un circuito en serie *RLC*, discutido anteriormente, la impedancia tiene su valor mínimo Z = *R* cuando $X_C = X_L$, una situación llamada también resonancia. La frecuencia para la cual $X_C = X_L$ es

$$\omega_R = 2\pi \; f_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y se llama frecuencia de resonancia.

En un circuito paralelo *RLC*, la resonancia corresponde a $X_C = X_L$, pero aquí la impedancia es un máximo con f_R.

Con f_R, las corrientes en la inductancia y el condensador son iguales magnitud pero con 180° fuera de fase, así que ninguna corriente pasa con la combinación. Así $I = I_R$ y Z = *R*. A frecuencias más altas y menores que f_R, I_C no es igual al I_L. y una cierta corriente puede pasar a través de la parte inductancia condensador del circuito, que reduce la impedancia *Z* a un valor menor que *R*. Por esto un circuito en serie puede ser utilizado como selector para favorecer una frecuencia particular, y un circuito paralelo con los mismos *L* y *C* se puede utilizar como un selector para discriminar contra la misma frecuencia.

Ejemplo 15. Las reactancias de una bobina y de un condensador conectados en paralelo y

alimentados por 15 V, 1000 Hz son, respectivamente, $X_L = 20\Omega$ y $X_C = 30\Omega$.
Encontrar
a) La corriente en cada componente,
b) La corriente total,
c) La impedancia del circuito, y
d) el ángulo de fase y la potencia total que se disipa en el circuito.

Solución.

a) $I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{15}{20} = 0{,}75$ A,

$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{15}{30} = 0{,}5$ A

b) $I = I_C - I_L = 0{,}5 - 0{,}75$
$= -0{,}25$ A

El signo menos significa que la corriente total se retrasa 90° detrás del voltaje.

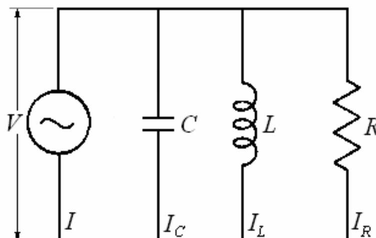
c) $Z = \frac{V}{I} = \frac{15}{0{,}25} = 60\Omega$

La impedancia no es mayor que solamente X_L o X_C, también es mayor que su suma aritmética.

d) Porque el ángulo de fase aquí es 90°, $\cos\phi = \cos 90° = 0$ y
la potencia del circuito es
$P = IV\cos\phi = 0$

Esto es una conclusión de la ausencia de resistencia en el circuito.

Ejemplo 16. Una resistencia de $10\,\Omega$, un condensador de 8 μF, y una inductancia de 2 mH están conectados en paralelo a través de una fuente de 10 V, 1000 Hz. Encuentre
a) la corriente en cada componente,
b) la corriente total en el circuito,
c) la impedancia del circuito, y
d) el ángulo de fase y la disipación de potencia total del circuito.



Solución.

a) $X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(10^3)(8\times10^{-6})}$
$= 20\Omega$

$X_L = 2\pi fL = 2\pi(10^3)(2\times10^{-3})$
$= 12{,}6\Omega$

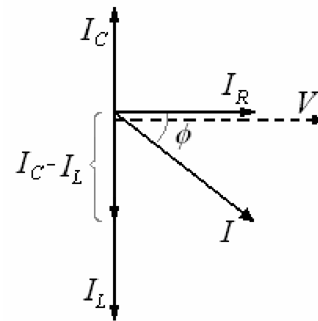
Luego:

$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{10}{20} = 0{,}5$ A,

$I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{10}{12{,}6} = 0{,}8$ A,

$I_R = \frac{V}{R} = \frac{10}{10} = 1{,}0$ A,

b)



El diagrama de fasores muestra cómo las corrientes deben ser Sumadas. Tenemos

$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$

$= \sqrt{1{,}0^2 + (0{,}5 - 0{,}8)^2}$

$= \sqrt{1{,}0^2 + (-0{,}3)^2}$

$= \sqrt{1{,}09} = 1{,}04$ A

c) $Z = \frac{V}{I} = \frac{10}{1{,}04}$
$= 9{,}6\Omega$

d) $\cos\phi = \frac{I_R}{I} = \frac{1{,}0}{1{,}04} = 0{,}962$

$\phi = -16°$

La corriente se retrasa del voltaje 16°.

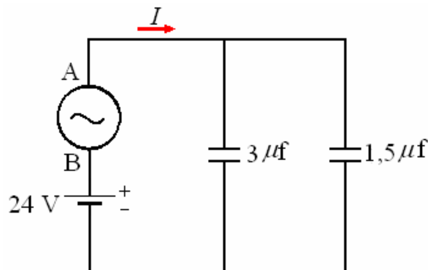
$P = IV\cos\phi = (10)(1{,}04)(0{,}962)$
$= 10$ W

Podemos también encontrar P de otra manera:

$P = I_R^2 R = (1{,}0)^2(10)$
$= 10$ W

Ejemplo 17. Un circuito se compone de dos condensadores, una batería de 24V y una tensión de corriente alterna conectados como se indica en la figura. La tensión de corriente alterna viene dada en V por $V_A - V_B = 20\cos 120\pi t$ (*t* en segundos):
a) Hallar la carga en cada condensador en función del tiempo *t*.
b) ¿Cuál es la intensidad *I* de corriente en el instante *t*?

c) ¿Cuál es la máxima energía $U_{máx}$ almacenada en los condensadores?
d) ¿Cuál es la energía mínima $U_{\min}$ almacenada en los condensadores?



Solución.
a) Condensador izquierdo
$Q_1 = 3\times10^{-6}(24+20\cos120\pi\, t)$ C
Condensador derecho
$Q_2 = 1,5\times10^{-6}(24+20\cos120\pi\, t)$ C

b) $I = -4,5\times10^{-6}\times20\times120\pi\,\text{sen}120\pi\, t$
$= 10\times800\pi\cos\left(120\pi\, t+\dfrac{\pi}{2}\right)$
$= 2,5\times10^{4}\cos\left(120\pi\, t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ A

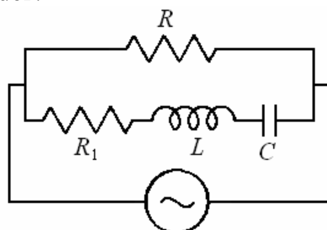
c) Con $\cos\left(120\pi\, t+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

$U_{máx} = \dfrac{1}{2}4,5\times10^{-6}\times44^2$
$= 4,356\times10^{-3}$ J

Con $\cos\left(120\pi\, t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$

$U_{\min} = \dfrac{1}{2}4,5\times10^{-6}\times4^2$
$= 3,6\times10^{-5}$ J

Ejemplo 18. En el circuito de la figura, el generador tiene una frecuencia tal que la corriente que atraviesa la resistencia *R* es mínima. ¿Qué corriente atraviesa entonces la bobina y el condensador?



Solución.
Si la intensidad que circula por *R* tiene que ser mínima, es porque la que circula por la impedancia de la otra rama es máxima, y para que esto ocurra, la propia impedancia tiene que ser mínima. Como ésta viene dada por:

$$Z = \sqrt{R_1^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

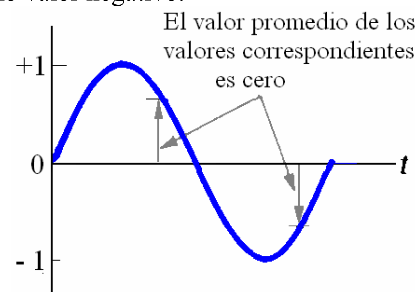
El valor mínimo se obtiene para aquella frecuencia que haga nula la reactancia:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

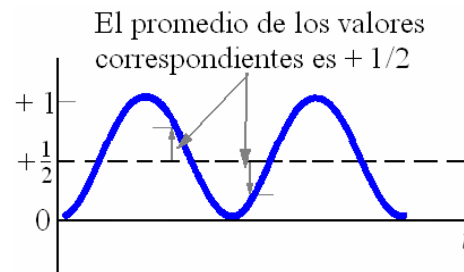
Con lo que $Z = R_1$.
Con ello el circuito queda reducido a dos resistencias en paralelo.
Si llamamos I_1 a la que circula por la impedancia (y, por tanto, por la bobina y por el condensador), vale:

$$I_1 = \frac{V}{I_1}.$$

VALORES MEDIOS Y EFICACES.
Dado que la función seno oscila simétricamente alrededor de cero, el valor promedio de una magnitud que varía sinusoidalmente, por ejemplo, la corriente o el voltaje, es cero. Esto sucede así porque para cualquier instante en que la función posee un valor positivo, existe otro instante dentro del mismo ciclo para el que la función toma el mismo valor negativo.



Sin embargo, el valor promedio del cuadrado de una magnitud que varía sinusoidalmente no es cero, puesto que el cuadrado de la función seno es siempre positivo y oscila simétricamente alrededor de + 1/2 .



Para cualquier instante en que $\text{sen}^2\omega t$ tiene un valor mayor de + 1/2, hay otro instante en el ciclo para el que su valor es menor que + 1/2 en la misma cantidad, de forma que el promedio de $\text{sen}^2\omega t$ es + 1/2.

Valor cuadrático medio. Para cualquier señal periódica $f(t)$, la señal al cuadrado es $f^2(t)$ y la señal "media al cuadrado" es la integral de $f^2(t)$ en el período entero, dividido por el período.
Para $f(t) = V_{máx}\,\mathrm{sen}\,\omega t$ es.

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_{máx}^2\ \mathrm{sen}^2\omega t dt}$$

$$= V_{máx}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)dt}$$

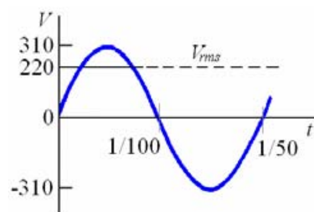
$$= V_{máx}\sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}\right)} = \frac{V_{máx}}{\sqrt{2}}$$

$$V_{rms} = \frac{V_{máx}}{\sqrt{2}}$$

De igual forma para la corriente:

$$I_{rms} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}}$$

Generalmente, cuando se especifica un valor de voltaje alterno o de corriente alterna, se trata del valor cuadrático medio (rms), y los voltímetros y amperímetros de corriente alterna están calibrados para indicar estos valores. Por ejemplo, el voltaje entre los dos terminales de un enchufe de su casa tiene un valor nominal de 220 V, y como se muestra en la figura abajo, este es el valor cuadrático medio del voltaje. La amplitud de este voltaje es $V_{máx}$ = 311 V.



POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA.
Estudiaremos ahora la rapidez con que se intercambian energía los diferentes componentes de un circuito *RLC* conectado a una fuente de corriente alterna, es decir, el ritmo con que la energía entra y sale de cada uno de los componentes del circuito. Generalmente, la frecuencia de la fuente es suficientemente alta como para que la dependencia temporal de estos intercambios de energía sea de interés, por lo que estaremos interesados principalmente en la potencia promedio, donde este promedio se realiza sobre un gran número de ciclos. Por simplicidad continuaremos suponiendo que toda la capacidad del circuito está contenida en el condensador, toda su inductancia en la inductancia y toda su resistencia en la resistencia.
Considerar los intercambios de energía entre los cuatro componentes del circuito:
1. La fuente convierte otro tipo de energía en energía electromagnética, y proporciona esta energía al circuito.
2. La resistencia disipa la energía electromagnética en forma de calor. La energía abandona el circuito a través del calentamiento de la resistencia, con una rapidez I^2R .
3. En un instante dado, la energía puede estar entrando o saliendo del condensador, dependiendo de si en ese momento el condensador se carga o se descarga. Puesto que la corriente oscila sinusoidalmente, la energía que entra en el condensador durante la parte del ciclo correspondiente a la carga del condensador, es igual a la energía que sale de él durante la parte de ciclo correspondiente a su descarga. En consecuencia, la potencia promedio en el condensador es cero.
4. Como ocurre con el condensador, la inductancia es un dispositivo de almacenamiento de energía. La potencia promedio en la inductancia es cero.
Considerando el circuito completo, la energía entra por la fuente y sale por la resistencia.

Potencia instantánea. Es la potencia en función del tiempo la que nos permite obtener la potencia en determinado momento.

$$P = vi = V\mathrm{sen}\,\omega t\ \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$P = vi = V_{máx}\mathrm{sen}\,\omega t I_{máx}\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$P = V_{máx}I_{máx}\mathrm{sen}\,\omega t(\mathrm{sen}\,\omega t\cos\phi + \cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\phi)$$
$$P = V_{máx}I_{máx}(\mathrm{sen}^2\omega t\cos\phi + \cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

Potencia media. Para obtener la potencia media realizamos la integración de la potencia instantánea en un ciclo, es decir durante un periodo (*T*):

$$P_m = V_{máx}I_{máx}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{sen}^2\omega t\cos\phi dt$$

$$+V_{máx}I_{máx}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\cos\phi dt$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}^2\omega t\cos\phi dt = \frac{1}{2}\cos\phi$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\cos\phi dt = 0$$

$$P_m = \frac{V_{máx}I_{máx}}{2}\cos\phi .$$

$\cos\phi$ es el **factor de potencia** del circuito.

Esto también podemos escribir como:

$$P_m = \left(\frac{V_{máx}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{I_{máx}}{\sqrt{2}}\right)\cos\phi = V_{rms}I_{rms}\cos\phi$$

También se les llama voltaje y corriente efectiva en vez de voltaje y corriente cuadrática media.

Ejemplo 19. Una corriente sinusoidal facilita 20 A eficaces bajo la tensión eficaz de 100 V a un circuito; el ángulo de fase de la corriente sobre la fuerza electromotriz es de 30º. Determínese la impedancia, la reactancia y la resistencia del circuito.

Solución.

La impedancia vale

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100}{20} = 5\Omega$$

La resistencia:

$$R = Z\cos\phi = 5\cos 30^o = 4,3\Omega$$

La reactancia:

$$X = Z\operatorname{sen}\phi = 5\operatorname{sen}30^o = 2,5\Omega$$

Ejemplo 20. Calcúlese el ángulo de fase de una corriente alterna cuya potencia viene dada por

$$P = \frac{V^2}{4R}$$

Solución.

$$P = \frac{V^2}{4R} = VI\cos\phi, \Rightarrow \cos\phi = \frac{V}{4RI}$$

Teniendo en cuenta

$$I = \frac{V}{R}, \text{ y } \cos\phi = \frac{R}{Z}:$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{Z}{4R} = \frac{R}{Z},$$

$$\Rightarrow Z = 2R \Rightarrow \frac{R}{Z} = \frac{1}{2}$$

Por tanto

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 60^o$$

Ejemplo 21. Mediante la red eléctrica ordinaria de 220 V (eficaces) a 50 Hz, se alimenta un circuito *RLC* con una $R = 20\ \Omega$, $L = 0,02$ H y $C = 20\ \mu$ F. Calcular:

a) la potencia media disipada por el circuito

b) deducir si se encuentra o no en resonancia.

Solución.

a) $X_L = L\omega = 2\pi fL = 2\pi\Omega$;

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{10^3}{2\pi}\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{20^2 + \left(2\pi - \frac{10^3}{2\pi}\right)^2} = 154,2\Omega$$

$$P = V_e L_e \cos\varphi = V_e\cdot\frac{V_e}{Z}\cdot\frac{R}{Z} = \left(\frac{V_e}{Z}\right)^2 R$$

$$= \left(\frac{220}{154'2}\right)^2 20 = 40,7 \text{ W}$$

b) Si cuando $X_L = X_C$ está en resonancia.

Podemos ver que no son iguales, por lo tanto no está en resonancia

Ejemplo 22. Los cinco parámetros que describen un circuito *RLC* conectado a una fuente de corriente alterna son *R*, *L C*, $V_{máx}$ y ω. Obtener la expresión de P_m en función de estos parámetros.

Solución.

Sustituyendo la expresión $I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z}$ en la

Ecuación $P_m = (I_{rms})^2 R$ obtenemos

$$P_m = \left(\frac{V_{rms}}{Z}\right)^2 R = \frac{V_{rms}^2 R}{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$

y sustituyendo ahora V_{rms}, X_C y X_L por sus correspondientes expresiones se obtiene

$$P_m = \frac{\frac{1}{2}V_{máx}^2 R}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

Observar que cuando la fuente tiene la frecuencia de resonancia, $\frac{1}{\omega C} = \omega L$, la potencia promedio es $\frac{1}{2}V_{máx}^2 R$.

Ejemplo 23. Una bobina de resistencia y de inductancia desconocidas conduce 4 A cuando está conectada con una fuente de 1 2 V de corriente continua y 3 A cuando está conectada a una fuente de 12 V de corriente alterna, 100 Hz.
a) Encuentre los valores de *R* y de *L*.
b) ¿Qué potencia se disipa cuando la bobina está conectada con la fuente de corriente continua?
c) ¿Cuándo está conectada con la fuente de corriente alterna?
Solución.
a) No hay reactancia inductiva cuando la corriente continua pasa a través de la bobina, así que su resistencia es

$$R = \frac{V_1}{I_1} = \frac{12}{4} = 3\Omega$$

Con f = 100 Hz la impedancia del circuito es

$$Z = \frac{V_2}{I_2} = \frac{12}{3} = 4\Omega$$

Y como $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ y $X_C = 0$, tenemos:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = 2{,}65\Omega$$

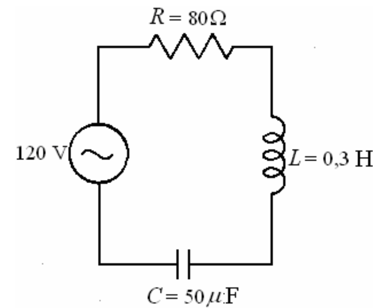
Luego la inductancia de la bobina es

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{2{,}65}{2\pi(100)} = 4{,}22 \text{ mH}$$

b) $P_1 = I_1^2 R = (4)^2(3) = 48$ W

c) $P_2 = I_2^2 R = (3)^2(3) = 27$ W

Ejemplo 24. Un condensador de 50 μF, una inductancia de 0,3 H, y una resistencia de 80 Ω están conectados en serie con una fuente de 120 V, 60 Hz.
a) ¿Cuál es la impedancia del circuito?
b) ¿Cuánta corriente fluye en el?
c) ¿Cuál es el factor de potencia?
d) ¿Cuánta potencia es disipada por el circuito?
e) ¿Cuál debe ser la mínima potencia en voltamperios de la fuente de energía?



Solución.
a) $X_L = 2\pi fL = 2\pi(60)(0{,}3)$
$= 113\Omega$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(60)(50\times 10^{-6})}$$
$= 53\Omega$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$= \sqrt{80^2 + (113 - 53)^2}$$
$= 100\Omega$

b) $I = \frac{V}{Z} = \frac{120}{100} = 1{,}2$ A

c) $\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{80}{100} = 0{,}8$
= 80%

d) La potencia real
$P = VI\cos\phi$
$= (120)(1{,}2)(0{,}8) = 115$ W
Alternativamente,
$P = I^2R = (1{,}2)^2(80) = 115$ W

e) La potencia aparente
$= VI = (120)(1{,}2) = 144$ VA

Ejemplo 25. a) Encuentre las diferencias de potenciales a través de la resistencia, de la inductancia, y del condensador en el circuito anterior
b) ¿Estos valores están de acuerdo con la diferencia potencial aplicada de 120 V?
Solución.
a) $V_R = IR = (1{,}2)(80)$
= 96 V.
$V_L = IX_L = (1{,}2)(113)$
= 136 V.
$V_C = IX_C = (1{,}2)(53)$
= 64 V.

c) La suma de estas diferencias potenciales es 296 V, más de dos veces los 120 V aplicados al circuito. Sin embargo, esto es una manera sin sentido de combinar las diferencias de potenciales puesto que no están en fase el

uno con el otro: V_L está 90° delante de V_R y V_C está 90º detrás de V_R. La manera correcta de encontrar la diferencia potencial total a través del circuito es como sigue:

d)

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$
$$= \sqrt{96^2 + (136 - 64)^2}$$
= 120 V.

Este resultado está de acuerdo con la diferencia potencial aplicada de 120 V. Notamos que el voltaje a través de una inductancia o de un condensador en un circuito de corriente alterna puede ser mayor que el voltaje aplicado al circuito.

Ejemplo 26. a) Encuentre la frecuencia de la resonancia f_R del circuito anterior.
b) ¿Qué corriente fluirá en el circuito si está conectado con una fuente de 20 V y frecuencia f_R?
c) ¿Cuál será el factor de potencia en este caso?
d) ¿Cuánta potencia será disipada por el circuito?
e) ¿Qué debe ser la potencia mínima en voltamperios de la fuente ahora?
Solución.

a) $$f_R = \frac{1}{2\pi\ f\sqrt{LC}}$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{(0,3)(50\times 10^{-6})}}$$
= 41 Hz.

b) Con la frecuencia de resonancia
$X_L = X_C$ y $Z = R$,
luego
$$I = \frac{V}{R} = \frac{120}{80} = 1,5 \text{ A}$$

c) $$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{R} = 1$$
= 100%

d) La potencia real = $P = VI\cos\phi$
$= (120)(1,5)(1)$
= 180 W

e) La potencia aparente = VI
= (1290)(15)
= 180 VA

Ejemplo 27. a) Encuentre la diferencia potencial a través de la resistencia, de la inductancia, y del condensador en el circuito anterior cuando está conectado con una fuente de la corriente alterna de 120 V con frecuencia igual a la frecuencia de resonancia del circuito, 41 Hz.
b) ¿Están estos valores de acuerdo con la diferencia potencial aplicada de 120 V?
Solución.
a) A la frecuencia de la resonancia de f_R = 41 Hz, las reactancias inductiva y capacitiva son, respectivamente.

$$X_L = 2\pi\ f_R L = 2\pi(41)(0,3)$$
$= 77\Omega$
$$X_C = \frac{1}{2\pi\ f_R C} = \frac{1}{2\pi(41)(50\times 10^{-6})}$$
$= 77\Omega$

Las diferentes diferencias de potencial son:
$V_R = IR = (1,5)(80)$ = 120 V.
$V_L = IX_L = (1,5)(77)$ = 116 V.
$V_C = IX_C = (1,5)(77)$ = 116 V.

b) La diferencia potencial total a través del circuito es
$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$
$$= \sqrt{120^2 + (116 - 116)^2}$$
= 120 V.

La cuál es igual a la diferencia de potencial aplicada.

Ejemplo 28. Un motor eléctrico 5 hp tiene una eficiencia de 80 por ciento y un factor inductivo de potencia de 75 por ciento.
a) ¿Cuál es la potencia mínima en kilovoltamperes que su fuente debe tener?
b) Un condensador está conectado en serie con el motor para levantar el factor de potencia a 100 por ciento. ¿Qué potencia mínima en kilovoltamperes debe tener la fuente ahora?
Solución.
a) La potencia requerida por el motor es
$$P = \frac{(5)(0,746\ \text{kW/ hp})}{0,8}$$
= 4,66 kW

Desde que $P = IV\cos\phi$, la fuente de energía debe tener la potencia mínima
$$IV = \frac{P}{\cos\phi} = \frac{4,66\text{kW}}{0,75}$$
= 6,22 kVA

b) Cuando $\cos\phi = 1$,
$IV = P$ = 4,66 kVA.

Ejemplo 29. ¿Una bobina conectada a 120 V, 25 Hz conduce una corriente de 0,5 A y disipa 50 W.
a) que cuál es su factor de potencia?
b) ¿Qué condensador se debe conectar en serie con la bobina para aumentar el factor de potencia 100 por ciento?
c) ¿Cuál sería la corriente en el circuito entonces?

d) ¿Qué potencia disiparía el circuito?
Solución.
a) Como $P = IV\cos\phi$,

$$\cos\phi = \frac{P}{IV} = \frac{50}{(0,5)(120)}$$
$= 0,833 = 83,3$ %

b) El factor de potencia será 100 por ciento en la resonancia, cuando $X_L = X_C$. El primer paso es encontrar X_L, que se puede hacer de

$$\tan\phi = \frac{(X_L - X_C)}{R}.$$

Aquí $X_C = 0$, y como $\cos\phi = 0,833$, $\phi = 34^o$ y $\tan\phi = 0,663$.
Siendo $P = I^2R$:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{50}{0,5^2} = 200\Omega$$

Luego $X_L = R\tan\phi + X_C$
$= (200)(0,663) + 0$
$= 133\Omega$

Éste también debe ser el valor de X_C cuando f = 25 Hz, luego

$$C = \frac{1}{2\pi\ fX_C} = \frac{1}{2\pi(25(133))}$$
$= 4,8 \times 10^{-5}$ f
$= 48\ \mu$F

c) En la resonancia $Z = R$, luego

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120}{200} = 0,6 \text{ A}$$

d) $P = I^2R = (0,6)^2(200)$
$= 72$ W

Ejemplo 30. Mediante la red alterna de 220 V y 50 Hz se quiere encender normalmente un foco de 50 V, 3,25 W, conectándole un condensador en serie. ¿Qué capacidad debe tener para ello?
Solución.
En las condiciones normales de funcionamiento el foco debe estar recorrido por una corriente:

$$I = \frac{W}{V} = \frac{3,25}{50} = 0,065 \text{ A}$$

Y su resistencia es:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{50}{0,065} = 769\Omega$$

Por lo tanto, la impedancia total del circuito y su reactancia capacitiva serán:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{220}{0,065} = 3385\Omega,$$

$$X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{3385^2 - 769^2}$$
$= 3296\Omega$

Luego el condensador necesario debe tener una capacidad de:

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{(100\pi)(3296)} = 0,966 \times 10^{-6} \text{ F}$$
$= 0,966\ \mu$F

Ejemplo 31. Se dispone de un generador de 44,4 V y 50 Hz del que se quiere obtener una corriente de 10 A y 313,9 W. Para ello se monta sobre sus bornes una autoinductancia.
Halle sus características.
Solución.
El factor de potencia es:

$$\cos\phi = \frac{P}{VI} = \frac{313,9}{(44,4)(10)} = 0,707$$

$\Rightarrow \phi = 45^o$,

Como $\tan\phi = \dfrac{X}{R}$, se tiene:

$I = \dfrac{X}{R}$, de donde resulta que la autoinducción necesaria ha de tener iguales su resistencia R y su reactancia X, es decir:
$R = \omega L$, por lo tanto

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2}R$$

De donde:

$$R = \frac{Z}{\sqrt{2}} = \frac{V/I}{\sqrt{2}} = \frac{44,4/10}{\sqrt{2}} = 3,14\Omega$$

Por último, la autoinductancia vale:

$$L = \frac{R}{\omega} = \frac{3,14}{100\pi} = 0,01 \text{ H}$$

Ejemplo 32. Un circuito serie *RLC* está formado por una bobina de coeficiente de autoinducción L= 1 H y resistencia óhmica interna de 10 Ω, un condensador de capacidad C = 5 μF, y una resistencia de 90 Ω. La frecuencia de la corriente es de 100 Hz. Si el circuito se conecta a un generador de corriente alterna de 220 V de tensión máxima, calcular:

a) la potencia disipada por el circuito

b) la expresión de la intensidad instantánea

Solución.

a) $X_L = L\omega = 1(2\pi 100) = 628,3\Omega$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{5\times10^{-6}(2\pi 100)} = 318,3\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

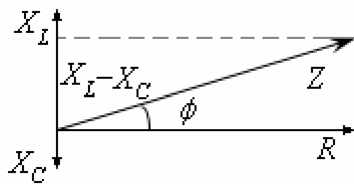
$$= \sqrt{90^2 + (628,3 - 318,3)^2} = 225,7\Omega$$

$$V_e = \frac{220}{\sqrt{2}} = 155,6 \text{ V};$$

$$P = V_e I_e \cos\varphi = V_e \frac{V_e}{Z}\frac{R}{Z} = \left(\frac{V_e}{Z}\right)^2 R$$

$$= \left(\frac{155,6}{225,7}\right)^2 90 = 22,8 \text{ W}$$

b)



$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = 3,1 \;;$$

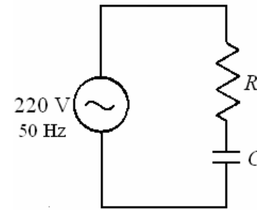
$\varphi = \arctan 3,1 = 72°12' = 1,26$ rad.

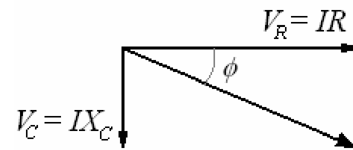
$$\begin{bmatrix} V(t) = 220\text{sen}200\pi t \\ I(t) = 0,68\text{sen}(200\pi t - 1,26) \end{bmatrix}$$

o $$\begin{bmatrix} V(t) = 220\text{sen}(200\pi t + 1,26) \\ I(t) = 220\text{sen}200\pi t \end{bmatrix}$$

Ejemplo 33. Un tubo fluorescente está instalado en una línea de 220V y 50Hz y consume 40W con un factor de potencia de 0,8. Determinar la capacidad del condensador *C* que tenemos que conectar:
a) En serie.
b) En paralelo.
c) Para que el factor de potencia sea 1. ¿Cuál sería, en cada caso, la potencia media P_m que consume el nuevo circuito?.

Solución.
a) En serie:





$\cos\phi = 0,8 \Rightarrow \phi = 36,87°$

$$\tan 36,87° = 0,75 = \frac{IX_C}{IR} = \frac{1}{\omega CR} = \frac{1}{100\pi CR}$$

$$\Rightarrow CR = \frac{1}{75\pi}$$

Por otra parte $P = VI\cos\phi \Rightarrow$

$$40 = 220I(0,8) \Rightarrow I = \frac{40}{220(0,8)} = \frac{1}{4,4}$$

$$V = I\sqrt{R^2 + X_C^2} \Rightarrow$$

$$220 = \frac{1}{4,4}\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{100\pi RC}\right)^2}$$

$$R^2 + \left(\frac{1}{100\pi RC}\right)^2 = 968^2$$

$$R^2 + \left(\frac{75}{100}\right)^2 = 968^2 \Rightarrow R = 967$$

El condensador es:

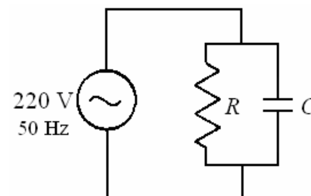
$$C = \frac{1}{75\pi R} = \frac{1}{75\pi(967)} = 4,39 \times 10^{-6} \text{ F}$$

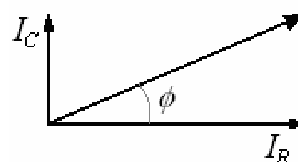
$= 4,39\mu$F

La potencia es:

$$P = VI\cos\phi = 220\left(\frac{1}{4,4}\right)0,8 = 40 \text{ W}$$

b) En paralelo:





$\cos\phi = 0,8 \Rightarrow \phi = 36,87°$

$$\tan 36{,}87^\circ = 0{,}75 = \frac{V_C}{V_R}$$

$$= \frac{I_C}{I_R \omega CR} = \frac{1}{100\pi CR}$$

$$\Rightarrow\ CR = \frac{1}{75\pi}\ \Rightarrow\ R = \frac{1}{75\pi C}$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{\left(\frac{220}{R}\right)^2 + \left(\frac{220}{X_C}\right)^2}$$

$$= 220\sqrt{\frac{1}{R^2} + (100\pi C)^2}$$

Reemplazando el valor de R

$$I = 220\sqrt{(75\pi C)^2 + (100\pi C)^2}$$

$$= 220(25\pi)\sqrt{(3C)^2 + (4C)^2}$$

$$= 220(25\pi)(5C) = 86350C$$

Por otra parte $P_m = VI\cos\phi$

$$\Rightarrow\ 40 = 220(86350C)(0{,}8)$$

El condensador es:

$$C = \frac{40}{15197600} = 2{,}63 \text{ x } 10^{-6}\text{ F}$$

$$= 2{,}63\ \mu\text{F}$$

c) Para que el factor de potencia sea 1.

En serie.

$$\cos\phi = 1\ \Rightarrow\ \phi = 0^\circ$$

$$\tan 0^\circ = 0 = \frac{IX_C}{IR}$$

$$\Rightarrow\ X_C = 0\ CR = \frac{1}{75\pi}$$

Solamente hay resistencia

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{967}$$

$$= 0{,}297\Omega$$

Por otra parte $P_m = VI\cos\phi$

$$\Rightarrow\ P_m = 220(0{,}297) = 50{,}05\text{ W}$$

En paralelo.

El resultado es igual que en el caso anterior.

Ejemplo 34. Dentro de un campo magnético de 1800 gauss gira una bobina de 1700 espiras de 25 cm^2 a razón de 600 rpm. Si la resistencia de su bobinado es de 0,7 Ω y sus bornes se conectan a una autoinducción de 0,02 H y 2,5 Ω, ¿Cuál es la potencia de la corriente que la recorre?

Solución.

$$\omega = 2\pi\left(\frac{600}{60}\right) = 20\pi \text{ rad/s.}$$

El flujo magnético que atraviesa la bobina vale:

$\Phi = nBA\,\text{sen}\,\omega t$,

Y, por lo tanto, la fuerza electromotriz instantánea es:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = nBA\cos\omega t$$

Con lo que la fuerza electromotriz eficaz es:

$$V = \frac{nBA\omega}{\sqrt{2}} = \frac{1700(0{,}18)(25\times10^{-4})(20\pi)}{\sqrt{2}}$$

= 34 V.

La reactancia inductiva del circuito es:

$$X_L = \omega L = 20\pi(0{,}02) = 1{,}257\Omega$$

Y como la resistencia vale

$R = 0{,}7 + 2{,}5 = 3{,}2\Omega$, la impedancia es:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3{,}2^2 + 1{,}257^2}$$

$$= 3{,}44\Omega$$

Y la intensidad:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{34}{3{,}44} = 9{,}88\text{ A.}$$

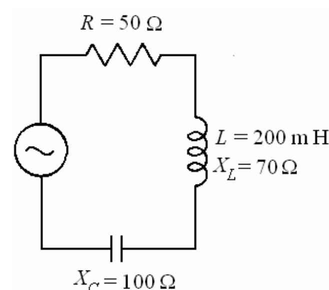
El factor de potencia es:

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{3{,}2}{3{,}44} = 0{,}93$$

y la potencia:

$$P = VI\cos\phi = (34)(9{,}88)0{,}93 = 312\text{ W.}$$

Ejemplo 35. La figura muestra un circuito CA en serie. La inductancia tiene una reactancia de 70 ohmios y una inductancia de 200 mH. Una resistencia de 50 ohmios y un condensador cuya reactancia es 100 ohmios, están también en el circuito. La corriente rms en el circuito es 1,2 A.



a) ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente?
b) ¿Cuál es la capacidad del condensador?
c) ¿Cuál es el ángulo de fase del circuito?
d) ¿Cuál es la amplitud del voltaje a través del condensador?
e) ¿Cuál es la energía magnética máxima en la inductancia?

Solución.

a) $V_{rms} = I_{rms}\sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$

$= 1{,}2\sqrt{50^2 + (100-70)^2}$
$= 1{,}2(58{,}31) = 69{,}87$ V

b) $X_L = \omega L \Rightarrow \omega = \frac{X_L}{L} = \frac{70}{0{,}2} = 350\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow$

$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{350(100)} = 28\times 10^{-6}$ F

c) $\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{70-100}{50} = \frac{-30}{50}$

$\Rightarrow \phi = -30{,}96^\circ$

d) $V_C = IX_C = (1{,}2\sqrt{2})(100) = 169{,}2$ V

e) $U = \frac{1}{2}LI_{rms}^2 = \frac{1}{2}(200\times 10^{-3})(1{,}2)^2$
$= 0{,}144$ J

Ejemplo 36. Cuando se suspende una masa de un resorte y se sumerge en líquido puede experimentar oscilaciones armónicas amortiguadas forzadas. El comportamiento es análogo al de un circuito RLC en serie al cual se aplica una fuerza electromotriz sinusoidal. ¿A cuál de las siguientes energías cinéticas es análoga la energía de la masa?
A) La energía disipada como calor en la resistencia.
B) La energía almacenada en el condensador.
C) La energía magnética almacenada en la inductancia.
D) La energía total proporcionada por la fuente de la fuerza electromotriz.
E) La corriente en el circuito.
Solución.
La ecuación diferencial cuando se suspende una masa de un resorte y se sumerge en líquido puede experimentar oscilaciones armónicas amortiguadas forzadas es

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega' t$$

Para un circuito RLC en serie al cual se aplica una fuerza electromotriz sinusoidal es

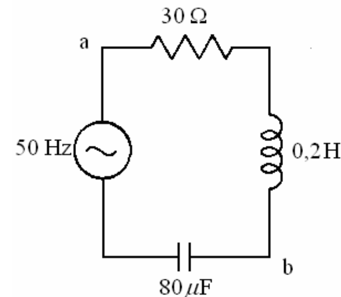
$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = \frac{\varepsilon_0}{L}\operatorname{sen}\omega t$$

La energía almacenada en la masa es $\frac{1}{2}mv^2$

La energía almacenada en la inductancia es $\frac{1}{2}LI^2$

Por observación la energía cinética de la masa es análoga a la energía magnética almacenada en la inductancia (C).

Ejemplo 37. Un circuito en serie tiene una fuente de CA de 50 hertzios, una resistencia de 30 ohmios, una inductancia de 0,20 H, y un condensador de 80 μF, como se muestra en la figura. La corriente rms en el circuito es 2,5 A.



a) ¿Cuál es la amplitud del voltaje de la fuente?
b) ¿Cuál es el factor de potencia del circuito?
c) ¿Cuál es el voltaje rms a través de los puntos a y b en el circuito?
d) La frecuencia de la fuente se cambia de modo que la reactancia capacitiva sea igual a dos veces la reactancia inductiva. Se conservan los elementos de circuito originales. ¿Cuál es la nueva frecuencia de la fuente?
e) Si se cambia la capacidad de modo que el circuito esté en resonancia. Se conservan la resistencia y la inductancia originales. El voltaje y la frecuencia de la fuente se mantienen en los valores originales. ¿Cuál es la nueva capacidad?
Solución.

a) $V = I\sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$

$I = 2{,}5\sqrt{2} = 3{,}52$ A, $R = 30\Omega$

$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(100\pi)(80\times 10^{-6})}$
$= 39{,}8\Omega$,

$X_L = \omega L = (100\pi)(0{,}2)$
$= 62{,}8\Omega$

$V = 3{,}52\sqrt{30^2 + (39{,}8 - 62{,}8)^2}$
$= 133{,}06$ V

b) $\tan\phi = \frac{X_C - X_L}{R} = \frac{39{,}8 - 62{,}8}{30}$
$= -0{,}77$

$\Rightarrow \phi = -37{,}5^\circ$

$\cos\phi = \cos -37{,}5^\circ = 0{,}79$

c) $V_{(ab)rms} = I_{rms}\sqrt{R^2 + X_L^2}$
$= (2{,}5)\sqrt{30^2 + 62{,}8^2}$
$= 174$ V

d) $X'_C = 2X'_L \Rightarrow \frac{1}{\omega' C} = 2\omega' L$

$\Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{1}{2LC}} = \sqrt{\frac{1}{2(0,2)(80\times10^{-6})}}$

$= 177 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

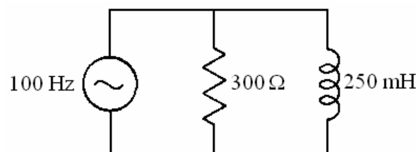
$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{177}{2\pi} = 28{,}15 \text{ Hz}$

e) Para resonancia: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC'}}$

$\Rightarrow C' = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(100\pi)^2(0{,}20)}$

$= 50{,}7\times10^{-6} F$

Ejemplo 38. Una resistencia de 300 ohmios y una inductancia de 250 mH están conectadas en paralelo a través de una fuente de la CA de 100 hertzios, como se muestra en la figura. La corriente rms a través de la inductancia es 0,50A.



a) ¿Cuál es la corriente rms a través de la resistencia?
b) ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente?
c) ¿Cuál es la impedancia del circuito?
d) ¿Cuál es el ángulo por cuál el voltaje se adelanta a la corriente (negativa si se retrasa)?
e) para que el circuito esté en resonancia, se conecta un condensador en paralelo a través de la fuente de la CA. ¿Cuál es la capacidad de este condensador?

Solución.

a) $I_{Rrms} = \frac{V_{rms}}{R} = \frac{78{,}5}{300} = 0{,}26 \text{ A}$

b) $I_{Lrms} = \frac{V_{rms}}{X_L}$

$\Rightarrow V_{rms} = I_{Lrms} X_L = (0{,}5)(200\pi)(0{,}250)$

$= 78{,}5 \text{ V}$

c) $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}$

$= \sqrt{\frac{1}{300^2} + \frac{1}{[(200\pi)0{,}25]^2}}$

$= 139{,}12\Omega$

d) $\cos\phi = \frac{I_R}{I} = \frac{I_R}{\sqrt{I_R^2 + I_L^2}}$

$= \frac{0{,}26}{\sqrt{0{,}26^2 + 0{,}5^2}} = 0{,}46$

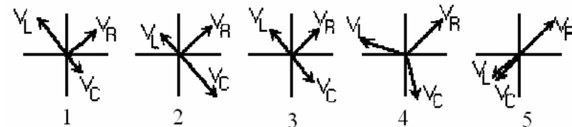
$\Rightarrow \phi = 62°$

e) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(200\pi)^2(0{,}25)}$

$= 10{,}14\times10^{-6} \text{F}$

Ejemplo 39. ¿Cuál de los diagramas de fasores representa un circuito RLC en serie en resonancia?



Solución.

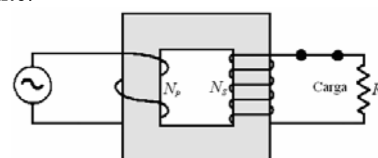
Es el diagrama 3 porque V_L y V_C tienen la misma magnitud y son opuestos.

TRANSFORMADOR IDEAL.

Con anterioridad se advirtió que al variar la corriente en una espira de a1a, inducirá una corriente en una espira cercana. La corriente inducida se origina en la variación del campo magnético asociado con la variación en la corriente cuando es alterna, presenta una ventaja distinta de la corriente continua debido al efecto inductivo de la corriente que en forma constante varia en magnitud y dirección. La aplicación más común de este principio la ofrece el transformador, un dispositivo que incrementa o disminuye el voltaje en un circuito de corriente alterna.



Un transformador sencillo se muestra en la figura siguiente.



Hay tres partes esenciales:

1) Una bobina primaria conectada a una fuente de Corriente alterna.
2) Una secundaria y
3) Un núcleo laminado de hierro dulce.
Conforme se aplica una corriente alterna en el devanado primario, las líneas del flujo magnético varían a través del núcleo de hierro de tal modo que se induce una corriente a1terna en el devanado secundario.
El flujo magnético que varía constantemente se establece en todo el núcleo del transformador y pasa a través de las bobinas del primario y secundario. La fuerza electromotriz ε_P , inducida en la bobina del primario es

$$\varepsilon_P = -n_P \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

donde n_P = número de vueltas en el primario

$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ = rapidez con que cambia el flujo magnético.

En forma análoga la fuerza electromotriz ε_S inducida en la bobina del secundario es

$$\varepsilon_S = -n_S \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

donde n_S es el número de vueltas en el secundario. Puesto que el mismo cambio de flujo se produce con la misma rapidez a través de cada bobina, de las dos ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_S} = \frac{n_P}{n_S}$$

$$\frac{\text{voltaje en el primario}}{\text{voltaje en el secundario}} = \frac{\text{número de vueltas en el primario}}{\text{número de vueltas en el secundario}}$$

El voltaje inducido está en proporción directa con el número de vueltas. Si se varía la razón de las vueltas del secundario N, respecto a las vueltas del primario N, un voltaje de entrada (primario) puede suministrar cualquier voltaje de salida deseado (secundario). Por ejemplo, si hay 40 veces más vueltas en la bobina del secundario, un voltaje de entrada de 120V incrementará el voltaje de salida en la bobina del secundario a 40 x 120 V = 4800 V. El transformador que produce un voltaje de salida mayor se llama transformador elevador. Es posible construir un transformador reductor si el número de vueltas en el primario es mayor que el número de vueltas en el secundario. Si se emplea un transformador reductor el resultado que se obtiene es un voltaje de salida menor.
El rendimiento de un transformador se define como la razón de la potencia de salida respecto a la potencia de entrada. Si se recuerda que la potencia eléctrica es igual al producto del voltaje y la corriente, el rendimiento E de un transformador puede escribirse como

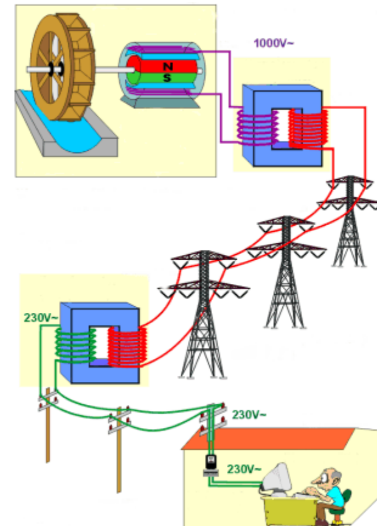
$$E = \frac{\text{Potencia de entrada}}{\text{Potencia de salida}} = \frac{\varepsilon_S I_S}{\varepsilon_P I_P},$$

donde I_P e I_S son las corrientes en las bobinas del primario y secundario, respectivamente. La mayor parte de los transformadores eléctricos son diseñados cuidadosamente para obtener rendimientos muy altos, generalmente por arriba 90070.
Es importante reconocer que no se obtiene una ganancia de potencia como resultado de la acción de un transformador. Cuando el voltaje se eleva, la corriente debe ser reducida para que el producto εI no se incremente. Para ver esto claramente supóngase que cierto transformador tiene un rendimiento del 100 % , para este transformador ideal, la ecuación $E = \frac{\varepsilon_S I_S}{\varepsilon_P I_P}$ se reduce a

$$\varepsilon_S I_S = \varepsilon_P I_P \quad \text{o} \quad \frac{I_P}{I_S} = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_P}$$

Esta ecuación demuestra claramente una relación inversa entre la corriente y el voltaje inducido.

Ejemplo 40. Un generador de corriente alterna que suministra 20 A a 6000 V se conecta aun transformador. ¿Cuál es la corriente de salida a 120000 V si el rendimiento del transformador 100%?



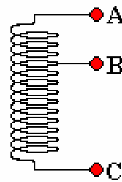
Solución.

De $\frac{I_P}{I_S} = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_P} \Rightarrow I_S = \frac{\varepsilon_P I_P}{\varepsilon_S} = \frac{(6000)(20)}{(120000)}$
= 1 A

Nótese que en el ejemplo precedente la corriente se redujo a 1 A en tanto que el voltaje aumentó 20 veces. Ya que las pérdidas de calor en las líneas de transmisión varían directamente con el cuadrado de la corriente $(I^2 R)$, esto significa que la potencia eléctrica puede transmitirse a grandes distancias sin que haya pérdidas

significativas. Cuando la potencia eléctrica llega a su destino se utilizan transformadores reductores para suministrar la corriente deseada a voltajes menores.

Ejemplo 41. En un autotransformador se utiliza una sola bobina para el primario y secundario. En la bobina mostrada aquí hay tres puntos unidos a una bobina envuelta en un núcleo de hierro. Dos puntos cualesquiera se pueden utilizar como el primario, y dos cualesquiera se pueden utilizar como el secundario. Entre A y B hay 300 vueltas, y entre B y C hay 900 vueltas. ¿Qué voltajes de salida son posibles para un voltaje de entrada primario de 120 V_{AC}?



Solución.
Los cocientes posibles de las vueltas son 300:900, 300:1200, 900:1200, y los recíprocos éstos.
Por lo tanto los cocientes posibles de las vueltas son 1:3, 1:4, 3:4, 3:1, 4:1, y 4:3. 1:1 también es posible.
Por lo tanto los voltajes secundarios posibles son 30, 40, 90, 120, 160, 360, y 480 V_{AC}.

Ejemplo 42. Derive la relación de $\frac{n_1}{n_2}$ para la transferencia máxima de potencia.
Solución.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ y } \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

Porque $Z_1 = \frac{V_1}{I_1}$ y $Z_2 = \frac{V_2}{I_2}$, la relación de impedancias es:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{V_1 I_2}{V_2 I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

Por lo tanto la relación de las vueltas necesarias para emparejar las impedancias es

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

Ejemplo 43. Un altoparlante cuya bobina de la voz tiene una impedancia de 6 Ω debe ser utilizado con un amplificador cuya impedancia de carga sea 7350 Ω. Encuentre la relación de vueltas en un transformador que empareje estas impedancias.
Solución.
Utilicemos los subíndices **1** para el amplificador y **2** para la bobina de la voz. Para la transferencia máxima de potencia.

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{7350}{6}} = \sqrt{1225} = 35$$

Así la relación de vueltas es 35:1, y la bobina del transformador conectada con el amplificador debe tener 35 veces tantas vueltas como la bobina conectada con la bobina de la voz.

Ejemplo 44. Un transformador de baja recibe en su circuito primario una corriente alterna con una intensidad eficaz de 10 A, bajo una tensión de 500 V. La relación de transformación es 5 y además de él hay una pérdida de energía del 10 %. Calcúlese la intensidad eficaz de corriente que se produce en el secundario en régimen normal.
Solución.
La tensión del secundario será:

$$V_S = \frac{500}{5} = 100 \text{ V.}$$

Teniendo en cuenta las pérdidas de potencia:

$$P_P(0{,}9) = P_S \Rightarrow V_P I_P (0{,}9) = V_S I_S$$

$$\Rightarrow I_S = \frac{V_P I_P (0{,}9)}{V_S}$$

$$I_S = \frac{(500)(10)(0{,}9)}{(100)} = 45 \text{ A.}$$

Ejemplo 45. Un transformador reductor ha de alimentar una instalación de 2500 focos de 125 V, 0,5 A, tomando la corriente de una red de alta de 12500 V. ¿Cuántas espiras han de tener las dos bobinas del transformador, si en el primario precisa, por lo menos, de una espira por cada 0,3 mA, y el rendimiento del transformador resulta ser del 93,3 %?
Solución.
La potencia del secundario es:

$$P_S = nV_S I_S = 2500(125)(0{,}5)$$
$$= 1{,}563 \text{ x } 10^5 \text{ W}$$

y, por tanto, la del primario debe ser:

$$P_P = \frac{P_S}{0{,}933} = \frac{1{,}563\times 10^5}{0{,}933}$$
$$= 1{,}675 \text{ x } 10^5 \text{ W}$$

Así, la corriente en el primario será:

$$I_P = \frac{P_S}{V_P} = \frac{1{,}675\times 10^5}{1{,}25\times 10^4} = 13{,}4 \text{ A.}$$

y, por tanto, el número de espiras precisas es de:

$$n_P = \frac{13{,}4}{0{,}3\times 10^{-3}} = 44659 \text{ espiras.}$$

Las del secundario son:

$$n_S = n_P \frac{V_S}{V_P} = 44659 \frac{125}{12500} = 447 \text{ espiras.}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. La frecuencia de la fuerza electromotriz alterna aplicada a un circuito en serie que tiene resistencia, inductancia, y condensador es duplicada. ¿Qué sucede a *R*, a X_L, y a X_C?
Respuesta.
R no cambia, X_L se duplica, y X_C se hace la mitad.

2. a) ¿Cuál es el valor mínimo el factor de potencia que un circuito puede tener? ¿Bajo qué circunstancias puede ocurrir esto?
b) ¿Cuál es el valor máximo el factor de potencia que puede tener? ¿Bajo qué circunstancias puede ocurrir esto?
Respuesta.
a) El valor mínimo es 0, que puede ocurrir solamente si *R* = O en un circuito en el cual el que X_L no sea igual a X_C.
b) El valor máximo es 1, que ocurre en la resonancia cuando $X_L = X_C$.

3. Un voltímetro a través de un circuito de corriente alterna lee 40 V, y un amperímetro en serie con el circuito lee 6 A.
a) ¿Cuál es la diferencia potencial máxima a través del circuito?
b) ¿Cuál es la corriente máxima en el circuito?
c) ¿qué otra información es necesaria para determinar la potencia en el circuito?
Respuesta.
a) 56,6, V, b) 8,5 A, c) Angulo de fase.

4. Encuentre la reactancia de una bobina de 10 mH cuando está en un circuito de 500 Hz.
Respuesta.31,4 Ω

5. La reactancia de una inductancia es 1000 Ω a 20 Hz. Encuentre su inductancia.
Respuesta. 0,796 H

6. Una corriente de 0,20 A atraviesa pasa por una inductancia de 0,15 h de resistencia insignificante que está conectada con una fuente 80 V de corriente alterna. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente?
Respuesta. 424 Hz

7. Encuentre la reactancia de un condensador de 5 μF a 10 Hz y a 10 kHz.
Respuesta. 3183 Ω; 3,183 Ω.

8. Un condensador tiene una reactancia de 200 Ω a 1000 Hz. ¿Cuál es su capacidad?
Respuesta. 0,796 μF

9. Un condensador de 5 μF está conectado con una fuerza electromotriz alterna de 6 kHz, y fluye una corriente de 2 A. Encuentre la magnitud de la fuerza electromotriz eficaz.
Respuesta. 10,6 V

10. Un condensador de 5 pF conduce 1 A cuando está conectado con una fuente de corriente alterna de 60 V. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente?
Respuesta. 531 Hz

11. Un condensador de 25 μ f está conectado en serie con un resistencia de 50 Ω, y a una diferencia potencial de 1 2 V, 60 Hz. Encuentre la corriente en el circuito y la potencia disipada en ella.
Respuesta. 0,102 A; 0,524 W

12. Un condensador está conectado en serie con una resistencia de 8 Ω, y la combinación se pone a través de una fuente de energía de 24 V, 1000 Hz. Fluye una corriente de 2 A. Encuentre
a) la capacidad del condensador,
b) el ángulo de la fase, y
c) la potencia disipada por el circuito.
Respuesta.
a) 17,8 μF, b) - 48°, c) 32 W

13. Una inductancia de 0,l H, 30Ω está conectada con una fuente de 50V, 100Hz. Encuentre la corriente en la inductancia y la potencia disipada en ella.
Respuesta. 0,72 A; 15,6 W

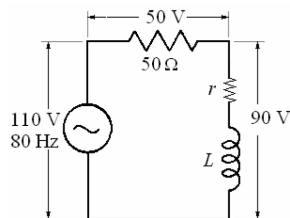
14. La corriente en un resistencia es 1 A cuando está conectada con una fuente de 50 V, 100 Hz.
a) ¿Qué reactancia inductiva se requiere para reducir la corriente a 0,5 A? ¿Qué valor de *L* logrará esto?
b) ¿Qué reactancia capacitiva se requiere para reducir la corriente a 0,5 A? ¿Qué valor de *C* logrará esto?
c) ¿Cuál será la corriente si la inductancia y el condensador antedichos se ponen en serie con la resistencia?
Respuesta.
a) 86,6 Ω; 137,8 mH b) 86,6 Ω; 18,4 μF e) 1 A

15. Una resistencia pura, un condensador puro, y una inductancia pura están conectados en serie a través de una fuente de corriente alterna. ¿Un voltímetro de corriente alterna colocado a través de cada uno de estos elementos del circuito alternadamente lee 10, 20, y 30 V. ¿Cuál es la diferencia potencial de la fuente?
Respuesta. 14 V

16. Un circuito inductivo con un factor de potencia de 80 por ciento consume 750 W de energía. ¿Cuál es la mínima potencia en voltamperios de la fuente?
Respuesta. 938 VA

17. Se conectan en serie a una tensión de corriente alterna de 60Hz una resistencia *R* y una bobina de 1,4 H. La tensión eficaz de la resistencia es 30 V y en la bobina 40 V.
a) ¿Cuánto vale la resistencia?
b) ¿Cuál es la tensión eficaz *V* entre la entrada y la salida del montaje?
Respuesta.
a) $R = 396\Omega$, b) $V = 50$ V

18. Dado el circuito de la figura:
a) Hallar la perdida de potencia en la bobina.
b) Hallar la resistencia *r* de la bobina.
c) Hallar la inductancia *L*.

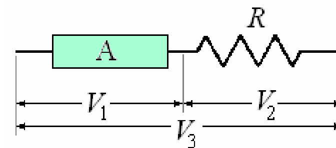


Respuesta.
a) 15 W, b) $r = 15\Omega$, c) $L = 0{,}235$ h

19. Una carga inductiva disipa 75 W de energía cuando conduce una corriente de 1,0 A de una línea de energía de 120 V, 60 Hz.
a) ¿Cuál es el factor de potencia?
b) ¿Qué condensador se debe conectar en serie en el circuito para aumentar el factor de potencia a 100 por ciento?
c) ¿Cuál sería la corriente?
d) ¿Qué potencia disiparía el circuito?
Respuesta. a) 0,625 b) 28,6 μF c) 1,6 A d) 192 W

20. Un circuito que consiste en un condensador en serie con una resistencia de 50 Ω conduce 4 A de una fuente de 250 V, 200 Hz.
a) ¿Qué potencia se disipa?
b) ¿Cuál es el factor de potencia?
c) ¿Qué inductancia se debe conectar en serie en el circuito para aumentar el factor de la potencia a 100 por ciento?
d) ¿Cuál sería la corriente?
e) ¿Qué potencia disiparía el circuito?
Respuesta.
a) 800 W b) 80 % c) 30 mH d) 5 A e) 1250 W

21. Calcular la potencia *W* que consume el aparato A en función de las tensiones eficaces V_1, V_2, V_3 y del valor de la resistencia *R*.



Respuesta.

$$W = \frac{V_3^2 + V_1^2 + V_2^2}{2R}$$

22. En un circuito en serie $R = 100\ \Omega$, $X_L = 120\ \Omega$, y $X_C = 60\ \Omega$ cuando está conectado con una fuente de la corriente alterna de 80 V. Encuentre
a) la corriente en el circuito,
b) el ángulo de la fase, y
c) la corriente si la frecuencia de la fuente de energía se cambiara a la frecuencia de resonancia del circuito.
Respuesta.
a) 0,69 A b) 31° c) 0,80 A

23. Un condensador de 10 μf, una inductancia de 10 mH, y una resistencia de 10 Ω se conectan en serie con una fuente de 45 V, 400 Hz. Hallar
a) La impedancia del circuito.
b) La corriente,
c) La potencia que disipa.
d) La mínima potencia en voltamperios de la fuente.
Respuesta. a) 18 Ω, b) 2,5 A, c) 62,5 W, d) 112,5 VA

24. a) Encuentre la frecuencia de resonancia f_R del circuito de problema anterior.
b) ¿Qué corriente fluirá en el circuito si está conectada con una fuente de energía 45 V y que frecuencia sea f_R?
c) ¿Qué potencia será disipada por el circuito?
d) La mínima potencia en voltamperios de la fuente.
Respuesta.
a) 503 Hz b) 4,5 A. c) 202,5 W d) 202,5 VA

25. Un condensador de 60 μF, una inductancia de 0,3 H, y una resistencia de 50 Ω se conectan

en serie con una fuente de 120 V, 60 Hz. Encuentre
a) La impedancia del circuito,
b) La corriente en ella,
c) La potencia que se disipa, y
d) La mínima potencia en voltamperios de la fuente.
Respuesta.
a) 85 Ω b) 1,41 A c) 99,4 W d) 169 VA

26. a) Encuentre la frecuencia de resonancia f_R del circuito del problema anterior.
b) ¿Qué corriente fluirá en el circuito si está conectada con una fuente de 20 V cuya frecuencia sea f_R?
c) La potencia que se disipa, y
d) La mínima potencia en voltamperios de la fuente.
Respuesta.
a) 37,5 Hz b) 2,4 A c) 288 W d) 288 VA

27. Un resistencia de 10 Ω y un condensador de 8 pF se conectan en paralelo a través de una fuente de 10 V, 1000 Hz. Encuentre
a) la corriente en cada componente,
b) la corriente total,
c) la impedancia del circuito, y
d) el ángulo de la fase y la potencia del circuito.
Respuesta. a) $I_C = 0,5$ A, $I_R = 10$ A b) 1,12 A c) 8.9 Ω d) 27°; 10 W

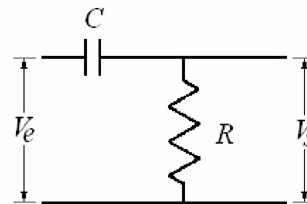
28. Una resistencia de 10 Ω y una inductancia de 2 mH se conectan en paralelo a través de una fuente de 1 0 V, 1000 Hz. Encuentre
a) la corriente en cada componente,
b) la corriente total,
c) la impedancia del circuito, y
d) el ángulo de la fase y la potencia del circuito.
Respuesta.
a) $I_L = 0,8$ A, $I_R = 1,0$ A b) 1,3 A c) 7,7 Ω
d) - 40°; 10 W

29. Una resistencia 25 Ω, un condensador de 40 μF, y una bobina de 40 mh se conectan en paralelo con una fuente de 24 V, 100 Hz. Hallar.
a) la corriente en cada componente,
b) la corriente total en el circuito,
c) la impedancia del circuito,
d) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje, y
e) la potencia total disipada por el circuito.
Respuesta. a) 0,960 A; 0,603 A; 0,955 A b) 1,022 A c) 23,48 Ω d) *I* se atrasa de *V* 20° e) 23 W

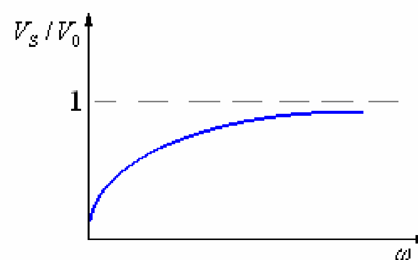
30. El circuito del problema anterior se conectan a una fuente de 24 V, 200 Hz. Conteste a las mismas preguntas para este caso.
Respuesta.
a) 0,960 A; 1,206 A; 0,477 A b) 1,205 A
c) 19,91 Ω d) *I* se adelanta de *V* 37° e) 23 W

31. Un micrófono cuya impedancia es 20 Ω debe ser utilizado con un amplificador con impedancia de entrada 50000 Ω. Encuentre el cociente de vueltas en el transformador necesario para emparejar estas dos impedancias.
Respuesta.
El cociente de vueltas es 50:1; la bobina con el mayor número de vueltas se debe conectar con el amplificador puesto que tiene la mayor impedancia.

32. El circuito de la figura se denomina filtro de pasa alta, porque las frecuencias de entrada elevadas se transmiten con una amplitud mayor que las frecuencias bajas:
a) Si la tensión de entrada es $V_e = V_0 \cos \omega t$, hallar el módulo de la tensión de salida V_s.
b) ¿A qué frecuencia angular la tensión de salida es la mitad que la de entrada?
c) Dibujar un gráfico de V_S / V_0 en función de ω.



Respuesta.
a) $V_S = \dfrac{V_0}{\sqrt{1+\left(1+\dfrac{1}{RC\omega}\right)^2}}$, b) $\omega = \dfrac{1}{RC\omega}$,
c)



33. En una línea de corriente alterna de 120 V se derivan un calentador, que consume 1 kW, y un motor, que consume 2 kW, con un factor de potencia 0,5. Calcúlese la intensidad total tomada de la línea y el factor de potencia de la carga total.
Respuesta. $I = 38,2$ A; $\cos\phi = 0,65$.

34. Se conecta una impedancia *Z* a una línea de corriente alterna de 100 V y 60 ciclos. Al conectar un condensador de 265 μF en paralelo con *Z*, la corriente de la línea se reduce a la mitad de su primitivo valor, y está en fase con el voltaje de la línea. Calcúlese la potencia suministrada a la impedancia.
Respuesta. *P* = 580 W.

35. Un circuito se compone de una resistencia de 100 Ω en serie con un condensador. El circuito ha sido proyectado para tener a 100 Hz doble impedancia que a 300 Hz. ¿Cuál será la capacidad del condensador?
Respuesta. *C* = 6,85 pF.

36. A una línea alterna de 100 V se conectan una resistencia y una autoinductancia en serie. Determínese:
a) Lo que señala un voltímetro entre los extremos de la resistencia, si marca lo mismo entre los extremos de la autoinductancia.
b) lo que indicará el voltímetro al modificar *R* y *L* de modo que marque 50 V para la autoinductancia.
Respuesta. I_1R_1 = 70,7 V ; I_2R_2 = 86,5 V.

37. Un generador de corriente alterna alimenta un circuito constituido por una resistencia óhmica *R*, en serie con un paralelo, una de cuyas ramas es una autoinductancia pura *L* y la otra un condensador *C*. Determínese la frecuencia que haga que la intensidad que circula por el circuito sea mínima
Respuesta.

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Capítulo 6. Las Ecuaciones de Maxwell y Ondas Electromagnéticas

INTRODUCCIÓN

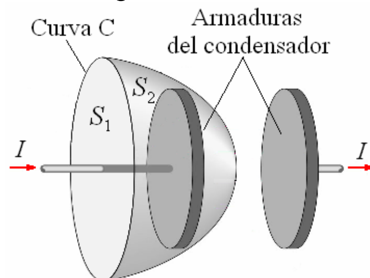
¿Qué tienen en común la luz, las ondas de radio, las microondas, y los rayos X? Todos son formas de ondas electromagnéticas. Juntos representan una gama enorme de fenómenos que son muy importantes en nuestro mundo tecnológico moderno.

La predicción de la existencia de ondas electromagnéticas y una descripción de su naturaleza primero fue publicada por James Clerk Maxwell en 1865. Maxwell era un físico teórico enormemente talentoso que hizo contribuciones importantes en muchas áreas de la física incluyendo electromagnetismo, termodinámica, la teoría cinética de gases, la visión de color, y la astronomía.

Él es el más conocido, sin embargo, por su tratado sobre campos eléctricos y magnéticos, que hemos mencionado ya. Su descripción de ondas electromagnéticas, con una predicción de su velocidad, es solamente una parte de su trabajo

CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO DE MAXWELL

Cuando la corriente no es constante, la ley de Ampere no es válida. Podemos ver por qué es así considerando la carga de un condensador.



Consideremos la curva C. De acuerdo con la ley de Ampere, la integral curvilínea del campo magnético a lo largo de esta curva es igual a μ_0 multiplicado por la corriente total que atraviesa una superficie cualquiera limitada por dicha curva Esta superficie no es necesario que sea plana. Se indican en la figura dos superficies limitadas por la curva C. La corriente a través de la superficie 1 es *I*. No existe ninguna corriente a través de la superficie 2 puesto que la carga está detenida en la placa del condensador. Así pues existe una ambigüedad en la frase "corriente a través de una superficie cualquiera limitada por la curva". Sin embargo, en el caso de corrientes constantes, la carga no se almacena en ningún punto y se tiene siempre la misma corriente sin que importe la superficie que escojamos.

Maxwell se dio cuenta de esta falla de la ley de Ampere y demostró que la ley podía generalizarse para incluir todos los casos si la corriente *I* de la ecuación se sustituía por la suma de la verdadera corriente *I* y otro término I_d denominado corriente de desplazamiento de Maxwell. La corriente de desplazamiento se define por

$I_d = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt}$, en donde Φ_E es el flujo de campo eléctrico. La forma generalizada de la ley de Ampere es entonces

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\left(I + I_d\right) = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

Podemos comprender la generalización de la ley de Ampere considerando nuevamente la figura anterior. Denominemos a la suma $I + I_d$ corriente generalizada. De acuerdo con nuestros razonamientos anteriores la misma corriente generalizada debe cruzar cualquier área limitada por la curva C. Así pues no puede existir ninguna corriente generalizada que entre o que salga del volumen cerrado. Si existe una verdadera corriente neta *I* que entra en el volumen, deberá existir una corriente de desplazamiento igual I_d que salga del volumen. En el volumen de la figura existe una corriente verdadera neta *I* que entra en el volumen la cual aumenta la carga dentro del mismo:

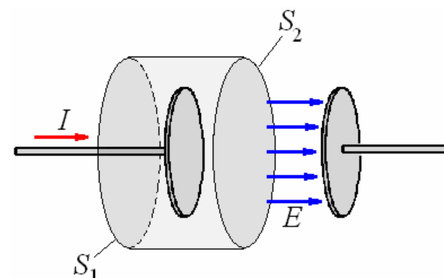
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

El flujo de campo eléctrico fuera del volumen está relacionado con la carga por la ley de Gauss:

$$\Phi_{E\text{ neto fuera}} = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

El aumento de carga por unidad de tiempo resulta ser así proporcional al aumento del flujo neto por unidad de tiempo fuera del volumen:

$$\varepsilon_0\frac{d\Phi_{E\text{ neto fuera}}}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$



La figura anterior muestra las superficies S_1 y S_2 que encierran una placa de un condensador. En este caso todo el flujo del campo eléctrico atraviesa S_2. El campo eléctrico entre las placas está relacionado con la carga por

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Siendo *A* el área de las placas. El flujo a través de S_2 es

$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

La corriente de desplazamiento que atraviesa S_2 es

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Que es igual a la verdadera corriente que atraviesa S_1. Una característica significativa de la generalización de Maxwell consiste en que un campo magnético resulta ser producido por un campo eléctrico variable lo mismo que por corrientes eléctricas verdaderas. No hay ninguna duda de que Maxwell fue inducido a obtener esta generalización por el resultado recíproco de que se produce un campo eléctrico mediante un flujo magnético variable lo mismo que por cargas eléctricas. Este último resultado, conocido como ley de Faraday, precedió a la generalización de Maxwell.

Ejemplo 1. En una región cilíndrica del espacio de radio R un campo eléctrico está variando en función del tiempo, determine la dirección y magnitud del campo magnético inducido para $r < R$.

Solución.

De la ecuación

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0\varepsilon_0 \int \frac{d\vec{E}}{dt}\cdot \hat{n}dS$$

tenemos que:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

De donde:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0 \int \frac{d\vec{E}}{dt}\cdot \hat{n}dS$$

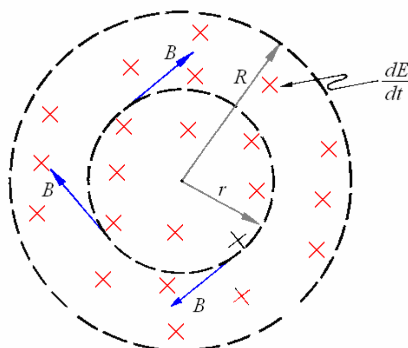
Integrando para r <R ambos lados de la ecuación se tiene que:

$$B2\pi r = \mu_0\varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

Despejando el campo magnético:

$$B = \mu_0\varepsilon_0 \frac{r}{2}\frac{dE}{dt}$$

La dirección del campo magnético inducido tiene la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, ya que el campo eléctrico está entrando al plano y creciendo, como se muestra en la figura siguiente.



LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Lo que para la Mecánica Clásica significan las Leyes de Newton lo son las Ecuaciones de Maxwell para los fenómenos Eléctricos y Magnéticos. Incluso, estas ecuaciones superaron la dificultad de las Leyes de Newton ya que son compatibles con la Teoría de la Relatividad Especial como lo demostraría el propio A. Einstein en 1905.

Las leyes del electromagnetismo fueron enunciadas por Gauss, Coulomb, Ampere, Faraday, etc., de tal forma que los fenómenos que describen afectan a una región del espacio de dimensiones finitas. Estas leyes fueron recopiladas por **James Clerk Maxwell** quien elaboró una completa teoría Electromagnética basándose en sus famosas ecuaciones, las que a partir de ese momento se denominaron las ecuaciones de Maxwell-

1. Ley de gauss para campo eléctrico ($\vec{E}$ **)**

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

donde q es la carga neta encerrada por la superficie sobre la que se integra (superficie gaussiana), esta ecuación se puede expresar en su forma diferencial de la siguiente manera:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

donde ρ es densidad volumétrica de carga eléctrica de la superficie gaussiana.

Estas ecuaciones establecen que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por la superficie dividida por ε_0. Lo que implica con un análisis posterior que las líneas de campo eléctrico se originan en cargas positivas y terminan en cargas negativas (Existen fuentes y sumideros).

2. Ley de gauss para campo magnético ($\vec{B}$ **)**

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

lo que corresponde a:

$$\nabla \vec{B} = 0$$

Esto implica que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero, es decir, el número de líneas de campo magnético que entran a la superficie es igual al número de ellas que salen. Esto significa que en la naturaleza NO existen monopolos magnéticos, sólo existen dipolos magnéticos.

3. Ley de Faraday (Inducción Electromagnética)

La Ley de Faraday explica cómo un flujo campo magnético variable en el tiempo puede inducir en un circuito una corriente eléctrica cuya fuerza electromotriz viene dada por:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

En su forma integral se puede expresar como:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

y en su forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

establece que el rotacional del campo eléctrico inducido por un campo magnético variable es igual a menos la derivada parcial del campo magnético con respecto al tiempo.

4. Ley generalizada de Ampere - Maxwell

Fue Maxwell, quien modificó la Ley de Ampere introduciéndole la corriente de desplazamiento que fue una de sus mayores contribuciones a la electricidad y magnetismo, la corriente de desplazamiento se debe precisamente a la variación del campo eléctrico en función del tiempo, es decir, que la ecuación de Ampere generalizada se escribe de la siguiente forma:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 I_d \text{, donde } I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Por lo tanto, la ecuación anterior la podemos expresar como:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$, que se conoce

como Ley de Ampere-Maxwell.

Luego de algunas reducciones, se puede expresar esta ley en su forma diferencial:

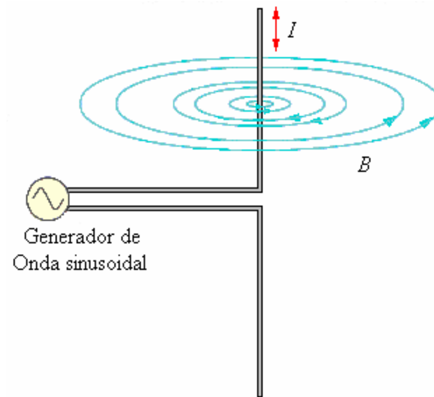
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

¿Qué es una onda electromagnética?

Para entender las ondas electromagnéticas, necesitamos repasar los conceptos de campo eléctrico y de campo magnético. Ambos campos pueden ser producidos por partículas cargadas. El movimiento de la carga genera un campo magnético, pero un campo eléctrico está presente aun sin movimiento de la carga. Estos campos son una característica del espacio alrededor de las cargas y son útiles para predecir las fuerzas en otras cargas, esto ya fue discutido anteriormente.

Suponga que la carga está fluyendo hacia arriba y hacia abajo en dos alambres conectados a una fuente de corriente alterna, como en la figura siguiente.



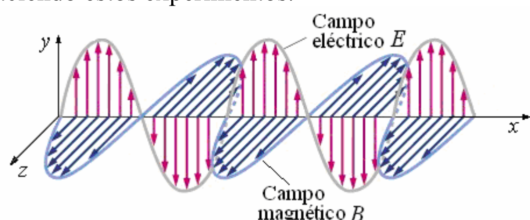
Si la dirección de la corriente cambia lo suficientemente rápido, una corriente alterna fluye en este dispositivo aun cuando parece ser un circuito abierto. La carga de un signo comenzará a acumularse en los alambres, pero antes de que la carga acumulada sea demasiado grande, la corriente se invierte, la carga regresa, y carga de signo opuesto comienza a acumularse. Tenemos así una cantidad de carga cambiante y una corriente eléctrica cambiante en los alambres.

Los campos magnéticos generados por este dispositivo se pueden representar por líneas circulares de campo con centro en los alambres. Este campo, no obstante está cambiando constantemente en magnitud y dirección como los cambios de la corriente. Por la ley de Faraday, Maxwell sabía que un campo magnético que cambia generaría un voltaje en un circuito cuyo plano es perpendicular a las líneas del campo magnético. Un voltaje implica un campo eléctrico, aun en ausencia de un circuito, un campo magnético cambiante generará un campo eléctrico en cualquier momento en el espacio en el cual el campo magnético está cambiando.

Así, esperamos que un campo eléctrico cambiante sea generado por el campo magnético cambiante, según la ley de Faraday. Maxwell consideró simetría en el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos: un campo eléctrico cambiante también genera un campo magnético. Maxwell predijo este fenómeno en sus ecuaciones que describían el comportamiento de campos eléctricos y magnéticos. Las mediciones experimentales confirmaron su existencia.

Maxwell se dio cuenta que una onda que implicaba estos campos se podría propagar a través del espacio. Un campo magnético cambiante produce un campo eléctrico cambiante, que, a su vez produce un campo magnético cambiante, y así sucesivamente. En el vacío, el proceso puede producirse indefinidamente y afectar partículas cargadas a distancias mucho mayores de la fuente que podría estar con campos estáticos generados por corrientes o cargas no cambiantes. Así es cómo se produce una onda electromagnética. Los alambres en la figura anterior sirven como antena transmisora para las ondas. Se puede utilizar una segunda antena para detectar las ondas.

Aunque Maxwell predijo la existencia de tales ondas en 1865, el primer experimento para producirlas y para detectarlas con circuitos eléctricos fue realizado por Heinrich Hertz (1857 - 1894) en 1888. Las antenas originales de Hertz eran lazos circulares del alambre en vez de los alambres rectos, pero él también utilizó alambres rectos trabajos posteriores. Él podía detectar una onda producida por el circuito fuente con otro circuito a una distancia considerable de la fuente. Hertz descubrió las ondas radiales haciendo estos experimentos.



La figura anterior muestra la naturaleza de ondas electromagnéticas simples. Si el campo magnético está en plano horizontal, como en la figura, el campo eléctrico generado por el campo magnético cambiante está en la dirección vertical. Estos dos campos son perpendiculares entre si, y son también perpendiculares a la dirección del recorrido alejados de la antena fuente. Las ondas electromagnéticas son por lo tanto ondas transversales. Las magnitudes de los campos eléctrico y magnético se representan aquí sinusoidalmente y en fase el uno con el otro, pero patrones son también posibles más complejos.
Como los otros tipos de ondas que hemos estudiado el patrón sinusoidal de la onda se mueve. La figura muestra las magnitudes y las direcciones en un instante de tiempo y a lo largo de solo una línea en espacio. La misma clase de variación ocurre en todas las direcciones perpendiculares a la antena. Como el patrón sinusoidal se mueve, los valores del campo en todo momento en del espacio aumentan y la disminuyen alternativamente. Mientras los campos pasan por cero, cambian la dirección y comienzan a aumentar en la dirección opuesta. Estos cambios coordinados de los campos eléctrico y magnético componen la onda electromagnética.
Maxwell demostró que las ondas electromagnéticas (propagándose a lo largo de una dirección *x*) en el espacio libre se describirían por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Ecuación de onda para E_y

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = +\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación de la onda

$\frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_{(x,t)}}{\partial t^2}$, vemos que E_y obedece a una ecuación de onda para unas ondas con velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Tomando los valores más acertados de μ_0 y de ε_0 se encuentra que esta es precisamente la velocidad de la luz en el espacio libre.
Así pues, hemos demostrado que tanto el campo eléctrico *E* como el magnético *B* obedecen a una ecuación de onda para las ondas que se mueven con velocidad que es la velocidad de la luz.
En cualquier caso, el campo eléctrico y el campo magnético son perpendiculares al eje *x*, dirección de propagación. Como hemos visto, las ondas electromagnéticas son transversales. Para mayor sencillez, hemos supuesto que el campo eléctrico tiene dirección *y*. Esto equivale a seleccionar una polarización particular para la onda transversal. Una vez hecha esta selección ya no podemos escoger libremente la dirección del campo magnético.

Ejemplo 2. a) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en viajar de la Luna a la Tierra, una distancia de 384000 km?
b) La luz de la estrella Sirio tarda 8,61 años luz en llegar a la Tierra. ¿Cuál es la distancia a Sirio?
Solución.

a) $t = \frac{d}{c} = \frac{3,84\times 10^8}{3,00\times 10^8} = 1,28\text{ s}$

b) El tiempo de viaje de la luz:
8,61 años

$$= (8,61 \text{ años})\frac{(365 \text{ dias})}{(1 \text{ año})}\frac{(24 \text{ horas})}{(1 \text{ dia})}\frac{(3600 \text{ s})}{(1 \text{ hora})}$$

$= 2,72 \times 10^8$ s

$$d = ct = \left(3,0\times 10^8\right)\left(2,72\times 10^8\right)$$

$= 8,16\text{x}10^{16}$ m $= 8,16\text{x}10^{13}$ km

Ejemplo 3. ¿Cuál del siguiente es una afirmación verdadera?
A) Todas las ondas electromagnéticas viajan a la misma velocidad en vacío.
B) La luz aumenta su velocidad cuando se mueve desde el aire al agua.
C) Algunas ondas electromagnéticas tienen carga eléctrica.
D) En el vacío las ondas electromagnéticas de alta frecuencia viajan a una velocidad más alta que las ondas electromagnéticas de baja frecuencia.
E) Los electrones son una clase de onda electromagnética.
Solución.
(A) Todas las ondas electromagnéticas viajan a la misma velocidad en vacío.

$$c = 3\times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \lambda f$$

Ejemplo 4. Fantasmas en el televisor. En una imagen de televisión, se ven imágenes fantasma cuando la señal de la transmisora viaja el receptor tanto directa como indirectamente, luego de reflejarse en un edificio o alguna otra masa metálica grande. En

un televisor de 25 pulgadas, el fantasma aparece aproximadamente 1,0 cm a la derecha de la imagen principal si la señal reflejada llega 0.60 s después de la señal principal. En este caso, ¿cuál es la diferencia de longitud entre las trayectorias de las dos señales?

Solución.

$d = c\Delta t$ = (3,0x10^8)(6,0x10^{-7}) = 180 m

Ejemplo 5. Una onda electromagnética sinusoidal con una frecuencia de 6,10x10^{14} Hz viaja en un vacío en la dirección + z. El campo $\vec{B}$ es paralelo al eje de las y y tiene una amplitud de 5,80x10^{-4} T. Escriba las ecuaciones vectoriales de $\vec{E}_{(z,t)}$ y $\vec{B}_{(z,t)}$.

Solución.

$$\vec{B}(z,t) = B_{\text{máx}} \cos(kz - \omega t)\hat{j}$$

$$= B_{\text{máx}} \cos\left(2\pi f\left(\frac{z}{c} - t\right)\right)\hat{j} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{B}(z,t) =$$

$$(5{,}80 \times 10^{-4}) \cos 2\pi(6{,}10 \times 10^{14})\left(\frac{z}{(3.00 \times 10^8)} - t\right)\hat{j}$$

$$\vec{E}(z,t) = B_y(z,t)\hat{j} \times (c\hat{k}) \Rightarrow$$

$$\vec{E}(z,t) =$$

$$\left(1{,}74 \times 10^5\right)\cos\left(1{,}28 \times 10^7 z - 3{,}83 \times 10^{15} t\right)\hat{i}$$

Ejemplo 6. Una onda electromagnética con una frecuencia de 38,0 MHz y una longitud de onda de 6,15 m viaja en un material aislante con k_m muy cercana a la unidad.

a) ¿Cuál es la rapidez de propagación de la onda?

b) ¿Cuál es la constante dieléctrica del material aislante a esta frecuencia?

Solución.

a) $v = f\lambda$ = $(3{,}80 \times 10^7)(6{,}15 \text{ m})$

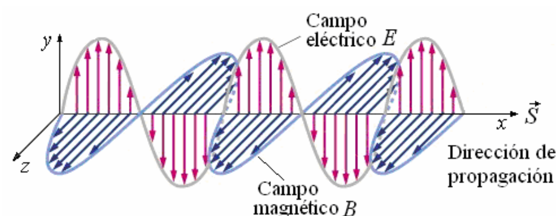
$= 2{,}34 \times 10^8$ m/s

b) $k_E = \dfrac{c^2}{v^2} = \dfrac{\left(3{,}0 \times 10^8\right)^2}{\left(2{,}34 \times 10^8\right)^2} = 1{,}64$

VECTOR POYNTING.

El vector que nos da la dirección y la magnitud de la rapidez del flujo de energía electromagnética por unidad de área en un punto del espacio, es llamado vector Poynting y se define por la siguiente ecuación:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$$



A partir de esta figura puede observarse que la dirección de es paralela al vector $\vec{E} \times \vec{B}$ propagación en dirección x en este caso. El vector $\dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ se conoce como **vector Poynting** (en honor de John H. Poynting):

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

El vector Poynting en el sistema MKS, está dado en unidades de W/m^2.

INTENSIDAD DE LA ONDA.

A continuación demostraremos que su valor medio es igual a la intensidad de la onda electromagnética. En nuestro estudio del transporte de energía por ondas cualquier tipo, veíamos que la intensidad (energía media por unidad de área y unidad de tiempo) era, en general, igual al producto de la densidad de energía (energía por unidad de volumen) por la velocidad de la onda. La energía por unidad de volumen asociada con un campo eléctrico E es

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

En el caso de la onda armónica dada por la ecuación $E_y = E_{y0}\text{sen}(kx - \omega t)$ tenemos

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \text{sen}(kx - \omega t)$$

Por sencillez en la notación se han suprimido los subíndices de las componentes y y z

La energía por unidad de volumen asociada con un campo magnético B es

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Según las ecuaciones $B_z = \dfrac{k}{\omega}E_{z0}\text{sen}(kx - \omega t) =$ $B_{z0}\text{sen}(kx - \omega t)$ tenemos

$$u_B = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\text{sen}(kx - \omega t) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\text{sen}^2(kx - \omega t)$$

Pero como $c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \text{sen}^2(kx - \omega t)$$

y vemos que son iguales las densidades de energía eléctrica y magnética. La energía electromagnética total por unidad de volumen es

$$u = u_E + u_B = \varepsilon_0 E_0^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2}\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$$

La energía por unidad de tiempo y por unidad de área es el producto de esta energía por la velocidad c:

$$uc = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$$

$$= \left[E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\right]\left[\frac{E_0}{\mu_0 c}\operatorname{sen}(kx - \omega t)\right]$$

$$= \frac{EB}{\mu_0} = S$$

La intensidad en un punto cualquiera x es el valor medio temporal de la energía por unidad de tiempo y por unidad de área. A partir de la ecuación

$u = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2}\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$ vemos que la densidad de energía es proporcional a $\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$. El valor medio de esta cantidad en uno o más ciclos es 1/2. Luego, la densidad de energía media vale

$u_B = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}$, y la intensidad es

$$I = cu_B = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{B_0}{\mu_0\sqrt{2}} = \frac{E_{rms}B_{rms}}{\sqrt{2}}$$

$$= S_B$$

Donde

$E_{rms} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ es el valor medio cuadrático de E y

$B_{rms} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}$ es el valor medio cuadrático de B.

POTENCIA INSTANTÁNEA.

El módulo o valor del vector Poynting es la potencia instantánea por unidad de área. La velocidad con la cual fluye energía electromagnética a través de una superficie cualquiera es el flujo del vector de Poynting a través de la misma:

$$P = \int \vec{S}\cdot \hat{n}\,dA = \int\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right)\cdot\hat{n}\,dA$$

En donde P es la potencia que atraviesa el área y

$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ es el vector Poynting. La potencia neta radiada por cualquier volumen es el flujo neto del vector de Poynting a través de la superficie que encierra dicho volumen.

ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA

La densidad de energía eléctrica dada por la ecuación:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\vec{E}\cdot\vec{E}$$

La densidad de energía magnética que está expresada por:

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{B}$$

Para una región del espacio libre donde existe campo eléctrico y campo magnético la ecuación de la energía electromagnética es expresada por:

$$U = \int_V (u_E + u_B)\,dV =$$

$$\frac{1}{2\mu_0}\int_V\left(\varepsilon_0\mu_0\,\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{B}\right)dV$$

En esta ecuación hemos combinado campos eléctricos y magnéticos.

PRESIÓN DE RADIACIÓN.

A partir de la observación de que se requiere energía para establecer campos eléctricos y magnéticos, hemos demostrado que las ondas electromagnéticas transportan energía. Además se puede demostrar que las ondas electromagnéticas transportan L cantidad de movimiento p, con una densidad de cantidad de movimiento correspondiente (cantidad de movimiento dp por volumen dV) de magnitud

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2}$$

Esta cantidad de movimiento es una propiedad del campo; no está asociada con la masa de una partícula en movimiento en el sentido habitual.

Existe además una rapidez de flujo de cantidad de movimiento correspondiente. El volumen dV ocupado por una onda electromagnética (rapidez c) que pasa a través de un área A en un tiempo dt es $dV = Acdt$. Cuando se sustituye esto en la ecuación $\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2}$ y se reordena, se encuentra que la rapidez de flujo de cantidad de movimiento por unidad de área es

$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$ (rapidez de flujo de cantidad de movimiento)

Esto representa la cantidad de movimiento que se transfiere por unidad de área y por unidad de tiempo. Se obtiene la rapidez promedio de transferencia de cantidad de movimiento por unidad de área sustituyendo S por $S_m = I$ len la ecuación

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}.$$

A esa cantidad de movimiento se debe el fenómeno de la **presión de radiación.** Cuando una onda electromagnética es absorbida en su totalidad por una

superficie, se transfiere a ésta la cantidad de movimiento de la onda. Para simplificar consideraremos una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Con base en las ideas expuestas en la sección 8.1, vemos que la rapidez *dp*/*dt* con la que se transfiere cantidad de movimiento a la superficie absorbente es igual a la fuerza ejercida sobre la superficie. La fuerza promedio por unidad de área debida a la onda, o **presión de radiación** p_{rad}, es el cociente del valor promedio de *dp*/*dt* entre el área absorbente *A*. (Utilizamos el subíndice "rad" para distinguir la presión de la cantidad de movimiento, que también se representa mediante el símbolo *p*). De acuerdo con la ecuación

$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2}$, la presión de radiación es

$p_{\text{rad}} = \frac{S_m}{c} = \frac{I}{c}$ (presión de radiación, absorción total de la onda)

Si la onda se refleja en su totalidad, el cambio de cantidad de movimiento es dos veces más grande, y la presión es

$p_{\text{rad}} = \frac{S_m}{c} = \frac{I}{c}$ $p_{\text{rad}} = \frac{2S_m}{c} = \frac{2I}{c}$ (presión de radiación, reflexión total de la onda)

Por ejemplo, el valor de *I* (o S_{m}) correspondiente a la luz solar directa, antes de atravesar la atmósfera terrestre, es de aproximadamente 1,4 kW/m^2. De acuerdo ecuación $p_{\text{rad}} = \frac{S_m}{c} = \frac{I}{c}$ la presión promedio correspondiente sobre una superficie absorbente es

$$p_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = \frac{1{,}4\times 10^{-3}}{3{,}0\times 10^{8}} = 4{,}7\text{x}10^{-6}\ \text{Pa}$$

Según la ecuación $p_{\text{rad}} = \frac{S_m}{c} = \frac{I}{c}$, la presión promedio sobre una superficie totalmente reflectante es el doble de esto: $\frac{2I}{c}$ o 9,4xl0^6 Pa. Estas presiones son muy pequeñas del orden de 10^{-10} atm, pero se pueden medir con instrumentos sensibles.

La presión de radiación de la luz solar es mucho mayor en el interior del Sol que en la Tierra. En el interior de las estrellas de masa mucho mayor que la del Sol y más luminosas que éste, la presión de radiación es tan grande que aumenta considerablemente la presión gaseosa en el interior de la estrella y de este modo contribuye a evitar que la estrella se colapse bajo el efecto de su propia gravedad. En ciertos casos la presión de radiación proyecta efectivamente parte del material de la estrella hacia el espacio.

Ejemplo 7. Prueba de un transmisor espacial de radio. Usted es un especialista en misiones de la NASA que efectúa su primer vuelo en el trasbordador espacial. En virtud de su extensa capacitación en física, se le ha asignado la tarea de evaluar el comportamiento de un nuevo transmisor de radio a bordo de la Estación Espacial Internacional (EEI). Encaramado en el brazo móvil del trasbordador, usted apunta un detector sensible hacia la EEI, que está a 2,5 km de distancia, y encuentra que la amplitud de campo eléctrico de las ondas de radio provenientes del transmisor es de 0,090 V/m, y que la frecuencia de las ondas es de 244 MHz. Halle lo siguiente:
a) la intensidad de la onda de radio donde usted se encuentra;
b) la amplitud de campo magnético de la onda donde usted se encuentra;
c) la potencia de salida total del transmisor de radio de la EEI.
d) ¿Qué suposiciones, en su caso, hizo usted para efectuar sus cálculos?

Solución.

a) $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_{máx}^2$, $E_{máx} = 0{,}090\ \text{V/m}$, luego

$I = 1{,}1\times 10^{-5}\ \text{W/m}^2$

b) $E_{máx} = cB_{máx}$ Luego

$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = 3{,}0\ \text{x}10^{-10}\ \text{T}$

c) $P_{\text{av}} = I(4\pi r^2) =$

$\left(1{,}075\times 10^{-5}\right)(4\pi)(2{,}5\times 10^3)^2 = 840\ \text{W}$

d) El cálculo en la parte (c) asume que el transmisor emite uniformemente en todas las direcciones.

Ejemplo 8. Una sonda espacial situada a 2,0 x 10^{10} m de una estrella mide la intensidad total de la radiación electromagnética proveniente de la estrella, la cual resulta ser de 5,0 x 10^3 W/m^2. Si la estrella irradia de modo uniforme en todas direcciones, ¿cuál es la potencia de salida promedio total?

Solución.

$P_m = I(4\pi r^2) = \left(5{,}0\times 10^3\right)(4\pi)(2{,}0\times 10^{10})^2$
$= 2{,}5\text{x}10^{25}\ \text{J}$

Ejemplo 9. La intensidad de un rayo láser cilíndrico es de 0,800 W/m^2. El área de sección transversal del haz es de 3,0 x l0 m^2, y la intensidad es uniforme en toda la sección transversal del haz.
a) ¿Cuál es la potencia de salida promedio del láser?
b) ¿Cuál es el valor rms (eficaz) del campo eléctrico en el haz?

Solución.

a) La potencia media del haz es

$P = IA = (0{,}800)(3{,}0\times 10^{-4})$
$= 2{,}4\text{x}10^{-4}\ \text{W}$

b) Tenemos que, $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_{máx}^2 = \varepsilon_0 c E_{\text{rms}}^2$.

Luego,

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{I}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{0{,}800}{(8{,}85\times10^{-12})(3{,}00\times10^{8})}}$$
$= 17{,}4$ V/m

Ejemplo 10. Una fuente intensa de luz irradia uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 5,0 m de la fuente de radiación la presión sobre una superficie perfectamente absorbente es de 9,0 x 10^{-6} Pa. ¿Cuál es la potencia media de salida de la fuente?

Solución.

$p_{\text{rad}} = I/c$ de aquí $I = cp_{\text{rad}}$
$= 2{,}70\text{x}10^{3}$ W/m^2

Luego

$$P_m = I(4\pi r^2) = \left(2.70\times10^{3}\right)(4\pi)\,(5{,}0)^2$$
$= 8{,}5\text{x}10^{5}$ W

Ejemplo 11. Una onda electromagnética sinusoidal emitida por un teléfono celular tiene una longitud de onda de 35,4 cm y una amplitud de campo eléctrico de 5,40 x 10^{-2}V/m a una distancia de 250 m de la antena. Calcule
a) la frecuencia de la onda;
b) la amplitud del campo magnético;
c) la intensidad de la onda.

Solución.

a) $f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3{,}00\times10^{8}}{0{,}354} = 8{,}47$ Hz

b) $B_{\max} = \dfrac{E_{\max}}{c} = \dfrac{0{,}0540}{3{,}00\times10^{8}} = 1{,}80\text{x}10^{-10}$T

c) $I = S_{av} = \dfrac{EB}{2\mu_0} = \dfrac{(0{,}0540)\left(1{,}80\times10^{-10}\right)}{2\mu_0}$
$= 3{,}87\text{x}10^{-6}$W/m^2

Ejemplo 12. Una fuente de luz monocromática con una potencia de salida de 60,0 W irradia luz uniformemente en todas direcciones con una longitud de onda de 700 nm. Calcule $E_{máx}$ y $B_{máx}$ de la luz de 700 nm a una distancia de 5,00 m de la fuente.

Solución.

$$P = S_m A = \frac{E_{\max}^2}{2c\mu_0}(4\pi r^2) \Rightarrow E_{\max} = \sqrt{\frac{Pc\mu_0}{2\pi r^2}}$$

$$\Rightarrow E_{máx} = \sqrt{\frac{(60{,}0)\left(3{,}00\times10^{8}\right)\mu_0}{2\pi(5{,}00)^2}} = 12{,}0 \text{ V/m}$$

$\Rightarrow$

$$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{12{,}0}{3{,}00\times10^{8}} = 4{,}00\text{x}10^{-8}\text{T}$$

Ejemplo 13. Si la intensidad de la luz solar directa en un punto de la superficie terrestre es de 0,78 kW/m^2, halle
a) la densidad de cantidad de movimiento (cantidad de movimiento por unidad de volumen) promedio de la luz solar;
b) la rapidez de flujo de cantidad de movimiento promedio de la luz solar.

Solución.

a) La densidad de cantidad de movimiento

$$\frac{dp}{dV} = \frac{S_m}{c^2} = \frac{780}{\left(3{,}0\times10^{8}\right)^2} = 8{,}7\times10^{-15}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$$

b) La razón de flujo de la cantidad de movimiento

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S_{av}}{c} = \frac{780}{3{,}0\times10^{8}} = 2{,}6\text{x}10^{-6}\text{Pa}$$

Ejemplo 14. En las instalaciones del Simulador Espacial de 25 pies del Jet Propulsion Laboratory de la NASA, una serie de lámparas de arco elevadas produce luz con una intensidad de 2500 W/m^2 en el piso de las instalaciones. (Esto simula la intensidad de la luz solar cerca del planeta Venus). Halle la presión de radiación promedio (en pascal y en atmósferas) sobre
a) una sección totalmente absorbente del piso.
b) una sección totalmente reflectante del piso.
c) Halle la densidad de cantidad de movimiento promedio (cantidad de movimiento por unidad de volumen) de la luz en el piso.

Solución.

a) Luz absorbida:

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S_m}{c} = \frac{2500}{3{,}0\times10^{8}}$$
$= 8{,}33\text{x}10^{-6}$ Pa $\Rightarrow$

$$p_{\text{rad}} = \frac{8{,}33\times10^{-6}}{1{,}013\times10^{5}} = 8{,}33\text{x}10^{-11} \text{ atm}$$

b) Luz reflejada:

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{2S_m}{c}$$
$$= \frac{2(2500)}{3.0\times10^{8}} = 1{,}67\text{x}10^{-5} \text{ Pa} \Rightarrow$$

$$p_{\text{rad}} = \frac{1{,}67\times10^{-5}}{1{,}013\times10^{5}} = 1{,}65\text{x}10^{-10}\text{atm.}$$

El factor 2 se presenta porque la dirección del vector cantidad de movimiento se invierte con la reflexión. Así el cambio en cantidad de movimiento es dos veces la cantidad de movimiento original

c) La densidad de cantidad de movimiento

$$\frac{dp}{dV} = \frac{S_m}{c^2} = \frac{2500}{\left(3{,}0\times10^{8}\right)^2}$$
$$= 2{,}78\times10^{-14}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}}$$

Ejemplo 15. Una onda electromagnética sinusoidal se propaga en un vacío en la dirección + *z*. Si en un

instante en particular y en cierto punto del espacio el campo eléctrico tiene la dirección $+x$ y una magnitud de 4,00 V/m, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético de la onda en el mismo punto del espacio y en el mismo instante?

Solución.

$$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = 1{,}33\text{x}10^{-8}\text{ T}$$

$\vec{E}\times\vec{B}$ está en la dirección de propagación. Para $\vec{E}$ en la dirección $+x$, $\vec{E}\times\vec{B}$ está en la dirección $+z$ cuando $\vec{B}$ está en la dirección $+y$.

Ejemplo 16. Se establece una onda electromagnética estacionaria en el aire con una frecuencia de 750 MHz entre dos planos conductores separados por una distancia de 80,0 cm. ¿En qué posiciones entre los planos se podría colocar una carga puntual en reposo de modo que permaneciera en reposo? Explique su respuesta.

Solución.

$$\Delta x_{nodos} = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = \frac{3{,}00\times10^{8}}{2(7{,}50\times10^{8})}$$

$$= 0{,}200\text{ m} = 20{,}0\text{ cm}$$

Debe haber nodos en los planos, separados 80,0 cm, y hay dos nodos entre los planos, cada uno a 20,0 cm de un plano. Es a 20 cm, 40 cm, y 60 cm que una carga puntual permanece en reposo, puesto que el campo eléctrico en esos puntos es cero.

Ejemplo 17. Con respecto a una onda electromagnética que se en aire, determine la frecuencia de una onda cuya longitud de onda es de a) 5,0 km; b) 5,0 m; c) 5,0 μ m; d) 5,0 nm.

Solución.

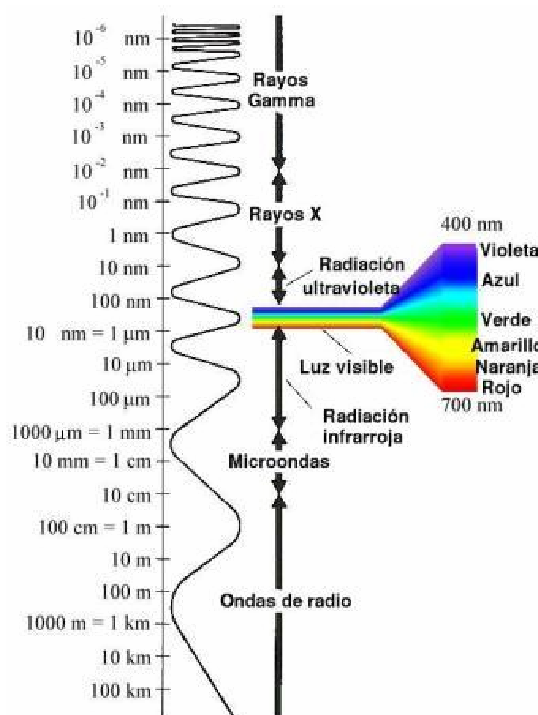
a) $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}0\times10^{8}}{5000} = 6{,}0\text{x}10^{4}\text{Hz}$

b) $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}0\times10^{8}}{5{,}0} = 6{,}0\text{x}10^{7}\text{Hz}$

c) $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}0\times10^{8}}{5{,}0\times10^{-6}} = 6{,}0\text{x}10^{13}\text{Hz}$

d) $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}0\times10^{8}}{5{,}0\times10^{-9}} = 6{,}0\text{x}10^{16}\text{Hz}$

EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO.



Las ondas electromagnéticas cubren una amplia gama de frecuencias o de longitudes de ondas y pueden clasificarse según su principal fuente de producción. La clasificación no tiene límites precisos.

Región del espectro	Intervalo de frecuencias (Hz)
Radio-microondas	0 - 3,0x10^{12}
Infrarrojo	3,0x10^{12} - 4,6x10^{14}
Luz visible	4,6x10^{14} -7,5x10^{14}
Ultravioleta	7,5x10^{14} - 6,0x10^{16}
Rayos X	6,0x10^{16}-1,0x10^{20}
Radiación gamma	1,0x10^{20} -….

Fuente: Leonberger. *Revealing the small range of radio-microwave frequencies*. Phys. Educ. Vol. 37, September 2002, pp. 425-427

CARACTERÍSTICAS DE LAS DISTINTAS REGIONES DEL ESPECTO

Las ondas de radiofrecuencia

Sus frecuencias van de 0 a 10^{9} Hz, se usan en los sistemas de radio y televisión y se generan mediante circuitos oscilantes.

Las ondas de radiofrecuencia y las microondas son especialmente útiles por que en esta pequeña región del espectro las señales producidas pueden penetrar las nubes, la niebla y las paredes. Estas son las frecuencias que se usan para las comunicaciones vía satélite y entre teléfonos móviles. Organizaciones internacionales y los gobiernos elaboran normas para decidir que intervalos de frecuencias se usan para

distintas actividades: entretenimiento, servicios públicos, defensa, etc. La región denominada AM comprende el intervalo de 530 kHz a 1600 kHz, y la región denominada FM de 88 MHz a 108 MHz. La región FM permite a las emisoras proporcionar una excelente calidad de sonido debido a la naturaleza de la modulación en frecuencia.

Las microondas

Se usan en el radar y otros sistemas de comunicación, así como en el análisis de detalles muy finos de la estructura atómica y molecular. Se generan mediante dispositivos electrónicos.

La radiación infrarroja

Se subdivide en tres regiones, infrarrojo lejano, medio y cercano. Los cuerpos calientes producen radiación infrarroja y tienen muchas aplicaciones en la industria, medicina, astronomía, etc.

La luz visible

Es una región muy estrecha pero la más importante, ya que nuestra retina es sensible a las radiaciones de estas frecuencias. A su vez, se subdivide en seis intervalos que definen los colores básicos (rojo, naranja, amarillo, verde, azul y violeta).

Radiación ultravioleta

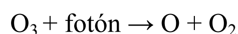
Los átomos y moléculas sometidos a descargas eléctricas producen este tipo de radiación. No debemos de olvidar que la radiación ultravioleta es la componente principal de la radiación solar.

La energía de los fotones de la radiación ultravioleta es del orden de la energía de activación de muchas reacciones químicas lo que explica muchos de sus efectos.

El oxígeno se disocia en la ozonósfera por la acción de la radiación ultravioleta. Una molécula de oxígeno absorbe radiación de longitudes de onda en el intervalo entre 1600 Å y 2400 Å (o fotones de energía comprendida entre 7.8 eV y 5.2 eV) y se disocia en dos átomos de oxígeno.


O_2 + fotón → O + O

El oxígeno atómico producido se combina con el oxígeno molecular para formar ozono, O_3, que a su vez se disocia fotoquímicamente por absorción de la radiación ultravioleta de longitud de onda comprendida entre 2400 Å y 3600 Å (o fotones de energía entre 5,2 eV y 3,4 eV).

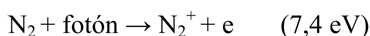

O_3 + fotón → O + O_2

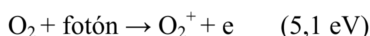
Estas dos reacciones absorben prácticamente toda radiación ultravioleta que viene del Sol por lo que solamente llega una pequeña fracción a la superficie de la Tierra. Si desapareciese de la capa de ozono, la radiación ultravioleta destruiría muchos organismos a causa de las reacciones fotoquímicas.

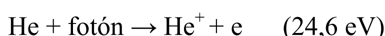
La radiación ultravioleta y rayos X producidos por el Sol interactúa con los átomos y moléculas presentes en la alta atmósfera produciendo gran cantidad de iones y electrones libres (alrededor de 10^{11} por m^3). La región de la atmósfera situada a unos 80 km de altura se denomina por este motivo ionosfera.

Algunas de las reacciones que ocurren más frecuentemente son:


NO + fotón → NO^+ + e (5,3 eV)


N_2 + fotón → N_2^+ + e (7,4 eV)


O_2 + fotón → O_2^+ + e (5,1 eV)


He + fotón → He^+ + e (24,6 eV)

Entre paréntesis se indica la energía de ionización. Como resultado de esta ionización tienen lugar muchas reacciones secundarias.

Rayos X

Si se aceleran electrones y luego, se hacen chocar con una placa metálica, la radiación de frenado produce rayos X. Los rayos X se han utilizado en medicina desde el mismo momento en que los descubrió Roentgen debido a que los huesos absorben mucho más radiación que los tejidos blandos. Debido a la gran energía de los fotones de los rayos X son muy peligrosos para los organismos vivos.

Rayos gamma

Se producen en los procesos nucleares, por ejemplo, cuando se desintegran las sustancias radioactivas. Es también un componente de la radiación cósmica y tienen especial interés en astrofísica. La enorme energía de los fotones gamma los hace especialmente útiles para destruir células cancerosas. Pero son también peligrosos para los tejidos sanos por lo que la manipulación de rayos gamma requiere de un buen blindaje de protección.

Ejemplo 18. Un espejo pequeño con un área de 5,00 cm^2 frente a una fuente de luz monocromática situada a 3,20 m de distancia. En el espejo la amplitud de campo eléctrico de la luz de la fuente es de 0,0280 V/m.
a) ¿Cuánta energía incide en el espejo?

b) ¿Cuál es la presión de radiación promedio que la luz ejerce sobre el espejo?
c) ¿Cuál es la salida total de energía radiante te si se supone que irradia uniformemente en todas direcciones?
Solución.
a) La energía incidente en el espejo es

$$\text{Energía} = Pt = IAt = \frac{1}{2}\varepsilon_0 cE^2 At$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\varepsilon_0(3{,}00\times10^8)(0{,}028)^2(5{,}00\times10^{-4})(1{,}00)$$
$= 5{,}0\text{x}10^{-10}$ J

b) La presión de radiación

$$p_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0(0{,}0280)^2$$

$= 6{,}94\text{x}10^{-15}$ Pa

c) La potencia $P = I\,4\pi R^2 = cp_{\text{rad}}2\pi R^2$

$$\Rightarrow P = 2\pi(3{,}00\times10^8)(6{,}94\times10^{-15})(3{,}20)^2$$

$= 1{,}34\text{x}10^{-4}$ Pa

Ejemplo 19. Un láser pequeño de helio y neón emite luz visible roja con una potencia de 3,20 mW en un haz de 2,50 mm de diámetro.
a) ¿Cuál es la amplitud de los campos eléctrico y magnético de la luz?
b) ¿Cuál es la densidad de energía promedio asociada con el campo eléctrico y con el campo magnético?
c) ¿Cuál es la energía contenida en un tramo del haz de 1,00 m de largo?
Solución.
a) La intensidad del laser

$$I = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi D^2} = \frac{4(3{,}20\times10^{-3})}{\pi(2{,}50\times10^{-3})^2} = 652 \text{ W/m}^2$$

Pero $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 cE^2 \Rightarrow E = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}} =$

$$\sqrt{\frac{2(652}{\varepsilon_0(3{,}00\times10^8)}} = 701 \text{ V/m}$$

Y $B = \frac{E}{c} = \frac{701}{3.00\times10^8} = 2{,}34\text{x}10^{-6}$T

b) $u_{B_m} = u_{E_m} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_{máx}^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0(701)^2$

$= 1{,}09\text{x}10^{-6}$ J/m^3

Observar el factor adicional ½ puesto que estamos haciendo un promedio.

c) En un metro de haz láser, la energía total es:

$$E_{\text{tot}} = u_{\text{tot}}\text{Vol} = 2u_E(AL) = 2u_E\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 L$$

$$\Rightarrow E_{\text{tot}} = \frac{2(1{,}09\times10^{-6})\pi\,(2{,}50\times10^{-3})^2\,(1{,}00)}{4}$$

$= 1{,}07\text{x}10^{-11}$ J

Ejemplo 20. Un conductor cilíndrico de sección transversal circular tiene un radio *a* y una conductividad g, y transporta una corriente constante *I*.
a) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de campo eléctrico *E* en un punto situado dentro del alambre, a una distancia *a* del eje?
b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de campo magnético *B* en el mismo punto?
c) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de Poynting *S* en el mismo punto? (La dirección de *S* es aquélla en la que fluye energía electromagnética hacia adentro o hacia afuera del conductor).
d) Con base en el resultado del inciso (c), halle la rapidez de flujo de energía hacia el volumen que ocupa un tramo de longitud ℓ del conductor. (Sugerencia: Integre *S* sobre la superficie de este volumen). Compare su resultado con la rapidez de generación de energía térmica en el mismo volumen. Comente por qué se puede pensar que la energía disipada en un conductor portador de corriente, debido a su resistencia, entra a través de los lados cilíndricos del conductor.
Solución.
a) $E = gJ = \frac{g\ell}{A} = \frac{g\ell}{\pi a^2}$, en dirección de la corriente.

b) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ en sentido antihorario mirando a la corriente.

c) La dirección del vector Poynting $\hat{S} = \hat{E}\times\hat{B}$, con la corriente en la dirección *z*.
Su magnitud es

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\frac{gI}{\pi a^2}\frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{gI^2}{2\pi^2 a^3}$$

d) Sobre una longitud ℓ, la razón con la que ingresa la energía es

$$SA = \frac{\rho\,\ell^2}{2\pi^2 a^3}2\pi a l = \frac{\rho\, l\,\ell^2}{\pi a^2}$$

La pérdida de energía térmica es

$I^2 R = I^2 \dfrac{g\,\ell}{A} = \dfrac{g\,\ell I^2}{\pi a^2}$, que es exactamente igual al flujo de la energía electromagnética.

Ejemplo 21. Cierto condensador consiste en dos placas circulares de radio *r* separadas por una distancia *d*. Sin tener en cuenta el pestañeo, demuestre que, durante el proceso de carga del condensador. La rapidez de flujo de energía hacia el espacio entre las placas es igual a la rapidez con la que aumenta la energía electrostática almacenada en el condensador. (Sugerencia: Integre $\vec{S}$ sobre la superficie del volumen cilíndrico vacío comprendido entre las placas).

Solución.

$B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$, y $\oint_S \vec{E}\cdot \hat{n} dA = EA = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$E = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0 r^2}$ tal que la magnitud del vector Poynting

es $S = \dfrac{EB}{\mu_0} = \dfrac{qi}{2\varepsilon_0\pi^2 r^3} = \dfrac{q}{2\varepsilon_0\pi^2 r^3}\dfrac{dq}{dt}$.

Ahora, la razón del flujo de energía en la región entre las placas es:

$$\int \vec{S}\cdot\hat{n} dA = S(2\pi r\ell) = \frac{\ell q}{\varepsilon_0 \pi r^2}\frac{dq}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\ell}{\varepsilon_0\pi r^2}\frac{d(q^2)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\ell}{\varepsilon_0 A}q^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{dU}{dt}$$

Éste es la razón de incremento en la energía electrostática *U* almacenada en el condensador.

Ejemplo 22. Se puede usar una espira circular de alambre como antena de radio. Si una antena de 18,0 cm de diámetro está situada a 2,0 km de una fuente de 95,0 MHz con una potencia total de 55,0 kW, ¿cuál es la fuerza electromotriz máxima que se induce en la espira? (Suponga que el plano de la espira de la antena es perpendicular a la dirección del campo magnético de la radiación y que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones).

Solución.

La potencia de la antena es $P = IA = \dfrac{cB_{max}^2}{2\mu_0}4\pi r^2$

Tal que

$$B_{max} = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{4\pi r^2 c}} = \sqrt{\frac{2\mu_0(5{,}50\times 10^4\ )}{4\pi(2500\ )^2(3{,}00\times 10^8\ )}}$$

$= 2{,}42\times 10^{-9}$ T $\Rightarrow$

$$\frac{dB}{dt} = \omega B_{max} = 2\pi f B_{max}$$

$= 2\pi(95{,}0\times 10^6)\,(2{,}42\times 10^{-9})$

$= 1{,}44$ T/s $\Rightarrow$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = \frac{\pi D^2}{4}\frac{dB}{dt}$$

$$= \frac{\pi(0{,}180\ )^2(1{,}44\ )}{4} = 0{,}0366 \text{ V}$$

Ejemplo 23. Se ha propuesto colocar en órbita terrestre un satélite recolector de energía solar. La potencia recogida se enviaría a la Tierra en forma de un haz de radiación de microondas. En el caso de un haz de microondas con un área de sección transversal de 36,0 m^2 y una potencia total de 2,80 kW en la superficie terrestre, ¿cuál es la amplitud del campo eléctrico del haz en la superficie del planeta?

Solución.

$$I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E^2$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2(2{,}80\times 10^3/36)}{\varepsilon_0(3{,}00\times 10^8\ )}}$$

$= 242$ V/m.

Ejemplo 24. Linterna al rescate. Usted es el único tripulante de la nave espacial interplanetaria T:1339 Vorga, que lleva a cabo misiones de carga entre la Tierra y las colonias mineras del cinturón de asteroides. Cierto día usted está trabajando afuera de la nave, a una distancia de 2,0 UA del Sol. [1 UA (unidad astronómica) es la distancia promedio de la Tierra al Sol: 149 600 000 km.). Por desgracia, usted pierde contacto con el casco de la nave y comienza a alejarse hacia el espacio. Entonces intenta regresar hacia la nave con ayuda de los cohetes de su traje espacial, pero el combustible se agota y los cohetes dejan de funcionar antes que usted consiga regresar a la nave. Se halla usted en una situación difícil, flotando a 16,0 m de la nave con velocidad cero respecto a ella. Por fortuna, usted tiene una lámpara de 200 W, la cual enciende para utilizar su haz como un “cohete de luz” que lo impulse de regreso a la nave,

a) Si usted, su traje espacial y la lámpara tienen en conjunto una masa de 150 kg, ¿Cuánto tiempo tardará en regresar a la nave?

b) ¿Existe alguna otra forma de utilizar la lámpara para conseguir el mismo objetivo de regresar a la nave?

Solución.

a) Encontrar la fuerza sobre la persona debido a la cantidad de movimiento por la luz:

$p_{rad} = I/c$ y $F = p_{rad}\,A$ da

$F = I\,A/c = P_{av}/c$

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{P_m}{mc} = \frac{200}{(150)(3,00\times 10^8)}$$
$= 4,44\text{x}10^{-9}$ m/s^2

Luego $x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ da

$$t = \sqrt{\frac{2(x - x_0)}{a_x}} = \sqrt{\frac{2(16,0)}{4,44\times 10^{-9}}}$$
$= 8,49$ x 10^4 s = 23,6 h

La fuerza de la radiación es muy pequeña. En el cálculo hemos no se ha tomado en cuenta cualquier otra fuerza obre la persona.

b) Podrías lanzar la linterna en la dirección fuera de la nave. Por la conservación de la cantidad de movimiento lineal te moverías hacia la nave con la misma magnitud de la cantidad de movimiento que diste a linterna.

Ejemplo 25. El inventor Nikola Tesla, del siglo XIX, propuso transmitir energía eléctrica por medio de ondas electromagnéticas sinusoidales. Suponga que se pretende transmitir energía eléctrica en un haz con un área de sección transversal de 100 m^2. ¿Qué amplitudes de campo eléctrico y magnético se requieren para transmitir una cantidad de potencia equivalente a la que manejan las líneas de transmisión modernas, las cuales tienen voltajes y corrientes del orden de 500 kV y 1000A?

Intensidad I , corriente i .

Solución.

$$P = IA \Rightarrow I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E^2$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{\frac{2P}{A\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2Vi}{A\varepsilon_0 c}} \Rightarrow$$

$$E = \sqrt{\frac{2Vi}{A\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2(5,00\times 10^5)(1000)}{(100)\varepsilon_0 (3,00\times 10^8)}}$$
$$= 6,14\times 10^4 \text{ V/m}$$

$$B = \frac{E}{c} = \frac{6,14\times 10^4}{3,00\times 10^8} = 2,05\times 10^4 \text{ T}$$

Ejemplo 26. El espacio interplanetario contiene muchas partículas pequeñas conocidas como polvo interplanetario. La presión de radiación proveniente del Sol fija un límite inferior al tamaño de estas partículas de polvo. Para comprender el origen de este límite, considere una partícula esférica de polvo de radio *R* y densidad de masa p.

a) Escriba una expresión de la fuerza gravitatoria que el Sol (masa *M*) ejerce sobre la partícula cuando ésta se halla a una distancia *r* del Sol.

b) Sea *L* la luminosidad del Sol, equivalente a la rapidez con la que emite energía en forma de radiación electromagnética. Halle la fuerza que se ejerce sobre la partícula (totalmente absorbente) debido a la presión de radiación solar. El área pertinente es el área de sección transversal de la partícula, no su área total. Como parte de su respuesta, explique por qué es así.

c) La densidad de masa de una partícula representativa de polvo interplanetario es de alrededor de 3000 kg/m^3. Halle el radio de partícula R con el que las fuerzas gravitatoria y de radiación que actúan sobre la partícula son de igual magnitud. La luminosidad del Sol es de 3,0 x10^{26} W. ¿Depende su respuesta de la distancia entre la partícula y el Sol? ¿Por qué?

d) Explique por qué es poco probable hallar en el Sistema Solar partículas de polvo con un radio menor que el calculado en el inciso (c). [Sugerencia: Construya la relación de las dos expresiones de fuerza halladas en los incisos (a) y (b)].

Solución.

a) $$F_G = \frac{GM_S m}{r^2} = \frac{GM_S}{r^2}\frac{4\pi R^3\rho}{3}$$
$$= \frac{4\pi GM_S R^3\rho}{3r^2}$$

b) Si se asume que la radiación del sol es interceptada por la sección transversal de la partícula, podemos escribir la fuerza sobre la partícula como:

$$F = \frac{IA}{c} = \frac{L}{4\pi r^2}\frac{\pi R^2}{c} = \frac{LR^2}{4cr^2}$$

c) Si la fuerza de la gravedad y la fuerza de la presión de la radiación en una partícula del sol son iguales, podemos resolver para el radio de la partícula:

$$F_G = F \Rightarrow \frac{4\pi GM_S R^3\rho}{3r^2} = \frac{LR^2}{4cr^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{3L}{16\pi GM_S\rho c} \Rightarrow$$

$$R = \frac{3(3,9\times 10^{26})}{16\pi\,(6,7\times 10^{-11})\,(2,0\times 10^{30})\,(3000 \text{ kg/m}^3)\,(3,0\times 10^8)}$$

$$\Rightarrow R = 1.9\times 10^{-7} \text{ m}$$

d) Si la partícula tiene un radio más pequeño que lo encontrado en la parte (c), entonces la presión de la radiación supera la fuerza gravitacional y tiene como resultado una aceleración alejándose del sol, de esta manera quita tales partículas del Sistema Solar.

Ejemplo 27. La NASA está considerando seriamente el concepto de navegación solar a vela. Un velero solar utiliza una vela grande, de poca masa, y la energía y la cantidad de movimiento de la luz solar para impulsarse.

a) ¿Cómo debe ser la vela: absorbente o reflectante? ¿Por qué?

b) La producción total de potencia del Sol es de 3,9 x 10^{26}W. ¿De qué tamaño debe ser una vela para impulsar un vehículo espacial de 10000kg contra la

fuerza gravitatoria del Sol? Exprese su resultado en kilómetros cuadrados.
c) Explique por qué su respuesta al inciso (b) es independiente de la distancia respecto al Sol.
Solución.
a) La transferencia de la cantidad de movimiento es siempre mayor cuando se utilizan superficies reflectoras (considere una bola que choca con una pared, la pared ejerce una mayor fuerza si la bola rebota en lugar de pegarse). Tal que en navegación solar es mejor utilizar una vela reflectora.
b) La ecuación para la repulsión viene de equilibrar la fuerza gravitacional y la fuerza de la presión de la radiación. Según lo visto en el problema anterior, lo último es:

$F_{\text{rad}} = \dfrac{2LA}{4\pi r^2 c}$ Así: $F_G = F_{\text{rad}} \Rightarrow$

$$\frac{GM_S m}{r^2} = \frac{2LA}{4\pi r^2 c} \Rightarrow A = \frac{4\pi G M_S mc}{2L} \Rightarrow$$

$$A = \frac{4\pi(6{,}7\times10^{-11})(2{,}0\times10^{30})(10000)(3{,}0\times10^{8})}{(2)3.9\times10^{26}}$$

$$\Rightarrow A = 648\times10^{6}\ \text{m}^2 = 6{,}48\ \text{km}^2$$

c) Esta respuesta es independiente de la distancia del sol desde que la fuerza gravitacional y la presión de la radiación disminuyen con el cuadrado de la distancia, y la distancia se cancela del problema.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. a) Demostrar que la ecuación $E_y = E_{y0}\text{sen}(kx - \omega t)$ puede escribirse en la forma $E_y = E_{y0}\text{sen}k(x - ct)$, siendo $c = \dfrac{\omega}{k}$. ¿En qué sentido se mueve esta onda?
b) Sustituir esta función en la ecuación $\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$ y demostrar que se satisface esta ecuación si $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$.
c) Utilizar los valores conocidos de μ_0 y ε_0 en unidades SI para demostrar que $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ vale aproximadamente 3x10^8 m/s.
Respuesta.
a) La onda se está moviendo en la dirección *x*.

2. a) Demostrar que el valor medio cuadrático del campo eléctrico en una onda a relacionado con la intensidad *I* por $E_{rms} = \sqrt{\mu_0 c I}$
b) Demostrar que $B_{rms} = \dfrac{E_{rms}}{c}$.

3. Una onda electromagnética tiene una intensidad *I* =100 W/m^2. Hallar E_{rms} y B_{rms}.
Respuesta.
E_{rms} = 194 V/m, B_{rms} = 6,47 mG

4. Demostrar que el vector de Poynting $\vec{S} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ tiene unidades de W/m^2.

5. La amplitud de una onda electromagnética es E_0 = 400 V/m. Hallar
a) B_0,
b) la densidad de energía electromagnética total media y
c) la intensidad.
Respuesta.
a) 13,3 mG, b) 7,08x10^{-7} J/m^3, c) 212 W/m^2.

6. Un haz de láser tiene un diámetro de 1,0 mm y una potencia media de 1,5mW. Hallar la intensidad del haz y E_{rms} y B_{rms}.
Respuesta.
I = 1,91 kW/m^2, E_{rms} = 849 V/m, B_{rms} = 28 mG

7. a) Deducir la ecuación $\dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t}$. (b) Eliminar E de las ecuaciones $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial B_z}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t}$ para obtener la ecuación de onda correspondiente a B_z.

8. Una fuente o foco puntual emite radiación uniformemente en todas direcciones.
a) Demostrar que si m es su potencia media, la intensidad a una distancia r es $I = \dfrac{P_m}{4\pi r^2}$.
b) Si la intensidad de la luz solar que incide sobre las capas superiores de la atmósfera terrestre es 1400 W/m^2, hallar la emisión de potencia del Sol
c) Hallar E_{rms} y B_{rms} debido al Sol en las capas superiores de la atmósfera terrestre.
Respuesta.
b) 3,9x1026 W
c) E_{rms} = 726 V/m, B_{rms} = 24,2 mG

9. Suponer que un foco incandescente de 100 W es un foco puntual que radia uniformemente en todas direcciones.
a) Hallar la intensidad del foco a 1,0 m.
b) Suponiendo que la onda es plana, hallar E_{rms} y B_{rms} a esta distancia.

10. Por un conductor cilíndrico largo de radio *a* y resistividad ρ circula una corriente constante *I* distribuida uniformemente en toda su sección recta.
a) Utilizar la ley de Ohm para relacionar el campo eléctrico $\vec{E}$ en el conductor con I, ρ y *a*.
b) Hallar el campo magnético $\vec{B}$ en el exterior y junto al conductor.
c) En $r = a$ (superficie del conductor) utilizar los resultados de las partes (a) y (b) para calcular el vector Poynting $\vec{S} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$. ¿Qué sentido tiene $\vec{S}$?
d) Hallar el flujo de $\vec{S}$ a través de la superficie del conductor de longitud *L* y área $2\pi aL$ y demostrar que la potencia que entra en el conductor es igual a I^2R, siendo *R* la resistencia.

ÓPTICA



Hugo Medina Guzmán

Profesor de la Pontificia Universidad Católica del Perú

Junio 2011

PALABRAS PREVIAS

En este trabajo he reunido el material utilizado en los tiempos que enseñaba temas de Óptica en la Física General de los Estudios generales de la Pontificia Universidad católica del Perú. Primero como parte de Física 4 y cuando la Física General se redujo a tres partes pasó a formar parte de Física 2. Finalmente fue retirado de la Física General.

Espero que el esfuerzo en la elaboración de este documento sea de utilidad tanto para los estudiantes como para los profesores. Toda opinión al respecto será bienvenida.

Hugo Medina Guzmán

Lima, Junio de 2011.

CONTENIDO

NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ

ÓPTICA GEOMÉTRICA 1
REFLEXIÓN, ESPEJOS PLANOS Y ESFÉRICOS

ÓPTICA GEOMÉTRICA 2
REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE LA LUZ

ÓPTICA ONDULATORIA

NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ

Hasta el tiempo de Isaac Newton (1642 – 1727), la mayoría de los científicos pensaban que la luz consistía en corriente de partículas (conocidas como corpúsculos) 3mitidas por las fuentes de luz. Hacia 1665 se empezaron a descubrir pruebas de las propiedades ondulatorias de la luz. A principios del siglo XIX, ya era muy evidente que la luz era una onda.
En 1873, James Clerk Maxwell predijo la existencia de las ondas electromagnéticas y calculó su rapidez de `propagación. En conjunto con el trabajo experimental de Heinrich Hertz, iniciado en 1887, demostró de manera concluyente que la luz es una onda electromagnética.

La naturaleza ondulatoria de la luz no es todo. Varios aspectos asociados con la emisión y la absorción de la luz revelan que esta tiene un aspecto corpuscular, según el cual la energía transportada por las ondas luminosas está en paquetes discretos conocidos como fotones o cuantos.
Estas propiedades ondulatorias y corpusculares aparentemente contradictorias han sido reconciliadas desde 1930 con el desarrollo de la electrodinámica cuántica. Una teoría que incluye ambas propiedades ondulatorias y corpusculares.
La propagación de la luz se describe mejor mediante el modelo ondulatorio, pero para comprender la emisión y la absorción se requiere un planteamiento corpuscular.
Las fuentes fundamentales de toda radiación electromagnética son cargas aceleradas. Todos los cuerpos emiten radiación electromagnética por el movimiento térmico de sus moléculas; esta radiación térmica es una mezcla de diferentes Longitud de onda. A temperatura lo suficientemente elevadas, toda materia emite la suficiente luz visible para ser auto luminosa; un cuerpo muy caliente se pone al rojo vivo o incandescente.
Sin importar su fuente, la radiación electromagnética se desplaza en el vacío con la rapidez de la luz.

MEDICIÓN DE LA VELOCIDAD DE LA LUZ

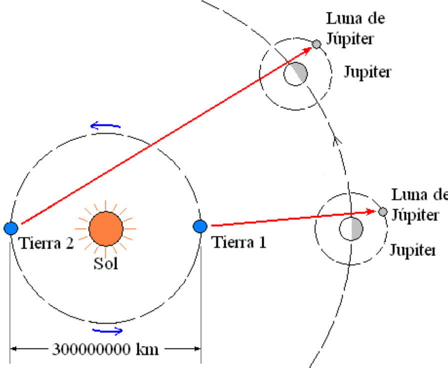
Uno de los primeros intentos para medir la velocidad que conocemos fue hecho por Galileo en la década de 1600. Usó el método simple de tratar de medir el tiempo que un rayo de luz se tardaría en recorrer una distancia conocida.



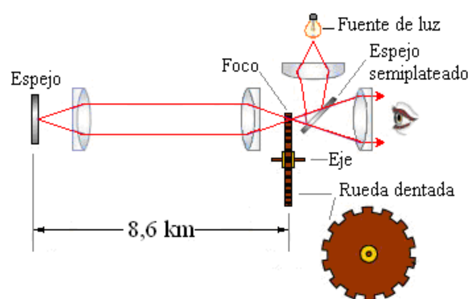
Equipado Galileo y un asistente con linternas que tenían un obturador que se abre, interrumpiendo la luz. Su ayudante estaba en una colina a varios kilómetros de distancia. Galileo abrió el obturador, dejando un haz de luz hacia a su asistente. Esa persona abre su linterna en el instante en que ve la luz, envía un haz de nuevo a Galileo. El tiempo que transcurre entre la primera apertura de Galileo y ver el haz de retorno, se suponía que permitiría calcular la velocidad de la luz.
Desafortunadamente, después de repetir el experimento varias veces a diferentes distancias, descubrió que el desfase no cambió. No se incrementó con mayores distancias. De hecho, el retraso era debido a la longitud de tiempo que se tardó en abrir las persianas. Galileo llegó a la conclusión de que la luz viajaba demasiado rápido para medir de esta manera.

Más tarde, en 1676, otro científico, un astrónomo Danés Olaf Roemer fue la observación de eclipses de las lunas de Júpiter. Al observar a través de un telescopio las lunas de Júpiter orbitando, pudo observar el momento exacto en que la luna se situó detrás de Júpiter. Después de muchos años de observaciones, se dio cuenta de que los intervalos de tiempo de tiempo entre los eclipses no siempre son los mismos. Debido a esto se imaginó cual era la razón.
La luz de la luna eclipsándose a veces llevaba un

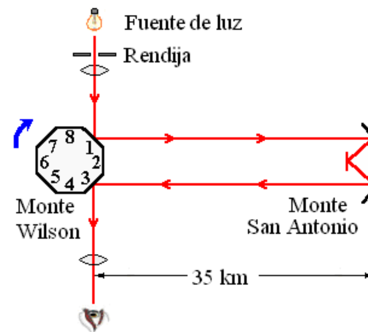
tiempo relativamente corto para llegar a la tierra, esto sucedía en la posición 1. En otro momento durante el año, sin embargo, en la posición 2 cuando la tierra estaba en una parte más alejada de su órbita, la luz de la luna de Júpiter que tarda más en llegar a tierra.
Esto hizo que el intervalo entre los eclipses se alargara, valor, obtuvo 2 x 10^8 m/s.



La primera medición terrestre fue realizada por el científico francés Armand Fizeau en 1849, utilizando un haz de luz reflejado interrumpido por un disco con muescas, obtuvo 3,153 x 10^8 m/s. Perfeccionado un año más tarde por León Foucault para alcanzar resultados más precisos. El valor de la velocidad de la luz obtenido en esa ocasión, El valor de la velocidad de la luz que obtuvo fue 2,98 x 10^8 m/s, superior en un 1% al aceptado actualmente.



Un experimento más fácilmente entendido fue realizado en 1879 por un científico Albert Michelson. Su aparato utilizó un espejo rotativo octagonal en lugar de la rueda dentada, y un segundo espejo, como se muestra en el esquema:



El método de Michelson consistía en aplicar un haz de luz sobre el espejo rotativo octagonal, la luz se reflejo a otro espejo situado a 35 Km de distancia. La luz que reflejó este segundo espejo golpeó otra cara del espejo octagonal, y entonces podría ser vista por un observador. El espejo tuvo que hacer un octavo de rotación en el tiempo que se tomó la luz para hacer el viaje de vuelta. Esto indica que el espejo octagonal tuvo que dar vuelta a aproximadamente 32000 revoluciones por minuto.

Con la distancia del viaje de ida y vuelta de la luz y el período de rotación del espejo octagonal, la velocidad de luz fue determinada con bastante exactitud.
Del análisis de todas las mediciones hechas hasta 1983, el valor más probable de la rapidez de la luz era
c = 2, 99792458 x 10^8 m/s.

Cálculo teórico de la velocidad de la luz

De todas las ondas solamente la onda plana, ya sea armónica o no, se mueve a través del espacio con un perfil que no cambia
Recordemos la ecuación diferencial de la onda

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Cuya solución tiene la forma

$$\psi(r,t)=A\,\text{sen}(kr-\omega t),\ \text{con}\ v=\frac{\omega}{k}$$

Las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre se pueden transformar en dos expresiones vectoriales concisas:

$$\nabla^2\vec{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\ \text{y}\ \nabla^2\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

En coordenadas cartesianas son;

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$
y
$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Cada componente del campo electromagnético $\left(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y \text{ y } B_z\right)$ obedece la ecuación diferencial escalar de la onda electromagnética a condición que en la ecuación

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Siempre que se cumpla $v=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

Reemplazando valores conocidos
Permitividad del espacio libre

$$\varepsilon_0=8,85\times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C^2\,s^2}}{\mathrm{kg\,m^3}}$$

Permeabilidad del espacio libre

$$\mu_0=4\pi\times 10^{-7}\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{C^2}}$$

Obtenemos

$$\varepsilon_0\mu_0=\left(8,85\times 10^{-12}\right)\left(4\pi\times 10^{-7}\right)$$
$$=11,12\times 10^{-18}\ \frac{\mathrm{s^2}}{\mathrm{C^2}}$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2,99863380\times 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

El valor teórico estaba de acuerdo con la velocidad de la luz determinada previamente por Fizeau en 1849. Este análisis es uno de los grandes triunfos intelectuales de todos los tiempos.
La velocidad de la luz en el vacío se designa por el símbolo *c*.
Valor aceptado actualmente
c = 2,997924562 x 10^8 ± 1,1 m/s

VELOCIDAD DE LA LUZ EN MEDIOS NO CONDUCTORES

El efecto neto de introducir un dieléctrico (elemento no conductor) homogéneo en una región de espacio libre es cambiar ε_0 a ε y μ_0 a μ en las ecuaciones de Maxwell.
La velocidad de fase es ahora

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Donde $\varepsilon = K_e\varepsilon_0$, permitividad de un material, siendo K_e la constante dieléctrica y
$\mu = K_m\mu_0$, permeabilidad del medio particular, siendo K_m la permeabilidad relativa

Índice de refracción

La razón entre las velocidades de una onda electromagnética en el vacío y en la materia se conoce como índice de refracción *n* y esta dado por

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}=\sqrt{K_e K_m}$$

La gran mayoría de las sustancias con excepción de los materiales ferromagnéticos, son muy débiles en lo magnético. Considerando K_m = 1 la expresión para *n* queda
$n=\sqrt{K_e}$, conocida como la relación de Maxwell

Tabla 3.1. Relación de Maxwell

Gases a 0º C y 1 atm		
Sustancia	$\sqrt{K_e}$	n
Aire	1,000294	1,000293
Helio	1,000034	1,000034
Hidrógeno	1,000131	1,000132
Bióxido de carbono	1,0049	1,00045

Líquidos a 0º C y 1 atm		
Sustancia	$\sqrt{K_e}$	n
Benceno	1,51	1,501
Agua	8,96	1,333
Alcohol etílico	5,08	1,361
Tetracloruro de carbono	4,63	1,461
Bisulfuro de carbono	5,04	1,628

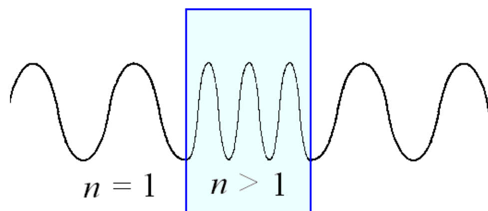
Sólidos a 0º C y 1 atm

Sustancia	$\sqrt{K_e}$	n
Diamante	4,06	2,419
Ambar	1,6	1,55
Sílice fundida	1,94	1,458
Cloruro de sodio	2,37	1,50

La relación parece ser efectiva solo para algunos gases simples. La dificultad aparece porque K_e y por consiguiente n son dependientes de la frecuencia.

Retraso de una onda en un medio más denso.

Considerando la ecuación $n = \frac{c}{v}$, encontramos que la velocidad de la luz en un medio diferente al vacío es $v = \frac{c}{n}$, siendo $v = \lambda f$, como la frecuencia no varía de un medio a otro lo que varía es la longitud de onda, transmitiéndose como onda refractada.



Ejemplo 1. Una luz de longitud de onda en el espacio libre λ_0 = 500 nm pasa del vacío al diamante (n_d = 2,4). En circunstancias normales la frecuencia de la luz no se altera al atravesar diferentes sustancias. En tal supuesto, calculare la velocidad de la onda y la longitud de onda en el diamante,

Solución.

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3\times 10^8}{2,4} = 1,25 \text{ x } 10^8 \text{ m/s}$$

La longitud de onda

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 f}{\lambda f} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Como λ_0 = 500 nm

$$\lambda = \frac{500\text{nm}}{2,4} = 208 \text{ nm.}$$

Ejemplo 2. Demostrar que la longitud óptica de un haz de luz, se define como la longitud geométrica multiplicada por el índice de refracción del medio en el que la luz se mueve. Distancia equivalente a la que tendría la luz si hubiera viajado en el vacío.

Solución. La longitud óptica $n\ell = \frac{c}{v}\ell$, v es la velocidad de la luz en el medio.

La luz viaja con velocidad constante en el medio, luego el tiempo que toma la luz para recorrer la trayectoria.

$$t = \frac{\ell}{v}$$

Luego $n\ell = ct = \ell_0$

ℓ_0 es la distancia que la luz hubiera viajado a la velocidad c, que es, en el vacío. Luego la distancia óptica es equivalente a la que la luz hubiera viajado en el mismo tiempo en el vacío.

Ejemplo 3. Una onda infrarroja armónicas plana que se desplaza en un medio transparente está dada por

$$E_y(x,t) = E_{máx}\text{sen}2\pi\left(\frac{x}{5\times 10^{-7}} - 3\times 10^{14} t\right)$$

En unidades SI. Determinar el índice de refracción del medio a esa frecuencia y la longitud de onda de la perturbación en el vacío.

Solución.

$$k = \frac{2\pi}{5\times 10^{-7}} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 5\times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\omega = 6\pi\times 10^{14} = 2\pi f \Rightarrow f = 3\times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$v = \lambda f = (5\times 10^{-7})(3\times 10^{14}) = 1,5\times 10^8 \text{ m/s}$$

El índice de refracción

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3\times 10^8}{1,5\times 10^8} = 2$$

La longitud de onda de la perturbación en el vacío.

$$\lambda_0 = n\lambda = 2(5\times 10^{-7}) = 10\times 10^{-7} \text{ m} = 1000 \text{ nm}$$

Ejemplo 4. La luz de una lámpara de sodio (λ_0 = 589 nm) pasa a través de un tanque de glicerina de 20 m de largo (índice de refracción 1,47) en un tiempo t_1. Si se toma un tiempo t_2 para atravesar el mismo tanque lleno de bisulfuro de carbono (índice de refracción 1,63), determinar la diferencia $t_2 - t_1$.

Solución.

$$v = \frac{c}{n},\ v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{d}{c/n} = \frac{d\,n}{c}$$

Para la glicerina

$$t_1 = \frac{20(1{,}47)}{3\times 10^8}$$

Para el bisulfuro de carbono

$$t_2 = \frac{20(1{,}63)}{3\times 10^8}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{20(1{,}63)}{3\times 10^8} - \frac{20(1{,}47)}{3\times 10^8}$$

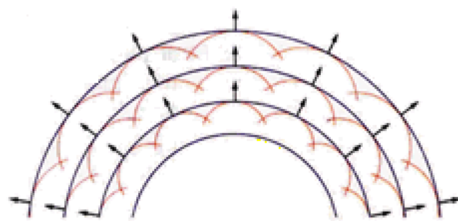
$$= \frac{20}{3\times 10^8}(1{,}63 - 1{,}47) = 1{,}07\times 10^{-8}\ \text{s}$$

PRINCIPIO DE HUYGENS

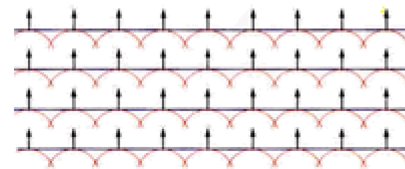
"Cada punto en un frente de onda primario sirve como fuente de onditas esféricas secundarias tales que el frente de onda primario un momento más tarde es la envolvente de estas onditas. Además, las onditas avanzan con una rapidez y frecuencia igual a la del a onda primaria en cada punto del espacio"

Trazado de Frentes de Onda

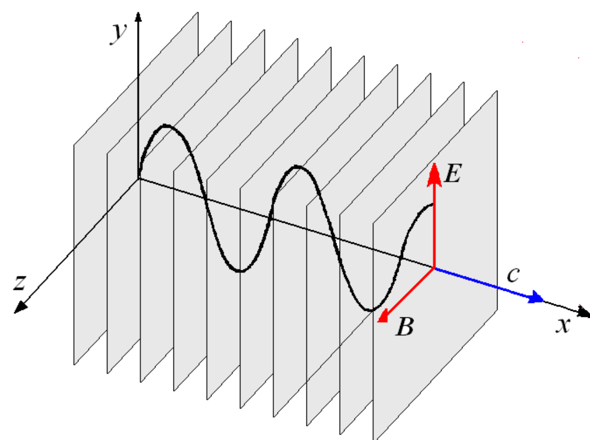
La radiación electromagnética se expande desde un emisor puntual, cualquier superfície esférica concéntrica con la fuente es un frente de onda. En los diagramas de movimiento ondulatorio dibujamos solo parte de unos cuantos frentes de onda, a menudo escogiendo frentes consecutivos que tienen la misma fase y por lo tanto están separados una longitud de onda, como las crestas de una onda en la superficie del agua. En las ondas sonoras podría mostrar solo las crestas de presión, las superficies de presión máxima. Las ondas electromagnéticas podrían mostrar solo las crestas sobre las cuales el campo eléctrico o magnético es máximo.



Cuando el frente de onda es amplio, de gran radio se puede considerar como un frente onda plano

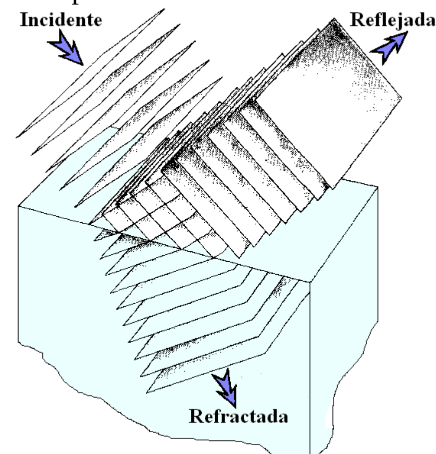


A menudo utilizamos diagramas que muestren la forma de los frentes de onda o de su sección transversal en algún plano de referencia



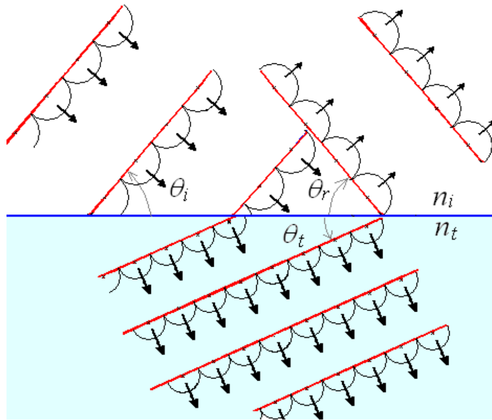
LA LEY DE SNELL Y LA LEY DE LA REFLEXIÓN

Reflexión y transmisión de ondas planas. Consideremos una onda plana monocromática incidente en una interfase lisa que separa dos medios transparentes diferentes.

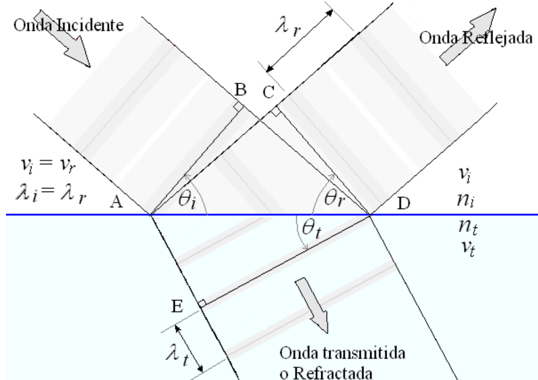


Reflexión y transmisión en una medio del principio de Huygens. Vamos a determinar el

comportamiento de la onda usando la construcción de Huygens. Cada punto del frente de onda plana es fuente de una ondita secundaria.



El número de ondas primarias que llegan a la interfase por segundo corresponde a la frecuencia de la onda incidente. Entonces las ondas reflejadas y las transmitidas y por consiguiente las onditas secundarias tendrán la misma frecuencia.



Tomemos frentes de onda reflejados y transmitidos en un instante dado

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\mathrm{BD}} = \frac{\operatorname{sen}\theta_r}{\mathrm{AC}} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t}{\mathrm{AE}} = \frac{\operatorname{sen}90^{\circ}}{\mathrm{AD}}$$

Como

$$\mathrm{BD} = v_i t\,,\ \mathrm{AC} = v_i t\,,\ \mathrm{AE} = v_t t\,,$$

Obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{v_i} = \frac{\operatorname{sen}\theta_r}{v_i} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t}{v_t}$$

Trabajando con

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{v_i} = \frac{\operatorname{sen}\theta_r}{v_i} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\theta_i = \operatorname{sen}\theta_r \Rightarrow$$

$$\theta_i = \theta_r$$

Esta es **la ley de la reflexión.**

Trabajando con

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{v_i} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t}{v_t} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t} = \frac{v_i}{v_t}$$

Siendo

$$\frac{v_i}{v_t} = \frac{n_t}{n_i}$$

Obtenemos

$$n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_t \operatorname{sen}\theta_t$$

Esta es **la ley de la refracción**

Ejemplo 5. Un haz de luz colimado o sea que tiene rayos paralelos, que se propaga en aire, forma un ángulo de 30º con la normal a una lámina de vidrio. Sí el índice del vidrio es n_v =1,5, determinar la dirección del haz transmitido dentro de la lamina.

Solución.

Aplicando la ley de Snell

$$n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_t \operatorname{sen}\theta_t \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\theta_t = \frac{n_i}{n_t}\operatorname{sen}\theta_i = \frac{1}{1,5}\operatorname{sen}30^{\circ}$$

$$= \frac{1}{1,5}(0,5) = 0,333 \Rightarrow$$

$$\theta_t = 19,47^{\circ}$$

Ejemplo 6. Imagine la superficie de separación entre dos regiones, una de vidrio (n_v = 1,5) y la otra de agua (n_a = 1,33). Un rayo que se propaga en el vidrio incide sobre la superficie de separación con un ángulo de 45º y se refracta dentro del agua- ¿Cuál es el ángulo de transmisión?

Solución.

Aplicando la ley de Snell

$$n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_t \operatorname{sen}\theta_t \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_t = \frac{n_i}{n_t}\operatorname{sen}\theta_i$$

Ángulo de incidencia θ_i = 45º

El medio de incidencia es el vidrio n_i = 1,5

El medio de refracción es el agua n_t = 1,33

Reemplazando valores:

$$\operatorname{sen}\theta_t = \frac{1,5}{1,33}\operatorname{sen}45^{\circ} = \frac{1,5}{1,33}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,797$$

$$\Rightarrow\ \theta_t = 52,89^{\circ}$$

RAYOS DE LUZ

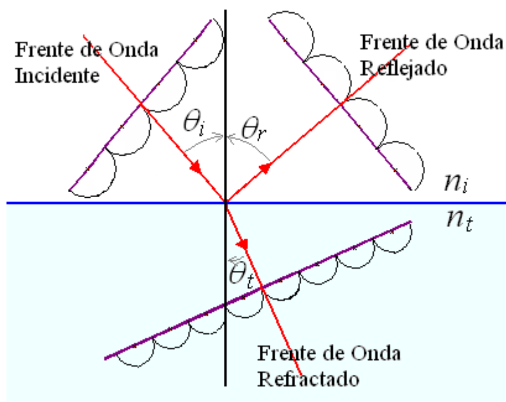
Un rayo es una línea en el espacio que corresponde a la dirección del flujo de la energía radiante. Es un instrumento matemático y no un a entidad física. En la práctica se pueden producir finos haces de luz por ejemplo el haz láser.

El rayo es perpendicular al frente de onda. El rayo incidente y la normal determinan el plano de incidencia

Se cumplen las leyes básicas de la reflexión y refracción

Los rayos incidente, reflejado y refractado están en el plano de incidencia

Se cumple que $\theta_i = \theta_r$ y $n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_t \operatorname{sen}\theta_t$, donde los ángulos θ_i, θ_r y θ_t tienen exactamente los mismos significados que antes, se miden desde la normal a la interfase.

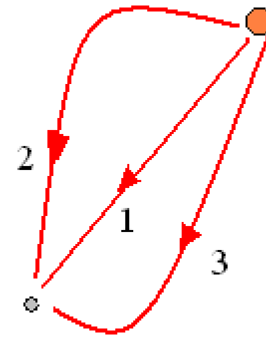


Vamos a utilizar el modelo de rayos y la suposición de que $\lambda << d$, ambos de los cuales tratan con la óptica geométrica. Esta aproximación es muy buena para el estudio de los espejos, lentes, prismas e instrumentos ópticos, tales como telescopios, cámaras y lentes.

PRINCIPIO DE FERMAT

El principio establece que si la luz va de un punto A, a otro punto B, por una trayectoria "l", ésta es tal que, el camino óptico a lo largo de ella es mínimo comparado con otras trayectorias próximas a "l". Es decir, podemos definirlo como: el camino óptico a lo largo de una trayectoria real de luz es estacionario, que en la imagen correspondería al camino (1).

El principio de Fermat nos da una forma muy útil y altamente comprensible de apreciar y anticipar el comportamiento de la luz.

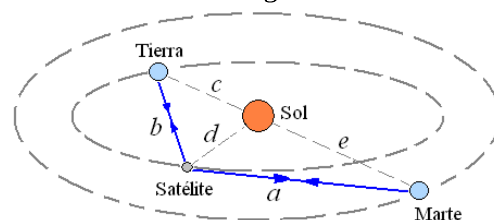


Ejemplo 7. Cuando viajes a otros planetas se hayan convertido en una realidad, la comunicación entre un viajero del espacio y la tierra se convertirá en un problema, en parte por la velocidad finita de las ondas electromagnéticas y en parte por interponerse el sol en la trayectoria de las señales en determinados momentos. Para solucionar esto se ha propuesto colocar un satélite en la órbita de la Tierra en un ángulo de 90 º a la tierra para que la comunicación sea posible en todo momento.

Dado que Marte y la Tierra están en lados opuestos del sol y que se ha colocado el satélite, calcular el tiempo mínimo entre el envío de un mensaje por un astronauta en Marte y la recepción de la respuesta. Se puede considerar Marte y la Tierra que están viajando en órbitas circulares de los radios de 230 x 10^6 km y 150 x 10^6 km, respectivamente.

Solución.

La disposición de los planetas y del satélite es como se muestra en el diagrama.

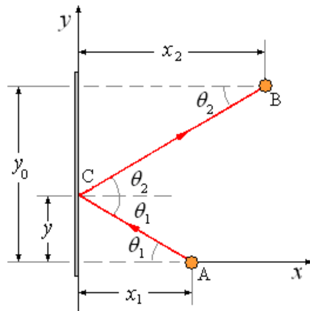


Distancia		km
Marte - Satélite	a	$\sqrt{c^2 + d^2}$
Tierra - Satélite	b	$\sqrt{e^2 + d^2}$
Sol - Tierra	c	150 x 10^6
Sol - Satélite	d	150 x 10^6
Sol - Marte	e	230 x 10^6

El tiempo mínimo se produce cuando la tierra recibe el mensaje por la ruta Tierra – satélite -

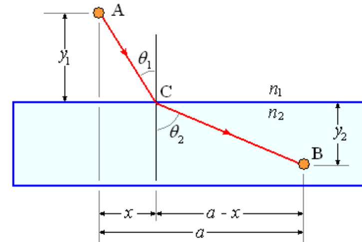
Marte y transmite la respuesta de manera inmediata por el mismo camino.
La distancia total recorrida es
$2(a+b)$
Por el teorema de Pitágoras
$a=\sqrt{c^2+d^2}$ y $b=\sqrt{e^2+d^2}$
Luego
$$2(a+b)=2\left(\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{e^2+d^2}\right)$$
Reemplazando
$$2(a+b)=2\times10^6\left(\sqrt{2(150)^2}+\sqrt{(30)^2+(150)^2}\right)$$
$$=973{,}4\times10^6\text{ km } = 973\text{ x }10^9\text{ m}$$
Las ondas electromagnéticas viajan a una velocidad constante c = 2,998 x 10^8 m/s, por lo tanto el tiempo mínimo entre el envío de un mensaje por un astronauta en Marte y la recepción de la respuesta es:
$$t=\frac{2(a+b)}{c}=\frac{973\times10^9}{2{,}998\times10^8}$$ = 3245,49 s = 54,1 min

Ejemplo 8. Demostrar que cuando la luz pasa de un punto a otro reflejándose en un espejo plano, la trayectoria es la que toma el menor tiempo.
Solución.
En la figura x e y son los ejes, un haz de luz que sale del punto A (x_1, 0) incide sobre el espejo en el punto C (0, y) y llega al punto B (x_2, y_0).
Por las leyes de la óptica, A, B y C deben estar en el mismo plano.



La longitud de la trayectoria ACB es, por el teorema de Pitágoras,
$$d=\sqrt{x_1^2+y^2}+\sqrt{x_0^2+(y_0-y)^2}$$
El tiempo de viaje de la luz por esta trayectoria es:
$$t=\frac{d}{c}=\frac{\sqrt{x_1^2+y^2}+\sqrt{x_0^2+(y_0-y)^2}}{c}$$
Para el tiempo mínimo debemos tener
$$\frac{dt}{dy}=\frac{1}{c}\left[\frac{y}{\sqrt{x_1^2+y^2}}-\frac{y_0-y}{\sqrt{x_0^2+(y_0-y)^2}}\right]=0$$
Como $c\neq\infty$ la cantidad entre corchetes debe ser cero.
$$\left[\frac{y}{\sqrt{x_1^2+y^2}}-\frac{y_0-y}{\sqrt{x_0^2+(y_0-y)^2}}\right]=0$$
De la figura obtenemos:
$$\text{sen}\,\theta_1=\frac{y}{\sqrt{x_1^2+y^2}}\text{ y }\text{sen}\,\theta_2=\frac{y_0-y}{\sqrt{x_0^2+(y_0-y)^2}}$$
Luego
$\text{sen}\,\theta_1=\text{sen}\,\theta_2\Rightarrow\theta_1=\theta_2$
Esta es la ley de la reflexión.
Por consiguiente el rayo de luz sigue la trayectoria que toma el menor tiempo.

Ejemplo 9. Aplicar el principio de Fermat al caso de la refracción para encontrar la ley de Snell.
Solución.



En la figura un rayo va de A a B sufriendo refracción en el punto C sobre la superficie de separación. Se trata de localizar el punto C de tal manera que la longitud de la trayectoria óptica ACB sea mínima. Para esto la derivada de la longitud óptica ACB tiene que ser cero.
Trayectoria óptica ACB = n_1AC + n_2CB
$$\text{AC}=\sqrt{x^2+y_1^2}$$
$$\text{CB}=\sqrt{(a-x)^2+y_2^2}$$
$$\text{TO}=n_1\sqrt{x^2+y_1^2}+n_2\sqrt{(a-x)^2+y_2^2}$$
$$\frac{d}{dx}\left(n_1\sqrt{x^2+y_1^2}+n_2\sqrt{(a-x)^2+y_2^2}\right)=0$$
$$-\frac{n_1x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}+\frac{n_2(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y_2^2}}=0\Rightarrow$$
$$n_1\frac{x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}=n_2\frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y_2^2}}$$

Con

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}}$$ y

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{(a - x)}{\sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}}$$

Obtenemos

$$n_1\text{sen}\theta_1 = n_2\text{sen}\theta_2$$

Ejemplo 10. Un hombre, que puede correr en distancias cortas a una velocidad de 7,5 m/s, y nada a una velocidad de sólo 3 m/s. Está de pie en el borde de una piscina cuando observa que su esposa está en dificultades en una distancia de 18 m en una dirección que forma un ángulo de 30 ° con el borde de la piscina. Suponiendo que quiere salvarla de morir ahogada, ¿cuál es el tiempo mínimo en que puede llegar a ella? ¿Cómo funciona el análisis de este problema con las leyes de la óptica?

Solución.

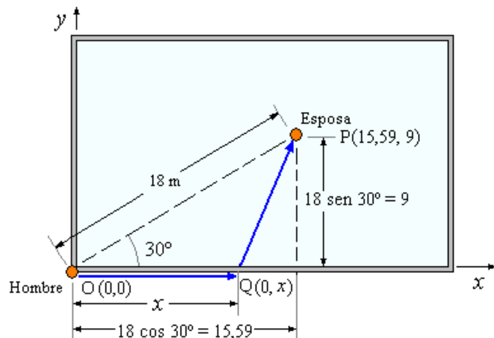
Tomando el eje *x* en el borde de la piscina y el eje *y* en ángulo recto a través de la posición original del hombre.

Posición del hombre O (0, 0)

Posición de la esposa P (15,59, 9))

Punto en que el hombre entra en la piscina (0, *x*)

Luego



El hombre corre a una velocidad $v_1 = 7{,}5\ \text{m/s}$

El hombre nada a una velocidad $v_2 = 3\ \text{m/s}$

El hombre recorre corriendo OQ = *x*

Recorre nadando $\text{QP} = \sqrt{(15{,}59 - x)^2 + 9^2}$

El tiempo que toma recorrer la trayectoria OQP es

$$t = \frac{\text{OQ}}{v_1} + \frac{\text{QP}}{v_2}$$

$$t = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(15{,}59 - x)^2 + 9^2}}{v_2}$$

Derivamos para encontrar el tiempo mínimo

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} - \frac{15{,}59 - x}{v_2\sqrt{(15{,}59 - x)^2 + 9^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{(15{,}59 - x)^2 + 9^2}}{15{,}59 - x} \quad (1)$$

Reemplazando los valores de las velocidades:

$$\sqrt{(15{,}59 - x)^2 + 9^2} = \frac{7{,}5}{3}(15{,}59 - x) \Rightarrow$$

$$2{,}5(15{,}6 - x) = \sqrt{(15{,}6 - x)^2 + 9^2} \Rightarrow$$

$$6{,}25(15{,}6 - x)^2 = (15{,}6 - x)^2 + 9^2 \Rightarrow$$

$$5{,}25(15{,}6 - x)^2 = 81 \Rightarrow$$

$$(15{,}6 - x)^2 = 15{,}43 \Rightarrow$$

$$15{,}6 - x = 3{,}93 \Rightarrow$$

$$x = 11{,}67\ \text{m}$$

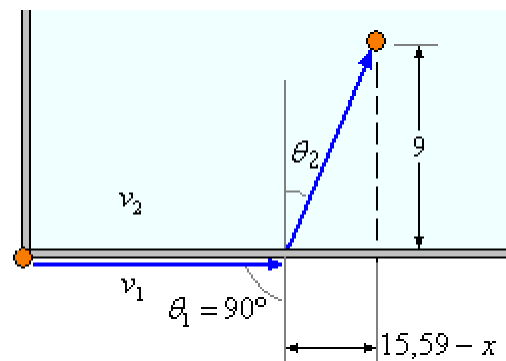
El tiempo mínimo es:

$$t_{\min} = \frac{11{,}67}{7{,}5} + \frac{\sqrt{9^2 + (15{,}6 - 11{,}67)^2}}{3}$$

$$= \frac{11{,}67}{7{,}5} + \frac{3{,}93}{3} = 1{,}56 + 1{,}31 = 2{,}87\ \text{s}$$

2,87 segundos.

Análisis del problema con las leyes de la óptica



El índice de refracción (***n***) está definido como el cociente de la velocidad (***c***) de un fenómeno ondulatorio como luz o sonido en el de un medio de referencia respecto a la velocidad de fase (***v***) en dicho medio:

En este caso si consideramos que debe de tomar el menor tiempo en el recorrido su comportamiento

deber como el de la luz al refractarse de un medio a otro.

$n = \frac{v_1}{v_2}$ (2)

Por otra parte aplicando la ley de Snell.

$\text{sen}\theta_1 = n\,\text{sen}\theta_2$

$\theta_1 = 90^o$

Luego

$\text{sen}\theta_2 = \frac{1}{n}$

De la figura

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{15,59 - x}{\sqrt{(15,59 - x)^2 + 9^2}}$$

Reemplazando en (2)

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{15,59 - x}{\sqrt{(15,59 - x)^2 + 9^2}}$$

Llegamos a un resultado similar al encontrado por el método del menor tiempo.

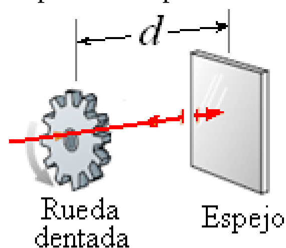
En los siguientes capítulos trataremos sobre diferentes fenómenos ópticos separados de la manera siguiente:

Óptica geométrica
Es la rama de la óptica que implica la descripción de rayos. (λ mayor que el objeto).
Óptica física
Es la rama que trata específicamente el comportamiento ondulatorio de la luz. (λ mayor que el objeto).

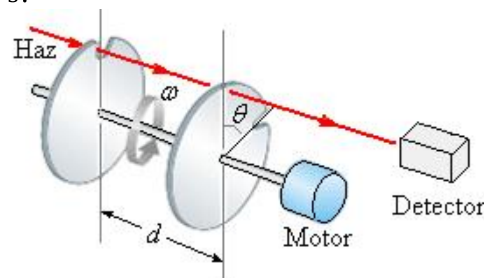
PREGUNTAS Y PROBLEMAS

Problema 1. Los astronautas del Apolo 11 armaron un grupo de eficientes retrorreflectores en la superficie de la Luna. La velocidad de la luz se encuentra midiendo el intervalo de tiempo necesario para que un haz láser viaje de la Tierra, se refleje del panel, y retorne a la Tierra. Si este intervalo es 2,51 s, ¿cuál es la velocidad medida de la luz?
Tome la distancia centro a centro de la Tierra a la Luna como 3,84 x 10^8 m, y no ignore el tamaño de la Tierra y la Luna.

Problema 2.
En un experimento para medir la velocidad de la luz utilizando el aparato de Fizeau, la distancia entre la fuente de luz y el espejo era 11,45 km y la rueda tenía 720 muescas. El valor de la velocidad de la luz determinada experimentalmente es 2,998 x 10^8 m / s. Calcular la Velocidad Mínima angular de la rueda Este párrafo Experimento.

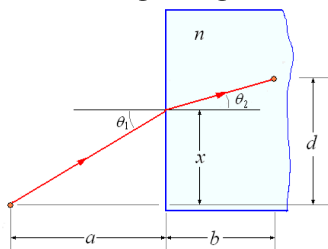


Problema 3. La figura muestra un aparato utilizado para medir la distribución de velocidades de las moléculas de gas. Consta de dos discos con hendiduras separada una distancia d, con las hendiduras separadas una de otra por un ángulo θ.
Supongamos que la velocidad de la luz se mide mediante el envío de un haz de luz desde la izquierda a través de este aparato.
a) Demostrar que un haz de luz incidirá en el detector (es decir, pasará a través de dos hendiduras) solo si su velocidad está dada por $c = \omega d/\theta$, donde ω es la velocidad angular de los discos y θ se mide en radianes.
b) ¿Cuál es la velocidad medida de la luz si la distancia entre las dos hendiduras de los discos rotantes es 2,50 m, la hendidura en el segundo disco se desplaza 1/60 de un grado de la ranura en el primer disco, y los discos están girando a 5555 rev / s?



Problema 4. La orilla de un lago corre de este a oeste. Un nadador se mete en problemas a 20,0 m de la costa y 26,0 m al este de un salvavidas, cuya estación está 16, o m frente a orilla. El salvavidas acelera en un corto tiempo. Puede correr a 7,00 m/s, y nadar a 1,40 m/s. Para llegar al nadador lo más rápidamente posible, en qué dirección debe empezar a correr el salvavidas?

Problema 5. En la figura, sea un rayo de luz que va del punto A a B, dentro de un medio de índice de refracción *n*. Si los parámetros *a*, *b y d* son como se define en la figura siguiente



a) Demuestre que el tiempo *t* que se requiere para ir de A a B es

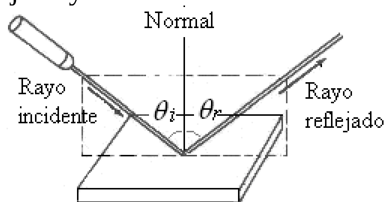
$$t = \frac{1}{c}\left\{\left[a^2 + x^2\right]^{1/2} + n\left[b^2 + (d-x)^2\right]^{1/2}\right\}$$

b) Determine el valor de *x* para el que el tiempo *t* es mínimo y demuestren que, en esta condición, los ángulos θ_1 y θ_2 están relacionados mediante la ley de Snell.

ÓPTICA GEOMÉTRICA 1
REFLEXIÓN, ESPEJOS PLANOS Y ESFÉRICOS

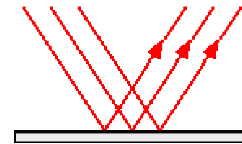
La luz viaja en líneas rectas en un medio isotrópico transparente tal como el aire. Cuando la luz incide en una interfase entre dos medios, tales como el aire y el agua, algo de luz puede volver en el primer medio por reflexión; también, algo de la luz puede pasar al segundo medio, generalmente con un cambio en la dirección conocida como refracción.
En esta parte presentaremos las experimentalmente establecidas leyes que describen estos fenómenos.
Los fenómenos pueden ser descritos adecuadamente trazando rayos.
El tratamiento de los problemas de óptica mediante el trazado de rayos es conocido como óptica geométrica. Haciendo uso extensivo de la geometría.
Debe tenerse presente que los rayos representan direcciones perpendiculares a los frentes de onda.

REFLEXION EN SUPERFICIES PLANAS
La reflexión de la luz ocurre de acuerdo con dos leyes conocidas por los científicos griegos y egipcios:
PRIMERA LEY DE LA REFLEXIÓN. El rayo reflejado está en el plano que contiene al rayo incidente y a la normal a la superficie reflectante en el punto de incidencia.
SEGUNDA LEY DE LA REFLEXIÓN. El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.
El ángulo incidente (θ_i) es el ángulo entre el rayo incidente y la normal.
El ángulo de reflexión (θ_r) es el ángulo entre el rayo reflejado y la normal.

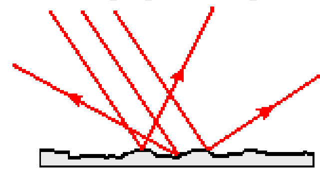


$\theta_i = \theta_r$
Casi todos los objetos reflejan cierta cantidad de la luz que incide sobre ellos, y suele ser esta luz lo que permite verlos.

Reflexión especular
Cuando rayos de luz paralelos chocan contra una superficie plana lisa, todos los rayos reflejados son paralelos entre sí. Este tipo de reflexión se denomina reflexión especular y sirve para determinar las propiedades de los espejos.



Reflexión Difusa
Sin embargo, la mayor parte de las superficies no son perfectamente lisas, ya que contienen irregularidades de tamaños mayores que o iguales a la longitud de onda de la luz. La superficie irregular refleja los rayos de luz en varias direcciones. Este tipo de reflexión se denomina reflexión difusa. Algunas superficies conocidas que producen reflexión difusa son la mayor parte de los papeles, metales no pulidos y paredes cubiertas con una capa plana de pintura.

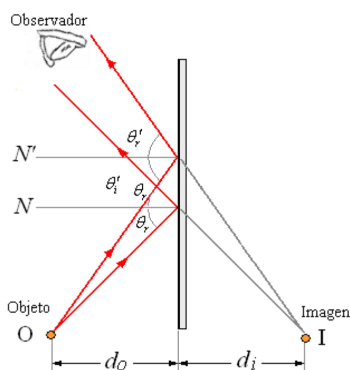


ESPEJO PLANO.
Un espejo plano es una superficie plana muy pulimentada que puede reflejar la luz que le llega con una capacidad reflectora de la intensidad de la luz incidente del 95% (o superior). Los espejos planos se utilizan con mucha frecuencia. Son los que usamos cada mañana para mirarnos. En ellos vemos nuestro reflejo, una imagen que no está distorsionada.



Una imagen en un espejo se ve como si el objeto estuviera detrás y no frente a éste ni en la superficie. (Ojo, es un error frecuente el pensar que la imagen la vemos en la superficie del espejo).
El sistema óptico del ojo recoge los rayos que salen divergentes del objeto y los hace converger en la retina.
El ojo identifica la posición que ocupa un objeto como el lugar donde convergen las prolongaciones del haz de rayos divergentes que le llegan. Esas prolongaciones no coinciden con la posición real del objeto. En ese punto se forma la imagen virtual del objeto.
La imagen obtenida en un espejo plano no se puede proyectar sobre una pantalla, colocando una pantalla donde parece estar la imagen no recogería nada. Es, por lo tanto virtual, una copia del objeto que parece estar detrás del espejo.
El espejo sí puede reflejar la luz de un objeto y recogerse esta sobre una pantalla, pero esto no es lo que queremos decir cuando afirmamos que la imagen virtual no se recoge sobre una pantalla.
El sistema óptico del ojo es el que recoge los rayos divergentes del espejo y el cerebro interpreta como procedentes de detrás del espejo (justo donde se cortan sus prolongaciones)

Formación de imágenes en un espejo Plano



Por la ley de reflexión

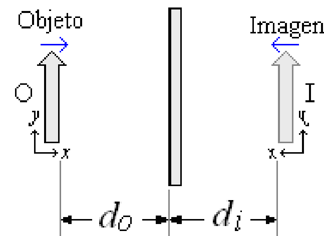
$\theta_i = \theta_r \quad \theta'_i = \theta'_r$

Distancia objeto d_0

Distancia imagen d_i

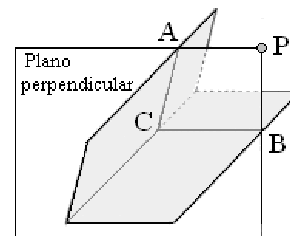
Los rayos reflejados divergen entre sí, por lo tanto, la imagen I se forma en la prolongación hacia atrás de estos, por lo tanto la imagen es virtual detrás del espejo. De la geometría del diagrama de rayos, es evidente que $d_0 = d_i$.

La imagen de un objeto finito.

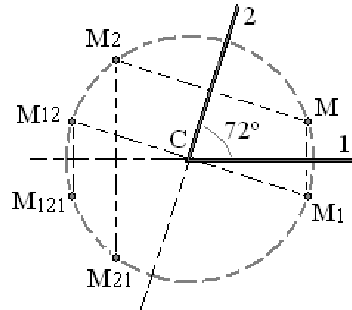


La imagen formada es:
Simétrica, porque aparentemente está a la misma distancia del espejo
Virtual, porque se ve como si estuviera dentro del espejo, no se puede formar sobre una pantalla pero puede ser vista cuando la enfocamos con los ojos.
Del mismo tamaño que el objeto.
Derecha, porque conserva la misma orientación que el objeto.
De inversión lateral.

Imágenes Producidas por Espejos Angulares.
Cuando se tienen dos espejos que forman cierto ángulo, y se coloca un punto luminoso P, entre ambos, el sistema de los dos espejos da varias imágenes de este punto. Tracemos por P un plano perpendicular a la arista de los dos espejos, y sean CA y CB las intersecciones de los planos de ambos con el plano trazado, que es ahora el de la figura.

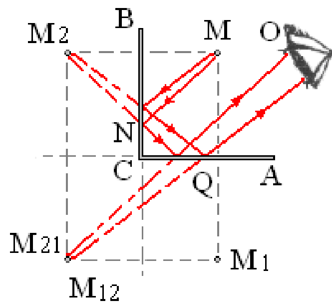


Si las dos caras pulimentadas son las que miran hacia el objeto M, podemos determinar las imágenes de este punto por simple aplicación de lo que ya hemos visto.



La imagen de M en el espejo 1, es M, obtenida como ya sabemos. Pero M_1, como si fuese un objeto, envía rayos al espejo 2, y resulta así la imagen M_{12}. Esta imagen actúa ahora de objeto con respecto al espejo 1 y da la imagen M_{121}, Y como esta imagen cae detrás de los dos espejos, no da lugar a la formación de ninguna otra.
En cambio, el espejo 2 da del objeto M la imagen M_2 que hace de objeto con respecto al 1, que da de ella la imagen M_{21}, la que no da lugar a ninguna otra por encontrarse detrás de los dos espejos. Se forman, pues, cinco imágenes.

ESPEJOS RECTANGULARES.



Este caso es particularmente interesante. Si se tiene un objeto M frente a los dos espejos CA y CB que se cortan formando ángulo recto, M_1 será la imagen de M en el espejo A; pero esta imagen hace de objeto con relación al espejo B que da de ella la imagen M_{12}, y como esta última se encuentra detrás de los dos espejos, no da lugar a la formación de ninguna otra imagen.
Pero, por otra parte, el espejo B da del objeto M la imagen M_2, que hace de objeto con respecto al A, que da de ella la imagen M_{21}, que coincide con la M_{12} por razón de simetría. En este caso hay cuatro imágenes, pero dos de ellas coinciden.

Número de imágenes.

1ª Cuando el ángulo de los espejos está contenido exactamente un número par de veces en la circunferencia, el número de imágenes observadas es, si α es el ángulo de los espejos,

$$N = \frac{360^o}{\alpha} - 1$$

Así, en el caso de los espejos rectangulares

$$N = \frac{360^o}{90^o} - 1 = 4 - 1 = 3,$$

Como hemos visto.
En cambio, cuando el cociente del ángulo de una vuelta entera por el ángulo de los espejos es número impar, el número de imágenes observables está dado por

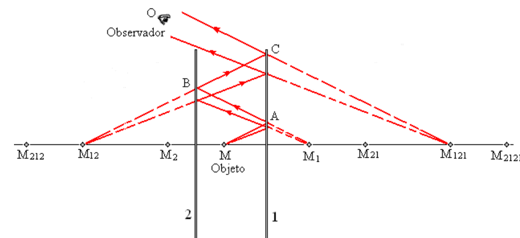
$$N = \frac{360^o}{\alpha}$$

Por ejemplo, si el ángulo de los espejos es $\alpha = 72^o$
Se tiene

$$N = \frac{360^o}{72^o} = 5,$$

Este es el número de imágenes.

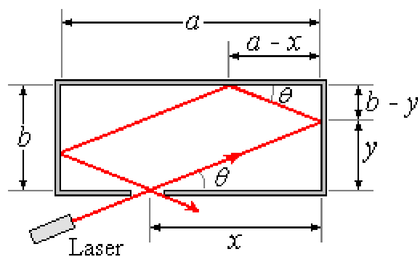
ESPEJOS PARALELOS.



Cuando se tienen dos espejos paralelos, con las caras pulimentadas frente a frente, y un objeto M situado entre ambos, el número de imágenes es teóricamente infinito.
En efecto, el espejo 1 da del objeto M la imagen M_1 simétrica respecto a él; pero M_1 hace de objeto respecto al espejo 2 que da la imagen M_{12}, la cual hace de objeto respecto al espejo 1 y da la imagen M_{121}, y se obtiene así una serie de infinitas imágenes provenientes de una primera reflexión en el espejo 1.
Si se atiende a la primera reflexión en 2 se obtiene la serie de imágenes M_2, M_{21}, M_{212} …, también en número infinito.
Con todo, en la práctica, el número de imágenes que puede distinguirse es limitado, pues en las

sucesivas reflexiones la luz va debilitándose hasta que aquéllas se esfuman.
Si el ojo del observador está en O y observa la imagen M_{121}, la verdadera marcha del pincel que penetra en la pupila está representada en MABCO. Como se comprende, el observador recibe la luz en realidad del objeto M y ve las tres imágenes M_1, M_{12} y M_{121}.

Ejemplo 1. Un cuarto rectangular de dimensiones *a* por *b* tiene espejos sobre tres paredes. Se dirige un haz láser horizontal a través de un agujero a una distancia *x* de un extremo en la pared sin espejo (de largo *a*). El haz se refleja de cada una de las otras paredes una sola vez. Si sale del cuarto a través del agujero en que ingresó. ¿Con qué ángulo con la primera pared el haz debe ser dirigido?
Solución.
El gráfico muestra el haz láser en su trayectoria en el cuarto con espejos, el rayo reflejado en dos espejos perpendiculares es paralelo al rayo incidente



$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Por semejanza de triángulos

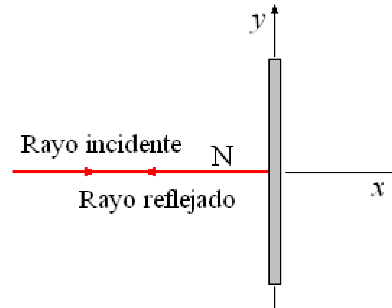
$$\frac{b-y}{a-x} = \frac{y}{x} \Rightarrow$$
$$x(b-y) = y(a-x) \Rightarrow$$
$$xb - xy = ya - yx \Rightarrow$$
$$xb = ya \Rightarrow$$
$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

Luego

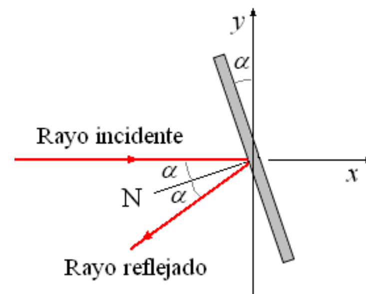
$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

El ángulo es θ = arco tangente *b/a*.

Ejemplo 2. Un rayo de luz que viaja en el plano *xy* incide sobre un espejo plano. Cuando el espejo rota alrededor del eje *z* un ángulo α. ¿Qué ángulo rotará el rayo de luz?
Solución.
Consideremos primeramente una incidencia normal del rayo.

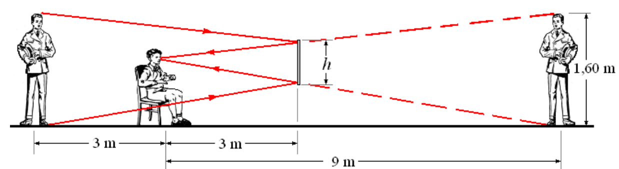


Rotemos el espejo alrededor del eje *z* un ángulo α.



La normal gira un ángulo α, ahora el ángulo de reflexión también es α. Así, el ángulo entre el rayo incidente y el rayo reflejado es 2α.
El rayo de luz rotará un ángulo 2α.

Ejemplo 3. Una persona sentada en una silla a 3 m de una pared en la cual cuelga un espejo plano. A tres metro directamente detrás de él esta otra persona de 1,62 m de estatura. ¿Cuál es la mínima altura del espejo que permitirá ver a la mujer completamente?
Solución.
La imagen de la persona esta 6 m detrás del espejo, o a 9 m de la persona en la silla.



La figura muestra los rayos procedentes de la cabeza y los pies de la persona que llegan a los ojos del observador (de tal manera que puede verlo completo).
Por semejanza de triángulos.

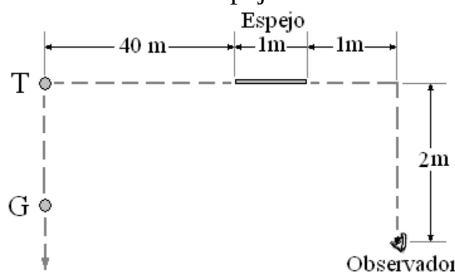
$$\frac{h}{3} = \frac{1,62}{9} \Rightarrow h = 0,54 \text{ m}$$

La mínima altura del espejo es 0,54 m.

Ejemplo 4. En los campos de golf en las Colinas, el campo tiene un espejo plano montado sobre un poste, para que se pueda ver a los jugadores por delante en los golpes en lugares imposibilitados por las colinas.

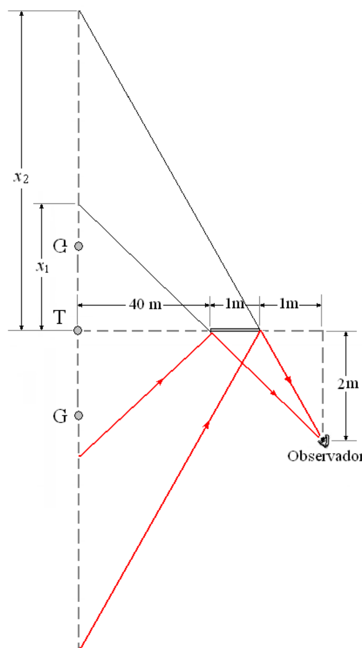


Supongamos que el espejo es de 1,0 m de ancho, y el observador está en la posición mostrada en la figura. El grupo G por delante inicia en el tee T de salida y avanza por el camino indicado. ¿Qué intervalo de distancias desde el tee se puede ver en el espejo?



Solución.

La figura muestra la trayectoria de de la luz proveniente el campo de golf hacia los ojos del observador.



Por semejanza de triángulos

$$\frac{x_2}{40+1} = \frac{2}{1} \Rightarrow x_2 = 82 \text{ m y}$$

$$\frac{x_1}{40} = \frac{2}{1+1} \Rightarrow x_1 = 40 \text{ m}$$

El rango esta entre los 40 m y 82 m delante del tee T.

Ejemplo 5. El conductor de un automóvil tiene un espejo retrovisor a 0,90 m delante de él que le permitiría ver todo el ancho de una carretera de 9 m a una distancia de 36 m detrás de él. Calcular el ancho del espejo que debe proporcionar el fabricante.

Solución.

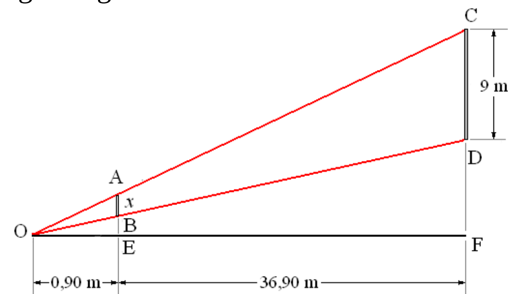
El conductor O mira en el espejo todo el ancho de la carretera (9 m) a sus espaldas.

La carretera está a 36 m detrás del observador.

La imagen de la carretera está a 36 + 0,90 = 36,90 m detrás del espejo

La imagen está a 36,90 + 0,90 = 37,80 m delante del conductor.

La figura siguiente muestra esta situación.



AB es el ancho espejo,

CD el ancho de la imagen

OEF la perpendicular desde el conductor al plano del espejo.

Los triángulos OEA y OFC son semejantes

$$\frac{AE}{CF} = \frac{OE}{OF} \Rightarrow AE = \frac{OE}{OF} CF \quad (1)$$

Los triángulos OEB y OFD también son semejantes

$$\frac{BE}{DF} = \frac{OE}{OF} \Rightarrow BE = \frac{OE}{OF} DF \quad (2)$$

Restando (2) – (1):

$$(AE - BE) = \frac{OE}{OF}(CF - DF)$$

AE – BE = x

OE = 0,90 m

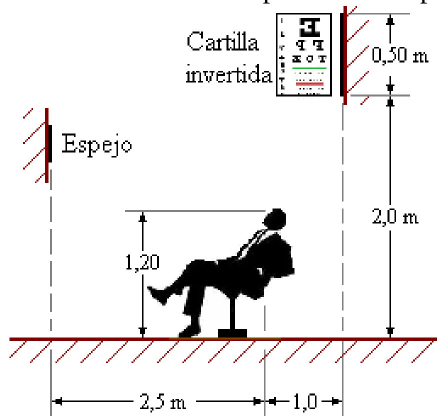
OF = OE + EF = 0,90 + 36,90 = 37,80 m

CF – DF = 9 m
Reemplazando valores:

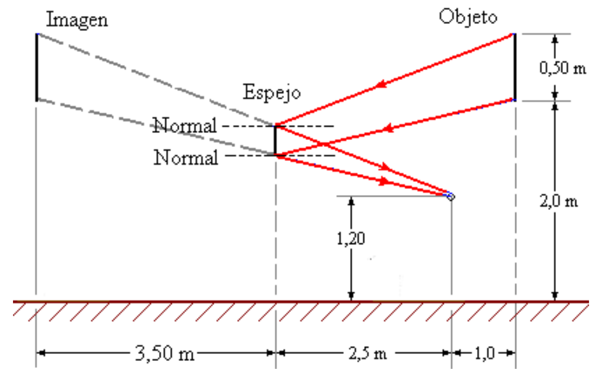
$$x = \frac{0{,}90\text{ m}}{37{,}80\text{ m}}(9\text{ m}) = 0{,}214\text{ m}$$

El fabricante debe proporcionar un espejo de 21,4 cm de ancho.

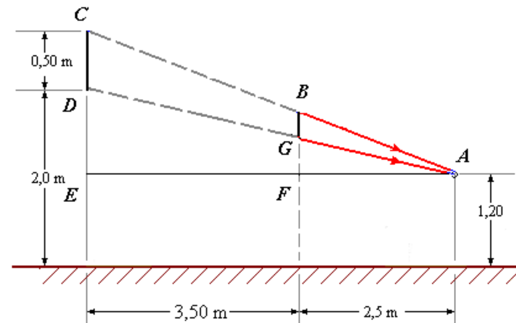
Ejemplo 6. Una cartilla de visión estándar mide 50 cm por 18 cm, la mayor dimensión es vertical, debe ser vista por el paciente a una distancia de 6 m. Debido a la falta de espacio en su oficina, un óptico puede colocar una cartilla invertida detrás del paciente y hacer que vea la imagen en un espejo plano.
En dicha oficina se coloca al paciente a 2,5 m del espejo con los ojos a 1,2 m del suelo, la cartilla a 1 m detrás de él con su borde inferior a 2,0 m del suelo.
a) Dibuje el diagrama esquemático de la formación de la imagen.
b) ¿Cuál es el tamaño más pequeño espejo que el óptico puede instalar?
c) ¿ A qué altura del piso debe estar su borde inferior?
d) Supongamos que la cartilla se sujeta a la silla del paciente. Demostrar que el tamaño del espejo y su posicionamiento con respecto al suelo no dependen de la distancia del paciente al espejo.



Solución.
a) Diagrama esquemático de la formación de la imagen.



b) Para calcular la dimensión vertical del espejo.
El espejo está 2,5 m delante del observador.
La imagen está 3,5 m detrás del espejo..
Luego la imagen esta a 2,5 + 3,5 = 6 m del observador.
La situación queda representada en el esquema siguiente.



Los triángulos ABF y ACE son semejantes
Luego

$$\frac{AF}{AE} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow \frac{2{,}5}{6{,}0} = \frac{BG + GF}{(2{,}0 - 1{,}2) + 0{,}5} \Rightarrow$$

$$\frac{2{,}50}{6{,}0} = \frac{BG + GF}{1{,}3} \Rightarrow$$

$$BG + GF = 0{,}54 \qquad (1)$$

Los triángulos AGF y ADE son semejantes
Luego

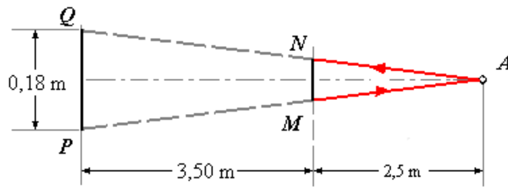
$$\frac{AF}{AE} = \frac{GF}{DE} \Rightarrow \frac{2{,}5}{6{,}0} = \frac{GF}{2{,}0 - 1{,}2} \Rightarrow$$

$$\frac{2{,}50}{6{,}0} = \frac{GF}{0{,}8} \Rightarrow$$

$$GF = 0{,}33 \qquad (2)$$

Dimensión vertical del espejo
Restando (1) – (2):
BF – GF = 0,54 – 0,33 = 0,21 m

Para calcular la dimensión horizontal del espejo

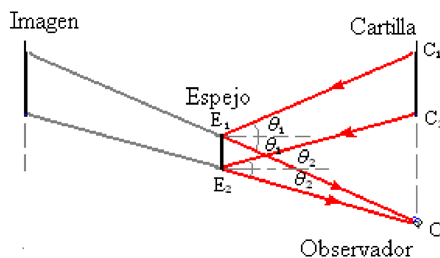


Los triángulos AMN y APQ son semejantes
Luego

$$\frac{2,5}{6,0} = \frac{MN}{0,18} \Rightarrow \frac{2,50}{6,0} = \frac{MN}{0,18} \Rightarrow MN = 0,075$$

La dimensión horizontal del espejo 7,5 cm
El espejo de medir 21 cm x 7,5 cm.
c) Cálculo de la altura del borde inferior.
De los resultados en la parte b).
1,20 + 0,33 = 1,53 m del piso.

d) Supongamos que la cartilla y el observador están a la misma distancia del espejo.

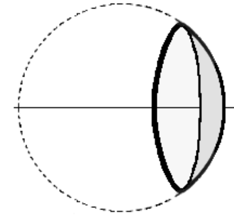


Consideremos es punto A_1, este punto es visto por el observador por la reflexión en el espejo, como C_1 y O están a la misma distancia del espejo, el punto E_1 está en la mediatriz de OC_1, cualquiera sea la distancia de OC_1 al espejo.
Si C_1 es el punto superior de la cartilla y si C_2 es el punto correspondiente al lado opuesto, E_1 sobre la mediatriz de OC_1 y E_2 sobre la mediatriz de OC_2, definen la altura del espejo E_1E_2 independiente de la posición del espejo.
El punto E_2 está en el borde inferior del espejo, que está a una distancia fija desde el piso donde se coloca el espejo.
Consideraciones similares se aplican al ancho del espejo.

ESPEJOS ESFÉRICOS

Según la forma de la superficie pulimentada de los espejos curvos, estos pueden ser esféricos, parabólicos.

Los espejos esféricos tienen la forma de la superficie que resulta cuando una esfera es cortada por un plano.



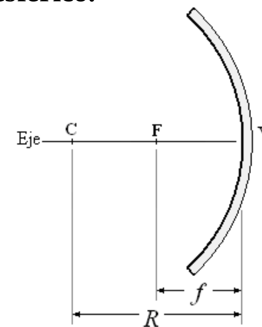
El espejo es cóncavo si la parte plateada (pulimentada) es la interior del casquete.



El espejo es convexo si la parte plateada (pulimentada) es la exterior del casquete



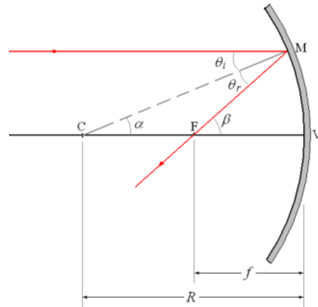
Las características ópticas fundamentales de todo espejo esférico.



Centro de curvatura C: Es el centro de la superficie esférica que constituye el espejo.
Radio de curvatura *R* (VC): Es el radio de dicha superficie.
Vértice V: Coincide con el centro del espejo.
Eje principal: Es la recta que une el centro de curvatura C con el vértice V.
Foco F: Es un punto del eje por el que pasan o donde convergen todos los rayos reflejados que inciden paralelamente al eje.

Distancia focal f (VF). Distancia del vértice V al punto focal F.

Posición del punto focal.



Por la ley de la reflexión

$\theta_i = \theta_r$

Por ángulos alternos internos

$\theta_i = \alpha$

Por propiedad de los triángulos

$\beta = \theta_r + \alpha = 2\alpha$

Para espejos pequeños en comparación con el radio.

$$\beta \approx \frac{\text{MV}}{\text{FV}},\ \theta \approx \frac{\text{MV}}{\text{CV}}$$

Luego podemos escribir

$$\frac{\text{MV}}{\text{FV}} = 2\frac{\text{MV}}{\text{CV}}$$

Reemplazando valores

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} \quad \Rightarrow$$

$$f = \frac{R}{2}$$

En los espejos esféricos el foco principal se encuentra en el punto medio entre el centro de curvatura y el vértice.

En forma similar a la del espejo cóncavo, se puede demostrar que a similar $f = R/2$ para un espejo convexo.

FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS ESFÉRICOS

La imagen de un objeto que se encuentra frente a un espejo esférico, se forma a partir de la intersección efectiva de los rayos reflejados o de la intersección de sus prolongaciones .Debido a la curvatura del espejo, las imágenes que se obtengan pueden variar de tamaño. Es normal que al situarse frente a un espejo convexo la imagen sea de menor tamaña y muy deformada. Por ejemplo al mirarse en una cuchara metálica.

Ahora si nos ponemos frente a un espejo cóncavo, el tamaño de nuestra imagen puede ser mayor o menor, dependiendo de qué tan cerca estemos del espejo.

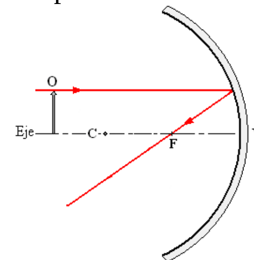
Para lograr ubicar la imagen de un objeto, se busca la intersección de los rayos reflejados, o de la prolongación de ellos. En los espejos curvos, a diferencia del espejo plano, las imágenes presentan características determinadas dependiendo de la ubicación del objeto.

Formación de imágenes en espejos cóncavos

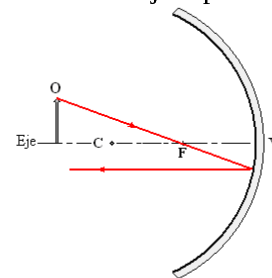
Podemos determinar la posición y el tamaño de la imagen formada por un espejo cóncavo usando el método gráfico Trazamos unos cuantos rayos principales desde un punto del objeto que no se encuentra sobre el eje. La intersección de estos rayos después de pasar por la lente determina la posición y el tamaño de la imagen.

Veamos los tres rayos principales

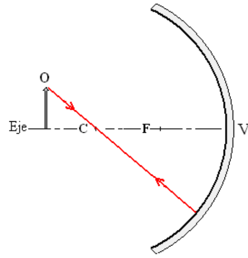
Rayo 1. Un rayo incidente, paralelo al eje se refleja a través del punto focal del espejo.



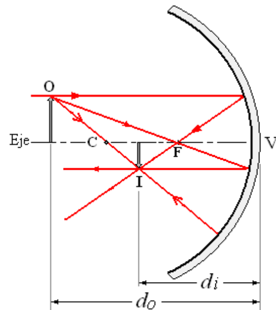
Rayo 2. Un rayo incidente que pasa a través del punto focal se reflejará paralelo al eje.



Rayo 3. Un rayo incidente que pasa por el centro de curvatura se refleja hacia atrás por el mismo camino.



La figura siguiente muestra imagen formada en la intersección de los rayos**.**

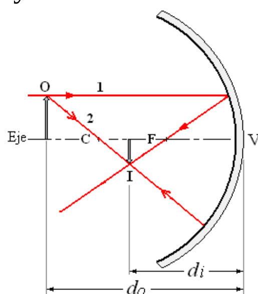


O = objeto
I = imagen
d_O = distancia objeto
d_I = distancia

Como se puede ver con dos rayos es suficiente.

Casos de formación de imagen por un espejo cóncavo.

1.
Objeto más allá de C
Imagen entre F y C



2.
Objeto en C
Imagen también en C

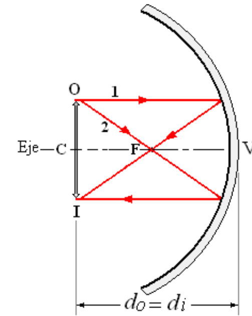


Imagen real, invertida del mismo tamaño que el objeto.

3.
Objeto entre C y F

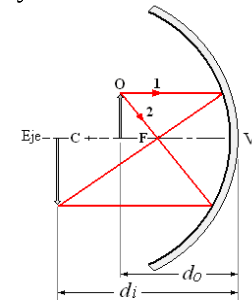
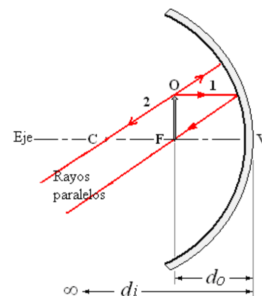
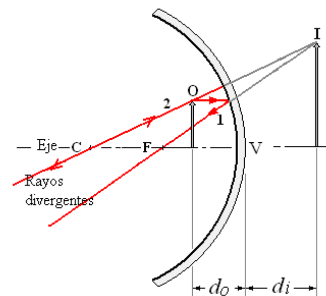


Imagen más allá de C, real, invertida y aumentada.

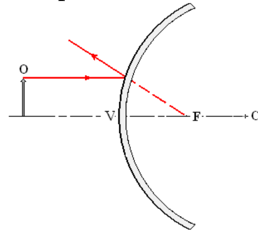
4.
Objeto en F
Imagen en el infinito



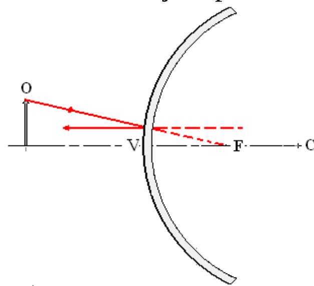
5.
Objeto entre F y V.
Imagen detrás del espejo, virtual, derecha y ampliada.



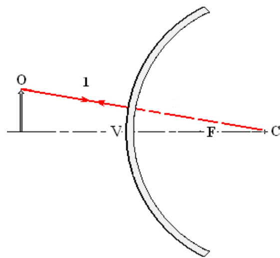
Formación de imágenes en espejos cóncavos
Podemos determinar la posición y el tamaño de la imagen formada por un espejo convexo usando el método gráfico Trazamos unos cuantos rayos principales desde un punto del objeto que no se encuentra sobre el eje. La intersección de estos rayos después de pasar por la lente determina la posición y el tamaño de la imagen.
Veamos los tres rayos principales
Rayo 1. Un rayo incidente, paralelo al eje se refleja a través del punto focal del espejo.



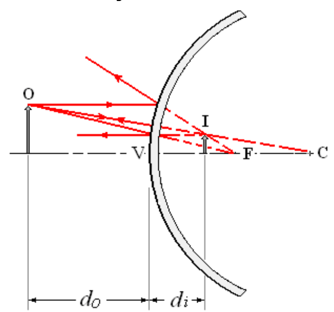
Rayo 2. Un rayo incidente que pasa a través del punto focal se reflejará paralelo al eje.



Rayo 3. Un rayo incidente que pasa por el centro de curvatura se refleja hacia atrás por el mismo camino.

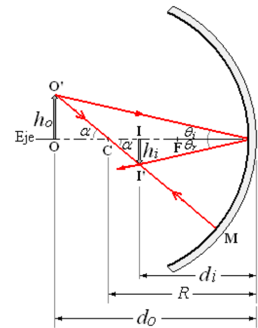


La figura siguiente muestra imagen formada en la intersección de los rayos.



Como se puede ver con dos rayos es suficiente.
Objeto en cualquier posición entre V y el infinito.
Imagen entre V y F detrás del espejo, virtual, derecha y disminuida.

ECUACIÓN DEL ESPEJO.
Consideremos un objeto de altura h_o, como se muestra en la figura, Desde O' se traza el rayo incidente en con un ángulo θ_i en V, el rayo reflejado sale con un ángulo $\theta_r = \theta_i$.



Podemos encontrar las siguientes relaciones

$$\tan\theta_i = \tan\theta_r \Rightarrow$$

$$\frac{h_o}{d_o} = \frac{-h_i}{d_i} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} \qquad (1)$$

También

$$\tan\alpha = \frac{h_o}{d_o - R} = \frac{-h_i}{R - d_i} \Rightarrow$$

$$\frac{h_i}{h_o} = -\frac{R - d_i}{d_o - R} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\frac{d_i}{d_o} = \frac{R - d_i}{d_o - R} \Rightarrow$$

$$d_i(d_o - R) = d_o(R - d_i) \Rightarrow$$

$$d_i d_o - d_i R = d_o R - d_i d_o \Rightarrow$$

$$d_i R + d_o R = 2 d_i d_o \Rightarrow$$

$$\frac{d_i + d_o}{d_i d_o} = \frac{2}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{2}{R}$$

Si el objeto está en el infinito $d_o = \infty$, la imagen se forma en el punto focal F.

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

$$f = \frac{R}{2}$$

La ecuación del espejo puede escribirse como

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

Puede hacerse una deducción similar con espejos convexos.
La ecuación es aplicable a espejos cóncavos, convexos e incluso planos.

Distancia objeto d_o y distancia imagen d_i deben considerarse positivas para objetos e imágenes reales y negativas para objetos e imágenes virtuales.
El radio de curvatura R y la distancia focal f se toman como positivos para espejos convergentes (cóncavos) y negativo para espejos divergentes (convexos).
Para un espejo plano el radio de curvatura es infinito, por lo tanto la distancia focal también es infinita y por lo tanto

$\frac{1}{f} = 0$, luego $\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_O} = 0 \Rightarrow d_i = -d_o$

AUMENTO.
La razón del tamaño de la imagen al tamaño del objeto es el aumento lateral m del espejo. El tamaño se refiere a cualquier dimensión lineal, altura o ancho.

$$m = \frac{\text{tamaño de la imagen}}{\text{tamaño del objeto}} = \frac{h_i}{h_o}$$

Utilizando la ecuación (1)

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$$

Una imagen invertida tendrá un aumento negativo, y una imagen derecha tendrá un aumento positivo.

Para tomar en cuenta
i) Para objeto real $h_1 > 0$, $d_i < 0$
ii) Para imagen real $h_2 < 0$, $d_i < 0$
iii) Para imagen virtual $h_2 > 0$, $d_i > 0$
iv) Para espejo plano.

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} = --\frac{-d_o}{d_o} = 1$$

v) Para espejo cóncavo
Para imagen real $m < 0$, pero

$|m| > 1$ si $d_o < R$

$|m| = 1$ si $d_o = R$

$|m| < 1$ si $d_o < R$

y para imagen virtual $m > 0$ y $m > 1$ como $h_2 > h_1$ la imagen es aumentada
vi) Para espejo convexo

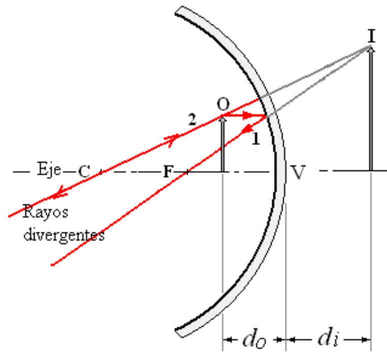
$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$$

$h_1 > 0$, $m < 1$
La imagen siempre es virtual y derecha pero disminuida.
Nota. La imagen real es aquella que se forma cuando tras pasar por el sistema óptico, los rayos de luz son convergentes. Esta imagen no la podemos percibir directamente con nuestro sentido de la vista, pero puede registrarse colocando una pantalla en el lugar donde convergen los rayos.
La imagen virtual es aquella que se forma cuando, tras pasar por el sistema óptico, los rayos divergen. Para nuestro sentido de la vista los rayos parecen venir desde un punto por el que no han pasado realmente. La imagen se percibe en el lugar donde convergen las prolongaciones de esos rayos divergentes. Es el caso de la imagen formada por un espejo plano.
Las imágenes virtuales no se pueden proyectar sobre una pantalla.

Ejemplo 7. En un espejo de aumento para afeitarse. Sí se pone la cara 15 cm del espejo, ¿qué radio de curvatura es necesaria para proporcionar un aumento de 1,33?



Solución.



do = 0,15 m

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = 1{,}33$$

$$d_1 = -1{,}33m = -1{,}33(0{,}15) = 0{,}20 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{0{,}15} + \frac{1}{0{,}20} = \frac{2}{R}$$

R = 1,20 m

Con un radio tan grande, el espejo casi se ve plano y no se nota que es esférico., como se puede ver estos espejos pueden ampliar.

Ejemplo 8. Si miras por el lado convexo de una cuchara (radio 3 cm), te verás pequeño. ¿Qué tan grande es la imagen de tu cara (altura *h*) está 20 cm de distancia de la cuchara?



Solución.

Aplicando la ecuación de los espejos

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

Con

$$f = \frac{R}{2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5 \text{ cm}$$, d_o = 20 cm

Tenemos

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{-1{,}5} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_i} = -\frac{1}{1{,}5} - \frac{1}{20} = \frac{-20-1{,}5}{30} = -\frac{1}{1{,}40}$$

$$\Rightarrow d_i = -1{,}40 \text{ cm}$$

El aumento

$$m = -\frac{d_i}{d_0} = -\frac{-1{,}40}{20} = \frac{1}{14{,}33}$$

El tamaño de la imagen

$$h_i = \frac{1}{14{,}33} h$$

Ejemplo 9. Se quiere diseñar un servomecanismo de control en una fábrica tal que cuando un elemento de una máquina de 0,60 m de altura pasa sobre una cinta transportadora a una distancia de 2 m de la unidad de control, su imagen en un espejo cóncavo llenará al puerto del foto detector de 0,50 m de altura.

a) ¿Qué radio de curvatura es necesario para el espejo?

b) ¿A qué distancia del espejo debe ser colocado el detector?

Solución.

a) d_o = 2,0 m, h_o = 0,60 m, h_i = 0,005 m,

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} \Rightarrow d_i = -\frac{h_i}{h_o} d_o$$

Reemplazando valores

$$d_i = -\frac{-0{,}005}{0{,}60}(2{,}0) = 0{,}0167 \text{ m}$$

El detector debe ser colocado a 1,7 cm delante del espejo.

b) Aplicando la ecuación del espejo esférico

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

Reemplazando valores

$$\frac{1}{2{,}0} + \frac{1}{0{,}017} = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}0167} \Rightarrow$$

$$f = \frac{R}{2} = 0{,}0167 \text{ m}$$

Como $R = 2f \Rightarrow$

R = 0,033 m

El espejo es cóncavo de radio 0,33 cm

Ejemplo 10. En el espejo retrovisor de la derecha (lado del conductor) de un automóvil hay la inscripción: ADVERTENCIA: «Los objetos del espejo están más cerca de lo que parece». Esta advertencia parece ser el motivo porque se usa allí un espejo convexo. Se forma una imagen disminuida. Si piensas que estas mirando en un espejo plano (como asume el cerebro de forma automática), el objeto estaría mucho más lejos de lo que realmente esta. La ventaja del espejo convexo es que proporciona un campo de visión muy amplio. Estos espejos también se usan en las tiendas de modo que un cajero pueda controlar el local. Supongamos que en el espejo de radio 30 cm se puede ver la imagen de un camión de 2 m de altura.

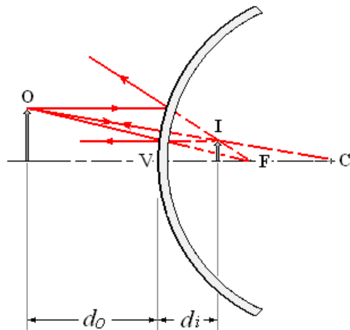
a) ¿Si el camión está 20 m detrás del espejo, de qué tamaño se ve su imagen?

b) ¿Si se ve la misma imagen en un espejo plano, qué pensaría el cerebro sobre la distancia al camión?



Solución.

Primero encontramos la distancia la imagen d_i.



$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}$$

Con

d_o = 20 m, y f = - R/2 = - 0,15 m.

Tenemos

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{-0,15} \Rightarrow$$

$$d_i=\frac{1}{-0,15}=-0,15\,\text{cm}$$

El aumento es

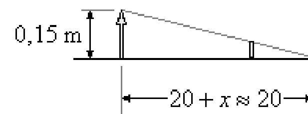
$$\frac{h_i}{h_o}=-\frac{d_i}{d_o} \Rightarrow h_i=-\frac{d_i}{d_o}h_o$$

Reemplazando valores

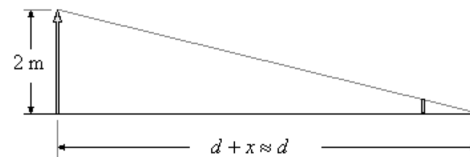
$$h_i=-\frac{-0,15}{20}(2) = 0,015 \text{ m}$$

La imagen del camión mide 0,015 m.

b) Un objeto que está a 20 m + x ≈ 20m en el espejo convexo, la imagen tiene 0,15 m de altura.



En un espejo plano un objeto de 2 m hace una imagen de 2 m. Si la persona no sabe que es un espejo convexo razonará como si estuviera viendo en un espejo plano según el siguiente esquema



Por semejanza de triángulos

$$\frac{2}{0,15}=\frac{d}{20} \Rightarrow$$

$$d=\frac{20\times 2}{0,15} = 267 \text{ m}$$

Este es el motivo de la advertencia, el camión está a 20m, pero parece estar a 367 m.

¡CUIDADO!

Ejemplo 11. Una barra corta de longitud L_o se coloca en el eje de un espejo esférico a una distancia d_o del espejo. La relación $m_L = L_i/L_o$ es el aumento longitudinal del espejo. ¿Cómo esta relacionado este aumento con el aumento lateral $m=-d_i/d_o$

Solución.

Para el extremo 1.

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{f} \quad (1)$$

Para el extremo 2,

$$\frac{1}{d_{o2}}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{f} \quad (2)$$

Restando (2) de (1):

$$\frac{1}{d_{o1}} - \frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{d_{i1}} - \frac{1}{d_{i2}} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{1}{d_{o1}} - \frac{1}{d_{o2}} = \frac{1}{d_{i2}} - \frac{1}{d_{i1}} \Rightarrow$$
$$\frac{d_{o1} - d_{o2}}{d_{o1}d_{o2}} = \frac{d_{i1} - d_{i2}}{d_{i1}d_{i2}}$$

Pero

$d_{o1} - d_{o2} = L_o$ y

$d_{i1} - d_{i2} = L_i$

Luego

$$\frac{L_o}{d_{o1}d_{o2}} = \frac{L_i}{d_{i1}d_{i2}} \Rightarrow$$
$$\frac{L_i}{L_o} = \frac{d_{i1}d_{i2}}{d_{o1}d_{o2}}$$

El aumento longitudinal de la barra es

$$m_L = \frac{L_i}{L_o}$$

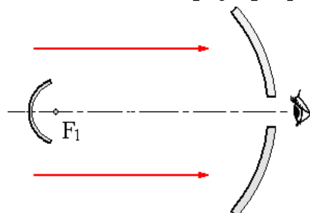
Tenemos que

$$m = -\frac{d_{i1}}{d_{o1}} \text{ y } m = -\frac{d_{i2}}{d_{o2}}$$

Finalmente

$$m_L = mm = m^2$$

Ejemplo 12. Un astrónomo aficionado quiere construir un telescopio con un espejo cóncavo para recoger la luz de objetos estelares. Para esto construye un plato esférico con un radio de curvatura de 4,00 m. Tiene un segundo espejo cóncavo pequeño de distancia focal 0,200 m, que se propone colocarlo frente al gran espejo en el eje del espejo grande cerca al punto focal. Hace un agujero sobre el eje del espejo grande para poder ver la imagen mediante lo vista o una cámara fotográfica. Para que la imagen final se forme 10 centímetros a la derecha del espejo grande. ¿Dónde debe colocarse el espejo pequeño?



Solución.

Puesto que los objetos estelares están muy lejos $d_{o1} = \infty$ para el espejo.

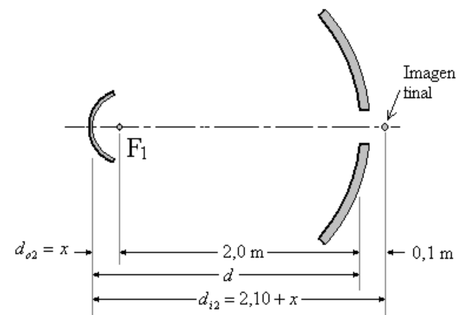
$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{f_1}$$

Con

$$d_{o1} = \infty \text{ y } f_1 = \frac{R}{2} = \frac{4,00}{2} = 2,00 \text{ m}$$

Tenemos

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{2,00} \Rightarrow d_{i1} = 2,00 \text{ m}$$



Para el espejo pequeño

$$\frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{1}{f_2}$$

Con

$$d_{o2} = x$$
$$d_{i2} = x + 2,00 + 0,10 = 2,10 + x$$
$$f_2 = 0,20 \text{ m}$$

Tenemos

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2,10 + x} = \frac{1}{0,20} \Rightarrow$$
$$\frac{2,10 + 2x}{(2,10 + x)x} = \frac{1}{0,20} \Rightarrow$$
$$0,20(2,10 + 2x) = (2,10 + x)x \Rightarrow$$
$$0,42 + 0,40x = 2,10x + x^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + 1,70x - 0,42 = 0$$

Resolviendo

$$x = -0,85 \pm \sqrt{0,85^2 + 0,42} = -0,85 \pm 1,07$$
$$x_1 = 0,22 \text{ m y } x_2 = -1,92 \text{ m}$$

La Solución significativa es x = 0,22 m

El espejo pequeño se debe colocar a la distancia d = 2,00 + 0,22 = 2,22 m

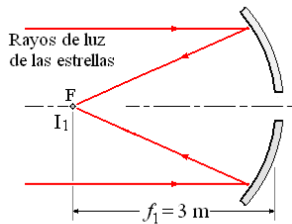
Delante del espejo grande

Ejemplo 13. La figura muestra el esquema de los espejos usados por un telescopio astronómico Cassagrain. Se coloca un espejo esférico pequeño a 2,5 m de un espejo cóncavo de radio de curvatura 6,0 m. Se hace un agujero en el eje del espejo grande, y el diseño contempla para que la imagen de un objeto distante se forme a 0,80 m por detrás del espejo grande, donde cómodamente se puede observar o fotografiar.
a) ¿Qué radio de curvatura es necesario para el espejo pequeño?
b) ¿Es cóncavo o convexo?

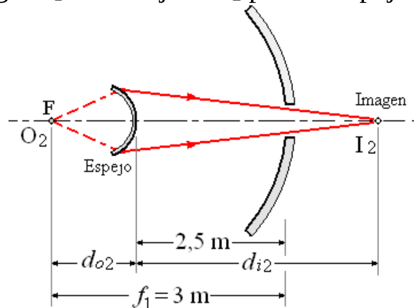


Solución.
a) Para el espejo grande

$$f_1 = \frac{R_1}{2} = \frac{6,0}{2} = 3,0 \text{ m}$$



Un objeto lejano como una estrella, su imagen I_1 se forma en el punto focal
La imagen I_1 es el objeto O_2 para el espejo grande.



La distancia del objeto O_2 al espejo pequeño

$$d_{o2} = 2,5 - 3 = -0,5 \text{ m}$$

La distancia de la imagen I_2 al espejo pequeño es negativa porque está delante del espejo

$$d_{i2} = -(2,5 + 0,8) = -3,3 \text{ m}$$

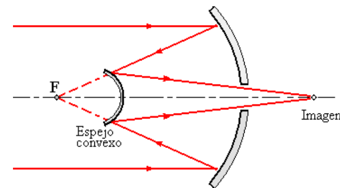
Aplicando la ecuación de los espejos

$$\frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow$$

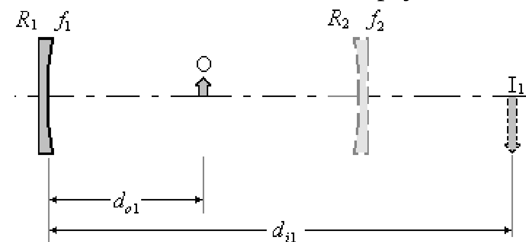
$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{-0,5} + \frac{1}{-3,3} = -\frac{1}{0,434} \Rightarrow$$

$$f_2 = \frac{R_2}{2} = -0,434 \text{ m}$$

R_2 = - 0,868 m
El radio de curvatura del espejo pequeño es – 0,068 m.
b) Siendo el radio negativo el espejo es convexo.



Ejemplo 14. Dos espejos coaxiales separados una distancia de 32 cm con sus superficies reflectantes frente a frente. Se coloca un objeto pequeño a medio camino entre ellos y su imagen es invertida y también está a medio camino entre ellos. Uno de los espejos es cóncavo con 24 cm de radio de curvatura. ¿Qué clase de espejo es el otro, y lo que es el aumento producido por la doble reflexión?
Solución.
Consideremos la reflexión en el espejo cóncavo.



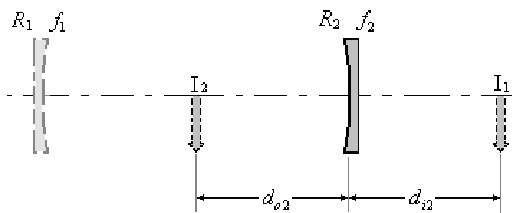
$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{2}{R_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$d_{o1} = +16 \text{ cm}, \; f_1 = 12 \text{ cm}$$

Luego

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{48} \Rightarrow d_{i1} = 48 \text{ cm}$$

El primer espejo forma una imagen real I_1
I_1 actúa como un objeto virtual para el Segundo espejo, produciendo una imagen real en I_2.
Para el segundo espejo



$$\frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{2}{R_2} = \frac{1}{f_2}$$

$d_{o2} = 32 - 48 = -16$ cm y $d_{i2} = 16$ cm

Luego

$$\frac{1}{-16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{f_2} = 0 \Rightarrow f_2 = \infty$$

Esto corresponde a un espejo plano.

El aumento producido por la primera reflexión es

$$m_1 = -\frac{d_{i1}}{d_{o1}} = -\frac{48}{16} = -3$$

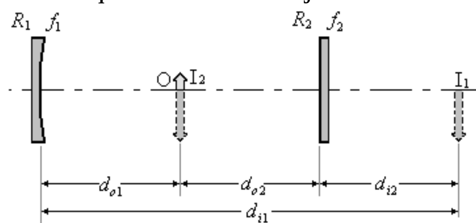
El aumento producido por la segunda reflexión es

$$m_2 = -\frac{d_{i2}}{d_{o2}} = -\frac{16}{-16} = +1$$

Finalmente el aumento total es

$m = m_1 \times m_2 = (-3)\times(+1) = -3$

Diagrama esquemático del conjunto.



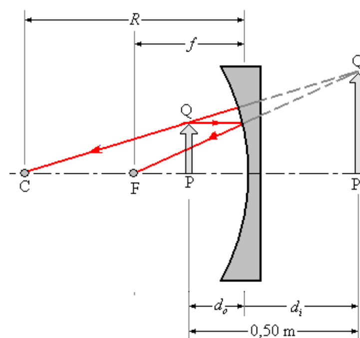
Ejemplo 15. Un hombre desea comprar un espejo para afeitarse que le permitirá ver una imagen derecha de la cara magnificada dos veces a una distancia de 50 cm. ¿Qué tipo de espejo debe comprar y cuál debe su radio de curvatura?

Solución.

Condiciones de la imagen: derecha, magnificada dos veces y a una distancia de 50 cm.

El espejo debe ser un espejo esférico cóncavo con el objeto a una distancia menor que la focal para producir una imagen derecha mayor que el tamaño del objeto.

El esquema siguiente muestra esta situación.



Cálculo del radio de curvatura del espejo

Tenemos las relaciones siguientes:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f},\ d_i = 0{,}50 - d_o \text{ y } m = -\frac{d_i}{d_o}$$

Del aumento obtenemos

$$2 = -\frac{-(0{,}50 - d_o)}{d_o} \Rightarrow 0{,}50 - d_o = 2d_o$$

$$\Rightarrow d_o = \frac{0{,}50}{3}$$

Reemplazando en la primera ecuación

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{0{,}50 - 2d_o} = \frac{1}{f} \Rightarrow$$

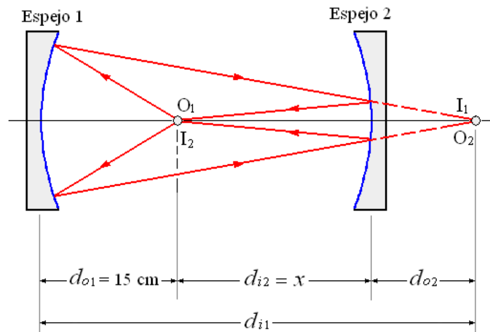
$$f = \frac{d_o(0{,}50 - d_o)}{0{,}50 - 2d_o} = \frac{\frac{0{,}5}{3}(0{,}5 - S)}{0{,}5 - 2\times\frac{0{,}5}{3}} = \frac{1{,}0}{3}\text{ m}$$

La distancia focal del espejo cóncavo debe ser f = 33,33 cm

El radio de curvatura $R = 2f$ = 66,66 cm.

Ejemplo 16. Se toman dos espejos cóncavos de distancias focales de 12 cm y 14 cm y se colocan frente a frente. Se coloca una fuente puntual de luz a 15 cm del primer espejo y se ajusta la posición del segundo espejo hasta que se produzca una sola imagen real coincidente con el objeto. En esa posición, ¿cuál es la distancia entre los espejos?

Solución. La imagen producida en el primer espejo debe coincidir con la imagen producida del segundo espejo. De lo contrario se podría obtener una serie de imágenes, cada imagen en un espejo en calidad de objeto para la elaboración de una imagen aún más en el espejo de otros, hasta el infinito, o hasta que las imágenes en algún momento coincidan.



Para el primer espejo

$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{f_1}$$

Con

$$d_{o1} = 15\text{ cm} \quad f_1 = 12\text{ cm}$$

Tenemos

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{1}{60} \Rightarrow$$

$$d_{i1} = 60\text{ cm}$$

Para el Segundo espejo

$$\frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{1}{f_2}$$

On

$$d_{o2} = -[d_{i1} - (d_{o1} + x)] = -60 + 15 + x = -45 + x$$

$$d_{i2} = x \quad f_1 = 14\text{ cm}$$

Tenemos

$$\frac{1}{-45 + x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{14} \Rightarrow$$

$$\frac{x - 45 + x}{x(-45 + x)} = \frac{1}{14} \Rightarrow$$

$$14(2x - 45) = x(-45 + x) \Rightarrow$$

$$28x - 630 = x^2 - 45x \Rightarrow$$

$$x^2 - 73x + 630 = 0$$

Resolviendo

$$x = 36{,}5 \pm \sqrt{36{,}5^2 - 630}$$

$$= 36{,}5 \pm 26{,}5$$

$$x_1 = 63\text{ cm y } x_2 = 10\text{ cm}$$

La solución x = 63 cm es inadmisible.

La separación de los espejos en este problema es, (15 + 10) cm = 25 cm.

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

1. Un rayo de luz incide en un ángulo θ sobre la superficie de un espejo plano. Si se hace girar el espejo en un ángulo α sobre un eje en su plano y perpendicular al plano de incidencia, ¿en qué ángulo girará el rayo reflejado?

2. Sea un objeto a 20 cm de distancia de un espejo plano. Si se ve la imagen desde una distancia de 50 cm directamente detrás del objeto (o sea, a 70 cm del espejo), ¿para qué distancia deberán enfocar los ojos?

3. Un objeto pequeño está a mitad de camino entre dos espejos planos y paralelos separados por una distancia *D*.

a) Demuestren que hay imágenes en los dos espejos a distancias de separación *nD* (*n = 1, 2* ....) del objeto.

b) Tracen un diagrama de rayos para mostrar el modo en que se forma la imagen en uno de los espejos a una distancia de 2*D* del objeto.

4. Un telescopio de reflexión tiene un espejo esférico cóncavo con un radio de 1,5 metros.

a) ¿Dónde se encontrará la imagen de un cohete que, está a una distancia de 100 km del telescopio?

b) ¿Cuál es el aumento?

e) Suponiendo que el cohete sea una esfera con un radio de 20 metros, ¿cuál es el radio de su Imagen?6. Un objeto pequeño tiene 10 cm de longitud y está orientado perpendicularmente al eje de un espejo esférico cóncavo de 80 cm de radio. Si el objeto está a 20 cm del espejo:

a) ¿Dónde está la imagen? ¿Es real o virtual.

b) ¿Cuál es el aumento?

c) ¿Cuál es el tamaño de la imagen? ¿Es derecha o está invertida?

5. Demuestren que el aumento lateral *m* de un objeto que se encuentra a una distancia *d* de un espejo esférico cóncavo de radio *R* esta dada por

$$m = -\frac{R}{2d - R}$$

a) ¿Cuál es la forma análoga para un espejo convexo?
b) ¿Cuál es el mayor aumento que se puede obtener para este último caso?

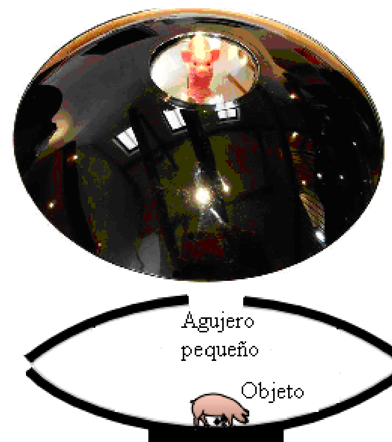
6. Un objeto de longitud L_o se encuentra a lo largo del eje de un espejo esférico cóncavo de radio *R*. Si el extremo más cercano del objeto está a una distancia *d* del vértice del espejo y si su longitud es muy pequeña en comparación con *R*, demuestren que la longitud L_i de la imagen es

$$L_i = L_o\left(\frac{R}{2d - R}\right)$$

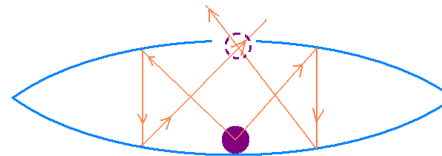
Supongan que $d > R/2$.
a) Un objeto de 10 cm de altura es perpendicular al eje de un espejo esférico cóncavo de 50 cm de radio y que se encuentra a una distancia de 60 cm de su vértice. Hagan una gráfica de la situación en alguna escala y determinen la ubicación y el tamaño de la imagen, en forma gráfica. (Indicación: Cualquier rayo a través del centro de curvatura del espejo se reflejará sobre sí mismo, mientras que cualquier rayo que pase por el punto focal se reflejará paralelamente al eje.)
b) Repitan (a), suponiendo, esta vez, que el objeto esté a 40 cm del espejo.
c) Repitan (a) y (b), suponiendo, esta vez, que el espejo es convexo.

7. Se desea proyectar la imagen de un objeto de 3 cm de altura sobre una pantalla de 40 m, desde un espejo cóncavo esférico, para que el tamaño de la imagen sea de 80 cm.
a) ¿Qué aumento lateral se requiere?
b) ¿Cuál debe ser la distancia del objeto?
c) ¿Cuál tiene que ser el radio de curvatura del espejo?

8. La ilusión de un cerdito flotante se consigue con dos espejos parabólicos, cada uno con una distancia focal 7,5 cm, uno frente al otrote tal manera que sus vértices se encuentran separados 7,5 cm. Si el cerdito se coloca en la parte inferior, una imagen del cerdito se forma en el pequeño agujero en el vértice del espejo superior. Demostrar que la imagen final se forma en ese lugar y describir sus características.



Respuesta



ÓPTICA GEOMÉTRICA 2
REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE LA LUZ

Cuando un rayo de luz incide sobre un material, puede ser reflejado, transmitido o absorbido. Aquí uno se considera sólo las sustancias que reflejan o transmiten al rayo. Ambos procesos pueden ocurrir, es decir, un poco de luz se refleja y parte se transmite, como cuando la luz incide sobre el vidrio claro. Si la luz es reflejada por una superficie, se comprueba que rebota en un ángulo igual al incidente. Esta es la ley de la reflexión.

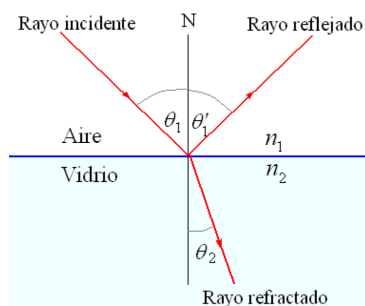
$\theta_1 = \theta'_1$

En el vacío las ondas electromagnéticas viajan a la velocidad *c*. Sin embargo, en la materia la velocidad se reduce y viaja a menor velocidad *v*. La relación de velocidades es el índice de refracción, $n = c / v$. Cuando la luz pasa de un material a otro, puede cambiar de dirección, un efecto llamado refracción. La frecuencia de la luz permanece siempre igual, como $v = \lambda f$, cuando la velocidad baja λ disminuye, y cuando la velocidad aumenta λ también aumenta. El ángulo de refracción θ_2 es relacionado con el ángulo de incidencia de θ_1 por la ley de Snell:

$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$ refracción

Observe que cuando rayo de luz pasa de un medio de baja densidad como el aire (índice menor n_1) a un medio más denso como el cristal (índice mayor n_2), el rayo se desvía hacia la normal. Cuando va en la dirección opuesta, se desvía fuera de lo normal.

Cuando incide a 90º (directamente), no es desviado.



El ángulo de incidencia θ_1 entre el rayo incidente y la normal N a la superficie.

El ángulo de reflexión θ'_1 se encuentra entre el rayo reflejado y la normal N.

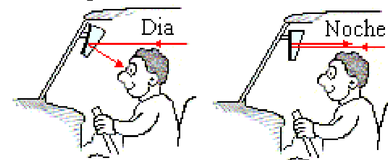
El ángulo de refracción θ_2 entre el rayo refractado y la normal N.

El rayo incidente, el rayo reflejado, el rayo refractado (de transmisión), y la normal a la superficie están en un mismo plano.

APLICACIÓN.

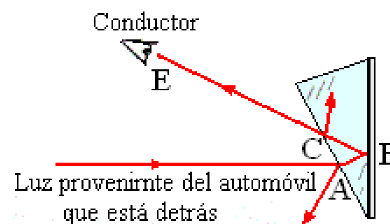
La reflexión y refracción simultáneas de la luz en una interfase encuentra aplicaciones en varios dispositivos. Por ejemplo, muchos automóviles se equipan con un espejo retrovisor interior que tiene una palanca de ajuste.

En una posición, la palanca deja el espejo para visión diurna, mientras que en otra posición lo deja para visión nocturna. La posición para visión nocturna es útil para reducir el reflejo de los faros del automóvil que viene detrás.



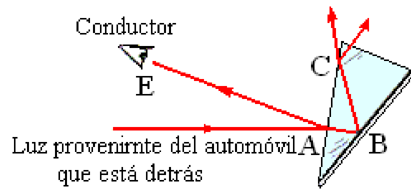
Como se indica en la, este tipo de espejo es una cuña de cristal, cuya parte posterior es plateada y altamente reflectante.

Disposición diurna



Durante el día la luz del automóvil que viene detrás sigue la trayectoria ABCE para llegar a los ojos del conductor. En los puntos A y C, en donde la luz entra en contacto enfrente de la superficie aire-cristal, hay rayos reflejados y rayos refractados. Aproximadamente el 10% de la luz se refleja. Los débiles rayos reflejados en A y en C no llegan a los ojos del conductor. Por el contrario, casi toda la luz que llega a la superficie posterior plateada en B se refleja hacia el conductor. Como casi toda la luz sigue la trayectoria ABCE, el conductor observa una imagen brillante del automóvil que viene detrás durante el día.

Disposición nocturna



Durante la noche es posible utilizar la palanca de ajuste para girar el espejo en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, alejándolo del conductor. Ahora, la mayor parte de la luz de los faros del automóvil de atrás sigue la trayectoria ABC y no llega al conductor. Sólo se ve la luz que se refleja débilmente de la superficie frontal a lo largo de la trayectoria AE. Como resultado, hay mucho menos reflejos.

Ejemplo 1. Un rayo de luz incide en una superficie aire/agua a un ángulo de 46° con respecto a la normal. Encuentre el ángulo de refracción cuando la dirección del rayo es
a) del aire al agua y
b) del agua al aire.

Solución. a) El rayo incidente está en el aire, por lo que θ_1 = 46° y n_1 = 1,00. El rayo refractado está en el agua, de modo que n_2 = 1.33. Para encontrar el ángulo de refracción es posible aplicar la ley de Snell:

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{n_1 \text{sen}\theta_1}{n_2} = \frac{(1{,}00)\text{sen}46^o}{1{,}33}$$
$$= 0{,}54 \Rightarrow$$
$$\theta_2 = 32{,}74^o$$

El rayo refractado se desvía hacia la normal, ya que θ_2 es menor que θ_1.

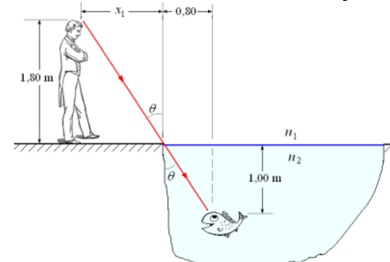
b) Ahora el rayo incidente se propaga en agua (θ_1 = 46°, n_1 = 1,33), y el rayo refractado lo hace en el aire (n_2 = 1,00). La ley de Snell da

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{n_1 \text{sen}\theta_1}{n_2} = \frac{(1{,}33)\text{sen}46^o}{1{,}00}$$
$$= 0{,}96 \Rightarrow$$
$$\theta_2 = 73{,}74^o$$

Como θ_2 es mayor que θ_1, el rayo refractado se desvía alejándose de la normal.

Ejemplo 2. Los peces en arroyo tranquilo se ponen muy nerviosos cuando alguien se acerca a él. Si se quiere no ser visto, porque los peces pueden ver alrededor del borde debido a la refracción de la luz. Para ver cómo funciona esto, supongamos que el pez está a 1,00 m de profundidad y una distancia de 0,80 m desde el borde una orilla recta (suponiendo que el agua va directamente a la parte superior de la orilla).
a) ¿Si una persona mide 1,8 m de altura, a que distancia del borde puede aproximarse sin ser visto por los peces si no hubiera refracción?
b) ¿A qué distancia se podría acercar si el agua refracta la luz (n = 1,33)?

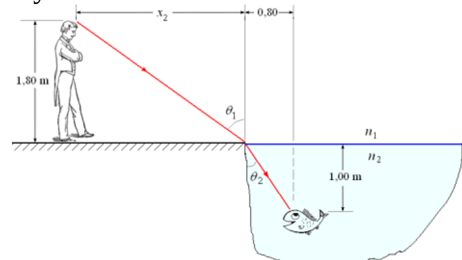
Solución.
a) Si no hubiera refracción la luz procedente de la persona iría directamente hacia los ojos del pez.



Por semejanza de triángulos

$$\frac{x_1}{1{,}8} = \frac{0{,}80}{1{,}00} \Rightarrow x_1 = 1{,}44 \text{ m}$$

La persona puede aproximarse sin ser vista por los peces 1,44 m.
b) Si hay refracción



Primero encontramos θ_2

$$\tan\theta_2 = \frac{0{,}80}{1{,}00} = 0{,}80 \Rightarrow \theta_2 = 38{,}7^o$$

Aplicamos la ley de Snell

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

n_1 = 1,00, n_2 = 1,33

$$(1{,}00)\text{sen}\theta_1 = 1{,}33 \text{sen}38{,}7^o$$
$$\text{sen}\theta_1 = 0{,}83$$
$$\theta_1 = 56{,}26^o$$
$$\tan\theta_1 = \tan 56{,}26^o = 1{,}50$$

También

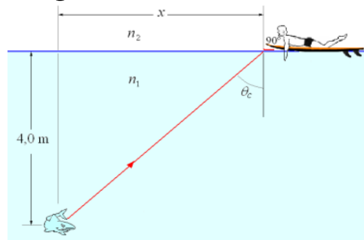
$$\tan\theta_1 = \frac{x_2}{1{,}8}$$

Luego

$$\frac{x_2}{1,8} = 1,50 \Rightarrow x_2 = 2,69 \text{ m}$$

La persona puede aproximarse sin ser vista por los peces 2,69 m.

Ejemplo 3. Un surfista flota en aguas tranquilas (*n* = 1,33) en espera de una gran ola. Un tiburón a una profundidad de 4 m nada hacia él. ¿A qué distancia (horizontal) pueden acercarse los tiburones antes de que el surfista los vea? El surfista está echado en su tabla con los ojos cerca del nivel del agua.



Solución.
En el acercamiento más cercano el rayo de luz procedente del tiburón viaja casi paralelo a la superficie del agua de tal manera que el surfista no lo puede ver. El máximo acercamiento se da con el ángulo crítico.
Aplicando la ley de Snell
Aplicamos la ley de Snell

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

n_1 = 1,33, n_2 = 1,00
$\theta_1 = \theta_c$, θ_2 = 90º

$$1,33\text{sen}\theta_c = (1)\text{sen}90° = 1 \Rightarrow$$

$$\text{sen}\theta_c = \frac{1}{1,33} \quad \theta_c = 48,75° \text{ y}$$

$$\tan\theta_c = \tan 48,75° = 1,14$$

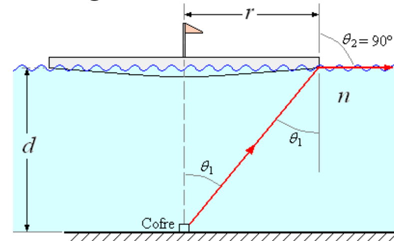
Tenemos

$$\tan\theta_c = \frac{x}{4,0} \Rightarrow$$

$$x = 4,0\tan\theta_c = 4,0(1,14) = 4,56 \text{ m}$$

El acercamiento más cercano es 4,56 m.

Ejemplo 4. Los ladrones para esconder un cofre con diamantes lo hunden en un lago a una profundidad de 7,20 m. Para marcar el lugar colocar una plataforma. Si las dimensiones del cofre son pequeñas determine el tamaño de la plataforma para que ningún marinero que pasa pueda ver lo que hay bajo la superficie.
Solución. Podemos considerar el cofre hundido como una fuente puntual de luz. Si la plataforma es lo suficientemente grande para su finalidad, todos los rayos de luz procedentes del cofre que inciden sobre la plataforma son bloqueados, los que inciden fuera de la plataforma deben ser totalmente reflejados.
La plataforma debe ser circular, si su centro está amarrado directamente sobre el cofre, los rayos de luz que inciden en el borde de la plataforma deben hacerlo a un ángulo crítico.



Rayo que incide en el borde

$$\text{sen}\theta_1 = n\text{sen}90° \Rightarrow \text{sen}\theta_1 = \frac{1}{n}$$

Tenemos también

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2}}$$

Igualando:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{r^2}{r^2+d^2} = \frac{1}{n^2}$$

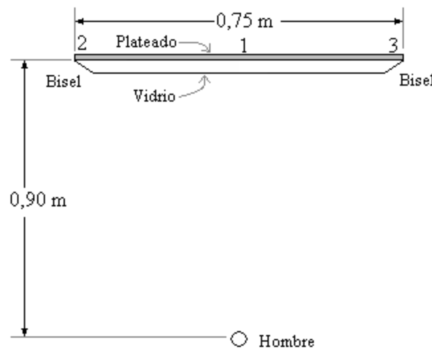
$$\Rightarrow r^2 = \frac{d^2}{n^2 - 1} \Rightarrow r = \frac{d}{\sqrt{n^2-1}}$$

Reemplazando valores

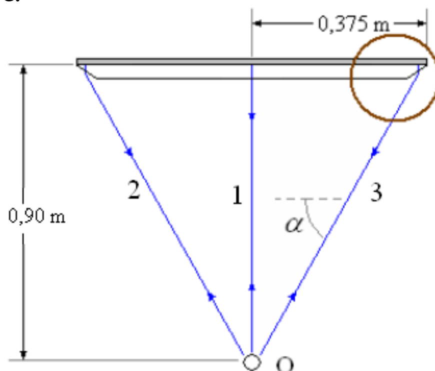
$$r = \frac{7,20}{\sqrt{1,33^2 - 1}} = \frac{7,20}{0,88} = 8,16 \text{ m}$$

La plataforma debe ser circular con un radio 8,16 m.

Ejemplo 5. Un hombre parado simétricamente frente a un espejo plano con bordes biselados puede ver tres imágenes de sus ojos cuando está a 0,90 m del espejo. El espejo está plateado en l espalda, tiene 0,75 m de ancho, y está hecho de vidrio con índice de refracción 1,54. ¿Cuál es el ángulo del bisel de los bordes?



Solución. La figura muestra las trayectorias de la luz para formar las tres imágenes de los ojos del hombre.



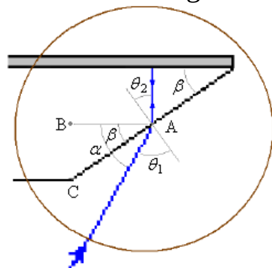
El ángulo formado por el haz lateral y el espejo es α .

$$\tan\alpha = \frac{0,90}{0,375} = 2,4 \Rightarrow \alpha = 67,38^{\circ}$$

Luego $\operatorname{sen}\alpha = 0,92$ y $\cos\alpha = 0,38$

Trayectoria 1. La imagen central de sus ojos producida por la luz que sale de ellos, incide en el espejo, y se refleja a lo largo de la misma trayectoria.

Trayectorias 2 y 3. La figura muestra el detalle de la incidencia en el bisel. El ángulo del bisel es θ .



La luz que incide sobre los bordes biselados en el punto A con un ángulo θ_1, el ángulo de refracción es θ_2. Para que el rayo al reflejarse en la superficie plateada vuelva por la misma trayectoria a los ojos la incidencia debe ser perpendicular.

El haz que incide en A se refracta y se cumple

$$\operatorname{sen}\theta_1 = n\operatorname{sen}\theta_2$$

En la figura se puede ver

$\theta_2 = \beta$ y

$\beta = \alpha - (90 - \theta_1) \Rightarrow \theta_1 = 90 - (\alpha - \beta)$ luego:

$$\operatorname{sen}[90 - (\alpha - \beta)] = n\operatorname{sen}\beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = n\operatorname{sen}\beta$$

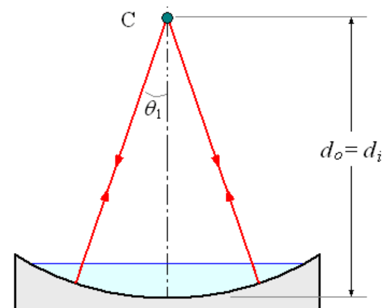
$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{\cos\alpha}{n - \operatorname{sen}\alpha}$$

Reemplazando valores:

$$\tan\theta = \frac{0,38}{1,54 - 0,92} = 0,61 \Rightarrow \theta = 31,5^{\circ}$$

Ejemplo 6. Se coloca un espejo cóncavo horizontalmente, de modo que su eje óptico es vertical. Cuando un objeto luminoso se coloca en el eje a 24 cm sobre el espejo, su imagen se encuentra en el mismo punto. Cuando se vierte una capa delgada de líquido en el espejo, el objeto se debe bajar 6 cm para que coincida con su imagen. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

Solución.

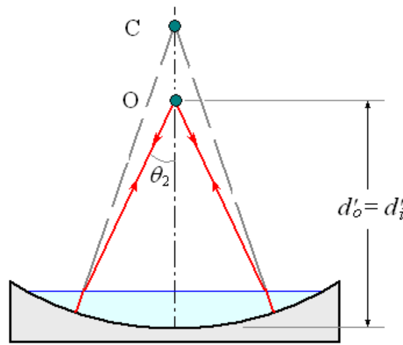


Sin líquido, el objeto y la imagen en el espejo coinciden a una distancia de 24 cm del vértice del espejo.

Luego el radio de curvatura del espejo es 24 cm, ya que la luz reflejada en el espejo vuelve por la misma trayectoria.

$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{2}{R}$, como $d_0 = d_i$,

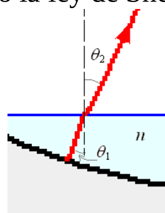
$R = d_0 = d_i = 24\,\text{cm}$.



Cuando se vierte una capa delgada de líquido en el espejo, el objeto y la imagen final coinciden a 18 cm del vértice del espejo. Nuevamente la luz reflejada en la superficie del espejo vuelve por la misma trayectoria

Después de la refracción en la superficie del líquido, los rayos de luz son normales a la superficie del espejo, su reflejo va dirigido al centro de curvatura del espejo. Debido a la refracción en la superficie del líquido

Solución aplicando la ley de Snell



$$n\,\text{sen}\,\theta_1 = \text{sen}\,\theta_2$$

Con

$$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{d}{24} \text{ y } \text{sen}\,\theta_2 = \frac{d}{18}$$

Tenemos

$$n\frac{d}{24} = \frac{d}{18} \Rightarrow n = \frac{24}{18} = 1{,}33$$

El índice de refracción del agua es 1,33

Solución considerando la interfase como una superficie esférica

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Con

$n_1 = n$, $n_2 = 1$, $d_o = 24$, $d_i = 18$, $R = \infty$

Tenemos

$$\frac{n}{24} + \frac{1}{-18} = \frac{1-n}{\infty} \Rightarrow n = \frac{24}{18} = 1{,}33$$

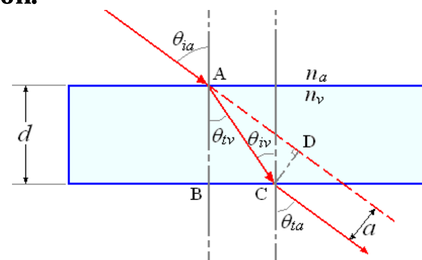
EL DESPLAZAMIENTO DE LA LUZ POR UNA PLACA DE MATERIAL TRANSPARENTE

Un uso común de un material transparente, como el cristal, es en ventanas. El cristal de una ventana consta de una placa de cristal que tiene sus superficies paralelas. Cuando un rayo de luz pasa a través del cristal, el rayo emergente es paralelo al rayo incidente, aunque desplazado con respecto a ésta.

Ejemplo 7. a) Demostrar que un rayo que incide con un ángulo θ_{ia} sobre una lámina plana de vidrio en el aire saldrá de ella con el mismo ángulo.

b) Encontrar la expresión del desplazamiento a del rayo si el espesor del vidrio es d.

Solución.



a)

Aplicando la ley de Snell en la primera superficie

$$n_a \text{sen}\,\theta_{ia} = n_v \text{sen}\,\theta_{tv} \quad (1)$$

Aplicando la ley de Snell en la segunda superficie

$$n_v \text{sen}\,\theta_{iv} = n_a \text{sen}\,\theta_{ta} \quad (2)$$

Siendo $\theta_{tv} = \theta_{iv}$ (ángulos alternos internos)

$$n_v \text{sen}\,\theta_{tv} = n_a \text{sen}\,\theta_{ta} \quad (2a)$$

De (1) y (2a):

$$n_a \text{sen}\,\theta_{ia} = n_a \text{sen}\,\theta_{ta}$$

Luego

$$\theta_{ia} = \theta_{ta}$$

Los rayos incidente y emergente son iguales.

b) En la figura el ángulo $\text{C}\hat{\text{A}}\text{D} = \theta_{ia} - \theta_{tv}$

Del triángulo ACD

$$\text{sen}(\theta_{ia} - \theta_{tv}) = \frac{a}{\text{AC}} \Rightarrow$$

$$\text{AC} = \frac{a}{\text{sen}(\theta_{ia} - \theta_{tv})} \quad (1)$$

Del triángulo ABC

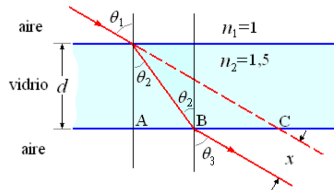
$$\text{AC} = \frac{d}{\cos\theta_{tv}} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\frac{a}{\text{sen}(\theta_{ia} - \theta_{tv})} = \frac{d}{\cos\theta_{tv}} \Rightarrow$$

$$a = \frac{\text{sen}(\theta_{ia} - \theta_{tv})}{\cos\theta_{tv}} d$$

Ejemplo 8. La luz incide sobre una placa de vidrio con un ángulo de 60 °. El índice de refracción del vidrio es 1,50 y tiene 3 mm de espesor. ¿Cuál es el desplazamiento lateral del rayo de luz después de haber atravesado la placa? (Para el aire, n = 1,00).



Solución.
Aplicando la ley de Snell
Del aire al vidrio

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

$$(1)\text{sen}60^\circ = (1{,}5)\text{sen}\theta_2$$

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{\text{sen}60^\circ}{1{,}5} = 0{,}577$$

$$\theta_2 = 35{,}26^\circ$$

Del vidrio al aire

$n_2 \text{sen}\theta_2 = n_1 \text{sen}\theta_3$, luego $\theta_3 = \theta_1 = 60^\circ$

Para encontrar el desplazamiento lateral x.

$$\text{AB} = d\tan\theta_2 = 3\tan 35{,}26^\circ = 2{,}124 \text{ mm}$$

$$\text{AC} = d\tan\theta_1 = 3\tan 60^\circ = 5{,}196 \text{ mm}$$

$$x = (\text{AC} - \text{AB})\cos\theta_1 = (5{,}196 - 2{,}124)\cos 60^\circ =$$

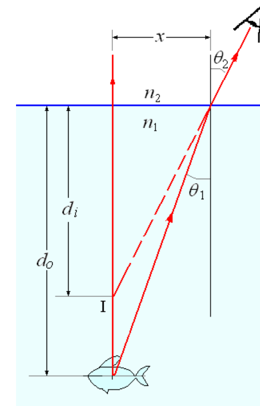
1,536 mm

PROFUNDIDAD APARENTE

Una de las consecuencias interesantes de la refracción es que un objeto que se encuentra sumergido en agua parece estar más cerca de la superficie de lo que en realidad está. En el ejemplo siguiente se muestra esta situación.

Ejemplo 9. Cuando se mira un pez o un objeto bajo el agua parece ser más grande. El agua no aumenta las imágenes, las hace parecer más, y el cerebro decide que debe ser un pez grande (las cosas cercanas se ven más grandes). Supongamos que se mira casi en línea recta a un objeto que está a una profundidad d_o por debajo de la superficie del agua (n = 1,33). ¿A qué profundidad parece estar?

Solución.



En la figura se muestran dos rayos de luz que salen del pez. Uno sale derecho hacia arriba y no se refracta, el otro es visto después de de refractarse. Los observadores piensan que estos rayos emanan del punto I, donde creen que esta el pez.
En el dibujo,

$$\tan\theta_1 = \frac{x}{d_o} \text{ y } \tan\theta_2 = \frac{x}{d_i}$$

Para ángulos pequeños $\tan\theta \approx \text{sen}\theta \approx \theta$

Por la ley de Snell

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2 \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

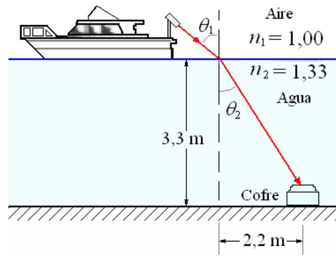
$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} \approx \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{x/d_o}{x/d_i} = \frac{d_i}{d_o} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\frac{d_i}{d_o} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow d_i = \frac{n_2}{n_1} d_o = \frac{1}{1{,}33} d_o = 0{,}75 d_o$$

El pez parece estar a una profundidad 0,75d_o.

Ejemplo 10. Para iluminar en la noche un cofre hundido se utiliza un reflector de un yate, como se observa en la figura. ¿A qué ángulo de incidencia θ_1 debe dirigirse el haz de luz?



Solución

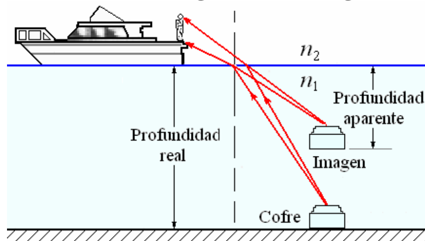
El ángulo de incidencia θ_1 puede determinarse a partir de la ley de Snell, suponiendo que puede calcularse el ángulo de refracción θ_2. A partir de los datos de la figura se concluye que tan θ_2 = (2,0 m)/(3,3 m), de modo que θ_2 = 31º. Con n_1 = 1,00 para el aire y n_2 = 1,33 para el agua, al aplicar la ley de Snell se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{n_2 \operatorname{sen}\theta_2}{n_1}$$

$$= \frac{(1{,}33)\operatorname{sen}31^o}{1{,}00} = 0{,}69 \Rightarrow$$

θ_1 = 44º

Cuando el cofre hundido se ve desde el bote, los rayos de luz del cofre pasan hacia arriba a través del agua, se refractan alejándose de la normal cuando llegan al aire y luego se desplazan hacia el observador, como se sugiere en la figura.



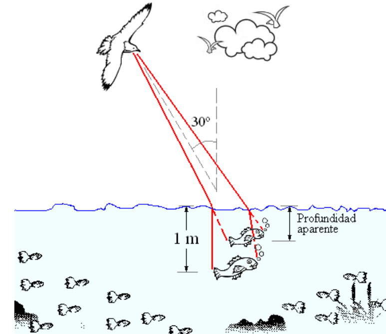
Esta figura es semejante a la anterior, salvo que se ha invertido la dirección de los rayos y el reflector se sustituye por un observador. Los rayos que penetran en el aire son regresados hacia el agua, lo que indica que el observador ve una imagen del cofre a una profundidad aparente menor que la verdadera. Cuando el observador está directamente arriba del objeto sumergido, la profundidad aparente *d'* está relacionada con la profundidad verdadera *d* por

$$d' = \frac{n_2}{n_1} d$$

Reemplazando valores

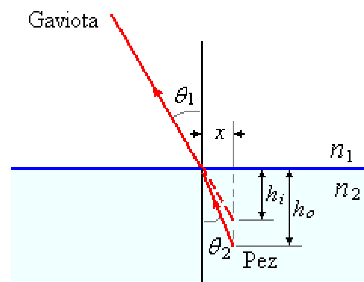
$$d' = \frac{1}{1{,}33}(3{,}00) = 2{,}56 \text{ m}$$

Ejemplo 11. Una gaviota divisa un pez en el agua como se muestra en la figura. ¿A qué profundidad y con qué ángulo percibirá la gaviota al pez que se representa en la figura siguiente?



Solución.

a) La gaviota percibe la imagen virtual, que es la que correspondería a prolongar los rayos que le llegan desde el aire al medio con mayor índice de refracción, tal como se puede ver en el dibujo siguiente.



Aplicando la ley de Snell

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

n_1 = 1,00, n_2 = 1,33

$$\theta_1 = 30º$$

$$(1{,}00)\operatorname{sen}30º = (1{,}33)\operatorname{sen}\theta_2 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{1/2}{1{,}33} = 0{,}38$$

$$\theta_2 = 22{,}08º$$

b)

$$\tan\theta_2 = \frac{x}{h_o} = \tan 22{,}08º = 0{,}405$$

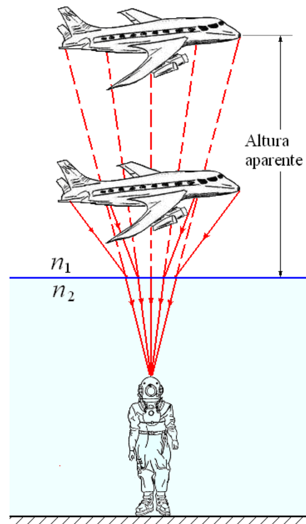
$$\tan 30º = \frac{x}{h_i} = 0{,}577$$

Dividiendo

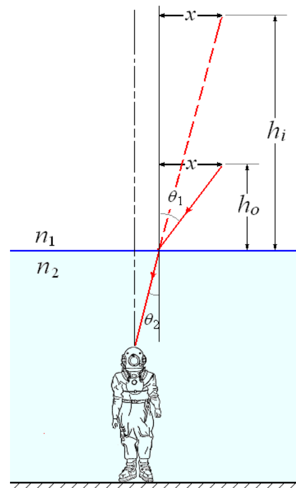
$$h_i = h_o \frac{\tan 22{,}08^o}{\tan 30^o} = 1{,}00\left(\frac{0{,}405}{0{,}577}\right) = 0{,}70 \text{ m}$$

La altura a la que la gaviota «percibe» al pez a una profundidad de 0,70 m.

Ejemplo 12. Justo encima de un buzo sumergido en el agua pasa un avión a 200 m sobre el nivel del agua. ¿A qué altura le parece al buzo que está el avión?



Solución.



Aplicando la ley de Snell

$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$

$n_1 = 1{,}00$, $n_2 = 1{,}33$

Como θ_1 y θ_2 son pequeños

$$\text{sen}\theta_2 \approx \tan\theta_2 = \frac{x}{h_i}$$

$$\text{sen}\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \frac{x}{h_o}$$

Dividiendo

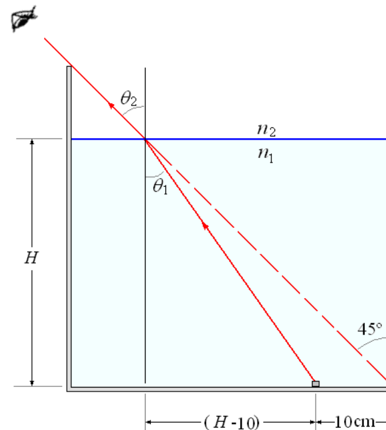
$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{x}{h_o}}{\frac{x}{h_i}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow$$

$$h_i = \frac{n_2}{n_1} h_o = \frac{1{,}33}{1{,}00}(200) = 266 \text{ m}$$

La altura aparente es 266m.

Ejemplo 13. Un observador está situado en una posición que ve la pared interna CD de un recipiente cúbico de paredes opacas.
¿Qué altura de agua hay que poner en la vasija para que el observador pueda ver un objeto que se halla sobre el fondo a 10 cm del vértice D?
La arista del cubo ℓ = 40 cm y n_a = 1,33.



Solución. Del enunciado se deduce que la visual del observador hacia la vasija forma un ángulo de 45º cuando ésta se encuentra vacía.
Cuando haya líquido, el observador sólo podrá ver aquellos rayos provenientes del fondo que, tras la refracción, formen un ángulo de 45 con la vertical.
Aplicando la ley de Snell

$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$

$n_1 = 1{,}33$, $n_2 = 1$

$\theta_2 = 45^o$

Reemplazando

$(1{,}33)\text{sen}\theta_1 = (1{,}00)\text{sen}45^o \Rightarrow$

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{\sqrt{2}/2}{1{,}33} = 0{,}53 \Rightarrow$$

$\theta_1 = 32{,}11^o$

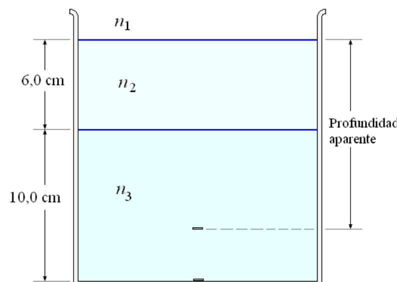
Luego

$$\tan\theta_1 = \frac{H-10}{H} = 0{,}628 \Rightarrow$$

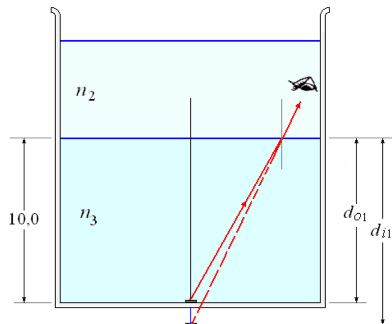
$$H - 10 = 0{,}628H$$

$$H = \frac{10}{0{,}372} = 26{,}8 \text{ cm}$$

Ejemplo 14. Un vaso grande contiene agua (n_3 = 1,33) con una profundidad de 10,0 cm, sobre la que flota una capa de benceno (n_2 =1,50) de espesor 6,0 cm. Una moneda se encuentra en el fondo del vaso. ¿A qué profundidad parece estar cuando se mira casi directamente hacia abajo?



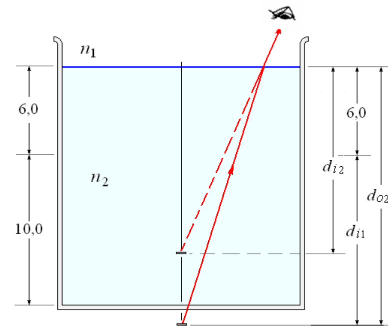
Solución.
Un observador en el benceno vería la moneda a la profundidad d_{i1} debajo de la interfase benceno agua



$$d_{i1} = \frac{n_2}{n_3} d_{o1} = \frac{1{,}5}{1{,}33}(10{,}0)$$

$$= 11{,}28 \text{ cm}$$

Un observador en el aire verá la moneda a la profundidad d_{i2} debajo de la superficie del agua.



$$d_{i2} = \frac{n_1}{n_2} d_{o2}$$

Con

$$d_{02} = 6{,}0 + 11{,}28 = 17{,}28$$

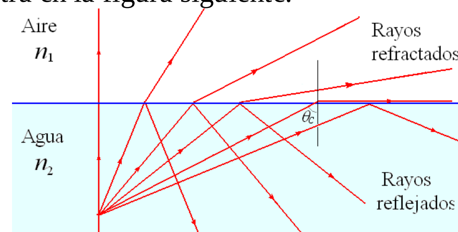
Reemplazando

$$d_{i2} = \frac{n_1}{n_2} d_{o2} = \frac{1{,}0}{1{,}5}(17{,}28)$$

$$= 11{,}52 \text{ cm}$$

REFLEXIÓN INTERNA TOTAL

Si la luz viaja de un medio a otro de menor índice de refracción, la ley de Snell muestra que a medida que θ_1 se incrementa hasta llegar a un valor crítico θ_c, el que corresponde a θ_2 = 90º, tal como se muestra en la figura siguiente.



Para $\theta_1 < \theta_c$, parte de la luz se refleja y parte se refracta (transmite).

Para $\theta_1 \geq \theta_c$, toda la luz se refleja.

Esta reflexión total interna requiere que

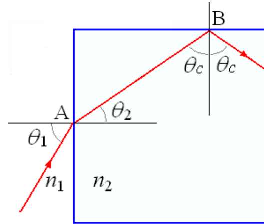
$$n_1 \text{sen}\theta_c = n_2 \text{sen}90^\circ$$

El ángulo crítico θ_c queda determinado por

$$\text{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Ejemplo 15. La reflexión interna total se utiliza para mantener los rayos de luz en una fibra de vidrio, lo que constituye la base de la tecnología de la fibra óptica. Supongamos que un rayo de luz en el aire incide el extremo de una fibra (n_2 = 1,31) en el punto A mostrado en la figura. ¿Cuál es el valor máximo de θ_1 que se asegurará que el rayo se

refleje totalmente en el punto B y por lo tanto, se mantenga dentro de la fibra?



Solución.
Aplicando la ley de Snell en el punto B

$$n_2 \operatorname{sen}\theta_c = n_1 \operatorname{sen}90^o \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1,0}{1,31} = 0,763 \Rightarrow$$

$$\theta_c = 49,76^o$$

Luego

$$\theta_2 = 90^o - \theta_c = 90^o - 49,76^o = 40,24^o$$

Aplicando la ley de Snell en el punto A

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

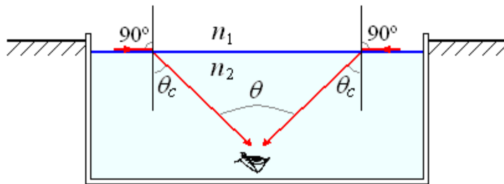
$$(1,0)\operatorname{sen}\theta_1 = (1,31)\operatorname{sen}40,24^o \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\theta_1 = 1,31(0,65) = 0,85 \Rightarrow$$

$$\theta_1 = 57,8^o$$

El valor máximo de θ_1 que se asegurará que el rayo se refleje totalmente en el punto B es 57,8º.

Ejemplo 16. Si se mira hacia arriba desde el fondo de una piscina, se puede ver todo el mundo exterior mirando desde el vértice de un cono. Encontrar el valor del ángulo del vértice del cono. Para el agua n = 1,33.
Solución.



Para ver todo el mundo exterior los rayos extremos deben ingresa con el ángulo critico tal como se muestra en la figura.
Aplicando la ley de Snell

$$n_2 \operatorname{sen}\theta_c = n_1 \operatorname{sen}90^o$$

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1,0}{1,33} = 0,75 \Rightarrow$$

$$\theta_c = 48,75^o$$

Pero

$$\frac{\theta}{2} = \theta_c = 48,75^o \Rightarrow$$

$$\theta = 97,5^o$$

El valor del ángulo del vértice del cono debe ser 97,5º.

Ejemplo 17. Hállense los ángulos límite de la interfase del aire:
a) con agua (n_a = 1,33
b) con el diamante (n_d = 2,4).
c) ¿Cómo cambia el ángulo limite al introducir el diamante en agua?
Solución.
Aplicando la ley de Snell.

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$n_1 \operatorname{sen}90^o = n_2 \operatorname{sen}\theta_c \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_1}{n_2}$$

a) Aire y agua
n_1 = 1,00, n_2 = 1,33

$$\operatorname{sen}\theta_{c(a\,a)} = \frac{1}{1,33} = 0,75 \Rightarrow$$

$$\theta_{c(a\,a)} = 48,75^o$$

b) Aire y diamante
n_1 = 1,00, n_2 = 2,4

$$\operatorname{sen}\theta_{c(dia)} = \frac{1}{2,4} = 0,42 \Rightarrow$$

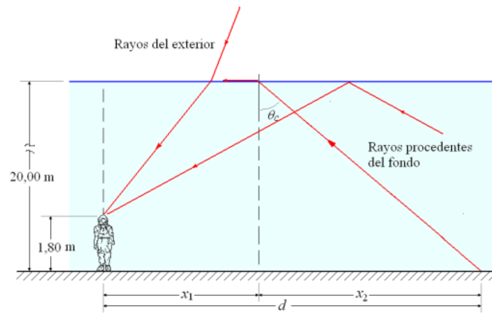
$$\theta_{c(dia)} = 24,62^o$$

c) Agua y diamante
n_1 = 1,33, n_2 = 2,4

$$\operatorname{sen}\theta_{c(a\,d)} = \frac{1,33}{2,4} = 0,554 \Rightarrow$$

$$\theta_{c(a\,d)} = 33,65^o$$

Ejemplo 18. Un buzo de 1,80 m de altura se halla en el fondo de un lago de 20 m de profundidad. Calcular la distancia mínima contada desde el punto en que se encuentra hasta el punto del fondo que puede ver reflejado en la superficie del agua (índice de refracción del agua, n_a = 1,33).
Solución.



Se trata de ver las consecuencias de la reflexión total en una interfase agua-aire.
El ángulo crítico para esa interfase es θ_c = 48,75º.
La mínima distancia a partir de la cual el buzo comenzará a ver el fondo reflejado en la superficie es la que corresponde a ese ángulo.
Aplicando la ley de la reflexión, el ángulo de reflexión ha de ser igual al de incidencia, tal como se muestra en la Figura.

$$d = x_1 + x_2$$

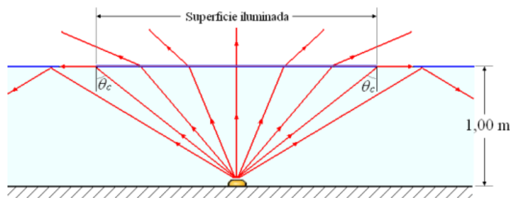
Con

$$x_1 = (20{,}00 - 1{,}80)\tan 48{,}75 = 20{,}753 \text{ m}$$

$$x_2 = (20{,}00)\tan 48{,}75 = 22{,}805 \text{ m}$$

Tenemos
d = 20,753 +22,805 = 43,56 m
Para d > 43,56 el buzo ve el fondo reflejado en la superficie del agua.
Par d < 43,56 el buzo ve el exterior.

Ejemplo 19. Se sitúa un objeto luminoso en el centro y en el fondo de una piscina de un metro de profundidad. Halle el radio del círculo de la superficie que queda iluminado por el objeto del fondo.
Solución.



En la Figura se puede comprobar que el ángulo crítico θ_c coincide con el que forma el límite de la zona iluminada. El radio R de la zona iluminada viene dado por la relación

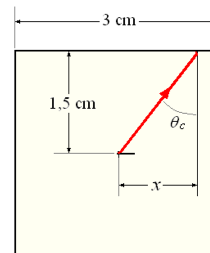
$$R = h\tan\theta_c$$

El ángulo crítico θ_c para la internas agua – aire es 48,75º, luego

$$R = (1{,}00)\tan 48{,}75^{\circ} = 1{,}14 \text{ m.}$$

La luz sale del fondo de la piscina en un radio R = 1,14 m.

Ejemplo 20. Una piedra preciosa transparente cúbica de 2,5 cm de lado tiene un pequeño defecto en el centro. El joyero no quiere partirla porque su valor disminuye drásticamente con el tamaño. ¿Qué fracción de la superficie debe cubrir con la configuración para que la falla no sea vista por el comprador? La piedra tiene un índice de refracción de 1,60.
Solución.
La figura siguiente muestra un corte de cubo y el rayo de luz que sale de la falla con ángulo crítico.



$$\text{sen}\,\theta_c = \frac{1}{n} = \frac{1}{1{,}60} = 0{,}625$$

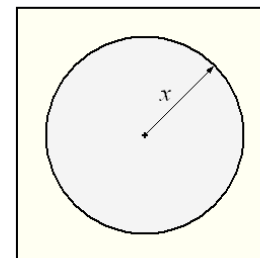
$$\theta_c = 38{,}68^{\circ}$$

$$\tan\theta_c = \frac{x}{1{,}5} = 0{,}800$$

$$x = 1{,}2 \text{ cm}$$

Un rayo de luz procedente de la falla incidirá sobre la superficie y se reflejará totalmente si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico.

La figura siguiente muestra una cara cubierta con un adorno que no permite salir a los rayos procedentes de la falla con un ángulo menor que el crítico.

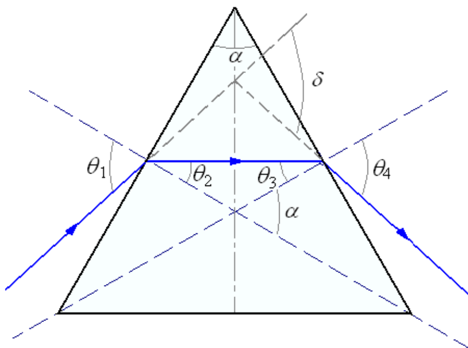


Esto garantiza que ninguna luz de la falla puede salir directamente de la piedra, ya que todos los rayos que emergerían son detenidos por el arreglo. Así, la fracción de la superficie que debe ser

cubierto por el ajuste
Superficie total
$A_T = 6(3\times 3)$ =54 cm^2
Superficie cubierta
$A_C = 6(\pi 1{,}2^2)$ = 27,14 cm^2
Fracción de la superficie que debe ser cubierta

$$= \frac{27{,}14}{54} = 0{,}503$$

ÁNGULO DE MÍNIMA DESVIACIÓN DE UN PRISMA.



Para la posición de mínima desviación, el rayo viaja perpendicular a la bisectriz del ángulo α , y los ángulos incidente y emergente son iguales, Luego

$\theta_1 = \theta_4$ y $\theta_2 = \theta_3$ (6)

También

Como $\alpha = \theta_2 + \theta_3 \Rightarrow \alpha = 2\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\alpha}{2}$

y $\delta = (\theta_1 - \theta_2) + (\theta_4 - \theta_3) \Rightarrow$

$\delta = \theta_1 + \theta_4 - \theta_2 - \theta_3 = 2\theta_1 - 2\theta_2$

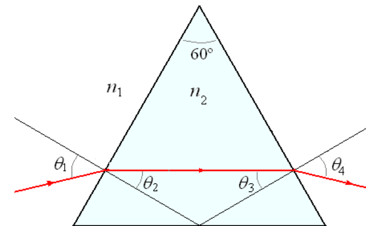
$\Rightarrow \frac{\delta}{2} = \theta_1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\delta}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\text{sen}\theta_1 = n\text{sen}\theta_2$

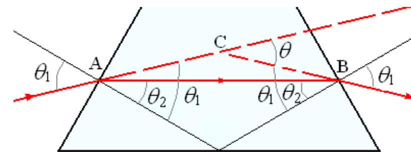
$\text{sen}\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = n\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$

$$n = \frac{\text{sen}\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Ejemplo 21. La luz incide sobre un prisma equilátero de vidrio (n = 1,42) y viaja a través de ella paralela a un lado.
a) ¿Cuál es el ángulo de incidencia?
b) A través de qué ángulo el rayo es desviado después de salir del prisma
Solución.
a)

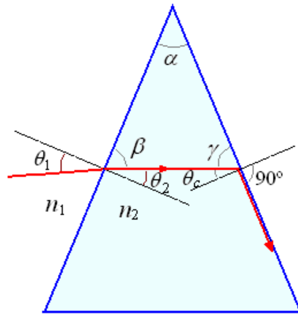


n_1 = 1, n_2 = 1,42
Por geometría
$\theta_2 = \theta_3 = 30^{\circ}$ y $\theta_2 = \theta_4$
Para la primera incidencia
$n_1\text{sen}\theta_1 = n_2\text{sen}\theta_2$
Reemplazando:
$(1)\text{sen}\theta_1 = 1{,}42\text{sen}30^{\circ}$
$\text{sen}\theta_1 = 1{,}42(0{,}5) = 0{,}71 \Rightarrow \theta_1 = 45{,}23^{\circ}$
El ángulo de incidencia es θ_1 = 45,23º.
b)



El ángulo desviado es θ.
En el triángulo ABC
$\theta = 2(\theta_1 - \theta_2)$
Reemplazando valores
$\theta = 2(45{,}23^{\circ} - 30^{\circ}) = 30{,}46^{\circ}$
El rayo es desviado después de salir del prisma un ángulo de 30,46º.

Ejemplo 22. El ángulo de incidencia de un rayo de luz sobre un prisma de vidrio de índice de refracción 1,50 se aumenta gradualmente, y se comprueba que, cuando el ángulo es 4º 47', el rayo ya no pasa a través del prisma. ¿Cuál es el ángulo de refracción del prisma?
Solución.



Sea α el ángulo de refracción del prisma.
Aplicando la ley de Snell en la entrada del rayo al prisma

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

n_1 = 1,00, θ_1 = 4º 47' = 4,78º
n_2 = 1,50, θ_2 = ?

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{\text{sen}4{,}78^\circ}{1{,}5} = 0{,}555$$

$$\theta_2 = 3{,}18^\circ$$

Aplicando la ley de snell en la segunda cara del prisma, para que el rayo no salga tiene que incidir con el ángulo crítico θ_c.

$$n_2 \text{sen}\theta_c = n_1 \text{sen}90^\circ$$

$$\text{sen}\theta_c = \frac{\text{sen}90^\circ}{1{,}5} = 0{,}666$$

$$\theta_c = 41{,}81^\circ$$

La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Siendo

$$\beta = 90^\circ - 3{,}18^\circ = 86{,}82^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - 41{,}81^\circ = 48{,}19^\circ$$

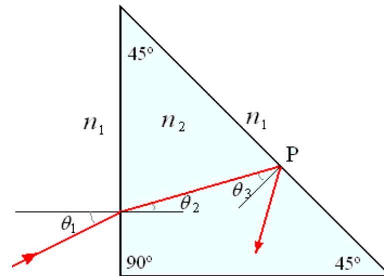
Tenemos

$$\alpha + 86{,}82^\circ + 48{,}19^\circ = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha = 44{,}99^\circ$$

El ángulo de refracción del prisma es 45º.

Ejemplo 23. La reflexión total interna en un primas 45º - 90º - 45º se usa en los binoculares prismáticos para "doblar la trayectoria de la luz" y hacer más compacto el instrumento. Los prismas y lentes deben ser cuidadosamente alineados en los binoculares. Si la luz incide sobre un lado del prisma como se muestra en la figura.
a) ¿cuál es el valor máximo de θ_1 para que se produzca reflexión total en el punto P, el índice de refracción del vidrio es n = 1,50?
b) Suponga que el ángulo incidente es 45º. ¿Cuánto se habrá desviado el rayo incidente al salir del prisma en el punto P?



Solución.
Al incidir en la segunda cara

$$n_2 \text{sen}\theta_3 = n_1 \text{sen}\theta_4$$

La condición reflexión total en el punto P es

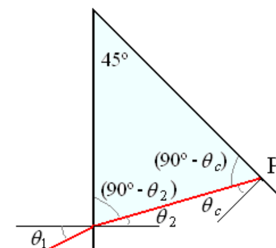
$$\theta_3 = \theta_c \quad \theta_4 = 90^\circ$$

Luego

$$(1{,}5)\text{sen}\theta_c = (1{,}00)\text{sen}90^\circ \Rightarrow$$

$$\text{sen}\theta_c = \frac{1}{1{,}5} \Rightarrow \theta_c = 41{,}81^\circ$$

La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.



$$(90^\circ - \theta_c) + 45^\circ + (90^\circ - \theta_2) = 180^\circ$$

$$\theta_2 = 45^\circ - \theta_c = 45^\circ - 41{,}81^\circ = 3{,}2^\circ$$

Al incidir en la primera cara

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

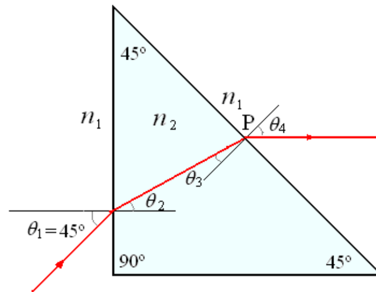
Reemplazando valores

$$(1{,}00)\text{sen}\theta_1 = (1{,}5)\text{sen}3{,}2^\circ \Rightarrow$$

$$\text{sen}\theta_1 = 0{,}084 \Rightarrow$$

$$\theta_1 = 4{,}8^\circ$$

El máximo valor de θ_1 para que se produzca reflexión total en el punto P es 4,8º.
b)



Aplicando la ley de Snell a la primera incidencia.

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

$$(1)\text{sen}45° = 1{,}5\,\text{sen}\theta_2 = 0{,}707$$

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{0{,}707}{1{,}5} \quad \theta_2 = 28{,}12°$$

Aplicando la ley de Snell a la incidencia en P.

$$n_2 \text{sen}\theta_3 = n_1 \text{sen}\theta_4$$

$$\theta_3 = \theta_2 = 28{,}12°$$

Luego

$$(1{,}5)\text{sen}28{,}12° = (1{,}0)\text{sen}\theta_4 = 0{,}707$$

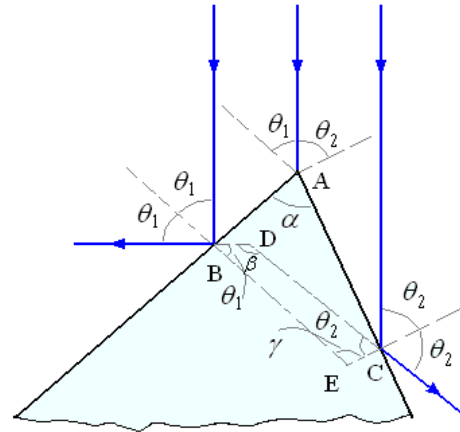
$$\theta_4 = 45°$$

La normal a P es paralela al rayo incidente, luego el rayo incidente se desvía 45º.

Ejemplo 24. El método más fácil de medir el ángulo de refracción de un prisma es dirigir un haz de luz de rayos paralelos sobre el ángulo y medir la separación angular de los haces reflejados en los dos lados del prisma con el ángulo de refracción. Demostrar que esta separación angular es el doble del ángulo del prisma.

Solución. Consideremos tres rayos paralelos e incidiendo en los puntos A, B y C.

Los rayos incidentes en B y C se reflejan de acuerdo a las leyes de la óptica, las proyecciones de estos rayos se encuentran en D. Las normales en B y C se encuentran en E.



El problema pide demostrar

$$2\alpha = \beta$$

En el cuadrilátero ABEC

$$\alpha + \gamma = 180° \qquad (1)$$

En el cuadrilátero BDCE

$$\beta + \gamma + \theta_1 + \theta_2 = 360° \qquad (2)$$

En el vértice A, como hay dos ángulos rectos

$$\alpha + \theta_1 + \theta_2 = 180° \qquad (3)$$

Ejecutando (1) + (3) – (2) obtenemos:

$$(\alpha + \gamma) + (\alpha + \theta_1 + \theta_2) - (\beta + \gamma + \theta_1 + \theta_2)$$
$$= 180° + 180° - 360°$$

Ejecutando:

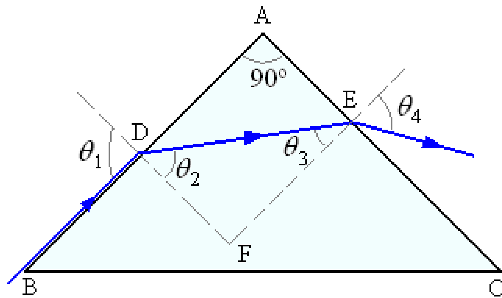
$$2\alpha = \beta$$

El ángulo ente los rayos reflejados es el doble que el ángulo del prima.

Ejemplo 25. Un rayo de luz entra en la cara de BA de un prisma rectangular de material refractante en incidencia rasante. Emerge de la CA cara adyacente a un ángulo θ_4 con la normal. Si θ_c es el ángulo crítico para el material.

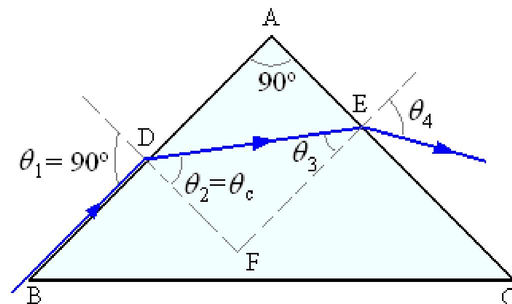
a) Demostrar que $\text{sen}\theta_4 = \cot\theta_c$.

b) ¿Siempre emergerá un rayo de CA? En caso negativo, explique lo que sucede, y deduzca de qué valores del índice de refracción del material realmente emerge el rayo.



Solución.

a)



Un rayo de luz entra en la cara BA con incidencia rasante $\theta_1 = 90º$

El rayo refractado DE entra con el ángulo crítico $\theta_2 = \theta_c$.

Los ángulos DAE, ADF, y AEF son ángulos rectos.

Como los ángulos de un cuadrilátero suman 360º, el ángulo DFE debe ser recto también.

Los ángulos de un triángulo suman 180º, luego

Ángulo DEF = $\theta_3 = 90º - \theta_c$ (1)

Aplicando la ley de Snell para la refracción a la cara AB, tenemos:

$$\text{sen}90º = n\,\text{sen}\theta_c \Rightarrow n = \frac{1}{\text{sen}\theta_c} \quad (2)$$

Aplicando la ley de Snell para la refracción a la cara AC, tenemos:

$$n\,\text{sen}\theta_3 = \text{sen}\theta_4 \quad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$\frac{1}{\text{sen}\theta_c}\text{sen}(90º - \theta_c) = \text{sen}\theta_4 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\text{sen}\theta_c}\cos\theta_c = \text{sen}\theta_4 \Rightarrow$$

$$\text{sen}\theta_4 = \cot\theta_c$$

b) El rayo emerge por la cara AC, solamente si el ángulo es menor que el ángulo crítico

Si es mayor, hay reflexión interna total.

Para que el rayo emerja debe cumplirse

$\theta_3 < \theta_c$

Esto es $90º - \theta_c < \theta_c \Rightarrow \theta_c > 45º$

Como $\frac{1}{n} = \text{sen}\theta_c$, tenemos que

$$\frac{1}{n} > \text{sen}45º \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow n < \sqrt{2}$

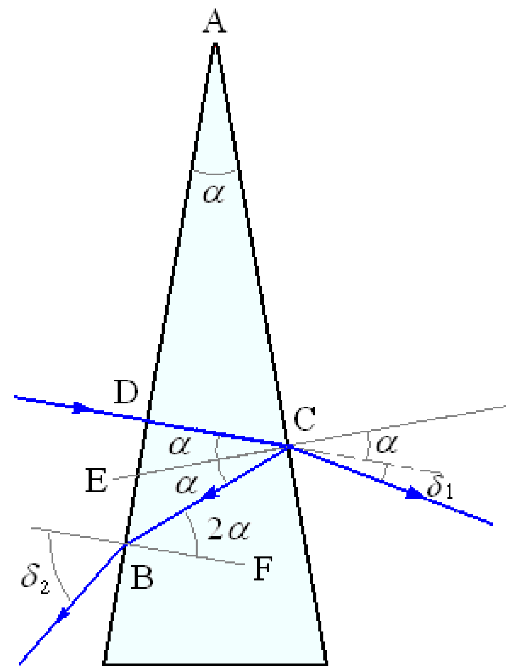
El índice de refracción del material debe ser menor que $\sqrt{2}$.

Ejemplo 26. Un haz paralelo de luz incide normalmente en la primera cara de un prisma de ángulo pequeño. En la segunda cara es en parte transmitido y reflejado, en parte, el haz reflejado incide en la primera cara de nuevo y sale de ella en una dirección que forma un ángulo de 6° 30’ con la dirección del haz incidente. El rayo refractado se ha sufrido una desviación de 1° 15’ de la dirección original. Calcular

a) el índice de refracción del vidrio

b) el ángulo del prisma.

Solución.



$\delta_2 = 6° 30' = 6{,}5°$ y $\delta_1 = 1° 15' = 1{,}25°$

Sea el α ángulo del prisma y n su índice de refracción.

Aplicando la ley de Snell en el punto C.

$n\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \delta_1)$

Como α es pequeño

$n\alpha = \alpha + \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = (n-1)\alpha$ (1)

El ángulo ADC = 90º.
El ángulo ACE = 90º.
Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180º
El ángulo ACD = $90º - \alpha$.
Luego el ángulo DCE = α .
De la ley de reflexión ángulo DCB = 2α .
El ángulo DBC = $90º - 2\alpha$ o ángulo CBF = 2α .
Aplicando la ley de Snell en el punto B.

$n\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}\delta_2$

Como α es pequeño

$\delta_2 = n2\alpha$ (2)

a) Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{(n-1)\alpha}{2n\alpha} = \frac{(n-1)}{2n} \Rightarrow$$

$$\frac{2\delta_1}{\delta_2} = 1 - \frac{1}{n} \quad \frac{2\delta_1}{\delta_2} = 1 - \frac{1}{n}$$

Reemplazando datos

$$\frac{2 \times 1{,}25}{6{,}5} = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n} = \frac{13}{8} \quad n = \frac{13}{8} = 1{,}625$$

El índice de refracción del vidrio es 1,625.

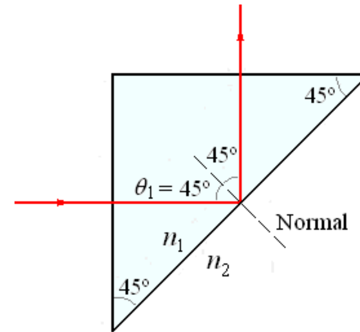
b) De (2)

$$\alpha = \frac{\delta_2}{2n} = \frac{6{,}5}{2\left(\frac{13}{8}\right)} = 2º$$

El ángulo del prisma es 2º.

REFLEXIÓN TOTAL INTERNA EN PRISMAS

En muchos instrumentos ópticos, como binoculares, periscopios y telescopios, se utilizan prismas de cristal para girar 90º o 180º un haz de luz.

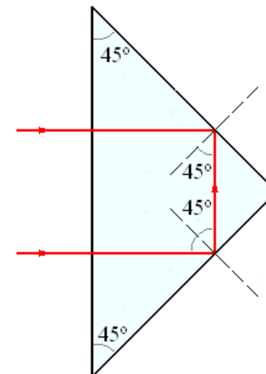


En la figura se observa un rayo de luz que incide en un prisma de cristal de 45º- 45º- 90º (n_1 = 1.5). La mayor parte de la luz penetra en el prisma y se dirige hacia la hipotenusa del prisma con un ángulo de incidencia de 45º.
El ángulo crítico para una interfase cristal – aire

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}00}{1{,}50} = 0{,}67 \Rightarrow$$

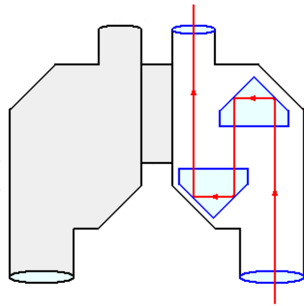
$\theta_c = 41{,}8º$

Como el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico, la luz se refleja totalmente en la hipotenusa y se dirige verticalmente hacia arriba en la figura, una vez que ha girado un ángulo de 90º.

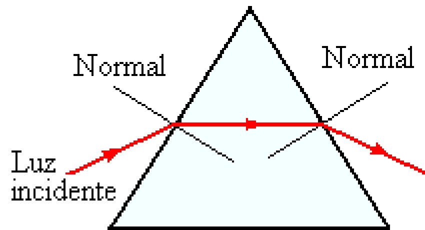


En la figura arriba se muestra cómo el mismo prisma puede hacer girar 180' el haz de luz si la reflexión total interna se produce dos veces.

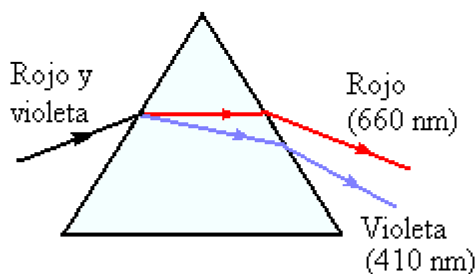
Los prismas también pueden utilizarse en tándem para producir un desplazamiento lateral de un haz de luz a la vez que dejan sin modificar la dirección inicial.
En la figura se ilustra esta aplicación de unos binoculares.



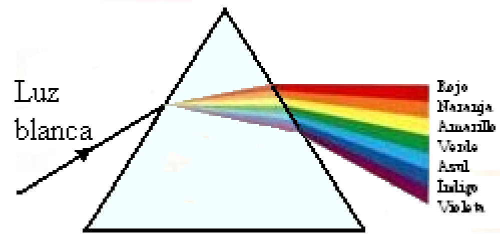
DISPERSIÓN DE LA LUZ: PRISMAS



En la figura se muestra un rayo de luz que pasa a través de un prisma de cristal. Cuando la luz penetra en el prisma en la cara izquierda, el rayo refractado se desvía hacia 1 normal, ya que el índice de refracción del cristal es mayor que el del aire. A la inversa cuando la luz sale del prisma en la cara derecha y penetra en el aire, la luz se refracta alejándose de la normal. Así, el efecto neto del prisma es cambiar la dirección del rayo. Puesto que el índice de refracción del cristal depende de la longitud de onda (véase la tabla 2.2), los rayos correspondientes a diferentes colores se desvían en cantidades diferente debido al prisma y salen de éste en direcciones distintas.



Mientras mayor sea la refracción para un color específico, mayor es la desviación, y en la figura arriba se observan la: refracciones para los colores rojo y violeta, que son los extremos opuestos e espectro visible. Si un rayo de Sol, que contiene todos los colores, se envía a través de un prisma, la luz del Sol se separa en el espectro de colores, como se muestra a continuación.



La descomposición de la luz en sus colores componentes se denomina **dispersión**.

ÍNDICES DE REFRACCIÓN *n*
PARA DIFERENTES MATERIALES

color	λ	Cristal	Diamante
Rojo	660	1,520	2,410
Anaranjado	610	1,522	2,415
Amarillo	580	1,523	2,417
Verde	550	1,526	2,426
Azul	470	1,531	2,444
Violeta	410	1,538	2,458

Ejemplo 27. El espectro de un tubo de descarga de hidrógeno contiene la línea C de color rojo y la línea F de color violeta. Un haz paralelo desde el tubo de descarga se hace pasar por un prisma de refracción de 60 º de ángulo con la luz roja C sufren una desviación mínima.

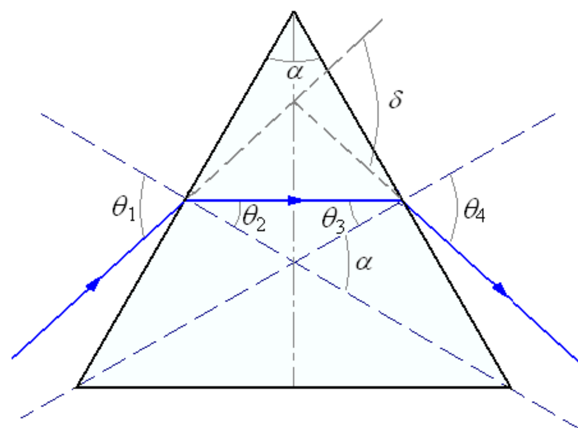
a) ¿Cuáles son las desviaciones sufridas por la luz roja C y la luz violeta F?

b) Al salir del prisma, la luz es enfocada en una pantalla por una lente acromática de distancia focal 30 cm. ¿Cuál es la separación de las imágenes C y F en la pantalla?

$n_R = 1{,}604$, $n_V = 1{,}60$

Solución.

La desviación mínima en un prima ocurre cuando el ángulo de entrada y el ángulo de salida son iguales, una configuración simétrica particular.



a) La luz roja tiene la desviación mínima.

$$n_R = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \delta_R)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \delta_R) = n_R \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha$$

Reemplazado valores

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(60^o + \delta_R) = 1{,}604 \operatorname{sen}30^o = 0{,}802 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(60^o + \delta_R) = 53{,}32^o \Rightarrow$$

$$\delta_R = 106{,}64^o - 60^o = 46{,}64^o$$

La luz violeta está cerca de la desviación mínima de tal modo que se puede aplicar la misma fórmula.

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \delta_V) = n_V \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha$$

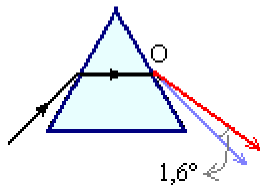
Reemplazado valores

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(60^o + \delta_V) = 1{,}620 \operatorname{sen}30^o = 0{,}810 \Rightarrow$$

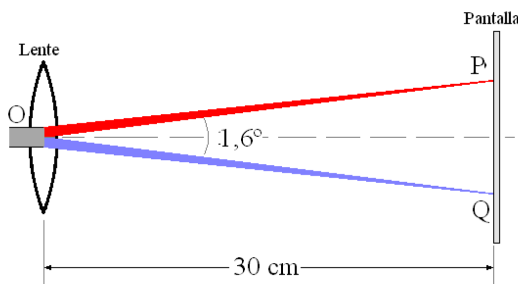
$$\frac{1}{2}(60^o + \delta_V) = 54{,}1^o \Rightarrow$$

$$\delta_V = 108{,}2^o - 60^o = 48{,}2^o$$

b) Un haz paralelo de luz roja emerge del prisma a un ángulo 48,2º - 46,6º = 1,6º de un haz paralelo similar de luz violeta.



Los haces paralelos son enfocados en el plano focal de las lentes, de tal modo los haces rojo y violeta dan imágenes definidas en el plano focal de las lentes.



La imagen real de un objeto puntual aparece donde todos los rayos convergen. Hay un punto del rayo violeta, y un punto del rayo rojo, en el plano focal de las lentes, su separación nos da la respuesta pedida.

La separación de las imágenes es PQ.

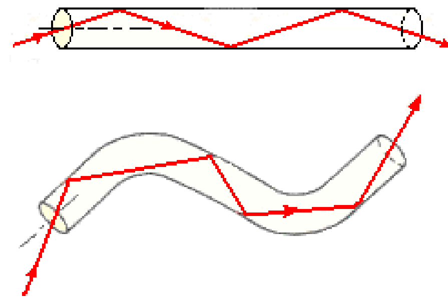
1,6º es igual a $\frac{1{,}6^o}{360^o} 2\pi$ = 0,028 radianes.

Luego

PQ = OP x 0,028 = 30 cm x 0,028 = 0,84 cm.

LA FIBRA ÓPTICA

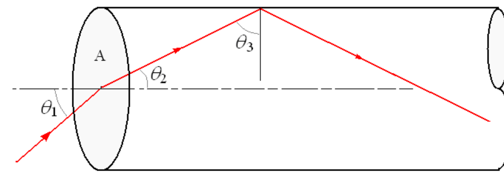
Otra aplicación de la reflexión total interna es en el campo interesante de la óptica de fibras. En la óptica de fibras, hilos de vidrio del espesor de un cabello, denominados fibras ópticas, "conducen" luz de un lugar a otro.



Las fibras ópticas son filamentos de vidrio de alta pureza extremadamente compactos: El grosor de una fibra es similar a la de un cabello humano. Fabricadas a alta temperatura con base en silicio, su proceso de elaboración es controlado por medio de computadoras, para permitir que el índice de refracción de su núcleo, que es la guía de la onda luminosa, sea uniforme y evite las desviaciones, entre sus principales características se puede mencionar que son compactas, ligeras, con bajas pérdidas de señal, amplia capacidad de transmisión y un alto grado de confiabilidad debido a que son inmunes a las interferencias electromagnéticas de radio-frecuencia. Las fibras ópticas no conducen señales eléctricas por lo tanto son ideales para incorporarse en cables sin ningún componente conductivo y pueden usarse en condiciones peligrosas de alta tensión. Tienen la capacidad de tolerar altas diferencias de potencial sin ningún circuito adicional de protección y no hay problemas debido a los cortos circuitos. Tienen un gran ancho de banda, que puede ser utilizado para incrementar la capacidad de transmisión con el fin de reducir el costo por canal; De esta forma es

considerable el ahorro en volumen en relación con los cables de cobre. Con un cable de seis fibras se puede transportar la señal de más de cinco mil canales o líneas principales, mientras que se requiere de 10,000 pares de cable de cobre convencional para brindar servicio a ese mismo número de usuarios, con la desventaja que este último medio ocupa un gran espacio en los ductos y requiere de grandes volúmenes de material, lo que también eleva los costos
Las fibras ópticas están revolucionando la manera de transmisión de comunicaciones por video, teléfono y datos de computación, porque un haz de luz puede transportar información a través de una fibra óptica como la electricidad transporta información a través de cables de cobre y las ondas de radio transportan información por el espacio. Sin embargo, la capacidad de transportación de información de la luz es miles de veces mayor que la de la electricidad o la de las ondas de radio. Un haz laser que se desplaza a través de una sola fibra óptica puede transportar cientos de miles de conversaciones telefónicas y varios programas de televisión a la vez. Las fibras ópticas son la opción a elegir para obtener telecomunicaciones de alta calidad, ya que los cables son relativamente inmunes a interferencia eléctrica externa.
También en medicina se utilizan cables flexibles de fibras ópticas, Por ejemplo, uno de tales cables puede hacerse pasar por el esófago al estómago en búsqueda de úlceras y otras anormalidades. La luz se conduce al estómago mediante las fibras externas del cable, se refleja en la pared estomacal y se transmite hacia afuera del estómago a través de las fibras interiores del mismo cable. La imagen puede mostrarse en un monitor o grabarse en una película. En artroscopia, un pequeño instrumento quirúrgico, de varios milímetros de diámetro, se monta en el extremo de un cable de fibras ópticas. El cirujano puede insertar el instrumento y el cable en una coyuntura, como una rodilla, con una sola pequeña incisión y daño mínimo a los tejidos aledaños

Ejemplo 28. Una fibra óptica, como la representada en la figura, tiene un índice refracción n_f = 1,50 y se halla rodeada de agua (n_a = 1,33). Calcule el valor máximo del ángulo incidencia sobre la cara A para que los rayos sean transmitidos por reflexión total a través de la fibra.



Solución.
Para la reflexión total en la interfase fibra – agua debe cumplirse $\theta_3 = \theta_c$
Cálculo del ángulo crítico

$$n_f \operatorname{sen}\theta_c = n_a \operatorname{sen}90^\circ \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_a}{n_f} = \frac{1,33}{1,50} = 0,89 \Rightarrow$$

$$\theta_c = 62,46^\circ$$

Tenemos que

$$\theta_2 = 90^\circ - \theta_c = 90^\circ - 62,46^\circ = 27,54^\circ$$

Aplicando la ley de snell en la cara A

$$n_a \operatorname{sen}\theta_1 = n_f \operatorname{sen}\theta_2$$

Reemplazando valores

$$(1,33)\operatorname{sen}\theta_1 = (1,50)\operatorname{sen}27,54^\circ \Rightarrow$$

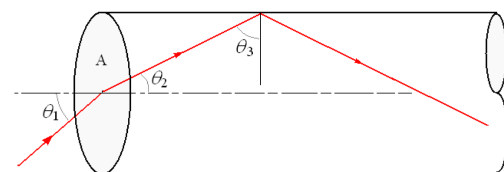
$$\operatorname{sen}\theta_1 = \left(\frac{1,50}{1,33}\right)\operatorname{sen}27,54^\circ = 0,52 \Rightarrow$$

$$\theta_1 = 31,43^\circ$$

El ángulo incidencia máximo sobre la cara A es 31,43º.

Ahora calculamos el ángulo crítico en la interfase fibra – agua

Ejemplo 29. Determine el valor mínimo del índice de refracción de una fibra óptica rodeada por aire para que cualquier rayo que llegue a la cara A quede atrapado en su interior.



Solución.
Para conseguir lo que se pide en el enunciado, todos los rayos que ingresan en la fibra deben quedar atrapados por reflexión total. Esto es para ángulos de incidencia sobre la cara A hasta de θ_1 = 90º, rayos que llegan rasantes, sólo pueden escapar a través del extremo opuesto de la fibra.

Para asegurar la reflexión total en la interfase fibra aire se debe cumplir $\theta_3 \geq \theta_c$.
Teniendo en cuenta esto

$$\operatorname{sen}\theta_3 \geq \operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_{aire}}{n_f} = \frac{1}{n_f} \qquad (1)$$

Por geometría se ve que

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$$

Luego

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \cos\theta_2 \quad (2)$$

De las condiciones (1) y (2)

$$\cos\theta_2 \geq \frac{n_{aire}}{n_f} \qquad (3)$$

La condición mínima que se debe satisfacer sobre la cara A es que los rayos que lleguen con un ángulo de 90º se refracten satisfaciendo la condición de reflexión sobre la interfase fibra aire.
Aplicamos la ley de Snell para determinar el ángulo mínimo θ_{2min}, que asegura que todos los rayos que llegan a la cara A entran por refracción

$$n_{aire}\operatorname{sen}\theta_1 = n_f \operatorname{sen}\theta_{2\min}$$

Reemplazando datos

$$(1{,}00)\operatorname{sen}90^{\circ} = n_f \operatorname{sen}\theta_{2\min} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\theta_{2\min} = \frac{1}{n_f}$$

Debe cumplirse

$$\operatorname{sen}\theta_2 \geq \operatorname{sen}\theta_{2\min} = \frac{1}{n_f} \qquad (4)$$

Sumando $(4)^2 + (3)^2$

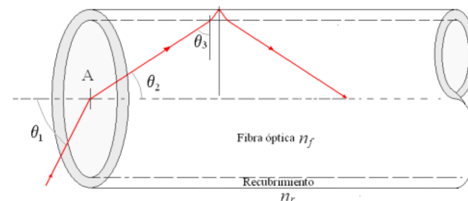
$$\operatorname{sen}^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 \geq \left(\frac{1}{n_f}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_f}\right)^2 \Rightarrow$$

$$1 \geq \frac{2}{n_f^2} \Rightarrow$$

$$n_f \geq \sqrt{2}$$

De esto se deduce que las fibras con índices con $n_f \geq 1{,}41$ recogerán todos los rayos de luz que lleguen a su cara anterior y los transmitirán hasta el otro extremo.

Ejemplo 30. Generalmente las fibras ópticas con índice de refracción n_f llevan un recubrimiento con un índice de refracción n_r, que es menor que aquél, pero superior a del aire ($n_f > n_r > 1$). a) Encuentre la relación general que debe cumplirse entre estos índices de refracción para que la fibra recubierta transmita por reflexión total toda la luz que llegue a su cara A.
b) ¿qué condición debe cumplir el índice de refracción del recubrimiento?



Solución.
Para la reflexión total en la interfase fibra – recubrimiento es un caso similar al del problema anterior, teniendo en cuenta ahora la presencia del recubrimiento sobre la fibra

$$\operatorname{sen}\theta_3 \geq \operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_r}{n_f}$$

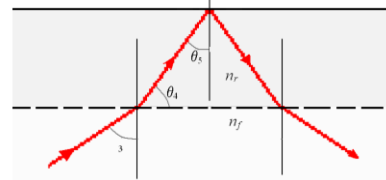
Como

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \theta_2 \quad \operatorname{sen}\theta_3 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \cos\theta_2$$

Tenemos

$$\cos\theta_2 \geq \frac{n_r}{n_f} \qquad (1)$$

En la interfase recubrimiento - aire



La condición de reflexión total se satisface simplemente exigiendo

$$n_f \operatorname{sen}\theta_5 \geq n_{aire}\operatorname{sen}90^{\circ}$$

$$\operatorname{sen}\theta_5 \geq \frac{1}{n_f} \qquad (2)$$

Sumando $(1)^2$ y $(2)^2$ se llega a la expresión general

$$\operatorname{sen}^2\theta_5 + \cos^2\theta_5 = 1 \geq \left(\frac{1}{n_f}\right)^2 + \left(\frac{n_r}{n_f}\right)^2 \Rightarrow$$

$$n_f^2 - n_r^2 \geq 1$$

Esta es la relación general que debe cumplirse entre estos índices de refracción para que la fibra

recubierta transmita por reflexión total toda la luz que llegue a su cara A.
b) La qué condición debe cumplir el índice de refracción del recubrimiento es
$n_r < n_f$
Si en lugar de recubrimiento tenemos aire, se cumple

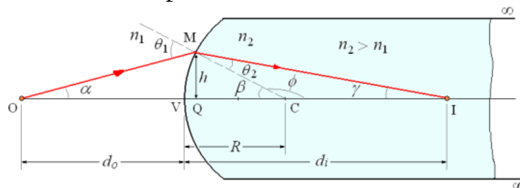
$$n_f^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow n_f \geq \sqrt{2}$$

Tal como obtuvimos en el problema anterior.

REFRACCIÓN EN SUPERFICIE ESFÉRICA

Imágenes por refracción en superficies esféricas

Consideremos un objeto luminoso, O, situado en un medio de índice de refracción n_1, a una distancia d_o del vértice V, de una superficie refractora esférica convexa. Si el segundo medio tiene un índice de refracción n_2, mayor que n_1, los rayos que llegan a cualquier punto de la superficie serán desviados hacia una mayor aproximación a la normal a la superficie.



O: objeto puntual
d_o = OV = distancia objeto
V: Vértice,
C: Centro de curvatura,
VC = R = radio de curvatura
I: Imagen puntual
d_i = VI = distancia imagen
θ_i, θ_r, α, β, γ son ángulos pequeños, tal que

$$\operatorname{sen}\theta_i \approx \theta_i \approx \tan\theta_i$$

$$\operatorname{sen}\theta_r \approx \theta_r \approx \tan\theta_r$$

$$\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha$$

$$\operatorname{sen}\beta \approx \beta \approx \tan\beta$$

$$\operatorname{sen}\gamma \approx \gamma \approx \tan\gamma$$

n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios
Aplicando la ley de Snell en el punto de incidencia M.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Con $\operatorname{sen}\theta_1 \approx \theta_1$ y $\operatorname{sen}\theta_2 \approx \theta_2 \Rightarrow$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2 \qquad (1)$$

Tenemos que
$\beta + \phi = 180^o$ y
$\theta_2 + \gamma + \phi = 180^o$, por lo que
$\beta = \gamma + \theta_2 \Rightarrow$

$$\theta_2 = \beta - \gamma \qquad (2)$$

Para el triángulo OPC

$$\theta_1 = \alpha + \beta \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos:

$$n_1(\alpha + \beta) = n_2(\beta - \gamma)$$

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$$

Con

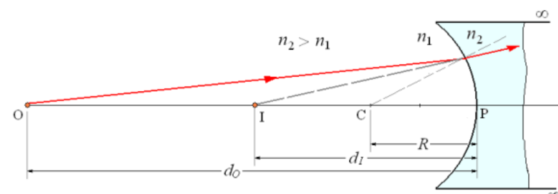
$$\alpha \approx \frac{h}{d_o},\ \beta \approx \frac{h}{R} \text{ y } \gamma \approx \frac{h}{d_i} \Rightarrow$$

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Convención de signos

d_o es + si el objeto esta enfrente a la superficie (objeto real).
d_o es - si el objeto esta detrás de la superficie (objeto virtual).
d_i es + si la imagen esta detrás de la superficie (imagen real).
d_o es - si la imagen esta enfrente a de la superficie (objeto real).
R es + si el centro de curvatura esta detrás de la superficie.
d_o es - si el centro de curvatura esta enfrente de la superficie.

La fórmula es válida también es para superficies refractoras cóncavas.



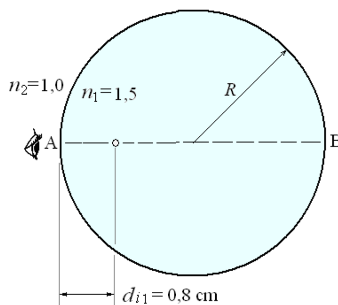
Los rayos que provienen de O refractados por una superficie cóncava, forman una imagen virtual en I

También es válida si el medio incidente es mas denso que el medio refractor, $n_1 > n_2$.

Ejemplo 31. Una canica de vidrio de índice de refracción 1,50 tiene una burbuja de aire sobre el diámetro AB. Cuando se ve desde la A, parece estar a 0,8 cm de ella, pero cuando se ve la parte B, que parece estar 4 cm de B.
a) ¿Cuál es el radio de la canica?
b) ¿Cuáles es verdadera situación de la burbuja?
Solución.
Aquí se aplica la ecuación de formación de imágenes por refracción en superficies esféricas

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Vista de A



$n_1 = 1{,}5$, $n_2 = 1{,}0$
R (negativo)

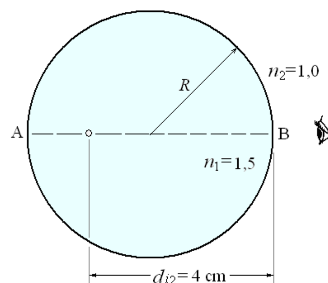
$$d_{i1} = -0{,}8\,\text{cm}$$

$$\frac{1{,}5}{d_{o1}} + \frac{1}{-0{,}8} = \frac{1{,}0 - 1{,}5}{-R}$$

$$\frac{1{,}5}{d_{o1}} = \frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{2R}$$

$$d_{o1} = \frac{6R}{5R+2} \qquad (1)$$

Vista desde B



$$d_{i2} = -4\,\text{cm}$$

$$d_{o2} = 2R - d_{o1}$$

$$\frac{1{,}5}{2R - d_{o1}} + \frac{1}{-4} = \frac{1{,}0 - 1{,}5}{-R}$$

$$\frac{1{,}5}{2R - d_{o1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2R}$$

$$\frac{1{,}5}{2R - d_{o1}} = \frac{R+2}{4R}$$

$$2R - d_{o1} = \frac{6R}{R+2} \quad (2)$$

a) Reemplazando (1) en (2)

$$2R - \frac{6R}{5R+2} = \frac{6R}{R+2} \Rightarrow$$

$$2R = \frac{6R}{5R+2} + \frac{6R}{R+2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5R+2} + \frac{1}{R+2} \Rightarrow$$

$$R^2 - \frac{6}{5}R - \frac{8}{5} = 0$$

Resolviendo

$$R = \frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{8}{5}} = \frac{3}{5} \pm \frac{7}{5}$$

R_1 = 2 cm R_2 = - 0,8 cm
La valor significativo es R = 2 cm.

b) Reemplazando el valor de R en (1):

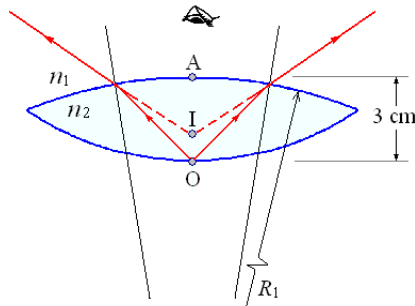
$$d_{o1} = \frac{6(2)}{5(2)+2} = \frac{12}{12} = 1\,\text{cm}$$

La burbuja se encuentra a 1 cm de A.

Ejemplo 32. Una lente biconvexa de 3 cm de espesor central, índice de refracción 1,50 y radios de curvatura 10 cm y 15 cm, se ve primero de un lado y luego del otro.
¿Cuál es la diferencia en el espesor aparente?
Solución.
La ecuación de formación de imágenes por refracción en superficies esféricas

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Mirando sobre la superficie de radio 10 cm.



$$\frac{n_1}{d_{o1}} + \frac{n_2}{d_{i1}} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

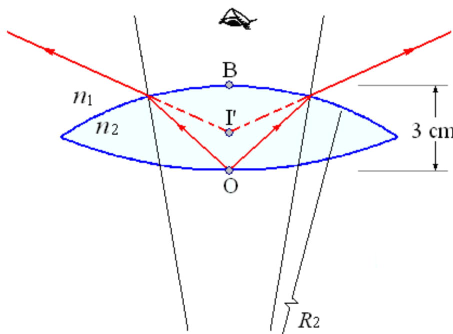
d_{o1} = 3,00, n_1 = 1,00, n_2 =1,5, R_1 = -10 cm

$$\frac{1{,}5}{3} + \frac{1{,}0}{d_{i1}} = \frac{1{,}0 - 1{,}5}{-10}$$

$$\frac{1{,}0}{d_{i1}} = \frac{0{,}5}{10} - \frac{1{,}5}{3} = -\frac{9}{20}$$

$$d_{i1} = -\frac{20}{9}\text{ cm}$$

Mirando sobre la superficie de radio 15 cm



$$\frac{n_1}{d_{o2}} + \frac{n_2}{d_{i2}} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

d_{o2} = 3,00, n_1 = 1,00, n_2 =1,5, R_2 = -15 cm

$$\frac{1{,}5}{3} + \frac{1{,}0}{d_{i2}} = \frac{1{,}0 - 1{,}5}{-15}$$

$$\frac{1{,}0}{d_{i2}} = \frac{0{,}5}{15} - \frac{1{,}5}{3} = -\frac{7}{15}$$

$$d_{i2} = -\frac{20}{9}\text{ cm}$$

La diferencia en el espesor aparente es

$$|d_{i1}| - |d_{i2}| = \frac{20}{9} - \frac{7}{15} = \frac{5}{63}\text{ cm}$$

LENTES DELGADAS

Una lente delgada es un sistema óptico con dos superficies refractantes de las cuales una por lo menos es curva

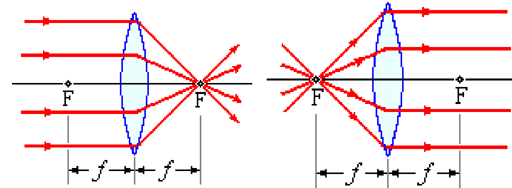
Las lentes más comunes se basan en el distinto grado de refracción que experimentan los rayos de luz al incidir en puntos diferentes de la lente. Entre ellas están las utilizadas para corregir los problemas de visión. También se usan lentes, o combinaciones de lentes y espejos, en telescopios y microscopios. El primer telescopio astronómico fue construido por Galileo Galilei usando una lente convergente (lente positiva) como objetivo y otra divergente (lente negativa) como ocular. Existen también instrumentos capaces de hacer converger o divergir otros tipos de ondas electromagnéticas y a los que se les denomina también lentes. Por ejemplo, en los microscopios electrónicos las lentes son de carácter magnético

Tipos de lentes

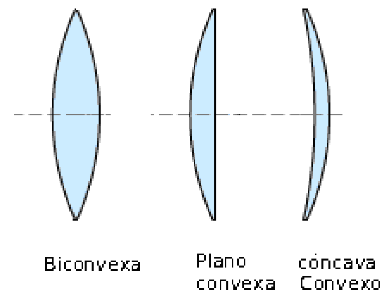
Según su forma las lentes delgadas pueden ser convergentes **y** divergentes.

Lente convergente.

Una lente convergente es aquella que refracta y converge la luz paralela más allá de la lente.



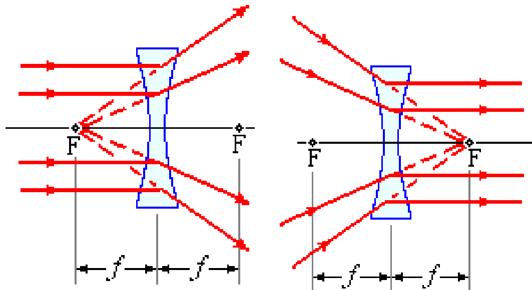
Son más gruesas en el centro que en los extremos. Según el valor de los radios de las caras pueden ser: biconvexas, plano convexas y menisco convergente.



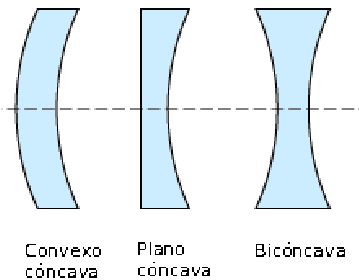
Lente divergente.

Una lente divergente es aquella refracta los rayos paralelos que pasan por una de estas lentes hacia la parte más gruesa de tal modo que el haz diverge

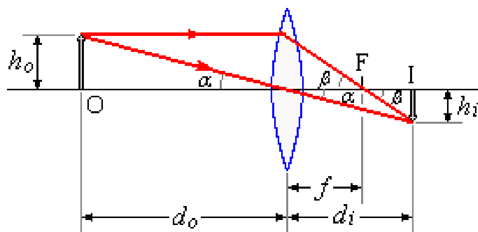
Una proyección de los rayos de luz refractados muestra que la luz parece provenir de un punto focal virtual situado en frente de la lente.



Son más delgadas en la parte central que en los extremos.
Según el valor de los radios de las caras pueden ser: bicóncavas (4), plano cóncavas (5) y menisco divergente (6).



ECUACIÓN DE LAS LENTES DELGADAS.
Ecuación que puede deducirse similarmente a la ecuación de espejos esféricos.



Podemos encontrar las siguientes relaciones

$$\tan\alpha = \frac{h_o}{d_o} = \frac{-h_i}{d_i} \Rightarrow$$

$$\frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} \qquad (1)$$

$$\tan\beta = \frac{h_o}{f} = \frac{-h_i}{d_i - f} \Rightarrow$$

$$\frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i - f}{f} \qquad (2)$$

De (1) y (2):

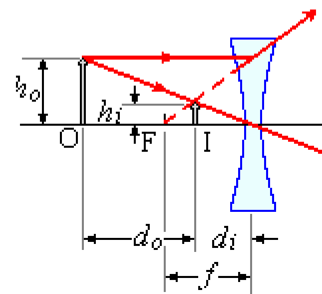
$$\frac{d_i}{d_o} = \frac{d_i - f}{f} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_o} = \frac{d_i - f}{d_i f} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_i} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

Igualmente puede obtenerse la misma ecuación con una lente divergente



La distancia del objeto d_o y la distancia de la imagen d_i se consideran positivas para objetos e imágenes reales y negativas para objetos e imágenes virtuales.
La distancia focal f se considera positiva para lentes convergentes y negativa para lentes divergentes.

AUMENTO LATERAL

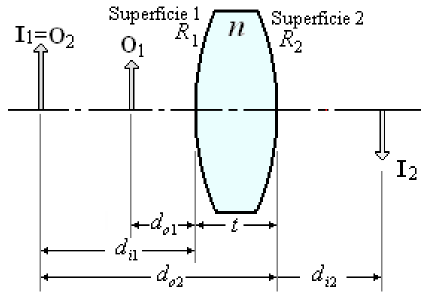
El aumento lateral tiene la misma forma que la hallada para los espejos.

$$m = \frac{h_i}{h_0} = -\frac{d_i}{d_o}$$

Un aumento positivo indica que la imagen es derecha, un aumento negativo indica que la imagen es invertida.

LA ECUACIÓN DEL FABRICANTE DE LENTES,

Vamos a deducir la ecuación del fabricante de lentes que es una relación entre la longitud focal f, el índice de refracción n de la lente y los radios de curvatura R_1 y R_2 de las superficies de la lente



Se coloca un objeto O_1 a una distancia d_{o1}, frente a la superficie 1 de radio R_1 (+) (se ha elegido de tal manera que produzca una imagen virtual I_1 a una distancia d_{i1}, a la izquierda del lente).

$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{n}{d_{i1}} = \frac{n-1}{R_1} \quad (1)$$

Esa imagen se utiliza luego como el objeto O_2 para la superficie 2, esta a su vez produce la imagen I_2. Se considera que viene de un medio con índice de refracción *n*, y su objeto es virtual $\left(-d_{o1}\right)$, el radio de la superficie 2 es R_2 (considerado también +).

La imagen I_2 se forma a la distancia d_{i2} de la superficie 2.

$$\frac{n}{d_{o2}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{1-n}{R_2} \quad (2)$$

Pero $d_{o2} = -\left(d_{i1} + t\right)$, si consideramos *t* mucho menor que las distancias usadas, podemos considerar $d_{o2} \approx -d_{i1}$

Luego

$$-\frac{n}{d_{i1}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{1-n}{R_2} \quad (2a)$$

Sumando (1) + (2a):

$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{n}{d_{i1}} - \frac{n}{d_{i1}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i2}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Esta es la fórmula del fabricante de lentes, válida para lentes cóncavas, convexas, cóncavo convexo, plano convexo o plano cóncava.

R_1 y R_2 son positivos si el centro de curvatura está detrás de la lente y negativos si está en frente.

Distancia focal.

Si el objeto se encuentra en el infinito la imagen se forma en el foco.

$d_{o1} = \infty$, $d_{i2} = f$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Con lo que la ecuación de las lentes queda como

$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{1}{f}$$

Considerando $d_{o1} = d_o$ y $d_{i2} = d_i$, tenemos

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

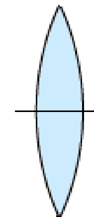
Ecuación válida para todo tipo de lente delgada.

Distancia objeto d_o y distancia imagen d_i deben considerarse positivas para objetos e imágenes reales y negativas para objetos e imágenes virtuales.

La distancia focal f es positiva para lentes convergentes y negativa para lentes divergentes.

Ejemplo 33. Encontrar la distancia para diferentes lentes convergentes

Lente biconvexa



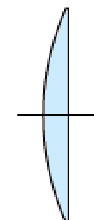
n = 1,5, R_1(+), R_2(-) = R_1

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{-R_1}\right) = \frac{1}{f}$$

$$(1{,}5-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{f} = \frac{1}{R_1}$$

$$f = R_1$$

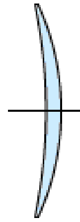
Lente plano convexa



n = 1,5, R_1 (+), $R_2 = \infty$

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}$$
$$(1{,}5-1)\left(\frac{1}{\infty}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}=\frac{1}{2R_2}$$
$$f=2R_2$$

Lente cóncavo convexa

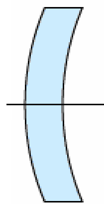


n = 1,5, R_1 (-) = 1,5 R_2 (-)

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}$$
$$(1{,}5-1)\left(\frac{1}{-1{,}5R_2}-\frac{1}{-R_2}\right)=\frac{1}{f}=0{,}5\frac{1}{3R_2}=\frac{1}{6R_2}$$
$$f=6R_2$$

Ejemplo 34. Encontrar la distancia para diferentes lentes divergentes

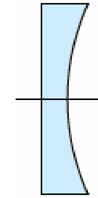
Lente Convexo cóncavo



n = 1,5, R_1 (+) = 1,5R_2 (+)

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}$$
$$(1{,}5-1)\left(\frac{1}{1{,}5R_2}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}=-\frac{0{,}5}{3R_2}$$
$$f=-6R_2$$

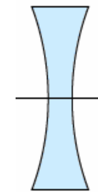
Lente plano cóncava



n = 1,5, $R_1 = \infty$, R_2 (+)

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}$$
$$(1{,}5-1)\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}=-\frac{1}{2R_2}$$
$$f=-2R_2$$

Lente Bicóncava



n = 1,5, R_1 (-) = R_2 (+)

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{f}$$
$$(1{,}5-1)\left(\frac{1}{-R_1}-\frac{1}{R_1}\right)=\frac{1}{f}=-\frac{1}{R_1}$$
$$f=-R_1$$

Ejemplo 35. Un buzo toma dos lunas de reloj cada una con radio de curvatura 10 cm, las junta y las une tocándose sus vértices de tal manera que el aire queda atrapado entre ellas. Utiliza la lente de aire así formada bajo el agua.

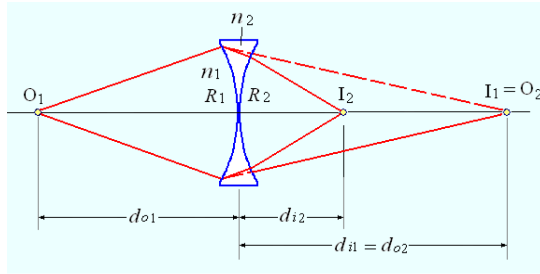
a) ¿Cuál es su distancia focal?

b) ¿A que distancia de un coral debe sostenerlo para que ver su imagen, vertical y erguida, ampliada cuatro veces?

Solución.

a) Se ha formado una lente biconvexa de aire en un medio de agua.

La situación se representa en la figura siguiente



R_1 = -10 cm, R_2 = 10 cm, n_1 = 4/3, n_2 = 1,00
Aplicando la ecuación de refracción en interfases esféricas
Sobre la primera interfase agua aire (radio R_1)

$$\frac{n_1}{d_{o1}}+\frac{n_2}{d_{i1}}=\frac{n_2-n_1}{R_1} \qquad (1)$$

Sobre la segunda interfase aire agua (radio R_2)

$$\frac{n_2}{d_{o2}}+\frac{n_1}{d_{o2}}=\frac{n_1-n_2}{R_2}$$

Como $d_{o2}=-d_{i1}$, tenemos

$$-\frac{n_2}{d_{i1}}+\frac{n_1}{d_{o2}}=\frac{n_1-n_2}{R_2} \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2)

$$\frac{n_1}{d_{o1}}+\frac{n_2}{d_{i1}}-\frac{n_2}{d_{i1}}+\frac{n_1}{d_{o2}}=\frac{n_2-n_1}{R_1}+\frac{n_1-n_2}{R_2}\Rightarrow$$

$$\frac{n_1}{d_{o1}}+\frac{n_1}{d_{o2}}=(n_2-n_1)\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{1}{d_{o2}}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{1}{d_{o2}}=\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{1}{-10}-\frac{1}{10}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{1}{d_{o2}}=\frac{1}{20}$$

Si el objeto esta en el infinito la imagen se forma en el punto focal de la lente

$$\frac{1}{\infty}+\frac{1}{f}=\frac{1}{20}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{20}$$

$$f=20\,\text{cm}$$

La lente de aire es convergente con distancia focal 20 cm.
b) La lente de aire obedece la ecuación de las lentes

$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}$$

El aumento es

$$m=-\frac{d_i}{d_o}\Rightarrow d_i=-md_o$$

Pero m =4, luego

$$d_i=-4d_o$$

Reemplazando en la ecuación de las lentes

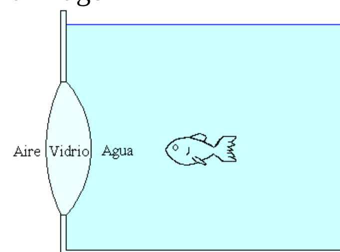
$$\frac{1}{d_o}-\frac{1}{4d_0}=\frac{1}{20}\Rightarrow$$

$$\frac{3}{4d_0}=\frac{1}{20}\Rightarrow$$

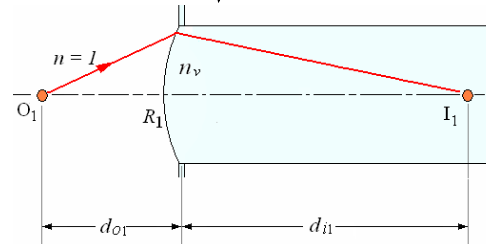
$$d_0=\frac{60}{4}=15\,\text{cm}$$

La lente debe colocarse a 20 cm del coral.

Ejemplo 36. Uno de los extremos de un tanque del acuario es una lente delgada para que los corales en el tanque se vean aumentados. Demostrar que las dos distancias focales de la lente no son iguales, y demostrar que la fórmula de las lentes en este caso es $\frac{f}{d_{o1}}+\frac{f'}{d_{i2}}=1$.
f y f' distancias focales de la lente
d_{01} distancia objeto
d_{i2} distancia imagen



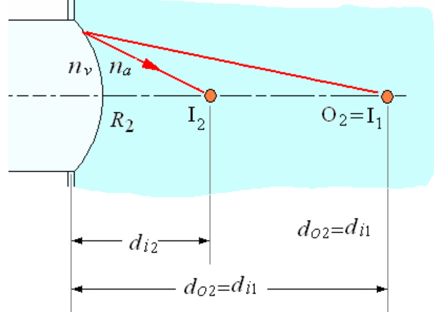
Solución.
Consideremos la refracción en la primera superficie de radio de curvatura + R_1,
Separando los dos medios, aire y vidrio, índice de refracción del vidrio n_v.



Se forma una imagen real en I_1 en ausencia de otra superficie

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{n_v}{d_{i1}}=\frac{n_v-1}{R_1} \qquad (1)$$

La imagen I_1 actúa como objeto virtual O_2 para la refracción en la segunda superficie de radio de curvatura – R_2 y agua con índice de refracción n_a.



Una imagen real se forma en d_{i2}

$$\frac{n_v}{-d_{o2}}+\frac{n_a}{d_{i2}}=\frac{n_a-n_v}{-R_2}=\frac{n_v-n_a}{R_2} \qquad (2)$$

Sumando (1) + (2):

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{n_a}{d_{i2}}=\frac{n_v-1}{R_1}+\frac{n_v-n_a}{R_2}$$

Si O_1 está en el infinito, por definición d_{i2} coincide con F', el segundo punto focal de la lente.

$$\Rightarrow \frac{1}{\infty}+\frac{n_a}{f'}=\frac{n_v-1}{R_1}+\frac{n_v-n_a}{R_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f'}=\frac{1}{n_a}\left(\frac{n_v-1}{R_1}+\frac{n_v-n_a}{R_2}\right) \qquad (3)$$

Similarmente, si O_1 esta en F, el primer punto focal de la lente, un haz paralelo emerge dentro del agua, esto es, I_2 está en el infinito.

$$\frac{1}{f}+\frac{n_a}{\infty}=\frac{n_v-1}{R_1}+\frac{n_v-n_a}{R_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f}=\frac{n_v-1}{R_1}+\frac{n_v-n_a}{R_2} \qquad (4)$$

Dividiendo (3) entre (4), obtenemos

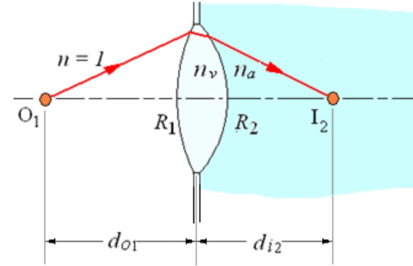
$\frac{f}{f'}=\frac{1}{n_a}$, las distancias focales son diferentes.

Además, si

$\frac{n_v-1}{R_1}+\frac{n_v-n_a}{R_2}=\frac{1}{f}=P$, tenemos

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{n_a}{d_{i2}}=P.$$

Pero $\frac{1}{f}=P$ y $\frac{n_a}{f'}=P \Rightarrow \frac{f}{d_{o1}}+\frac{f'}{d_{i2}}=1$

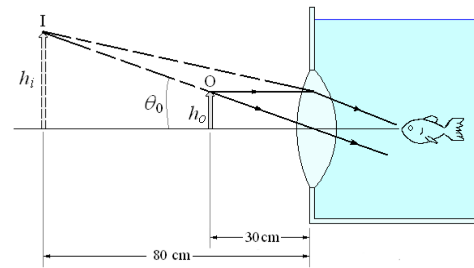


Ejemplo 37. La lente del acuario de la pregunta anterior tiene R_1 = 15 cm, R_2 = 10 cm, y los índices de refracción del vidrio y el agua son 3/2 y 4/3 respectivamente. Un pez nada hasta la lente y ve a un hombre de pie a 30 cm del acuario.

a) ¿Dónde está la imagen que ve el pez?

b) ¿Cuál es el aumento angular que produce la lente?

Solución.



a) Aplicando las formulas obtenidas en el problema anterior vamos a encontrar los puntos focales *f* y *f'* de la lente.

Primeramente encontremos *f'*

$$\frac{1}{f'}=\frac{1}{n_a}\left(\frac{n_v-1}{R_1}+\frac{n_v-n_a}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f'}=\frac{3}{4}\left(\frac{\frac{3}{2}-1}{15\text{cm}}+\frac{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}{10\text{cm}}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{30\text{cm}}+\frac{1}{60\text{cm}}\right)=\frac{1}{80\text{cm}}$$

$$\Rightarrow f'=80\text{ cm}$$

Similarmente

$$\frac{f}{f'}=\frac{1}{n_a} \Rightarrow$$

$$f = \frac{f'}{n_a} = \frac{80\text{ cm}}{4/3} = 60\text{ cm}$$

Aplicando

$$\frac{f}{d_{o1}} + \frac{f'}{d_{i2}} = 1$$

Obtenemos

$$\frac{60\text{cm}}{30\text{cm}} + \frac{80\text{cm}}{d_{i2}} = 1 \Rightarrow d_{i2} = -80\text{ cm}$$

El pez ve al hombre 80 cm delante de la lente.

b) El aumento producido por la primera superficie es

$$m_1 = -\frac{nd_{i1}}{n_v d_{01}},$$

El aumento producido por la segunda superficie es

$$m_2 = +\frac{n_v d_{i2}}{n_a d_{02}}$$

El aumento total

$$m = m_1 m_2 = -\frac{nd_{i1}}{n_v d_{01}} \times \frac{n_v d_{i2}}{n_a d_{02}}$$

$$= -\frac{nd_{i2}}{n_a d_{01}} = -\frac{1 \times (-80)}{\frac{4}{3} \times (30)} = 2$$

Si la altura del hombre es h_o, la altura de su imagen es

$$h_i = 2h_o$$

Luego

$$\theta_0 = \frac{h_i}{d_i} = \frac{2h_o}{d_i} = \frac{2h_o}{80} = \frac{h_0}{40}$$

Por definición (considerando la capacidad de visión del pez similar a la del hombre).

$$\theta = \frac{h_o}{25}$$

El aumento angular es

$$M = \frac{\theta_0}{\theta} = \frac{\frac{h_o}{40}}{\frac{h_o}{25}} = \frac{50}{40} = 1{,}25$$

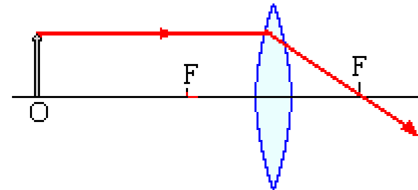
MÉTODOS GRÁFICOS PARA LENTES

Podemos determinar la posición y el tamaño de la imagen formada por una lente delgada usando el método gráfico Trazamos unos cuantos rayos principales desde un punto del objeto que no se encuentra sobre el eje. La intersección de estos rayos después de pasar por la lente determina la posición y el tamaño de la imagen.

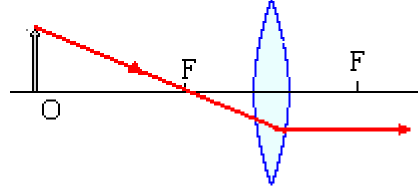
Veamos los tres rayos principales

Para lente convergente

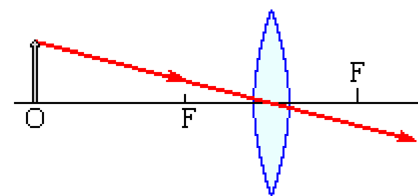
Rayo 1. Un rayo paralelo al eje pasa por el segundo punto focal de una lente convergente



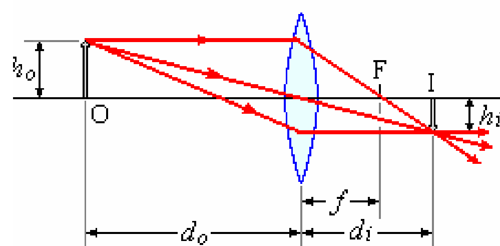
Rayo 2. Un rayo que pasa por el primer punto focal de una lente convergente se refracta paralelamente al eje de la lente.



Rayo 3. Un rayo que pase por el centro geométrico de la lente no se desviará.



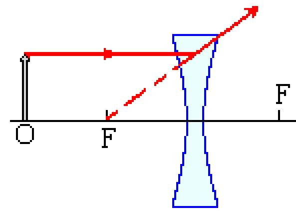
La figura siguiente muestra imagen formada en la intersección de los rayos.



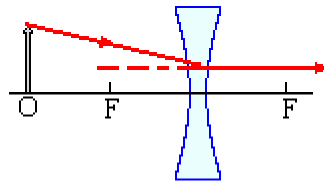
Como se puede ver con dos rayos es suficiente.

Para la lente divergente

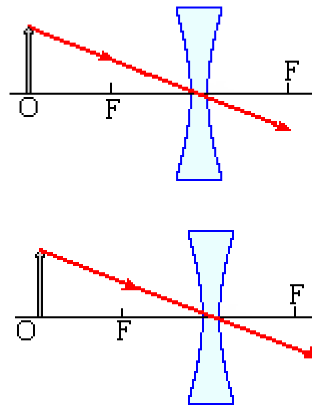
Rayo 1. Un rayo paralelo al eje parece provenir del primer punto focal de una lente convergente



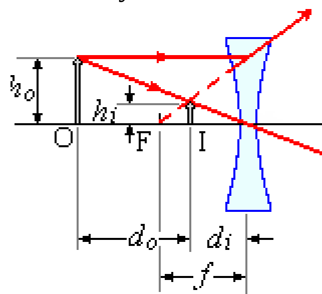
Rayo 2. Un rayo dirigido hacia el segundo punto focal de una lente divergente se refracta paralelamente al eje de la lente.



Rayo 3. Un rayo que pase por el centro geométrico de la lente no se desviará.



La figura siguiente muestra imagen formada en la intersección de los rayos.

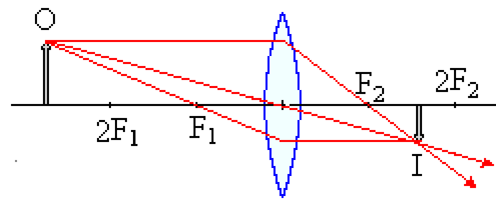


Al igual que e la lente convergente con dos rayos es suficiente.

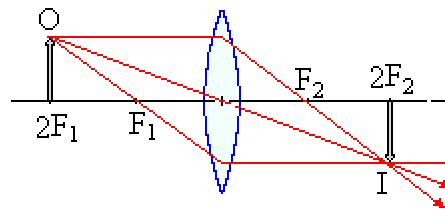
DIVERSAS SITUACIONES DE LA FORMACIÓN DE IMAGEN POR UNA LENTE

Lentes biconvexas

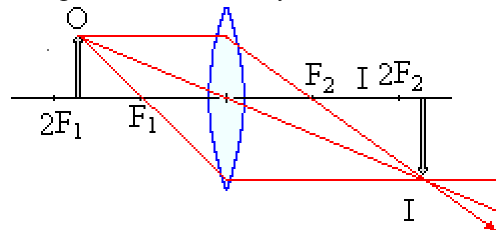
1) Posición del objeto entre el ∞ y 2*f*.
Imagen real, invertida y disminuida y entre *f* y 2*f*.



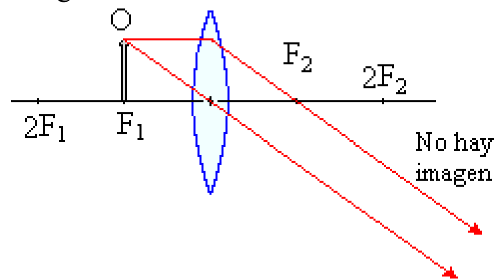
2) Posición del objeto a una distancia $d_o = 2f$.
Imagen real, invertida y de tamaño natural en 2*f*.



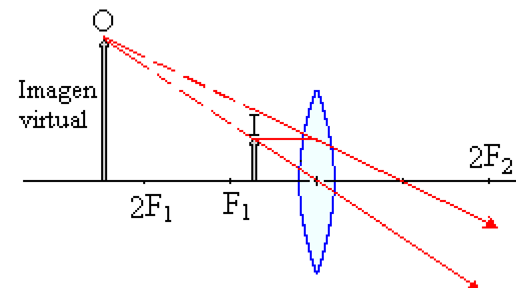
3) Posición del objeto a una distancia d_o comprendida entre *f* y 2*f*.
Imagen real, invertida y aumentada, entre el ∞ y 2*f*



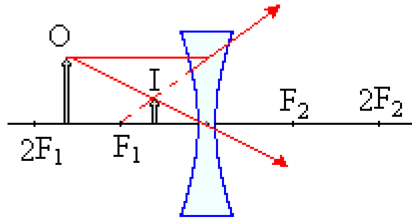
4) Posición a una distancia $d_o = f$.
Imagen en el ∞. Se ve un borrón.



5) Posición a una distancia $d_o < f$.
Imagen virtual, derecha y aumentada.



Lentes bicóncavas.
Las imágenes que se forman mediante lentes divergentes siempre son virtuales, erectas y de menor tamaño.



Ejemplo 38. Para el ajuste de lentes de contacto o en la preparación para una cirugía ocular, es importante medir el radio de curvatura de la cornea. Esto se puede hacer con un Keratómetro, un dispositivo en el que un objeto iluminado se coloca a una distancia conocida del ojo y se observa y mide con un pequeño telescopio el tamaño de la imagen virtual que se forma. Suponiendo que para una distancia del objeto de 120 mm se obtiene un aumento de 0,040. ¿Cuál es el radio de curvatura de la córnea?



Solución.

$$m = -\frac{d_i}{d_o} \Rightarrow d_i = -md_o$$

m = 0,040, d_o = 120 mm

$d_i = -0{,}040(120)$ = - 4,8 mm

Aplicando la ecuación de las lentes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$$

$$= \frac{1}{120} + \frac{1}{-4{,}8} = -\frac{1}{5{,}0} \Rightarrow$$

f = - 5,0 mm

Como

$R = 2f \Rightarrow R$ = 2 (-5,0) = - 10,0 mm

La cornea es una lente convexa con radio de curvatura 10,0 mm.

Ejemplo 39. Una cámara fotográfica single - reflex tiene dos lentes intercambiables, una de distancia focal 55 mm y otra con distancia focal 200 mm. Una persona de 1,70 m de estatura está a 10 metros de distancia de la Cámara.

a) ¿Cual es el tamaño de su imagen es la película párrafo para cada una de las dos Lentes?

b) ¿Cual de estas lentes cree Usted que es la llamada "teleobjetivo"?



Solución. Aplicando la ecuación de las lentes.

d_o = 10 m = 10^4 mm

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} \Rightarrow d_i = \frac{d_o f}{d_o - f}$$

Para f = 55 mm

$$d_i = \frac{55 \times 10^4}{10^4 - 55} = 55{,}3 \text{ mm}$$

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{55{,}3}{10^4} = -5{,}53 \times 10^{-3}$$

$$h_i = mh_o = -5{,}53 \times 10^{-3}(1{,}70) = -9{,}4 \text{ mm}$$

(imagen invertida).

Para f = 200 mm

$$d_i = \frac{200 \times 10^4}{10^4 - 200} = 204 \text{ mm}$$

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{204}{10^4} = -20{,}4 \times 10^{-3}$$

$$h_i = mh_o = -20{,}4 \times 10^{-3}(1{,}70) = -34{,}7 \text{ mm}$$

(imagen invertida).

Una lente de distancia focal larga en una cámara da mayor aumento y es llamada teleobjetivo.

Ejemplo 40. Dos lentes coaxiales convergentes de distancias focales f_1 y f_2 se colocan próximas entre sí. ¿Cuál es la longitud focal efectiva de la combinación?

Solución.

Para la primera lente

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i1}} \Rightarrow \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{d_{o1}}$$

Para la segunda lente

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{d_{i2}}$$

Como $d_{o2} = -d_{i1}$

Tenemos

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{d_{i1}} + \frac{1}{d_{i2}}$$

Reemplazando d_{i1}

$$\frac{1}{f_2} = -\left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{d_{o1}}\right) + \frac{1}{d_{i2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} \Rightarrow$$

$$f_e = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

La longitud focal efectiva de la combinación es

$$f_e = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

Ejemplo 41. La dioptría es la unidad que expresa con valores positivos o negativos el poder de refracción de una lente o potencia de la lente se define como $P = 1/f$, donde f está en metros y P en dioptrías (unidad que utilizan los optometristas para recetar gafas). ¿Cuál es la potencia de dos lentes en contacto? ¿Por qué esta definición de la potencia de la lente es razonable?

Solución.

Tenemos que

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Luego

$$P = P_1 + P_2.$$

Una distancia focal corta significa mayor potencia, esto es mayor aumento.

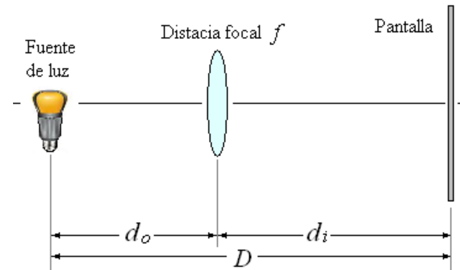
Ejemplo 42. Se coloca una fuente de luz a una distancia fija D de una pantalla. Una lente convergente de distancia focal f se coloca entre la fuente y la pantalla.

a) Determinar la separación entre las dos imágenes posibles que se pueden formar.

b) Calcular la relación de sus tamaños.

Solución.

a)



Aplicando la ecuación de las lentes

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

Siendo

$$d_i = D - d_o$$

Tenemos

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{(D - d_o)} = \frac{1}{f} \Rightarrow$$

$$f\left[(D - d_o) + d_o\right] = d_o(D - d_o) \Rightarrow$$

$$fD = d_o D - d_o^2 \Rightarrow$$

$$d_o^2 - Dd_o + fD = 0$$

Resolviendo

$$d_o = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4fD}}{2}$$

Cuyas soluciones son

$$d_{o1} = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4fD}}{2} \text{ y}$$

$$d_{o2} = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}{2}$$

La separación entre las dos imágenes posibles es

$$\Delta d_o = d_{o1} - d_{o2}$$

$$= 2\frac{\sqrt{D^2 - 4fD}}{2} = \sqrt{D^2 - 4fD}$$

b) Para la primera imagen

$$d_{o1} = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4fD}}{2} \text{ y}$$

$$d_{i1} = D - d_{o1} = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}{2}$$

Aumento de la primera imagen

$$\frac{h_{i1}}{h_o} = \frac{d_{i1}}{d_{o1}} = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}{D + \sqrt{D^2 - 4fD}}$$

Para la segunda imagen

$$d_{o2} = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}{2} \text{ y}$$

$$d_{i2} = D - d_{o2} = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4fD}}{2}$$

Aumento de la segunda imagen

$$\frac{h_{i2}}{h_o} = \frac{d_{i2}}{d_{o2}} = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4fD}}{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}$$

La relación de los tamaños de las imágenes posibles es

$$\frac{h_{i1}}{h_{i2}} = \frac{\frac{h_{i1}}{h_o}}{\frac{h_{i2}}{h_o}} = \frac{\frac{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}{D + \sqrt{D^2 - 4fD}}}{\frac{D + \sqrt{D^2 - 4fD}}{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}}$$

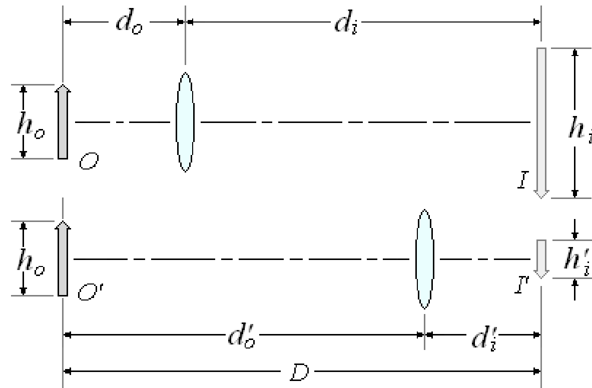
$$= \left(\frac{D - \sqrt{D^2 - 4fD}}{D + \sqrt{D^2 - 4fD}} \right)^2$$

Ejemplo 43. Un objeto luminoso y una pantalla están separados una distancia *D*. Demostrar que si la lente convergente de distancia focal *f*, donde $f < D/4$, se inserta entre ellos,

a) producirá una imagen real del objeto sobre la pantalla para dos posiciones separadas una distancia $d = \sqrt{D(D - 4f)}$, y

b) la razón entre estas dos imágenes para estas dos posiciones de las lentes es $\frac{(D-d)^2}{(D+d)^2}$.

Solución.



a)Un objeto luminoso y una pantalla están separados una distancia *D*

$$d_o + d_i = D \qquad (1)$$

De la ecuación de las lentes.

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{d_o + d_i}{d_o d_i} = \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow d_o d_i = (d_o + d_i) f$$

Reemplazando $d_i + d_o = D$

$$d_o d_i = Df \qquad (2)$$

Ejecutando $(1)^2$ - 4(2):

$$d_o^2 + d_i^2 + 2d_0 d_i - 4d_0 d_i = D^2 - 4Df \Rightarrow$$

$$d_i - d_o = \sqrt{D(D - 4f)}$$

Como $d_i - d_o = d$, queda demostrado que

$$d = \sqrt{D(D - 4f)}.$$

b) Resolviendo $d_i + d_o = D$ y $d_i - d_o = d$

Obtenemos:

$$d_o = \frac{(D-d)}{2} \text{ y } d_i = \frac{(D+d)}{2}$$

Como $d'_o + d'_i = D$ y $d'_0 - d'_i = d$

Obtenemos:

$$d'_o = \frac{(D+d)}{2} \text{ y } d'_i = \frac{(D-d)}{2}$$

De la ecuación del aumento

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} \quad \text{y} \quad m' = \frac{h'_i}{h_o} = -\frac{d'_i}{d'_o}$$

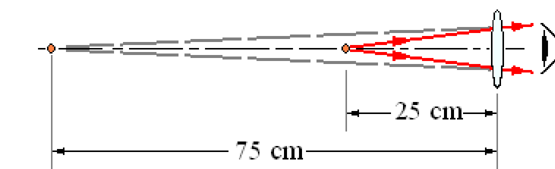
Se obtiene

$$\frac{h'_i}{h_i} = \frac{m'}{m} = \frac{-\frac{d'_i}{d'_o}}{-\frac{d_i}{d_o}} = \frac{d_o d'_i}{d'_o d_i}$$

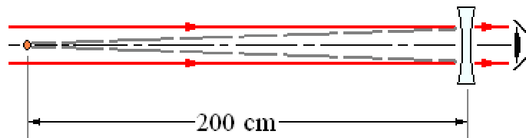
Finalmente

$$\frac{h'_i}{h_i}=\frac{d_o d'_i}{d'_o d_i}=\frac{\frac{(D-d)}{2}\frac{(D-d)}{2}}{\frac{(D+d)}{2}\frac{(D+d)}{2}}$$
$$=\frac{(D-d)^2}{(D+d)^2}$$

Ejemplo 44. Un paisajista puede distinguir sin anteojos objetos entre 75 cm y 200 cm de sus ojos.
a) ¿Qué clase de anteojos requiere para ver objetos a ambas distancias y además su lienzo a una distancia de 25 cm?
b) ¿Qué parte del paisaje que pinta usando sus anteojos debe omitir de la pintura?
Solution.

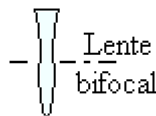


$$\frac{1}{25}-\frac{1}{75}=\frac{1}{f}\Rightarrow f=\frac{75}{2}=37{,}5\text{ cm}$$



$$\frac{1}{\infty}-\frac{1}{200}=\frac{1}{f}\Rightarrow f=\text{-}200\text{ cm}$$

El paisajista requiere lentes bifocales, la parte superior de cada lente de ser una lente divergente de distancia focal -200 cm y la parte de abajo una lente convergente de distancia focal + 37,5 cm.



b) Cuando el artista mira a través de la zona divergente de sus anteojos, puede ver claramente los objetos que le parecen estar entre 75 cm y 200 cm, es decir, las imágenes virtuales de la lente que están entre estas distancias.
Se produce una imagen virtual a 200 cm por objetos en el infinito.
Se produce una imagen virtual a 75 cm por un objeto a una distancia x de la lente,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{-75}=-\frac{1}{200}\Rightarrow x=120\text{ cm}$$

Todos los objetos desde el infinito hasta 120 cm, son vistos claramente por el artista cuando mira a través de la parte superior de sus gafas.

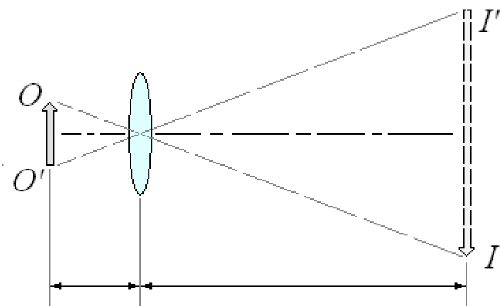
Cuando mira por la parte inferior de sus anteojos, verá claramente a través de ellos todos los objetos de 25 cm hasta una distancia y, donde el objeto produce una imagen virtual a 200 cm. Por lo tanto

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{-200}=\frac{1}{37{,}5}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{y}=\frac{1}{200}+\frac{1}{37{,}5}\Rightarrow y=31{,}6\text{ cm}$$

El artista lo que puede ver claramente todos los objetos de 25 cm hasta 31.6cm cuando está mirando a través de la parte inferior de sus anteojos.

Existe una brecha en su visión entre 31,6cm y 120cm y los objetos en este rango deben ser omitidos en su lienzo.

Ejemplo 45. Los fotogramas de una película casera deben aumentarse 143 veces antes para formar la imagen en una pantalla de 3,60 m desde la lente para que sea lo suficientemente grande. ¿A qué distancia debe estar la película de la lente y cuál es la distancia focal de la lente?
Solución.



El aumento producido por la lente está dado por

$$m=-\frac{d_i}{d_o}=-\frac{3{,}60}{d_o}=-143$$

(La imagen es invertida ya que d_o es real)
Luego la distancia de la lente a la película (objeto) debe ser

$$d_o = \frac{3,60}{143} = 0,025 \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$$

Aplicando la ecuación de las lentes obtendremos la distancia focal

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

Reemplazando valores

$$\frac{143}{3,60} + \frac{1}{3,60} = \frac{1}{f} \Rightarrow$$

$$f = \frac{3,60}{144} = 0,025 \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$$

Ejemplo 46. Una cámara fotográfica de cajón tiene un lente de distancia focal 11 cm y una abertura fija de 1 cm de diámetro. Un principiante decide utilizarlo junto con un medidor de la exposición de diseño bastante más sofisticado que el de la cámara. Él considera que para una escena en particular, el medidor de exposición le informa que debe usar una exposición de 1/100 s en *f* /2,8. ¿Cómo puede calcular el tiempo correcto de exposición para la cámara?



Solución.

El número *f* es la relación entre la distancia focal de la lente con el diámetro de la abertura. Así, el número *f* de la lente de la cámara es *f* /11.

La exposición requerida es 1/100 s / con *f* /2,8.

Esto es equivalente a tiempo *t* con *f* /11. Pero sabemos que el tiempo de exposición multiplicado por el área de la abertura es proporcional a la intensidad de la iluminación requerida. Luego

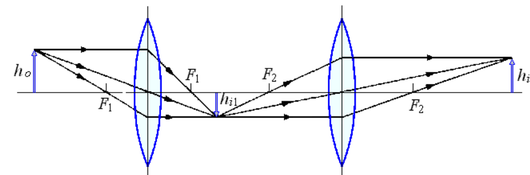
$$\frac{1}{100}\text{s} \times \left(\frac{1}{2,8\,\text{cm}}\right)^2 = t \times \left(\frac{1}{11\,\text{cm}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\frac{1}{100}\text{s} \times \left(\frac{1}{2,8\,\text{cm}}\right)^2}{\left(\frac{1}{11\,\text{cm}}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{11}{2,8}\right)^2 \times \frac{1}{100} = 0,154\,\text{s}.$$

SISTEMA DE DOS LENTES

Muchos sistemas ópticos incluyen combinaciones de dos o más lentes, en sistemas de múltiples lentes, la imagen formada por un lente es el objeto de la lente siguiente. La figura muestra como una segunda lente positiva es colocada a la derecha de la imagen real, invertida formada por la primera lente. La segunda lente enfoca el rayo que sale de la imagen como si fueran rayos saliendo de un objeto real. Suponiendo que la segunda lente es insertada entre la primera lente y la imagen. La imagen original desaparece, y la segunda lente puede o no formar una nueva imagen, pero la imagen que la primera lente hubiera formado aún sirve como objeto de la segunda lente, el cual llamamos objeto virtual. La distancia al objeto d_{o2} de un objeto virtual es negativa.

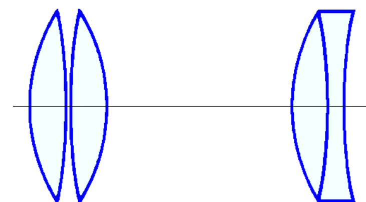


AUMENTO TOTAL

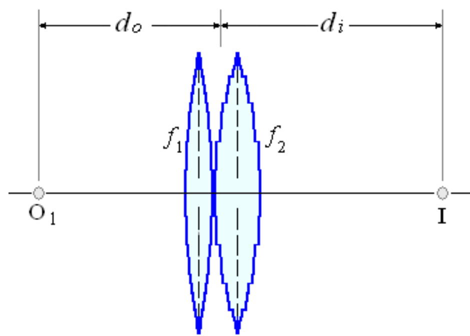
El aumento del sistema de dos lentes es el producto de las ampliaciones individuales *de cada lente.*

$m = m_1 m_2$

En muchos instrumentos ópticos, se colocan dos lentes delgas en contacto, como se muestra en la Figura

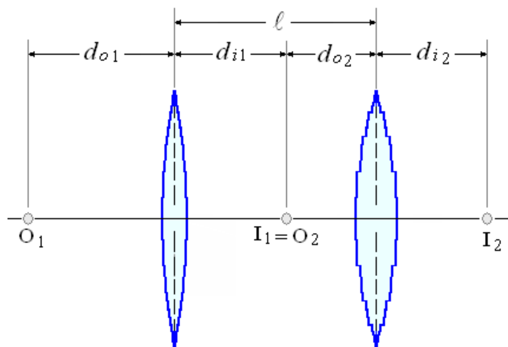


Distancia focal efectiva de lentes en contacto (f_{ef})



$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f_{ef}} \quad (1)$$

Consideremos dos lentes de distancias focales f_1 y f_2 separadas la distancia ℓ, como se muestra en la figura.



Formación de la imagen de la primera lente
Aplicando la fórmula de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{f_1} \Rightarrow d_{i1}=\frac{f_1 d_{o1}}{d_{o1}-f_1}$$

Formación de la imagen de la segunda lente

$$\frac{1}{d_{o2}}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{f_2}$$

Donde

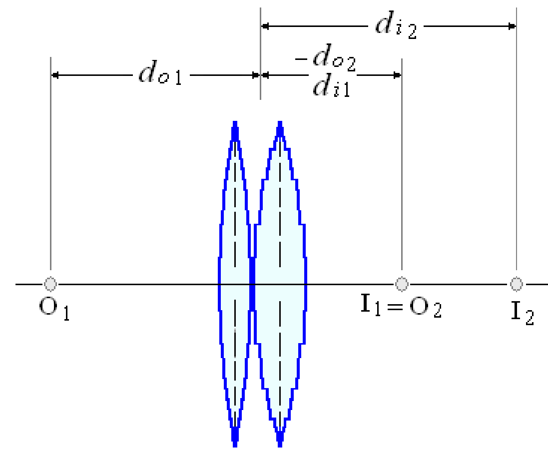
$$d_{o2}=\ell-d_{i1}=\ell-\frac{f_1 d_{o1}}{(d_{o1}-f_1)}$$

Luego

$$\frac{1}{\ell-\dfrac{f_1 d_{o1}}{(d_{o1}-f_1)}}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{i2}}+\frac{(d_{o1}-f_1)}{\ell(d_{o1}-f_1)-f_1 d_{o1}}=\frac{1}{f_2}$$

Cuando $\ell \to 0$



$$\frac{1}{d_{i2}}+\frac{(d_{o1}-f_1)}{-f_1 d_{o1}}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{i2}}+\frac{d_{o1}}{-f_1 d_{o1}}+\frac{-f_1}{-f_1 d_{o1}}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow$$

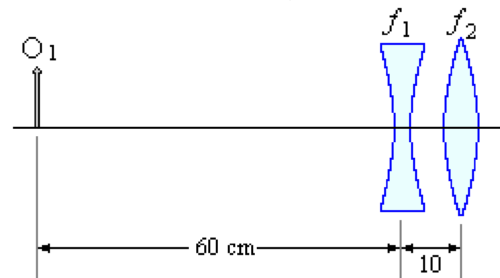
$$\frac{1}{d_{i2}}-\frac{1}{f_1}+\frac{1}{d_{o1}}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{i2}}+\frac{1}{d_{o1}}=\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_1} \quad (2)$$

Comparando (1) y (2)

$$\frac{1}{f_{ef}}=\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_1}$$

Ejemplo 47. Se coloca un objeto 60 cm delante de una lente divergente de distancia focal – 15 cm. Una lente convergente de distancia focal 20 cm se coloca 10 cm detrás de la primera lente.
a) ¿Dónde está ubicada la imagen final?
b) ¿Cuál es el aumento final?



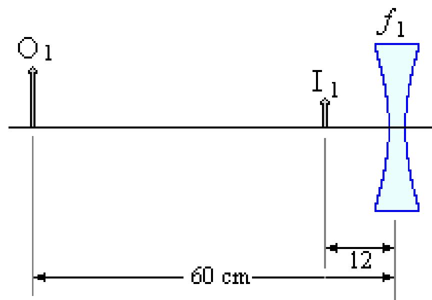
Solución.
a) Usemos la ecuación de las lentes dos veces
Para la primera lente

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{f_1}$$

d_{o1} = 60 cm, f_1 = -15 cm

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{-15} \Rightarrow$$

$$d_{i1}=-12\text{ cm}$$



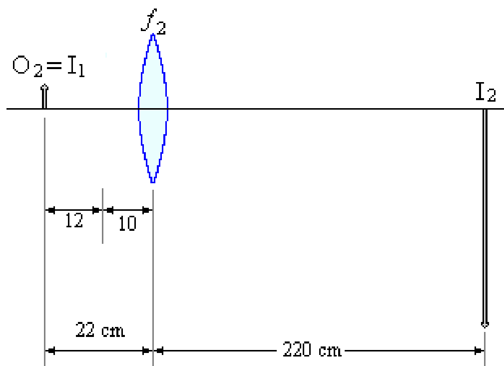
Para la segunda lente

$$\frac{1}{d_{o2}}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{f_2}$$

d_{o2} = 10 + 12 = 22 cm, f_2 = 20 cm

$$\frac{1}{22}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{20} \Rightarrow$$

$$d_{i2}=220\text{ cm}$$



La segunda imagen está ubicada 220 cm a la derecha de la segunda lente.

b)

Aumento de la primera lente

$$m_1=-\frac{d_{i1}}{d_{o1}}=-\frac{-12}{60}=\frac{1}{5}$$

Aumento de la segunda lente

$$m_2=-\frac{d_{i2}}{d_{o2}}=-\frac{220}{22}=-10$$

El aumento final

$$m=m_1m_2=\left(\frac{1}{5}\right)(-10)=-2$$

La imagen es invertida

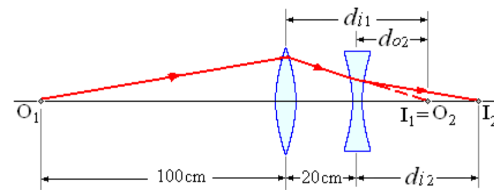
Ejemplo 48. Un teleobjetivo simple consiste en una lente convergente de distancia focal 20 cm y a una distancia de 20 cm una lente divergente de distancia focal - 10 cm.

a) ¿En qué posición se debe colocar una película para recibir la imagen final si el objeto está a 100 cm de la primera lente?

b) ¿Sí se cambia la lente divergente por otra lente divergente. Dónde se debe colocar y cuál debe ser su distancia focal para producir un aumento doble que el aumento del sistema original?

Solución.

a)



Primeramente encontraremos la posición de la imagen I_1 de la primera lente.

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{f_1}\text{, con}$$

$d_{i1}=100\text{ cm}$, f_1 = 20 cm

Luego

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{20} \Rightarrow$$

$$d_{i1}=25\text{ cm}$$

Esta imagen I_1 es el objeto O_2 para la segunda lente.

Vamos a encontrar la posición d_{i2} de la imagen I_2.

$$\frac{1}{d_{o2}}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{f_2}\text{, con}$$

$$d_{o1}=-(d_{i1}-20)=-25+20=-5\text{ cm}$$

f_2 = - 10 cm

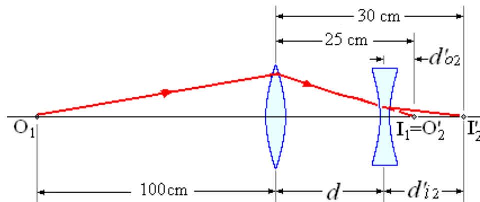
Luego

$$\frac{1}{-5}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{-10} \Rightarrow$$

$$d_{i2}=10\text{ cm}$$

La película deberá colocarse a 10 cm detrás de la lente divergente.

b)



El aumento del primer sistema es

$m = m_1 m_2$

Siendo $m_2 = -\frac{d_{12}}{d_{o2}} = -\frac{10}{-5} = 2$

Tenemos $m = 2m_1$

El aumento del segundo sistema

$m' = m'_1 m'_2$

Siendo $m'_1 = m_1$ y

$$m'_2 = -\frac{d'_{i2}}{d'_{o2}}$$

Con $d'_{o2} = -(25 - d)$

$$m'_2 = -\frac{d'_{i2}}{-(25-d)} = \frac{d'_{i2}}{25-d}$$

Tenemos

$$m' = m_1\left(\frac{d'_{i2}}{25-d}\right) \qquad (1)$$

También

$$m' = 2m = 2(2m_1) = 2m_1 \quad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$4m_1 = m_1\left(\frac{d'_{12}}{25-d}\right) \Rightarrow$$

$$4 = \frac{d'_{12}}{25-d} \Rightarrow$$

$$d'_{i2} + 4d = 100 \Rightarrow$$

$$d'_{i2} + d = 30 \Rightarrow$$

$$d = \frac{70}{3} = 23{,}333 \text{ cm}$$

$$d'_{i2} = 30 - \frac{70}{3} = \frac{20}{3} = 6{,}666 \text{ cm}$$

Para encontrar la distancia focal de la nueva lente convergente

$$\frac{1}{d'_{o2}} + \frac{1}{d'_{i2}} = \frac{1}{f'_2}$$

Con

$$d'_{o2} = -\frac{5}{3}\text{cm} \;\; \text{y} \;\; d'_{i2} = \frac{20}{3}\text{cm}$$

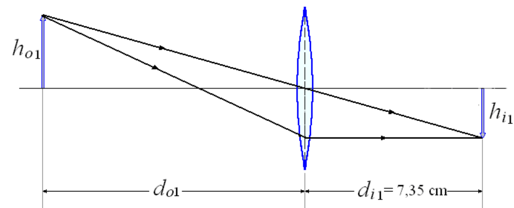
Obtenemos

$$\frac{1}{-5/3} + \frac{1}{20/3} = \frac{1}{f'_2}$$

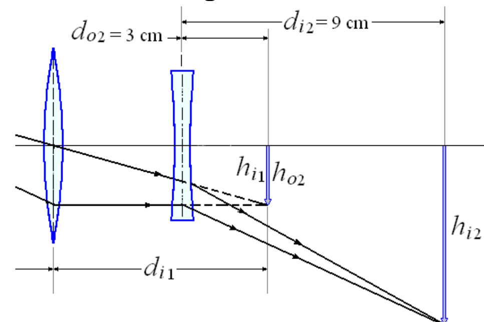
$$f'_2 = -\frac{20}{9} = -2{,}222 \text{ cm}$$

La segunda lente se debe colocar 6,666 cm delante de la película y su distancia focal debe ser – 2,222 cm.

Ejemplo 49. La figura muestra una imagen real invertida a 7,25 cm de una lente positiva.



Cuando se coloca una lente negativa a 3 cm por delante de esta imagen, la imagen original desaparece y se crea una imagen real de 9 cm a la derecha de la lente negativa.



a) Encontrar la longitud focal de la lente negativa.
b) Si la distancia entre el objeto real y la primera lente es 10,9 cm, ¿cuál es la ampliación total para las dos lentes?

Solución.

a) La imagen original actúa como objeto virtual para la segunda lente, y debido a que la segunda lente se coloca a 3 cm por delante de la imagen original, la distancia d_{o2} para la segunda lente es – 3 cm.

Sea f_2 la distancia focal de la segunda lente

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{d_{i2}} + \frac{1}{d_{02}}$$

$$= \frac{1}{-3\,\text{cm}} + \frac{1}{9\,\text{cm}} = -\frac{2}{9\,\text{cm}}$$

$$\Rightarrow \; f_2 = -4{,}5\,\text{cm}$$

b) $m_1 = -\frac{d_{i1}}{d_{01}} = -\frac{7{,}25}{10{,}9}$, $m_2 = -\frac{d_{i2}}{d_{02}} = -\frac{9}{-3}$

$$m_{total} = m_1 m_2$$

$$= \left(-\frac{7{,}25}{10{,}9}\right)\left(-\frac{9}{-3}\right) = -2$$

El signo negativo especifica que la imagen es invertida.

This is an example of a virtual object producing a real image.

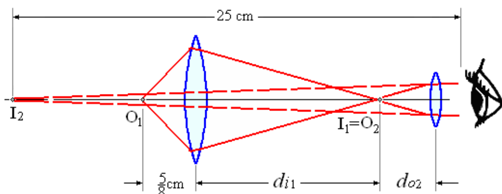
Ejemplo 50. Un microscopio compuesto consta de lentes de objetivo y ocular con distancias focales 0,6 cm y 2 cm, respectivamente. Se coloca un objeto a 5/8 cm del objetivo y la imagen se ve a menor distancia que la de visión nítida (25 cm).

a) Encontrar la distancia de separación de las lentes.

b) Encontrar el poder amplificador del sistema.

Solución.

a)



Para el objetivo

$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{f_1}$$

Con

$$d_{o1} = \frac{5}{8} \text{ y } f_1 = 0{,}6$$

Obtenemos

$$\frac{1}{5/8} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{0{,}6} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{i1}} = \frac{5}{3} - \frac{8}{5} = \frac{25-24}{15} = \frac{1}{15}$$

$$d_{i1} = 15\,\text{cm}$$

La imagen real del objetivo I_1 es el objeto real O_2 del ocular.

$$\frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{1}{f_2}$$

Con

$$d_{i2} = -25 \text{ y } f_2 = 2$$

Obtenemos

$$\frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{-25} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{o2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{25} = \frac{27}{50} \Rightarrow$$

$$d_{o2} = \frac{50}{27} = 1{,}85\,\text{cm}$$

La separación de las lentes es

$$d = d_{i1} + d_{o2} = 15 + 1{,}85 = 16{,}85\,\text{cm}$$

b) El aumento lineal producido por el objetivo

$$m_1 = -\frac{d_{i1}}{d_{o1}} = -\frac{15}{5/8} = -24$$

El aumento lineal producido por el ocular

$$m_2 = -\frac{d_{i2}}{d_{o2}} = -\frac{25}{1{,}85} = -13{,}5$$

El poder de aumento del sistema es

$$m = m_1 m_2 = (-24)(13{,}5) = -324$$

Ejemplo 51. Una lente delgada con una distancia focal 20 cm se coloca en contacto con una segunda lente cuya distancia focal es 25 cm.

¿Cuál es la distancia focal efectiva de estos dos lentes?

Solución. Directamente de la ecuación.

$$\frac{1}{f_{ef}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Con

f_1 = 20 cm, f_2 = 25 cm.

Tenemos

$$\frac{1}{f_{ef}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{25} = \frac{5+4}{100} = \frac{9}{100} \Rightarrow$$

$$f_{ef} = \frac{100}{9} = 11{,}1 \text{ cm}$$

La distancia focal efectiva es 11,1 cm.

Ejemplo 52. Una lente positive con una distancia focal 18 cm se coloca en contacto con una lente negativa. La distancia focal efectiva de esta combinación de lentes es - 36 cm. Calcular la

distancia focal de la lente negativa.
Solución. Usando

$$\frac{1}{f_{ef}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

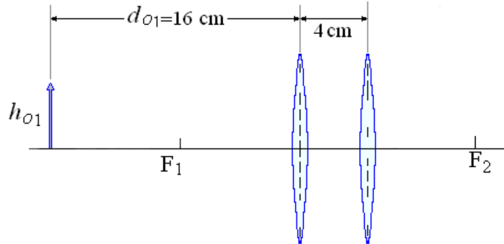
Con
f_1 = 18 cm y f_{ef} = -36 cm
Tenemos

$$\frac{1}{-36} = \frac{1}{18} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{36} - \frac{1}{18} = -\frac{1+2}{36} = -\frac{1}{12}$$

f_2 = - 12 cm
La distancia focal de la lente negativa es – 12 cm.

Ejemplo 53. Dos lentes positivas paralelas separadas una distancia de 4 cm, tienen longitudes focales de 8 cm y 6 cm. Un objeto real está 16 cm a la izquierda de la primera lente. Una distancia de 4 cm separa las dos lentes.
a) Encontrar la posición de la imagen producida por la segunda lente.
b) Calcular el aumento total de las dos lentes.



Solución
a) Primero encontramos la posición de la imagen de la primera lente

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_{01}} + \frac{1}{d_{i1}} \Rightarrow \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{d_{01}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow d_{i1} = 16\,\text{cm}$$

Esta imagen es el objeto virtual para la segunda lente

$$d_{02} = -(d_{i1} - 4) = -(16 - 4) = -12\,\text{cm}$$

$$\frac{1}{d_{i2}} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{d_{02}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{i2}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{-12} = \frac{1}{4} \Rightarrow d_{i2} = 4\,\text{cm}$$

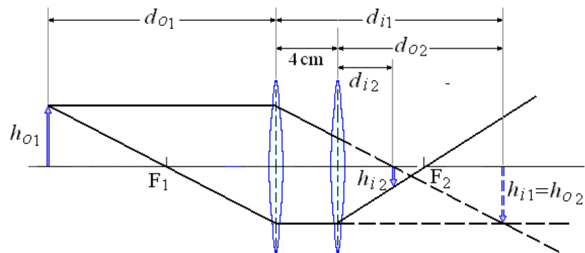
b)

$$m_1 = -\frac{d_{o1}}{d_{i1}} = -\frac{16}{16} = -1,$$

$$m_2 = -\frac{d_{o2}}{d_{i2}} = -\frac{4}{-12} = \frac{1}{3}$$

$$m_{total} = m_1 m_2 = (-1)\left(\frac{1}{3}\right) = -0{,}333$$

El resultado significa que la imagen es invertida



Ejemplo 54. Una lente positive y una negativa se colocan tan juntas como es posible. Las dos focales de Distancias y de 16 cm - 8 cm. ¿Cual es la distancia focal efectiva de esta combinación de dos Lentes?
Solución.
Directamente de la ecuación.

$$\frac{1}{f_{ef}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Con
f_1 = 16 cm, f_2 = -8 cm.
Tenemos

$$\frac{1}{f_{ef}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{-8} = \frac{-8+16}{128} = \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$f_{ef} = 16\,\text{cm}$$

La distancia focal efectiva es 16 cm.

Ejemplo 55. Dos lentes delgadas se ponen en contacto. La primera lente tiene una distancia focal de 20 cm y la longitud focal efectiva de la combinación de las dos lentes es de 12 cm. Calcule la distancia focal de la segunda lente.
Solución.
Directamente de la ecuación.

$$\frac{1}{f_{ef}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_{ef}} - \frac{1}{f_1}$$

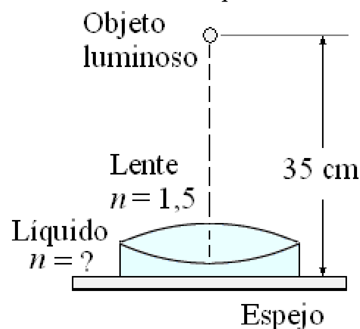
Con
f_{ef} = 12 cm, f_1 = 20 cm.
Tenemos

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{20-12}{12\times 20}=\frac{1}{30}\Rightarrow$$

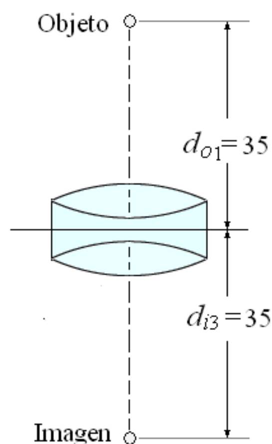
$$f_2 = 30\,\text{cm}$$

La distancia focal de la segunda lente es 30 cm.

Ejemplo 56. Una gota de un líquido transparente se coloca sobre la superficie de un espejo plano horizontal. Una lente biconvexa con radios de curvatura de 25 cm hecha de vidrio de índice de refracción 1,50 se coloca sobre la gota. Cuando un objeto luminoso se mueve a lo largo del eje del sistema, se encuentra que coincidente con su imagen cuando está a 35 cm de la lente. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?



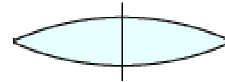
Solución.
Como el sistema esta sobre un espejo este produce una imagen igual, tal como se muestra en la figura. Esta imagen tendrá una imagen coincidente con el objeto.



En seguida procederemos a encontrar la imagen del conjunto
La distancia focal de una lente se encuentra con la ecuación del fabricante de lentes.

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

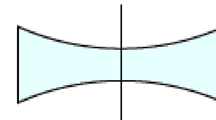
Lente biconvexa



n = 1,5, R_1 = 25, R_2 = - 25

$$\frac{1}{f_1}=(1{,}5-1)\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{-25}\right)=\frac{1}{25}$$

Lente bicóncava



R_1 = -25 R_2 = 25

$$\frac{1}{f_2}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f_2}=(n-1)\left(\frac{1}{-25}-\frac{1}{25}\right)=-(n-1)\frac{2}{25}$$

Formación de la primera imagen (lente biconvexa).

$$\frac{1}{d_{o1}}+\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{f_1}$$

$$d_{01}=35\,,\ f_1=25$$

$$\frac{1}{35}+\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{25}-\frac{1}{35}=\frac{10}{25\times 35}=\frac{0{,}4}{35}$$

Formación de la segunda imagen (lente bicóncava).

$$\frac{1}{d_{o2}}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{f_2}$$

$$d_{02}=-d_{i1}\,,\ f_2=-\frac{25}{2(n-1)}$$

$$-\frac{0{,}4}{35}+\frac{1}{d_{i2}}=-(n-1)\frac{2}{25}$$

$$\frac{1}{d_{i2}}=-(n-1)\frac{2}{25}+\frac{0{,}4}{35}$$

Formación de la tercera imagen (lente biconvexa).

$$\frac{1}{d_{o3}}+\frac{1}{d_{i3}}=\frac{1}{f_3}$$

$d_{03} = -d_{i2}$, $d_{i3} = 35$ $f_3 = 25$

$(n-1)\frac{2}{25} - \frac{0,4}{35} + \frac{1}{35} = \frac{1}{25} \Rightarrow$

$(n-1)\frac{2}{25} + \frac{0,6}{35} = \frac{1}{25} \Rightarrow$

$(n-1)\frac{2}{25} = \frac{1}{25} - \frac{0,6}{35} \Rightarrow$

$(n-1)\frac{2}{25} = \frac{20}{25\times 35} \Rightarrow$

$(n-1) = \frac{10}{35} = 0,286 \Rightarrow$

$n = 1,286$

El índice de refracción del líquido es 1,286.

Solución directa.
Aplicando la distancia focal equivalente para tres lentes delgadas coaxiales

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1}$$

$$= \frac{2}{25} - (n-1)\frac{2}{25} = \frac{2}{25}(3-n) \quad (1)$$

La distancia focal equivalente también la encontramos considerando al sistema como una sola lente. Por definición de distancia focal, tenemos

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{o3}} = \frac{1}{35} + \frac{1}{35} = \frac{2}{35} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$\frac{2}{25}(n-1) = \frac{2}{25} - \frac{2}{35} \Rightarrow$

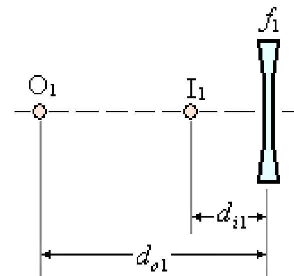
$\frac{1}{25}(n-1) = \frac{10}{25\times 35} \Rightarrow$

$(n-1) = \frac{10}{35} \Rightarrow$

$n = 1,286$

Ejemplo 57. Se coloca un objeto pequeño 30 cm delante de una lente delgada divergente de distancia focal – 15 cm. La luz refractada por la lente cae en un espejo esférico cóncavo de radio de curvatura 30 cm, y se forma una imagen real del objeto por reflexión a 20 cm del espejo. ¿Cuál es la distancia entre la lente y el espejo?
Solución.

Lente



$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{f_1}$

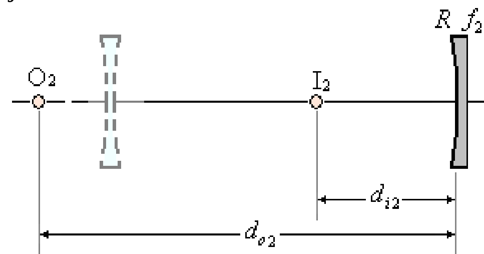
$d_{o1} = 30\,\text{cm}$, $f_1 = -15\,\text{cm}$

$\frac{1}{30} + \frac{1}{d_{i1}} = -\frac{1}{15}$

$\frac{1}{d_{i1}} = -\frac{1}{15} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{10}$

$d_{i1} = -10\,\text{cm}$

Espejo



$\frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{d_{i2}} = \frac{1}{f_2}$

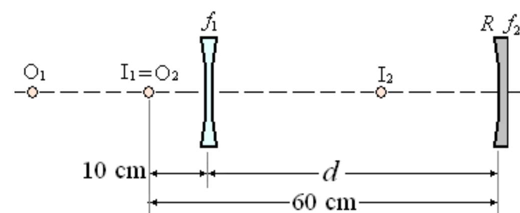
$d_{i2} = 10\,\text{cm}$, $f_2 = \frac{30}{2} = 15\,\text{cm}$

$\frac{1}{d_{o2}} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15}$

$\frac{1}{d_{o2}} = \frac{1}{15} - \frac{1}{20} = \frac{1}{60}$

$d_{o2} = 60\,\text{cm}$

Separación de la lente y el espejo



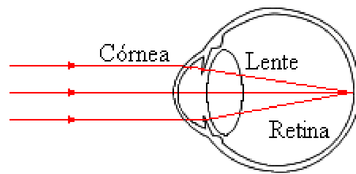
$d = 60 - 10 = 50\,\text{cm}$

La distancia entre la lente y el espejo es 50 cm.

INSTRUMENTOS ÓPTICOS

EL OJO HUMANO

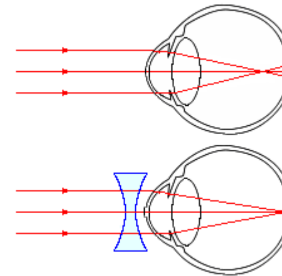
El estudio del ojo humano desde el punto de vista de los instrumentos ópticos tiene un interés doble. Por una parte, se trata de un instrumento de proyección. Por otro lado, el diseño de algunos aparatos, como los telescopios y los microscopios, debe realizarse teniendo en cuenta el funcionamiento del ojo. Destaquemos sus partes más importantes



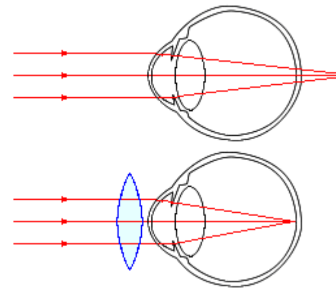
El cristalino. Es una lente convergente de distancia focal variable. La distancia a la imagen d_i está fijada por el enfoque del ojo enfoca a diferentes distancias (recuérde que se tiene que verificar la ley de las lentes, $\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}$). Este fenómeno se denomina acomodación; una persona puede ver nítidamente desde el infinito hasta un punto próximo situado, por término medio, a 25 cm del ojo.
La lente del ojo humano es convexa, y además puede cambiar de forma para enfocar objetos a distintas distancias. La lente se hace más gruesa al mirar objetos cercanos y más delgada al mirar objetos lejanos. A veces, los músculos del ojo no pueden enfocar la luz sobre la retina, la pantalla del globo ocular. Si la imagen de los objetos cercanos se forma detrás de la retina, se dice que existe hipermetropía.

La retina es la parte del ojo donde se forma la imagen. La retina está llena de células nerviosas sensibles a la luz que envían la información de la señal luminosa hacia el cerebro. La zona de la retina donde la imagen se forma con mayor nitidez se denomina fóvea.
El iris. Se comporta como un diafragma. Se cierra cuando hay un exceso de luz y se abre cuando las condiciones de luz son deficientes.

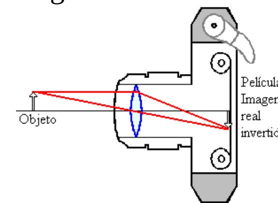
Un ojo miope es aquel que enfoca la imagen del infinito en un plano situado antes de la retina. Este defecto visual se corrige con el uso de lentes divergentes.



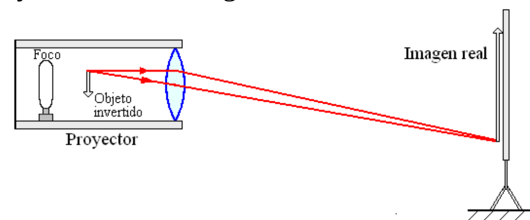
Si la imagen del infinito se forma detrás de la retina, el ojo es hipermétrope. Para corregir este defecto se utilizan lentes convergentes.



La cámara fotográfica. Es similar al ojo en la formación de imágenes, en lugar de se la retina está la placa fotográfica**.**



El proyector. Hace la función inversa, en la figura se puede ver claramente como se produce la proyección de la imagen**.**



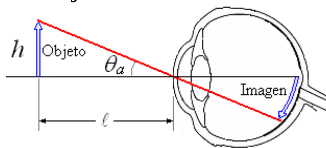
LENTES DE AUMENTO

La lente de aumento consiste simplemente de una lente convergente.

El tamaño en que aparece un objeto depende del ángulo subtendido por el objeto en el ojo.

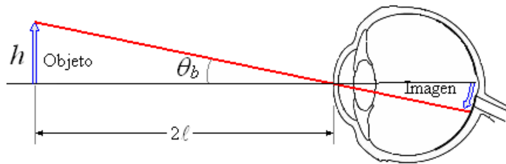


El tamaño angular de un objeto es el tamaño aparente del objeto la proporción del campo de visión que el objeto abarca. Para un objeto pequeño, es muy cercanamente igual a su altura divida por su distancia a la lente
En la figura siguiente se muestra el objeto a la distancia ℓ del objeto



$$\theta_a \approx \frac{h}{\ell}$$

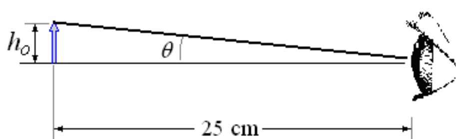
A continuación a una la distancia 2ℓ



$$\theta_b \approx \frac{h}{2\ell}$$

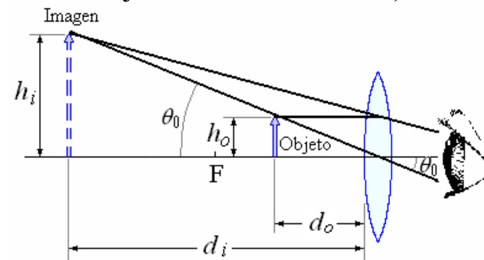
Al duplicar la distancia, el ángulo subtendido disminuye a la mitad.
$\theta_a = 2\theta_b$

Punto de acercamiento. Para examinar con detalle un objeto, lo acercamos a nuestros ojos para que subtienda un ángulo mayor, pero nuestros ojos solamente pueden ajustarse hasta cierto punto. El punto más cercano al cual el ojo puede enfocar claramente se denomina punto de acercamiento, este varía de persona a persona aunque un valor promedio adecuado es 25 cm. considerado como el punto de acercamiento estándar o normal.
La figura muestra el ojo enfocado en su punto de acercamiento



$$\theta = \frac{h_o}{25}$$

Punto de alejamiento. El punto más distante que puede ser enfocado claramente por el ojo recibe el nombre de punto de alejamiento (o al infinito) y ocurre cuando se relajan los músculos del ojo; para un ojo normal, el punto de alejamiento es bastante grande y consideraremos que se encuentra en el infinito.
Una lente de aumento nos permite situar un objeto más cerca del ojo de manera que subtienda un ángulo más grande. Como se muestra en la figura 35—15a, el objeto se coloca en el punto focal o dentro de él. En consecuencia, la lente convergente produce una imagen virtual, que deberá encontrarse al menos a 25 cm del ojo para que éste lo enfoque. En el caso de que el ojo se relaje, la imagen se encontrará en el infinito y, en este caso, el objeto se encuentra exactamente en el punto focal. (Usted mismo hace este ligero ajuste cuando “enfoca” el objeto moviendo la lente.)



$$\theta_0 = \frac{h_i}{d_i} = \frac{h_o}{d_o}$$

Aumento angular de una lupa. El aumento angular o potencia de aumento, *M*, de la lente se define como el cociente entre el ángulo subtendido con la lente y el que el ojo sin ayuda de la lente subtiende a una distancia de 25 cm.

$$m_\theta = \frac{\text{tamaño angular de la imagen visto con lupa}}{\text{tamaño angular del objeto en el campo cercano}}$$

$$m_\theta = \frac{\theta_0}{\theta}$$

Mínimo aumento angular. El mínimo aumento se produce cuando el objeto está en el punto focal y el tamaño de la imagen es infinito. Podemos encontrar este aumento mínimo

De la ecuación. $m_\theta = \dfrac{\theta_0}{\theta}$

Reemplazando $\theta_0 = \dfrac{h_i}{d_i}$ y $\theta = \dfrac{h_o}{25}$ $\Rightarrow$

$$m_\theta = \frac{\dfrac{h_i}{d_i}}{\dfrac{h}{25\,\text{cm}}} = \frac{h_i}{h}\frac{25\,\text{cm}}{d_i}$$

Como $\dfrac{h_i}{h} = \dfrac{d_i}{d_o}$

Obtenemos

$$m_\theta = \frac{d_i}{d_o}\frac{25\,\text{cm}}{d_i} = \frac{25\,\text{cm}}{d_o}$$

Como la imagen está en el infinito, $d_o = f$

$$m_\theta = \frac{25\,\text{cm}}{f}$$

Máximo aumento angular. Cuando la imagen está en el punto cercano, 25 cm, el aumento angular tiene su valor máximo. Podemos encontrar este aumento máxima de la misma manera encontramos el aumento mínimo si queremos expresar d_o en términos de f y recordar que una lupa simple forma una imagen virtual, por lo que el valor de d_i es negativo

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_i} = \frac{d_i - f}{d_i f}$$

$$d_o = \frac{d_i f}{d_i - f} = \frac{-25 f}{-25 - f} = \frac{25 f}{25 + f}$$

$$m_\theta = \frac{\dfrac{h_i}{d_i}}{\dfrac{h}{25\,\text{cm}}} = \frac{h_1}{h}\frac{25}{d_i} = \frac{d_1}{d_o}\frac{25}{d_i}$$

$$= \frac{25}{d_i} = \frac{25(25 + f)}{25 f} = \frac{25\text{cm}}{f} + 1$$

Máximo aumento

$$m_\theta = \frac{25\text{cm}}{f} + 1$$

Ejemplo 58. Una lupa tiene dos superficies convexas, cada una con un radio de curvatura de 10 cm. El índice de refracción del vidrio es 1,50. ¿Cuál es el máximo aumento de esta lupa?

Solución. Vamos a calcular f usando la ecuación del fabricante de lentes.

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}$$

f = 10 cm

El aumento angular máximo

$$m_\theta = \frac{25\,\text{cm}}{f} + 1 = \frac{25\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} + 1 = 3{,}5$$

Ejemplo 59. ¿Cuál es el aumento angular de una lupa cuya distancia focal es 10 cm cuando se coloca un objeto 10 cm delante de la lente.

Solución.

Como el objeto se coloca en el foco, al aumento angular es el mínimo.

$$m_\theta = \frac{25\,\text{cm}}{f} = \frac{25\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 2{,}5$$

Ejemplo 60. ¿Cuál es el aumento angular de una lupa de distancia focal 5 cm si se forma una imagen a 25 cm ce los ojos?

Solución.

El aumento angular de una lupa es

$$m_\theta = \frac{25}{f}$$

En este caso f = 25 cm, luego

$$m_\theta = \frac{25}{5} = 5$$

Ejemplo 61. Una lente convergente de 8cm de distancia focal lo emplea una persona con ojos normales como lente de aumento. Calcule.

a) El aumento máximo.

b) El aumento cuando el ojo se relaja.

Solución.

a) El aumento máximo se obtiene con el ojo enfocado en su pinto de acercamiento.

$$m_\theta = \frac{25\,\text{cm}}{f} + 1 = \frac{25\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} + 1 \approx 4$$

b) El aumento mínimo se obtiene con el ojo enfocado en el infinito

$$m_\theta = \frac{25\,\text{cm}}{f} = \frac{25\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} \approx 3$$

Ejemplo 62. Una lupa simple consiste en una superficie plana y una superficie convexa, cuyo radio de curvatura es 5 cm. ¿Cuál es el aumento máximo de esta lupa? (n = 1,50)

Solución. Primero calcularemos la distancia focal de la lupa

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

n = 1,5, $R_1 = \infty$ y R_2 = 5 cm

$$\frac{1}{f} = (1{,}5-1)\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{5}\right) = 0{,}5\left(0 + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}$$

f = 10 cm.

Luego el máximo aumento de la lupa es

$$m_\theta = \frac{25\,\text{cm}}{f} + 1 = \frac{25\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} + 1 = 3{,}5$$

Ejemplo 63. Cuando una lupa simple se coloca de tal manera que la imagen se encuentra en el infinito, el aumento mínimo resultante es 5. ¿Cuál es la distancia focal de esta lupa?

Solución.

El aumento mínimo se obtiene con el ojo enfocado en el infinito

$$m_\theta = \frac{25\,\text{cm}}{f} \Rightarrow f = \frac{25\,\text{cm}}{m_\theta}$$

Reemplazando valores

$$f = \frac{25\,\text{cm}}{m_\theta} = \frac{25\,\text{cm}}{5} = 5\,\text{cm}$$

Ejemplo 64. Una lupa tiene una distancia focal 18,9 cm. ¿cuál es el aumento máximo de esta lente?

Solución. El aumento máximo de esta lente es

$$m_\theta = \frac{25\,\text{cm}}{f} + 1 = \frac{25\,\text{cm}}{18{,}9\,\text{cm}} + 1 = 2{,}32$$

EL TELESCOPIO

Un telescopio se utiliza para ayudar a la observación de objetos distantes, n la mayor parte de los casos puede considerarse que el objeto se encuentra en el infinito.



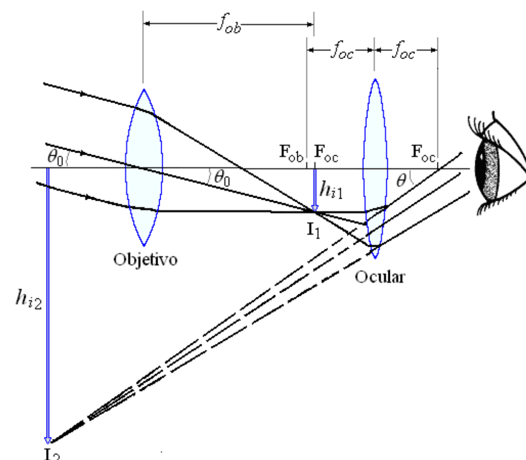
Existen diversos tipos de telescopios astronómicos telescopio como el refractor que utiliza una combinación de lentes para formar una imagen, y el telescopio reflector que utiliza un espejo curvo y una lente.

El telescopio refractor. Las dos lentes se disponen de modo que el objetivo forme una imagen real e invertida del objeto I_0 muy cerca del punto focal del ocular.

La imagen I_1 se forma en el punto focal del objetivo debido a que el objeto está esencialmente en el infinito.

Las dos lentes están separadas por una distancia $f_o + f_e$ la que corresponde a la longitud del tubo del telescopio.

El ocular forma en I_2, una imagen invertida y más grande de la imagen en I_1.



El aumento angular del telescopio está dado por

$$m_\theta = \frac{\theta}{\theta_0}$$

De acuerdo con los triángulos en la figura anterior, tenemos

$$\tan\theta = -\frac{h_{i1}}{f_{oc}} \text{ y } \tan\theta_0 = \frac{h_{i1}}{f_{ob}}$$

Para ángulos pequeños

$$\tan\theta \approx \theta \text{ y } \tan\theta_0 = \theta_0$$

Luego

$$\theta = -\frac{h_{i1}}{f_{oc}} \quad \theta_0 = \frac{h_{i1}}{f_{ob}}$$

Por consiguiente, el aumento angular del telescopio puede expresarse como

$$m_\theta = \frac{-\frac{h_{i1}}{f_{oc}}}{\frac{h_{i1}}{f_{ob}}} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

El signo menos indica que la imagen está invertida.
Esta expresión señala que el aumento angular del telescopio es igual a la razón entre la longitud focal del objetivo y la longitud focal del ocular. También en este caso, el aumento es la razón entre el tamaño angular visto con el telescopio y el visto a simple vista.
El telescopio refractor más grande del mundo se localiza en el Observatorio Yerkes, en la Bahía Williams, Wisconsin. Su diámetro es de un metro.

Ejemplo 65. Un telescopio tiene un objetivo con distancia focal 30 cm y un ocular con distancia focal 1,5 cm. ¿Cuál es el aumento del telecopio?
Solución. El aumento del telescopio es

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} = -\frac{30}{1{,}5} = -20$$

El signo negativo significa que la imagen es invertida.

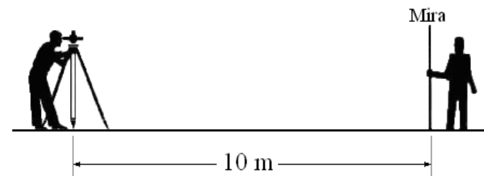
Ejemplo 66. Un telescopio tiene una lente objetivo con distancia focal 40 cm y un ocular con distancia focal 2 cm. ¿Cuál es el aumento del telescopio?
Solución.
El aumento del telescopio es

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} = -\frac{30}{1{,}5} = -20{,}0$$

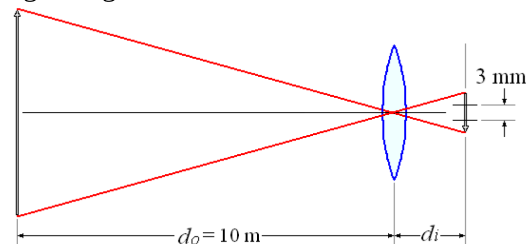
Ejemplo 67. Un telescopio astronómico tiene un objetivo y un ocular separados una distancia de 42 cm. El ocular tiene una distancia focal de 2,0 cm. Encontrar el aumento angular del telescopio.
Solución: En primer lugar, encontrar la distancia focal del objetivo
$f_{ob} = 42 - f_{oc} = 42 - 2 = 40$ cm
Luego

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} = -\frac{40}{2} = -20$$

Ejemplo 68. Un agrimensor utiliza un telescopio que tiene un objetivo de distancia focal 25 cm y una retícula formada por dos líneas horizontales con 3,0 mm de separación, en el primer plano focal del ocular. El agrimensor observa a la mira sostenida por el asistente a 10 m del objetivo ¿Cuál es la longitud aparente de la parte de la mira vista entre las líneas de retícula?



Solución.
El objetivo del telescopio forma una imagen de la mira en el primer plano focal del ocular. La retícula que está en ese punto, más la imagen es vistas a través del ocular.
La figura siguiente muestra esta situación.



Aplicando la ecuación de las lentes

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

d_o es la distancia de la mira al objetivo (10 m = 1000 cm).
D_i es la distancia de la imagen (lugar donde esta la retícula) a la lente.
f es la distancia focal del objetivo (25 cm).
Reemplazando

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{25} \Rightarrow$$

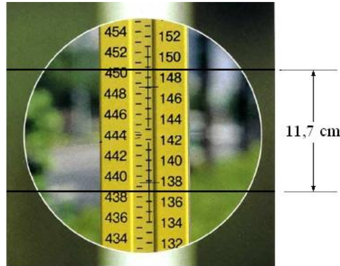
$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{25} - \frac{1}{1000} = \frac{39}{1000} \Rightarrow$$

$$d_i = \frac{1000}{39}$$

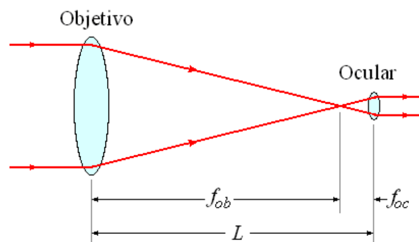
El aumento es

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = \frac{1000/39}{1000} = -\frac{1}{39}$$

Parte de la imagen entre la líneas de la retícula (3 mm de separación).
Corresponde a 3 x 39 = 117 mm = 11,7 cm de la mira.



Ejemplo 69. El objetivo de un telescopio tiene una distancia focal 50 cm, el ocular tiene distancia focal 2 cm.
a) ¿Cuál es la separación de las lentes para formar una imagen en el infinito?
b) ¿Cuál es entonces el aumento?
c) ¿Cuál debe ser la separación de las lentes si la imagen se forma en el punto cercano, 25 cm?
Solución.
a)



La separación de las lentes aproximadamente es
$L = f_{ob} + f_{oc} = 50 + 2 = 52$ cm
b) El aumento es

$$m = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} = \frac{50}{2} = 25$$

c) Sí la imagen final se forma en el punto cercano

$$d_{ooc} = -25 \text{ cm}$$

Aplicando la ecuación de las lentes

$$\frac{1}{f_{oc}} = \frac{1}{d_{ooc}} + \frac{1}{d_{ioc}}$$

Reemplazando valores

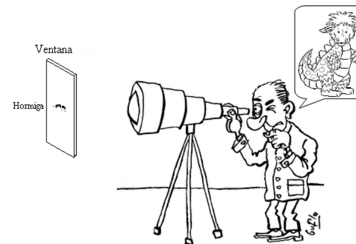
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{d_{ooc}} + \frac{1}{-25} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{ooc}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{25} = \frac{27}{50} \Rightarrow$$

$$d_{ooc} = \frac{50}{27} = 1{,}85 \text{ cm}$$

En este caso
$L = f_{ob} + d_{o\,oc} = 50 + 1{,}85 = 51{,}85$ cm

Ejemplo 70. En uno de los cuentos de Edgar Allan Poe, el autor describe su experiencia aterradora de enfocar un telescopio en una colina distante y la observación de un "dragón" trepando por ella. Pero se da cuenta de que el dragón es una hormiga arrastrándose por la ventana a través de la cual está observando la colina. Aunque se trata de una buena historia, explicar por qué la óptica es mala.



Solución.
Consideraremos que la colina se encuentra a una distancia muy grande (para efectos prácticos en el infinito).
El objetivo del telescopio forma una imagen de la colina en su segundo punto focal, que es también el primer punto focal del ocular.
La imagen final se ve en el infinito.
A menos que la hormiga este en el infinito o en el segundo punto focal del objetivo, es decir, a menos que ocupe la misma posición que la imagen intermedia (objeto del ocular), la imagen final no puede estar en el infinito también, y por lo tanto no se puede ver en la misma posición que la imagen de la colina.

Poniendo números.
Longitud focal del objetivo, f_1 =100 cm.
Longitud focal del ocular, f_2 = 10 cm.
Distancia de la hormiga al objetivo, d_{o1} = 200 cm.
Distancia de la imagen final, d_{i2}.

Para el objetivo

$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{200}+\frac{1}{d_{11}}=\frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{i1}}=\frac{1}{100}-\frac{1}{200}=\frac{1}{200} \Rightarrow$$

$$d_{i1}=200\,\text{cm}$$

El objetivo y el ocular están separados 110 cm y la imagen formada por el objetivo actúa como objeto virtual para el ocular.

Para el ocular
La distancia del objeto al ocular es

$$\frac{1}{d_{o2}}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{f_2}$$

Con

$$d_{o2}=-(200-110)=-90 \text{ cm}$$

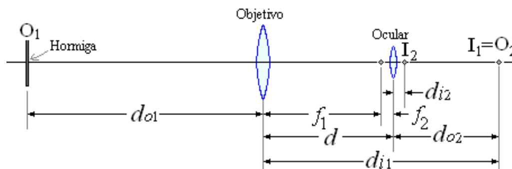
Tenemos

$$\frac{1}{-90}+\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_{i2}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{90}=\frac{10}{90}=\frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$d_{i2}=9\,\text{cm}$$

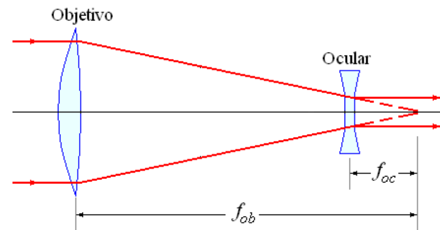
La imagen final es real en el lado del observador, por lo que al mirar a través del telescopio, no se puede ver una imagen de la hormiga.



El telescopio de Galileo



Un telescopio de Galileo consiste en un objetivo convergente y un ocular divergente que forma una imagen virtual. Una ventaja importante de un telescopio de Galileo es que la imagen está erecta.



La ecuación para el aumento angular es

$$m_\theta=-\frac{f_{ob}}{f_{oc}}$$

Ejemplo 71. Un telescopio de Galileo cuenta con una lente objetivo de longitud de onda 20 cm y un ocular con una distancia focal – 4cm. ¿Cuál es el aumento de este telescopio?

Solución. El aumento es

$$m_\theta=-\frac{f_{ob}}{f_{oc}}=-\frac{20}{-4}=5{,}0$$

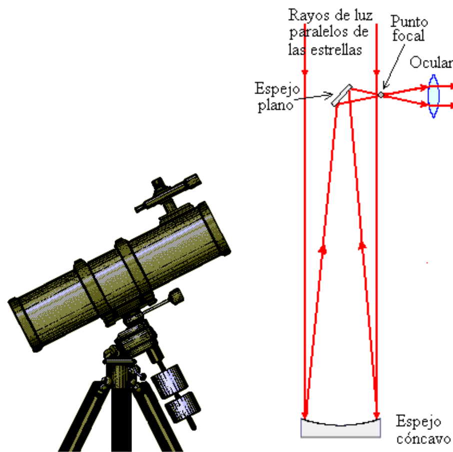
Ejemplo 72. Unos binoculares tiene lentes del objetivo con una distancia focal 12 cm y oculares con distancias focales de - 3 cm. ¿Cuál es el aumento angular?



Solución. El aumento angular es

$$m_\theta=-\frac{f_{ob}}{f_{oc}}=-\frac{12}{-3}=4$$

El telescopio reflector. Los grandes telescopios de investigación utilizados para estudiar objetos muy distantes deben tener un gran diámetro para adquirir la mayor cantidad de luz posible. Es difícil y costoso fabricar grandes lentes para telescopios refractores. Otra dificultad con los grandes lentes es que su considerable peso hace que se pandeen, lo cual es una fuente adicional de aberración. Estos problemas pueden superarse parcialmente al sustituir el lente del objetivo con un espejo cóncavo reflejante.



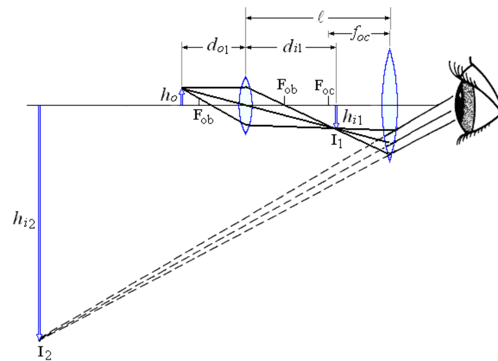
El telescopio más grande del mundo es un telescopio reflector cuyo diámetro es de 6 metros ubicado en el Monte Pastukhov, en el Cáucaso, Rusia. El telescopio reflector más grande en Estados Unidos está en el Monte Palomar, en California. Su diámetro es de 5 metros. Por el contrario, el telescopio refractor más grande del mundo se localiza en el Observatorio Yerkes, en la Bahía Williams, Wisconsin. Su diámeto es de sólo un metro.

EL MICROSCOPIO COMPUESTO

Un microscopio compuesto está formado por dos lentes convergentes. Luz ingresa que en el microscopio pasa primero a través del objetivo, que tiene una distancia focal corta y forma una imagen real. La segunda lente, el ocular, es una lupa simple. La imagen real formada por el objetivo se encuentra entre el ocular y el punto focal del ocular, de modo que el ocular forma una imagen virtual aumentada.



La figura siguiente muestra como se produce la ampliación del objeto en un microscopio.



El aumento total del microscopio compuesto es el producto del aumento de cada lente. Si la lente se ajusta de modo que la imagen final I_2 esté en el infinito, la primera imagen I_1 estará en el punto focal del ocular.

Aumento del objetivo

El objeto de altura h_0 a ser visto se coloca justo fuera del punto focal del objetivo a una distancia $d_{o1} \approx f_{ob}$. La primera imagen se forma a una distancia d_{i1} del objetivo resultando un aumento

$$m_1 = -\frac{d_{i1}}{d_{o1}} = -\frac{d_{i1}}{f_{ob}}$$

Aumento del ocular

$$m_\theta = \frac{25\text{ cm}}{f_{oc}}$$

Aumento total del microscopio

$$m = m_1 m_\theta$$

$$= \left(-\frac{d_{i1}}{f_{ob}}\right)\left(\frac{25\text{ cm}}{f_{oc}}\right)$$

Aumento del microscopio compuesto es

$$m = -\frac{25 d_{i1}}{f_{ob} f_{oc}}$$

Ejemplo 73. La distancia focal del objetivo de un microscopio f_{ob} es 1,8 cm. La distancia focal del ocular f_{oc} es 2,0 cm. Cuando se coloca un objeto 2,0 cm delante del objetivo la imagen final se encuentra en el infinito.

¿Cuál es el aumento del microscopio?

Solución. En primer lugar encontremos la distancia de la imagen al objetivo

$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{f_{ob}}$$

$$\frac{1}{d_{i1}} = \frac{d_{o1} - f_{ob}}{d_{o1} f_{ob}}$$

$$d_{i1} = \frac{d_{o1} f_{ob}}{d_{o1} - f_{ob}}$$

Reemplazando valores

$$d_{i1} = \frac{(2,0)(1,8)}{2,0 - 1,8} = 18 \text{ cm}$$

El aumento del microscopio es

$$m = -\frac{25 d_{i1}}{f_{ob} f_{oc}}$$

$$= -\frac{25 \times 18}{1,8 \times 2} = -125$$

El valor negativo de m significa que la imagen final es invertida.

Ejemplo 74. Un microscopio compuesto tiene un objetivo con una distancia focal 2,0 cm y un ocular con una distancia focal 2,5 cm. Las lentes están separadas una distancia de 14,5 cm. La imagen final está en el infinito. Calcular el aumento del microscopio.

Solución. En primer lugar, tendrás que conocer la distancia a la imagen de la lente objetivo que, en este caso, es la distancia de las lentes se separan menos la longitud focal del ocular:

$$d_{i1} = \ell - f_{oc}$$

$$= 14,5 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} = 12,0 \text{ cm}$$

También tenemos que calcular la distancia del objeto al objetivo

$$\frac{1}{d_{o1}} = \frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{d_{i1}} = \frac{d_{i1} - f_{ob}}{f_{ob} d_{i1}} \Rightarrow$$

$$d_{o1} = \frac{f_{ob} d_{i1}}{d_{i1} - f_{ob}} = \frac{(2)(12)}{12 - 2}$$

$$= 2,4 \text{ cm}$$

Luego el aumento

$$m = \left(-\frac{d_{i1}}{d_{o1}}\right)\left(\frac{25 \text{ cm}}{f_{oc}}\right)$$

$$= \left(-\frac{12 \text{ cm}}{2,4 \text{ cm}}\right)\left(\frac{25 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm}}\right) = -50$$

Ejemplo 75. Un microscopio tiene un objetivo con una distancia focal 1,5 cm. El objeto está a 1,8 cm del objetivo. La distancia focal del ocular es 2,5 cm. ¿Cuál es el aumento total del microscopio?

Solución Tendrá que calcular la distancia a la imagen de la ecuación. (24-1):

$$\frac{1}{d_{o1}} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{f_{ob}}$$

$$\frac{1}{1,8} + \frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{1,5}$$

$$\frac{1}{d_{i1}} = \frac{1}{1,5} - \frac{1}{1,8} = \frac{1,8 - 1,5}{1,5 \times 1,8} = \frac{1}{9}$$

$$d_{i1} = 9,0 \text{ cm}$$

Cálculo del aumento

$$m = \left(-\frac{d_{i1}}{d_{o1}}\right)\left(\frac{25 \text{ cm}}{f_{oc}}\right)$$

$$= \left(-\frac{12 \text{ cm}}{2,4 \text{ cm}}\right)\left(\frac{25 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm}}\right) = -50$$

Ejemplo 76. Un microscopio compuesto tiene un objetivo con una distancia focal 2,0 cm. El ocular tiene una distancia focal 1,5 cm. Estas dos lentes están separadas por una distancia de 11,5 cm. Calcular el aumento total del microscopio.

Solución.

Primeo calculamos la distancia a la imagen al objetivo:

$$d_{i1} = \ell - f_{oc} = 11,5 - 1,5 = 10,0 \text{ cm}$$

Luego, calculamos la distancia al objeto

$$\frac{1}{d_{o1}} = \frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{d_{i1}}$$

Reemplazando valores

$$\frac{1}{d_{o1}} = \frac{1}{2,0} - \frac{1}{10,0} = \frac{10,0 - 2,0}{2,0 \times 10,0} = \frac{1}{2,5} \Rightarrow$$

$$d_{o1} = 2,5,0 \text{ cm}$$

Luego el aumento

$$m = \left(-\frac{d_i}{d_o}\right)\left(\frac{25 \text{ cm}}{f_{oc}}\right)$$

$$= \left(-\frac{10 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm}}\right)\left(\frac{25 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}}\right) = -66,7$$

Ejemplo 77. Se observa células sanguíneas en un microscopio cuyo ocular tiene una distancia focal 3,0 cm y su objetivo una distancia focal 0,40 cm. La distancia entre el ocular y el objetivo es 18 cm. Si una célula subtiende un ángulo de 2 x 10^{-5} rad

cuando se ve a simple vista, ¿qué ángulo subtiende cuando se ve a través del microscopio?
Solución.
Aumento del microscopio compuesto es

$$m = -\frac{25 d_{i1}}{f_{ob} f_{oc}}$$

Asumiendo que $d_{i1} \approx 18$ (la longitud del microscopio)

$$m = -\frac{25(18)}{(3)(0,40)} = -375$$

También el aumento del microscopio es

$$m = \frac{h_2}{h_0} = \frac{\theta_2}{\theta}$$

θ = 2 x 10^{-5} rad: ángulo subtendido cuando se ve a simple vista.
θ_2 = ángulo subtendido cuando se ve a través del microscopio.
Luego

$$\frac{\theta_2}{\theta} = -375$$

$$\theta_2 = -375\theta$$

Siendo θ = 2 x 10^{-5} rad, tenemos

$$\theta_2 = -375\left(2\times10^{-5}\right) = -7,5\times10^{-3} \text{ rad}$$

PREGUNTAS Y PROBLEMAS

Problema 1. Si la velocidad de la luz en cierto medio es de 2,0 x 10^{11} m/s, ¿cuál es el índice de refracción del medio? ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz en el medio, si su longitud de onda en el espacio libre es de 4500 Å?

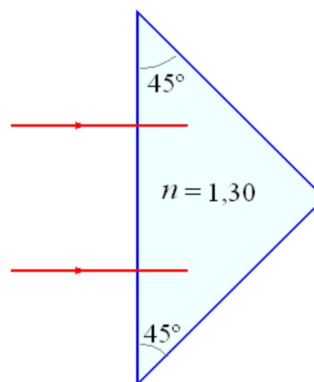
Problema 2. Una luz con una longitud de onda de 5000 Å entre a un medio en el que se descubre que su longitud de onda es de 3 500 Å
a) ¿Cuál es el índice de refracción del medio?
b) ¿Cuál es la frecuencia de la luz?
c) ¿Cuál es la constante dieléctrica del medio a esta frecuencia?

Problema 3. Un rayo de luz se origina en un punto bajo la superficie de un depósito de agua. Suponiendo que *n* = 1,33, calculen el ángulo que forma el rayo que sale con respecto a la vertical, si el ángulo de incidencia es:
a) 30°, b) 45° y c) 75°.

Problema 4. Para la situación física descrita en el problema anterior, calculen el ángulo de incidencia en el que el haz saldrá horizontalmente. ¿Qué ocurre si se incrementa el ángulo de incidencia más allá de este valor?

Problema 5. Una placa de vidrio (de índice 1.5) está bajo el agua (de un índice de 1,33).
a) Si la luz se desplaza originalmente en el agua e incide en un ángulo de 30°, ¿cuál es el ángulo de refracción?
b) Si un rayo de luz se desplaza originalmente en el vidrio e incide en un ángulo de 60°, ¿cuál es el ángulo de refracción cuando el rayo de luz entre al agua?

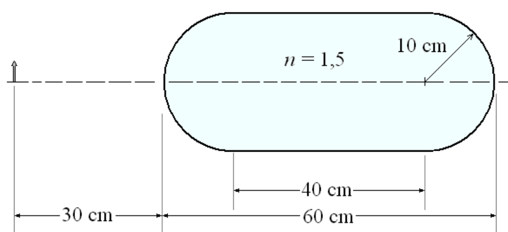
Problema 6. Dos rayos paralelos de luz inciden del aire sobre la cara grande de un prisma de 45° - 45° -90°, con un índice de refracción de 1,30; véase la figura. Calculen el ángulo entre la luz refractada, cuando sale del prisma.



Problema 7. Un haz de rayos paralelos de luz se desplaza en vidrio (*n* = 1,5) e incide en su interfaz esférica con el agua (*n* = 1,33), Describan la naturaleza y la ubicación de la imagen si:
a) La superficie es cóncava, de radio *R*.
b) La superficie es convexa, de radio *R*.

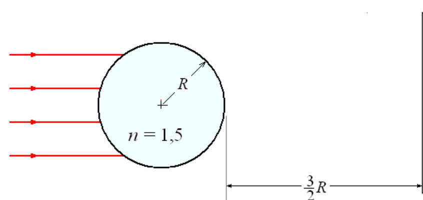
Problema 8. Repitan las dos partes del problema anterior, suponiendo, esta vez, que los rayos originales de luz se desplazan en agua y sufren una refracción en la superficie esférica de vidrio.

Problema 9. Una varilla de vidrio de índice de refracción de 1,5, tiene una longitud de 60 cm y posee en sus extremos superficies hemisféricas de 10 cm de radio cada una de ellas. Se pone un objeto de 2 cm de altura a una distancia de 30 cm de un extremo, como se muestra en la Figura.



a) ¿Dónde estará situada la imagen I_1 después de la refracción por la superficie de la izquierda"
b) ¿Cuál es la naturaleza y el tamaño de esta imagen I_1?
c) Determinen la ubicación de la imagen final I_2 que se forma mediante la refracción de la luz a partir de I_1, considerada como objeto para la segunda superficie.
d) ¿Cuál es la naturaleza y el aumento de I_2 en relación al objeto original.

Problema 10. Haces paralelos de luz incidentes en una esfera de vidrio de radio R e índice de 1,5 Si, como se muestra en figura, hay un espejo plano a una distancia de $3/2R$ de la esfera, calcular la ubicación de la Imagen final.



Problema 11. Sea nuevamente la situación de la figura anterior, suponiendo que, esta vez, hay un objeto situado a una distancia $3R$ de la superficie izquierda de la esfera.
a) Determinen la ubicación de la imagen después de la primera refracción a través de la superficie de la esfera.
b) Determinen la posición final de la imagen.

Problema 12. Una lente delgada y convexa plana, es de vidrio (n = 1,5) y la superficie curva tiene un radio de 10 cm.
a) ¿Cuál es la longitud focal de la lente?
b) Repitan (a), suponiendo que, esta vez, la lente sea cóncava plana con el mismo radio de curvatura.
c) ¿Es divergente o convergente la lente de (a)?

Problema 13. Una lente delgada convexa doble, de vidrio (n = 1, 5) tiene una longitud focal de 30cm. Si el radio de una de las superficies es de 30cm, ¿cuál será el radio de la otra?

Problema 14. Demuestre que si f_o es la longitud focal de una lente delgada en el aire y f es la longitud focal correspondiente cuando la lente se encuentra en un medio de índice de refracción n', entonces,

$$f' = f_0 \frac{n'(n-1)}{n-n'}$$

Donde n es el índice de refracción del material de la lente.

Problema 15. Una lente delgada y convergente tiene una longitud focal de 20 cm. Determinen la ubicación y el aumento que se asocian a una imagen cuya distancia del objeto es:
a) 30cm, b) 20 cm, y c) 10 cm.
¿En cuál de estos casos es real la imagen?

Problema 16. Un objeto está a una distancia de 12 cm de una lente convergente delgada de longitud focal de 10 cm.
a) ¿A qué distancia de la lente deberá estar una pantalla para que la imagen se enfoque en ella?
b) ¿Qué tamaño tendrá la imagen si el objeto es perpendicular al eje y tiene un tamaño de 4 cm?

Problema 17. Demuestre que si un objeto está a una distancia ($x + f$) de una lente delgada de longitud focal f entonces, su imagen estará a una distancia ($x' + f$), en donde
$xx` = f^2$
Nota: Esta forma de la ecuación de lentes delgadas se conoce como forma newtoniana.

Problema 18. Un objeto se encuentra a una distancia s de una lente delgada de longitud focal f
a) Demuestren que la distancia d entre el objeto y la imagen es

$$d = \frac{s^2}{s-f}$$

b) Demuestre que para una lente convergente, la distancia entre el objeto y las imágenes reales formadas es siempre mayor que $4f$.
c) ¿A qué distancia del objeto se logra el mínimo en (b)?

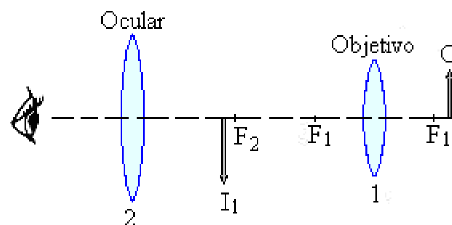
Problema 19. Cuando un objeto de 3 cm de altura se coloca a 8 cm frente a una lente convergente delgada se forma una imagen en la pantalla, 12 cm detrás de la lente. Suponga que esta última se acerca 2 cm más al objeto.
a) ¿Hacia qué lado se debe mover la pantalla para que la imagen siga enfocada en ella?
b) ¿Cuál es el tamaño final de la imagen?

Problema 20. Un objeto de 2 cm de altura está a una distancia de 10 cm de una lente convergente de longitud focal 4 cm. Haga un dibujo a escala y, al trazar rayos apropiados desde la parte superior del objeto, determine el tamaño y la ubicación de la imagen. Compare los valores gráficos con los calculados.

Problema 21. Repita el problema anterior, suponiendo que, esta vez, la lente sea divergente y tenga una longitud focal de - 4 cm. Suponga que el objeto está a 4 cm de la lente.

Problema 22. Dos lentes convergentes de una longitud focal de 10 cm están separadas por una distancia de 50 cm. Se pone un objeto de 5 cm a la izquierda de las lentes y a 15 cm de una de ellas y 65 cm de la otra.
a) ¿Dónde está la imagen I_1, que se debe a la primera lente?
b) ¿Dónde está situada la imagen final I_2?
c) ¿Cuáles son los tamaños de I_1, e 1_2?
¿Es la imagen final derecha o invertida?

Problema 23. En la figura se muestran los elementos básicos del microscopio compuesto. El objeto O se sitúa inmediatamente afuera del punto focal de la lente del objetivo y la Imagen asociada cae inmediatamente adentro de la longitud focal de la lente ocular. Explique la razón por la que el observador verá una imagen ampliada del objeto. ¿Será real o virtual la imagen observada? ¿Derecha o invertida?



Problema 24. Los elementos básicos de un telescopio son dos lentes convergentes: una lente objetivo 1 de longitud focal f_1, y una lente ocular 2 de longitud focal f_2. A diferencia del microscopio, en un telescopio las lentes están separadas por la distancia $(f_1 + f_2)$. Mediante la construcción de un diagrama de rayos para un objeto del infinito, expliquen cómo funciona el telescopio. Demuestre también que el aumento m de un telescopio es

$$m = -\frac{f_1}{f_2}$$

Explique el significado del signo menos.

Problema 25. Un objeto está a una distancia (a + b*)* de un espejo plano. Supongan que se pone una lente delgada y convergente de longitud *focal f (f* < *a*; *f* < b*)* entre el objeto y el espejo, a una distancia *a* del primero.
a) Determinen tanto la naturaleza como la ubicación de la imagen final, suponiendo que

$$b > af(a - f).$$

b) Justifiquen su respuesta, construyendo un diagrama apropiado de rayos.

Problema 26. Una lente biconvexa está hecha de cristal de roca con un índice de refracción 1,66, su distancia focal es 8,0 cm. ¿Cuál es el aumento máximo d esta lupa?
Respuesta
4,13

Problema 27. Un microscopio compuesto tiene una lente objetivo con distancia focal 2,0 cm. La longitud focal del ocular es 2,5 cm. Un portaobjetos de microscopio está 2,5 cm delante del objetivo.
La imagen final del ocular está en el infinito. a) Calcular el aumento total del microscopio.
b) Sí la distancia del objetivo al ocular del microscopio es 12,5 cm. ¿Cuál sería el aumento si esta distancia se reduce a 8,5 cm?
Respuesta

a) - 40,0
b) - 20.0

Problema 28. Un telescopio tiene una lente objetivo de distancia focal 44 cm y un ocular de distancia focal 2 cm. ¿Cuál es el aumento de este telescopio?
Respuesta
-22,0

Problema 29. Un telescopio de Galileo cuenta con una lente objetivo de distancia focal 12 cm. El ocular negativo tiene una distancia focal 3 cm. ¿Cuál es el aumento de este telescopio de Galileo?
Respuesta
4,00

Problema. Una lente positiva, con una distancia focal 8 cm se pone en contacto con una lente negativa cuya distancia focal es -24 cm. ¿Cuál es la distancia focal de esta combinación?
Respuesta
12,0 cm

Problema 30. Dos lentes positivas idénticas se colocan tan cerca como sea posible. La distancia focal de esta combinación es 7,5 cm. ¿Cuál es la distancia focal de cada lente positiva?
Respuesta
15,0 cm

ÓPTICA ONDULATORIA

Hemos visto al estudiar los fenómenos de la reflexión y refracción de la luz como consistente en rayos que viajan en líneas rectas en un medio uniforme. Otros fenómenos notables como la interferencia, difracción u polarización, pueden ser entendidos solamente en términos de la naturaleza ondulatoria de la luz y el estudio de este fenómeno es conocido como óptica física.

DIFERENCIA DE FASE

Las ondas electromagnéticas se comportan en muchos aspectos, como otros tipos de ondas, por ejemplo, muestran la interferencia y difracción.
Cuando las ondas de luz que provienen de fuentes diferentes se superponen se produce interferencia.
Interferencia constructiva. La interferencia constructiva se produce cuando las ondas están en fase y, en consecuencia, se refuerzan mutuamente.
Interferencia destructiva. La interferencia destructiva se produce cuando las ondas están fuera de fase y, en consecuencia, parcial o totalmente, se cancelan mutuamente. Dos ondas están exactamente fuera de fase cuando el máximo de una onda coincide con el mínimo de la otra.
Cuando dos ondas de luz pasan a través de un punto en el espacio, el movimiento de la onda resultante en ese punto depende de la diferencia de fase entre las dos ondas.

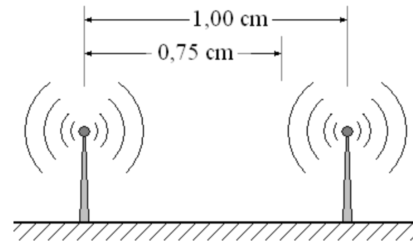
Si la diferencia de fase es cero o un múltiplo entero de 2π radianes, el movimiento de la onda resultante tiene un valor máximo.

Si la diferencia de fase es un múltiplo impar de π radianes (π, 3π, 5π…). El movimiento de la onda resultante tiene un valor mínimo.

La diferencia entre las distancias de viaje de dos ondas de luz es su diferencia de trayectoria ΔS.
Si dos ondas con la misma longitud de onda λ comienzan desde diferentes puntos, pueden no estar en fase cuando se encuentran, pero podemos encontrar la diferencia de fase $\Delta\phi$ entre ellas en cualquier punto.
Relación entre la diferencia de fase y la diferencia de trayectorias

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta S}{\lambda}$$

Ejemplo 1. Las ondas de radio son ondas electromagnéticas como la luz, pero tienen longitudes de onda mayores. Dos fuentes de ondas de radio emiten en fase en una longitud de onda de 1 cm y separadas por 2 cm. ¿Cuál es la diferencia de fase en un punto sobre la línea que une las dos fuentes y a 0,75 cm de uno de ellos?
Solución.



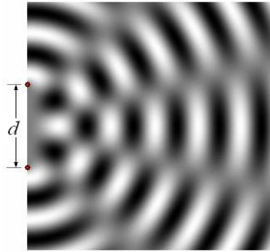
Si el punto está a 0,75 cm de una de las fuentes y a (2,00 – 0,75) = 1,25 cm de la otra.
La diferencia entre las dos trayectorias es
$\Delta S = (1,25 – 0,75) = 0,50$ cm
Luego la diferencia de fase es

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta S}{\lambda} = 2\pi\left(\frac{0,50}{1,00}\right) = \pi = 180^{\circ}$$

Como la diferencia de fase es un múltiplo impar de π la interferencia es destructiva.

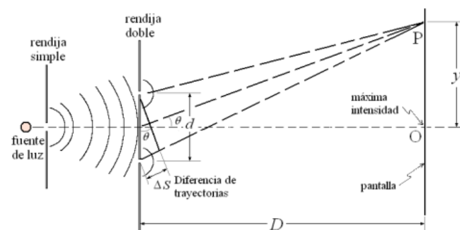
INTERFERENCIA DE RENDIJA DOBLE

El experimento de Young, también denominado experimento de la doble rendija, fue realizado en 1801 por Thomas Young, en un intento de discernir sobre la naturaleza corpuscular u ondulatoria de la luz. Young comprobó un patrón de interferencias en la luz procedente de una fuente lejana al difractarse en el paso por dos rejillas, resultado que contribuyó a la teoría de la naturaleza ondulatoria de la luz.
Posteriormente, la experiencia ha sido considerada fundamental a la hora de demostrar la dualidad onda corpúsculo, una característica de la mecánica cuántica. El experimento también puede realizarse con electrones, átomos o neutrones, produciendo patrones de interferencia similares a los obtenidos cuando se realiza con luz, mostrando, por tanto, el comportamiento dual onda-corpúsculo de la materia.



En esta foto tomada en una cubeta de ondas se ven las interferencias producidas en la superficie del agua por las ondas producidas por dos pulsadores que golpean "armoniosamente" la superficie del agua.
Los círculos oscuros corresponden a valles.
Los círculos claros corresponden a crestas.

Posición angular de las franjas brillantes



La figura muestra el patrón de interferencia producido por una luz de una sola longitud de onda brillando en dos rendijas paralelas separadas una distancia *d*. Debido a que la rendija simple frente a la fuente de luz está a la misma distancia de cada una de las rendijas dobles, las ondas de luz que salen de la rendija doble están en fase.
El punto P en la pantalla está más cerca de la ranura superior que de la inferior, por lo que hay una diferencia en la longitud del camino de las ondas que viajan de cada rendija a P. Si hay una franja brillante en P, la diferencia de camino de los dos rayos es $n\pi$, (n = 0, 1, 2, 3, ...) llamado el orden de la franja. Cada orden de franja corresponde al centro de una franja brillante a una distancia cada vez mayor desde el punto O.
El punto O es equidistante de cada rendija, por lo que las dos ondas que llegan están en fase. El punto O es el centro del patrón de franjas y la intensidad allí es un máximo. La banda central brillante en el punto O (la línea de máxima intensidad) se denomina la franja de orden cero.
La intensidad de un rayo de luz es el flujo de energía por unidad de superficie.
Podemos encontrar la ubicación de las franjas brillantes en términos θ, ángulo entre la línea central y la línea trazada desde el punto medio entre las rendijas a P.
Consideramos

$$\operatorname{sen}\theta \approx \frac{\Delta S}{d}$$

Siendo la diferencia de trayectorias

$$\Delta S = n\lambda$$

Escribimos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{n\lambda}{d}$$

Ejemplo 2. Si la distancia *a* entre las rendijas es 0,02 mm y la longitud de onda de la luz es 500 nm. Cual es el ángulo entre el máximo central y la franja brillante de segundo orden?
Solución. Usando la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{n\lambda}{d}$$

Tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2\left(5{,}00\times10^{-7}\right)}{2{,}00\times10^{-5}} = 0{,}050$$

$$\theta = 2{,}866º$$

Ejemplo 3. El punto P es el centro de la franja de Segundo orden. Determine la diferencia de fase entre las ondas de luz que llegan a P desde la rendija doble.
Solución.
La diferencia de fase para ondas procedentes de una rendija doble es

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta S}{\lambda}.$$

$\Delta S = n\lambda$, para una franja del Segundo orden, n = 2.
Luego

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{2\lambda}{\lambda} = 4\pi \text{ radianes.}$$

La diferencia de fase es múltiplo entero de 2π, tal que la intensidad en P es máxima.

Ejemplo 4. La distancia *D* de rendija doble ala pantalla es 60,00 cm, la separación a de las rendijas es 0,02 mm y la longitud de onda de la fuente de luz es 500 nm. Calcular la distancia *y* desde el punto O a la franja brillante de segundo orden franja brillante en el punto P.
Solución. Use el resultado del ejemplo 26-2

$$\tan\theta = \frac{y}{D} \Rightarrow$$
$$y = D\tan\theta = (60{,}00)\tan 2{,}866^{\circ} = 3{,}00 \text{ cm}$$

Ejemplo 5. Dos rendijas estrechas paralelas están separadas 0,04 mm. La longitud de onda de la luz incide sobre estas dos rendijas es 400 nm. La pantalla en la que se ven las franjas de interferencia está a 60 cm de la doble rendija. Calcular la distancia del máximo central de la franja brillante de tercer orden.
Solución. de la ecuación uso. (26-2) para calcular la posición angular del máximo de tercer orden:
λ = 400 nm = 4,0 x 10^{-7} m
d = 0,04 mm = 0,04 x 10^{-3} m

$$\text{sen}\theta = \frac{n\lambda}{d} = \frac{3(4{,}0\times10^{-7})}{0{,}04\times10^{-3}}0{,}03$$
$$\theta = 1{,}719^{\circ}$$

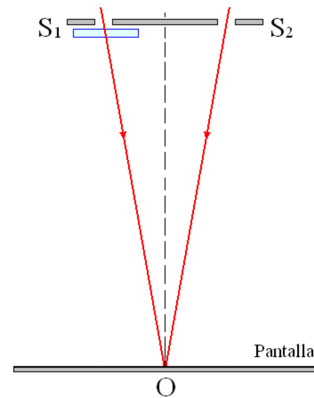
La distancia y del máximo central de la franja brillante de tercer orden.

$$\tan\theta = \frac{y}{D} \Rightarrow y = D\tan\theta = (60\text{ cm})\tan 1{,}719^{\circ}$$
$$= 1{,}80 \text{ cm}$$

Ejemplo 6. Una placa fotográfica se coloca 80 cm de un par de rendijas separadas 0,03 mm. La distancia desde el máximo central a la franja brillante de primer orden (n = 1) es 1,60 cm. Calcular la longitud de onda de la luz que ilumina a la doble rendija.
Solución. En primer lugar, calcular la separación angular del máximo central y la franja brillante en primer lugar:
y = 1,60 cm = 1,60 x 10^{-2} m
D = 80 cm = 0,80 m

$$\tan\theta = \frac{y}{D} = \frac{1{,}60\times10^{-2}}{0{,}80} = 0{,}02$$
$$\theta = 0{,}020 \text{ rad}$$
$$\lambda = \frac{d\,\text{sen}\theta}{n}$$
$$= \frac{(0{,}03\times10^{-3})\text{sen}0{,}02\text{rad}}{1}$$
$$= 6{,}00\times10^{-7} \text{ m}$$

Ejemplo 7. En el experimento de la doble rendija de Young empleando luz de longitud de onda 5,50 x 10^{-7} m, la franja brillante de orden cero del patrón de interferencia está en la posición central en la pantalla de visualización. Cuando se coloca una película delgada de material transparente de índice de refracción 1,45 sobre una de las rendijas, la posición central pasa a estar ocupada por la franja brillante de cuarto orden. ¿Cuál es el espesor de la película insertada?
Solución.



Cuando ambas rendijas están descubiertas, la posición de la franja brillante de orden cero brillantes en la pantalla se encuentra en el punto O equidistante de S_1 y S_2.
En este punto las ondas de S_1 S_2 tienen la misma distancia recorrida, están en fase.
Cuando la rendija S_1 está cubierta por la película transparente de espesor d e índice de refracción n, la luz que atraviesa la película ha recorrido una distancia óptica nd.
La luz de S_2 al atravesar un espesor correspondiente a d del aire ha recorrido una longitud óptica de sólo d (considerando que el índice de refracción del aire es 1). Por lo tanto, una diferencia de camino óptico entre la luz de las dos rendijas es

$$\Delta S = nd - d = d(n-1).$$

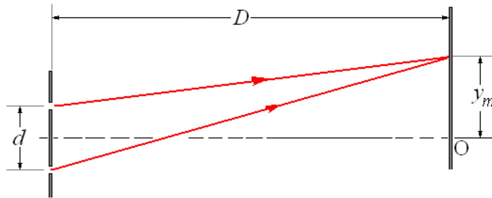
El hecho de que la luz al viajar desde S_1 a O pasa a través de la película hay una ligera desviación que no se toma en cuenta, porque el ángulo es despreciable.
La franja en O es la franja de cuarto orden. Esto significa que la diferencia de camino óptico entre $S_1$0 y $S_2$0 es de 4λ. Por lo tanto d (n - 1) = 4λ o

$$d = \frac{4\lambda}{n-1} = \frac{4(5{,}50\times10^{-7})}{1{,}45-1} = 4{,}89 \times 10^{-6} \text{ m}$$

El espesor de la película insertada es 4,89 x 10^{-6} metros.

Ejemplo 8. Se configura un experimento de Young usando una lámpara de vapor de sodio como fuente de luz y se coloca las rendijas un metro en frente de la pantalla. No se tiene seguridad de la separación entre las rendijas, se varía la separación de estas y se encuentra que el patrón de interferencia es casi nulo si las rendijas están demasiado separadas. Si la resolución angular de su ojo es de 1 minuto de arco, ¿cuál es la separación de las rendijas cuando no se puede ver las franjas de interferencia?

Solución.



La posición de la franja brillante m del sistema de franjas con centro en O está dada por:

$$y_m = m\frac{D}{d}\lambda$$

λ es la longitud de onda usada.

Similarmente para la franja (m + 1)

$$y_{m+1} = (m+1)\frac{D}{d}\lambda$$

La separación de las franjas es

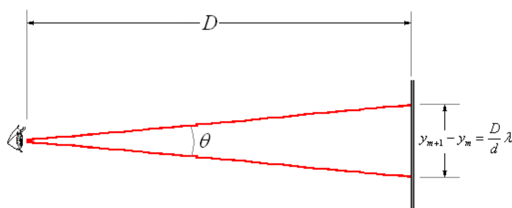
$$y_{m+1} - y_m = (m+1)\frac{D}{d}\lambda - m\frac{D}{d}\lambda$$

$$= \frac{D}{d}\lambda$$

Cantidad independiente de m, constante por todo el sistema de franjas.

El ángulo subtendido por la separación de estas franjas o los ojos del observador es

$$\theta = \frac{\Delta y}{D} = \frac{\frac{D}{d}\lambda}{D} = \frac{\lambda}{d}\ \text{rad}$$



Pero el observador no puede distinguir a menos que el ángulo de las franjas vecinas

Subtiendan a los ojos un arco $\geq$ 1 minuto =

$$\frac{\pi}{180 \times 60} = 2{,}91 \times 10^{-4}\ \text{rad}.$$

$$\theta_{\min} = \frac{\lambda}{d_{máx}} = 2{,}91\,\text{rad}$$

$$d_{máx} = \frac{\lambda}{2{,}91} = \frac{5{,}89 \times 10^{-5}\ \text{cm}}{2{,}91} = 0{,}2025\,\text{cm}$$

Ejemplo 9. En un experimento de Young en el las rendijas están separadas 1mm, se ilumina con una luz que tiene dos longitudes de onda de 567 nm 486 nm.

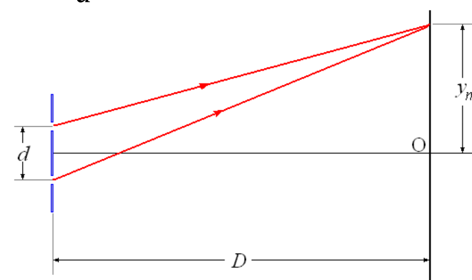
a) ¿A qué distancia de la franja central brillante en una pantalla a 150 cm de las rendijas una franja brillante del patrón de interferencia coincidirá por primera vez con una franja brillante de la otra?

b) Sí en el problema anterior se utiliza una retícula de difracción con 2000 líneas por centímetro en lugar de las rendijas, ¿cuál sería el ángulo de coincidencia de los máximos principales debido a las dos longitudes de onda (la retícula está iluminada normalmente)?

Solución.

a) La distancia de la franja central de la franja brillante m de un sistema de franjas de interferencia producidas por rendijas de Young es

$$y_m = m\lambda\frac{D}{d}.$$



Cada longitud de onda produce su sistema de franjas independientes, los dos sistemas se superponen cuando la franja brillante de orden m debido a la longitud de onda λ coincide con la franja de orden n debido a la longitud de onda λ'.

$$y'_n = n\lambda'\frac{D}{d}$$

$$y_m = y'_n$$

$$m\lambda\frac{D}{d} = n\lambda'\frac{D}{d}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{567\text{nm}}{486\text{nm}} = \frac{7}{6}$$

La primera posición para la cual coinciden es la franja séptima del sistema debido a la longitud de onda 486 nm, o a la sexta franja debido a la onda de longitud 567 nm.

La distancia requerida es

$$y_7 = y'_6 = 7\times 1{,}50\left(\frac{486\times 10^{-9}}{10^{-3}}\right) = 5{,}103 \text{ x } 10^{-3} \text{ m}$$

= 5,103 mm

b) Si d es el espaciado de rejilla, entonces el máximo de orden m debido a la longitud de onda se produce en un ángulo θ determinado por

$$\theta = m\frac{\lambda}{d}$$

Si en el mismo ángulo de la máximo de orden n debido a la longitud de onda λ' se produce, entonces

$$\theta = n\frac{\lambda'}{d}$$

Luego

$$m\frac{\lambda}{d} = n\frac{\lambda'}{d}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{7}{6}$$

La primera, y única coincidencia ocurre para

$$\text{sen}\theta = 7\left(\frac{486\times 10^{-9}}{d}\right)$$

La separación de las líneas es

$$d = \frac{1}{2000} = 0{,}5\times 10^{-3} \text{ cm} \quad = 0{,}5 \text{ x } 10^{-5} \text{ m}$$

$$\text{sen}\theta = 7\left(\frac{486\times 10^{-9}}{0{,}5\times 10^{-5}}\right) = 0{,}680$$

$$\theta = 42{,}87^{\circ}$$

DIFRACCIÓN

La difracción se refiere a la flexión o extensión de las ondas alrededor de los bordes de orificios y obstáculos opacos Esta desviación de la luz de una trayectoria en línea recta da lugar a los patrones de interferencia que hacen borrosos los extremos de las sombras. Esto marca también límites sobre el tamaño y el detalle que se puede observar y limita la precisión de las medidas.

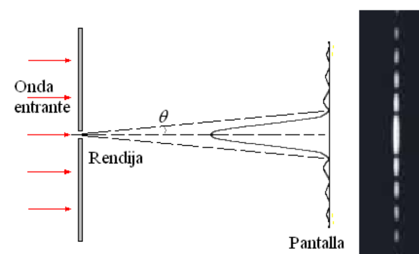
Cuando la luz pasa por aberturas o bordea obstáculos se producen fenómenos que contradicen la propagación rectilínea, estos fenómenos, que aparecen más acentuados a medida que los obstáculos y las aberturas se hacen más pequeños en relación con la longitud de onda de la luz utilizada, constituyen la difracción, y son una consecuencia natural del carácter ondulatorio de la luz. Cuando dichas aberturas se iluminan con una onda plana coherente procedente de un láser, y la pantalla de observación se encuentra suficientemente alejada del objeto difractor, se pueden suponer válidas las aproximaciones de la difracción de Fraunhofer

DIFRACCIÓN DE FRAUNHOFER POR UNA RENDIJA SIMPLE

La **Difracción de Fraunhofer** o también **difracción del campo lejano** es un patrón de difracción de una onda electromagnética cuya fuente (al igual que la pantalla) se encuentran infinitamente alejadas del obstáculo, por lo que sobre éste y sobre la pantalla incidirán ondas planas.

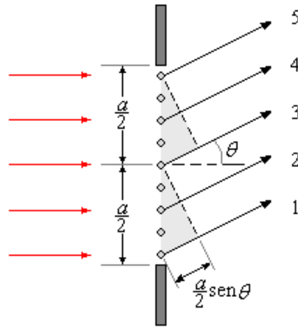
POSICIÓN ANGULAR DE LAS INTENSIDADES MÍNIMAS

Cuando una onda de luz incide sobre una rendija de ancho a, como se muestra en la figura, se produce un patrón de difracción.



Ecuación de la posición de las intensidades mínimas (franjas oscuras).

Examinemos ondas proveniente de diversas partes de la rendija, como se muestra en la figura siguiente que representa la difracción de luz por medio de una rendija estrecha de ancho a. Cada porción de la rendija actúa como una fuente puntual de ondas.



La diferencia de trayectorias entre los rayos 1 y 3 o 2 y 4 o 3 y 5. Si la diferencia de recorridos es exactamente media longitud de onda, las ondas se cancelan entre sí y se produce interferencia destructiva.
Si dividimos la rendija en dos partes

$$\Delta S = \frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta$$

Se presenta el primer mínimo cuando

$$\Delta S = \frac{\lambda}{2}$$

Luego

$$\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Si dividimos la rendija en cuatro partes se presenta el segundo mínimo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2\lambda}{a}$$

Si dividimos la rendija en seis partes se presenta el tercer mínimo

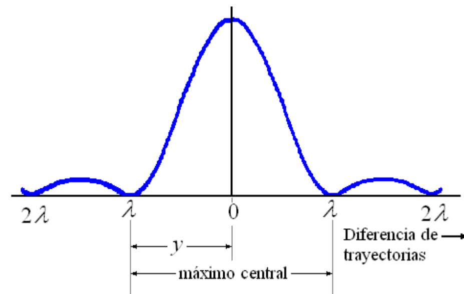
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3\lambda}{a}$$

En general

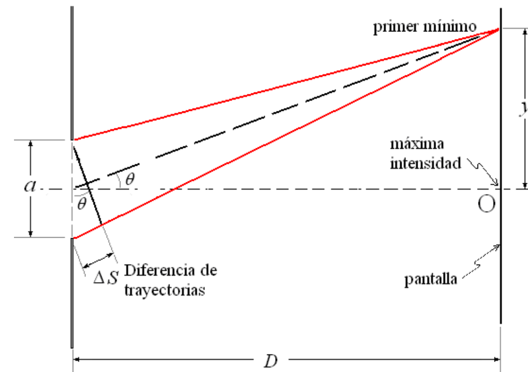
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{n\lambda}{a} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3,\ldots).$$

Los puntos de interferencia constructiva se encuentran aproximadamente a la mitad entre las franjas oscura.

Ejemplo 8, Luz de longitud de onda 600 nm incide sobre una rendija de acho 0,01 n. La pantalla esta a 80,00 cm de la rendija.
Calcular la ancho total del máximo central, como se muestra en la figura.



Solución:



Se puede calcular la separación angular entre el máximo central y el primer mínimo (n = 1) de

$$n\lambda = a\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{n\lambda}{a}$$

n = 1, λ = 600 nm = 6,0 x 10^{-7},
a = 0,01 mm = 1,0 x 10^{-5} m.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{(1)\left(6{,}0\times 10^{-7}\right)}{1{,}0\times 10^{-5}} = 0{,}06$$

$$\theta = 3{,}44^{\circ}$$

La distancia del pico central al primer mínimo

$$y = D\tan\theta = (80{,}00)\tan 3{,}44^{\circ} = 4{,}81 \text{ cm}$$

Máximo central = 2y = 2 x 4,81 = 9,62 cm.

Ejemplo 10. Una rendija simple estrecha de 0,1 mm de ancho se ilumina con una luz de longitud de onda desconocida. El ancho angular del máximo central, medido a partir de las posiciones de intensidad cero en ambos lados, es 9,0 x 10^{-3} radianes. A) a) Calcule la longitud de onda que cae en la rendija simple.
b) Si una pantalla está a 50 cm de la rendija simple. Calcule el ancho total del máximo central de este patrón de difracción.
Solución.
a)

La distancia angular del máximo central para el primer mínimo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{n\lambda}{a},\ n = 1$$

Cálculo de la longitud de onda

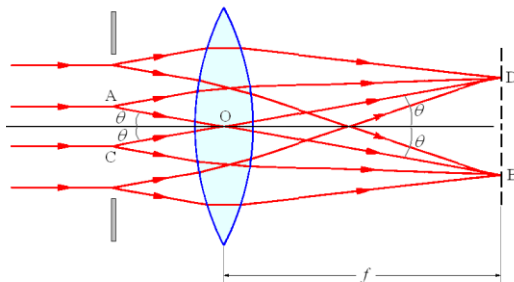
$$\lambda = a\operatorname{sen}\theta = \left(0,1\times 10^{-3}\right)\operatorname{sen}4,5\times 10^{-3}\,\text{rad}$$
$$= 4,50 \text{ x } 10^{-7} \text{ m}$$

b)

$$2y = 2D\tan\theta = 2(50\text{ cm})\left(\tan 9,0\times 10^{-3}\,\text{rad}\right)$$
$$= 0,900 \text{ cm}$$

Ejemplo 11. Una rendija de ancho *a* se coloca delante de una lente de distancia focal 50 cm y se ilumina normalmente con luz de longitud de onda 5,89 x 10^{-5} cm. El primer mínimo de un lado y el del otro lado del máximo central del patrón de difracción observado en el plano focal de la lente están separados por 0,20 cm. ¿Cuál es el valor de *a*?

Solución.



Los rayos difractados en la dirección en la que se produce el primer mínimo sobre el máximo central serán llevados al enfoque en el plano focal de la lente. Del mismo modo para el primer mínimo por debajo del máximo central. Tomemos los rayos típicos AOB y COD de estos dos haces de tal manera que ambos pasan por el centro de la lente y por lo tanto no están desviados. Los ángulos entre los rayos de los dos lados de la lente son por tanto la iguales.

La posición angular de las intensidades mínimas en la difracción de Fraunhofer por una rendija simple esta dada por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{n\lambda}{a}$$

El primer mínimo es para *n* =1, luego

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{a} \quad (1)$$

En el gráfico vemos

$$\tan\theta = \frac{\text{DB}/2}{f} = \frac{\text{DB}}{2f}$$
$$= \frac{0,2\text{ cm}}{2(50\text{ cm})} = 0,002 \Rightarrow$$
$$\theta = 0,11459\text{ rad}$$

Luego

$$\operatorname{sen}\theta = 0,001999 \quad (2)$$

Igualando (1) y (2):

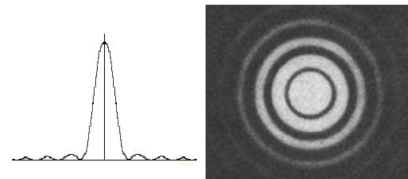
$$\frac{\lambda}{a} = 0,00199 \Rightarrow$$

$$a = \frac{\lambda}{0,001999} = \frac{5,89\times 10^{-5}\text{cm}}{0,001999}$$
$$= 2,9946 \text{ x } 10^{-2} \text{ cm}$$

El ancho de la rendija es 2,995 cm.

DIFRACCIÓN POR UNA ABERTURA CIRCULAR

Para este caso, la representación gráfica de la intensidad en una pantalla aparece en la figura siguiente junto con una fotografía del patrón de difracción.



El círculo central de luz corresponde al orden cero de difracción es conocido como mancha de Airy. El radio angular, es decir, el ángulo θ bajo el cual se ve el radio central desde el objeto difractor, viene dado por la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen}\theta = 1,22\frac{\lambda}{D}$$

D es el diámetro de la abertura.

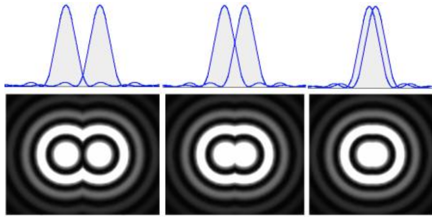
Para el segundo anillo oscuro

$$\operatorname{sen}\theta = 2,23\frac{\lambda}{D}$$

Para el tercer anillo

$$\operatorname{sen}\theta = 3,24\frac{\lambda}{D}$$

LÍMITE DE RESOLUCIÓN

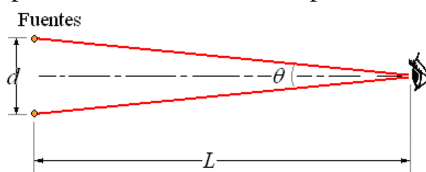


Si dos objetos se observan con un instrumento óptico, los patrones de difracción causados por el orificio del instrumento limitan nuestra capacidad para distinguir objetos separados. Para poder distinguirlos, el ángulo θ formado por el objeto en la abertura, debe ser mayor que el valor crítico θ_c, dado por

$$\operatorname{sen}\theta_c = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Donde D es el diámetro del orificio.
Como regla aproximada, es imposible observar el detalle más pequeño que la longitud de onda de la radiación que se utiliza en la observación.

Ejemplo 12. Dos fuentes luminosas de longitud de onda 5 x 10^{-7} m están separadas 50 cm, como se muestra en la figura. Una persona observa a una distancia *L*. La obturación de entrada (pupila) del ojo del observador tiene un diámetro de 3 mm. Si el ojo fuera perfecto, el factor limitante para la resolución de las dos fuentes sería la difracción. En ese límite, ¿de qué longitud podría ser *L* y todavía poder verse las fuentes separadas?



Solución.
λ = 5 x 10^{-7} m, d = 0,50 m, D = 3 x 10^{-3} m

En el caso límite $\theta = \theta_c$, donde $\theta_c = 1{,}22\frac{\lambda}{L}$.

Como $d \ll L$, se tiene

$$\theta_c \approx \frac{d}{L}$$

Luego

$$\frac{d}{L} = 1{,}22\frac{\lambda}{D} \Rightarrow L = \frac{dD}{1{,}22\lambda}$$

Reemplazando valores

$$L = \frac{(0{,}50)(3\times10^{-3})}{1{,}22(5\times10^{-7})} = 2500 \text{ m}$$

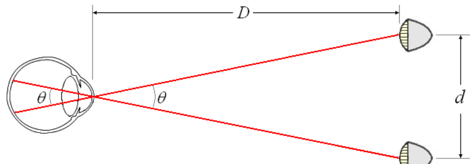
Ejemplo 13. En una historia de detectives un preso fugado que quería vengarse del jefe de la banda que lo inculpó de un asesinato, conduciendo por la noche en un valle cerrado fue volado en una trampa. Uno de los habitantes del valle, que vivía en el otro extremo, a 10 km de la escena de la explosión, dijo que había estado sentado en su terraza y había visto los faros dobles del auto aparecer por la colina en la entrada el valle justo antes de la explosión. El detective muy inteligente sospechó de él era el jefe de la banda. ¿Por qué? ¿Dónde debería de estar la casa para que su declaración fuera convincente?
Datos:
Separación de los faros 1,50 m.
Diámetro de la pupila 3 mm
Longitud de onda de la luz emitida por los faros 5000 $\mathring{A}$



Solución.
El diafragma del ojo limita la cantidad de frente de onda de los objetos iluminados que pueden entrar en el ojo y caer en la retina para formar una imagen. La imagen es el patrón de difracción producido por la abertura circular, y en lugar de ver la imagen puntual de un objeto puntual, observamos un sistema de franjas.
La capacidad del ojo para resolver dos objetos puntuales cercanos es muy limitada.
La aplicación de criterios de Raleigh de resolución para el caso de la difracción en una abertura circular, dos objetos puntuales no son distinguibles a menos que subtienden en el ojo un ángulo mayor que (1,22 λ/ a) rad, donde λ es la longitud de onda de la luz y a es el diámetro de la pupila del ojo.
Aplicar esto al problema.
Los faros de un coche están separados por una distancia no mayor de 1,5 m.
El testigo vio el coche a una distancia de 10 km.

El ángulo subtendido por los faros de sus ojos es lo máximo

$\theta = \frac{1,50}{10000}$ = 1,5 x 10^{-4} rad



Longitud de onda media de la luz emitida por los faros
5 x 10^{-7} m en la que el ojo humano es más sensible.
Diámetro de la pupila 3 mm = 3 x 10^{-3} m
Resolución angular máxima del ojo es

$\theta_{máx} = 1,22\left(\frac{5\times10^{-7}}{3\times10^{-3}}\right)$ = 2,03 x 10^{-4} rad

La cifra que normalmente se cita es en 3,0 x 10^{-4}, un poco más alta que esta.
El testigo afirma haber visto los dos objetos separados con un ángulo inferior a la máxima resolución del ojo humano
1,5 x 10^{-4} rad < 2,03 x 10^{-4} rad
Luego el testigo esta mintiendo y no habría ninguna razón para hacer esto a menos que tuviera algo que ocultar.
Para hacer su convincente historia, el testigo tendría que vivir más cerca del final del valle, a una distancia no mayor que *D*, donde

$\frac{d}{D} = \frac{1,50}{D} = 2,03\times10^{-4} \Rightarrow D = \frac{1,50}{2,03\times10^{-4}}$ =
7389 m = 7,389 km

RETÍCULA DE DIFRACCIÓN.



Una retícula de difracción es una serie de rendijas equidistantes sobre una lámina de vidrio o una placa de metal. Por lo general el trazando de líneas muy finas en la placa se realiza con una punta de diamante. Las rejillas de difracción a menudo tienen cerca de 10000 líneas por centímetro.
Cuando la luz blanca ordinaria (todas las longitudes de onda) incide sobre una rejilla de difracción se produce un patrón de interferencia similar al que una sola longitud de onda produce cuando incide sobre una doble rendija.

La ecuación $\operatorname{sen}\theta = \frac{n\lambda}{d}$ que da las posiciones angulares de las franjas brillantes producidas por 1a luz monocromática al incidir sobre una rendija doble también da las posiciones angulares de las franjas producidas por una rejilla de difracción.
Pero cada franja brillante producida por la luz blanca brillante sobre una rejilla de difracción es un modelo del arco iris o espectro.
Como las retículas de difracción separan a la luz en sus longitudes de onda componentes, se puede utilizar para determinar las longitudes de onda que produce una fuente de luz.

Resolución de la retícula de la retícula de difracción.
Es igual a *nN*, donde *N* es el número total de líneas en la retícula.

$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN \Rightarrow N = \frac{\lambda}{n\Delta\lambda}$

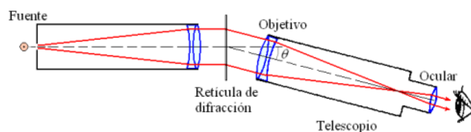
$\Delta\lambda$ es la menor separación posible de ver con la retícula de difracción.

RETÍCULAS DE DIFRACCIÓN Y ESPECTROSCOPIOS



Es un instrumento adecuado para descomponer la luz en su espectro, por medio de un retículo de difracción o de un prisma. Antes el análisis con el espectroscopio, esto se hacía a simple vista, pero con la invención de la fotografía los espectros se captan sobre una emulsión fotográfica.
La dispersión se puede realizar por refracción (espectroscopio de prisma) o por difracción (espectroscopio de red).
El espectroscopio de prisma está formado por una rendija por la que penetra la luz, un conjunto de lentes, un prisma y una lente ocular. La luz que va

a ser analizada pasa primero por una lente colimadora, que produce un haz de luz estrecho y paralelo, y después por el prisma, que separa este haz en las distintas radiaciones monocromáticas (colores) que lo componen. Con la lente ocular se enfoca la imagen de la rendija. Las líneas espectrales que constituyen el espectro no son en realidad sino una serie de imágenes de la rendija.
El espectroscopio de red dispersa la luz utilizando una red de difracción en lugar de un prisma. Una red de difracción es una superficie especular de metal o vidrio sobre la que se han dibujado con un diamante muchas líneas paralelas muy finas. Tiene mayor poder de dispersión que un prisma, por lo que permite una observación más detallada de los espectros



Ejemplo 14. Una fuente de luz que contiene mercurio produce una radiación verde con una longitud de onda 546,1 nm. Las líneas de la rejilla tienen un espaciamiento de 1,667 x 10^{-3} mm.
a) calcular el ángulo de difracción de segundo orden para esta longitud de onda.
b) La fuente de luz de mercurio produce también una radiación azul con una longitud de onda de 435,8 nm. Calcular el ángulo de difracción de segundo orden para esta longitud de onda.
Solución.
a) Usando la ecuación.

$$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{n\lambda}{d} = \frac{2\left(5{,}461\times10^{-7}\right)}{1{,}667\times10^{-6}} = 0{,}665$$

$$\theta_1 = 40{,}9^{\circ}$$

b)

$$\text{sen}\,\theta_2 = \frac{n\lambda}{a} = \frac{2\left(4{,}358\times10^{-7}\right)}{1{,}667\times10^{-6}} = 0{,}523$$

$$\theta_2 = 31{,}5^{\circ}$$

Ejemplo 15. El espectro de una fuente de luz esta compuesta por líneas y bandas de longitudes de onda de 5,0 x 10^{-5} cm a 7,5 x 10^{-5} cm. Cuando una rejilla de difracción se ilumina normalmente con esta luz se forman dos espectros adyacentes que se solapan, la unión de los dos espectros que ocurre a un ángulo de 45 °. ¿Cuántas líneas por centímetro tiene la retícula?
Solution.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{n\lambda}{d}$$

Al ángulo de 45º
Con λ = 7,5 x 10^{-5} cm

$$\text{sen}\,45^{\circ} = \frac{n\left(7{,}5\times10^{-5}\,\text{cm}\right)}{d} \qquad (1)$$

Con λ = 5,0 x 10^{-5} cm

$$\text{sen}\,45^{\circ} = \frac{(n+1)\left(5{,}0\times10^{-5}\,\text{cm}\right)}{d} \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1):

$$\frac{(n+1)}{n} = \frac{7{,}5\times10^{-5}}{5{,}0\times10^{-5}} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$n = 2$
El segundo orden se solapa con el tercer orden
La separación de las rejillas es

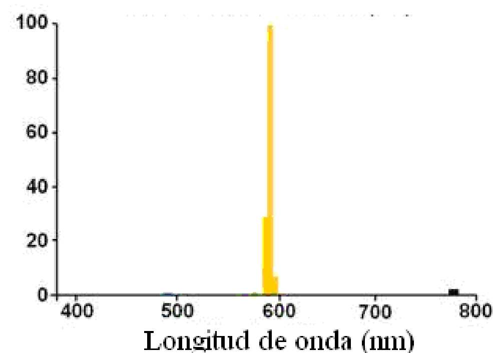
$$d = \frac{2\left(7{,}5\times10^{-5}\,\text{cm}\right)}{\text{sen}\,45^{\circ}} = 2{,}121 \times 10^{-4}\ \text{cm}$$

El número de líneas por centímetro es 1/d

$$\text{Número de líneas} = \frac{1}{d} = \frac{1}{2{,}121\times10^{-4}}$$

= 4714 por cm.

Ejemplo 16. La luz amarilla de sodio, consiste en dos longitudes de onda 5980 $\mathring{A}$ y 5986 $\mathring{A}$, incide normalmente sobre una rejilla de difracción de 1500 líneas por centímetro.
a) ¿Cuál es la separación angular de las dos líneas observadas en el espectro de primer orden?
b) ¿En qué condiciones van a ser vistas como separadas?



Solución.
a) La fórmula de rejilla, en la notación habitual, es

$$\text{sen}\,\theta = \frac{n}{d}\lambda$$

Derivando

$$\cos\theta\, d\theta = \frac{n}{d} d\lambda$$

$$d\theta = \frac{n}{d\cos\theta} d\lambda$$

$$\Delta\theta = \frac{n}{d\cos\theta}\Delta\lambda$$

n = 1 espectro de primer orden.
d = 1/150000 separación de las rejillas

$\lambda_m = \dfrac{5986+5980}{2}$ = 5983 x 10_{-10} m, longitud de onda promedio

$$\cos\theta = \sqrt{1-\text{sen}^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{n}{d}\lambda_m\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\left[\frac{1}{1//150000}\left(5893\times 10^{-10}\text{m}\right)\right]^2}$$

= 0,996

$\Delta\lambda$ = 5986 x 10^{-10} - 5980 x 10^{-10} = 6 x 10^{-10} m

$\Delta\theta = \dfrac{1\times 150000}{0,996}\left(6\times 10^{-10}\right)$ = 9,036 x 10^{-5} rad

b) La resolución de la retícula de la retícula de difracción es igual a nN, donde N es el número total de líneas en la retícula.

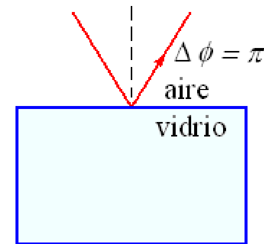
$$\frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} = nN \Rightarrow N = \frac{\lambda_m}{n\Delta\lambda}$$

$N = \dfrac{5893\times 10^{-10}\text{ cm}}{1\left(6\times 10^{-10}\text{ cm}\right)}$ = 982 líneas

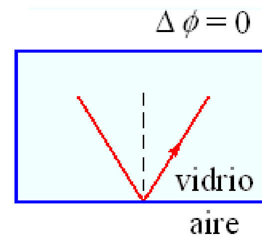
Siempre y cuando la rejilla de difracción sea lo suficientemente amplia para contener 982 líneas, las líneas amarillas del sodio tendrán resolución suficiente en el primer orden.

CAMBIO DE FASE EN LA REFLEXIÓN

Cuando la luz viaja en el aire e incide sobre la superficie del vidrio, la onda reflejada sufre un cambio de fase de 180 °.



Cuando la luz viaja en el vidrio y es reflejada en la interfase entre el vidrio y el aire, no hay cambio de fase.



Un cambio de fase de 180º se produce cuando las ondas de luz se reflejan de un medio que tiene un índice de refracción más alto que el índice del medio en el que la
las ondas esta viajando.

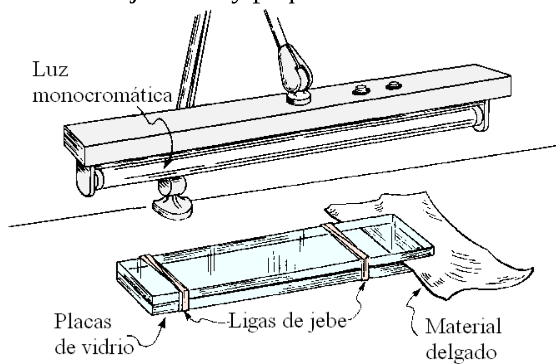
LA CUÑA DE AIRE

Cuando dos vidrios planos se ponen en contacto en uno de sus bordes, formando una cuña delgada de aire, como se muestra en la figura. Y esta iluminada por una fuente de luz monocromática, un observador verá franjas de interferencia.
Debido a la longitud del camino aumenta gradualmente desde la línea de contacto, el observador ve una serie de bandas alternativamente claras y oscuras.
Espesor de una cuña de aire
El área donde las dos láminas están en contacto aparece oscura porque la luz reflejada de la superficie inferior esta desfasada 180º con la luz reflejada de la superficie superior. Cuando la separación de las dos superficies es un cuarto de la longitud de onda de la luz, las dos ondas de luz reflejadas están en fase, dando lugar a una banda brillante. Habrá otra región oscura donde el espesor de la cuña de aire es la mitad de la longitud de onda de la luz incidente. El espesor t de la cuña de aire en cada banda oscura es

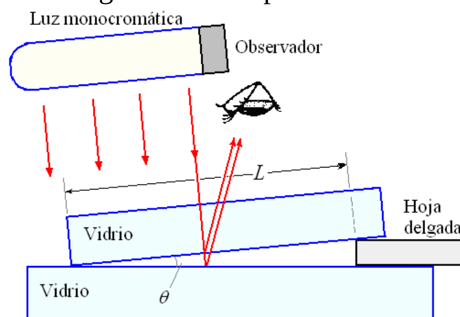
$$e = \frac{m\lambda}{2}$$

m es un entero que indica el número de bandas oscuras a la línea de contacto.

Podemos utilizar cuñas de aire para medir el grosor de objetos muy pequeños.



Ejemplo 17. Una hoja delgada se coloca entre dos placas de vidrio como se muestra en la figura, Una luz de longitud de onda 5,5 x 10^{-7} m ilumina las placas**.** Cuando se mira hacia las placas, se ve 25 franjas oscuras.
a) ¿Cuál es el espesor de la hoja?
b) Si la distancia L a lo largo de placa superior desde la línea a la franja oscura 25 es 4,00 cm. ¿Cuál es el ángulo entre las placas?



Solución. Usando $e = \frac{m\lambda}{2}$, con m = 24, porque la banda oscura en contacto es m = 0.
Tenemos

$$e = \frac{24\left(5,5\times10^{-7}\right)}{2} = 6,60 \text{ x } 10^{-6} \text{ m.}$$

b) Por trigonometría

$$\text{sen}\,\theta = \frac{e}{L} = \frac{6,60\times10^{-6}}{4,00\times10^{-2}} = 1,65\times10^{-4}$$

$$\theta = 0,00945^{\text{o}}$$

Ejemplo 18. Dos vidrios planos tienen uno de sus bordes en contacto y un poco separados en el otro extremo. Las franjas oscuras paralelas están separadas 2 mm. La longitud de onda de la luz que produce las franjas es 540 nm.
a) Calcular el ángulo entre los dos vidrios.
b) Si las dos placas están separadas por un pedazo de papel cuyo borde está a 3,4 cm del contacto entre las dos placas, calcule el espesor del papel.
Solución
a) Como las franjas están separadas 2 mm, la distancia de la línea de contacto a la primera franja es 2 mm. Así se puede encontrar el espesor de la cuña en la franja por primera vez usando la ecuación $e = \frac{m\lambda}{2}$ para m = 1.

$$e = \frac{m\lambda}{2} = \frac{1\left(5,40\times10^{-7}\right)}{2} = 2,70 \text{ x } 10^{-7} \text{ m.}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{e}{L} = \frac{2,70\times10^{-7}}{2,00\times10^{-3}} = 1,35 \text{ x } 10^{-4}$$

$$\theta = 0,00773^{\text{o}}$$

b) Con $\text{sen}\,\theta = \frac{e}{L} \Rightarrow$

$$e = L\,\text{sen}\,\theta = (3,4\text{cm})\left(1,35\times10^{-4}\right) = 4,59 \text{ x } 10^{-4} \text{cm}$$

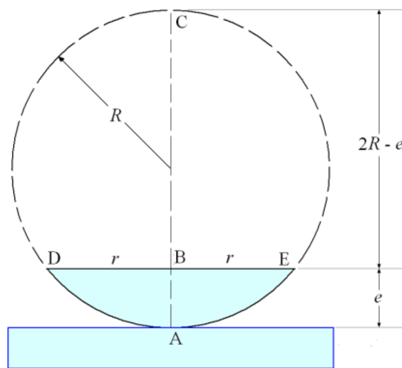
ANILLOS DE NEWTON
Cuando una lente plano-convexa con su superficie convexa sobre una lámina de vidrio plano, se forma una capa de aire entre la lente y la lámina de espesor que aumenta gradualmente hacia el exterior. El espesor de la película en el punto de contacto es cero. Si se hace incidir normalmente en la lente luz monocromática, se ven en la luz reflejada anillos concéntricos claros y oscuros alternadamente alrededor del punto de contacto. Estos anillos fueron descubiertos por primera vez por Newton, por eso se llaman anillos de Newton.



Después de la refracción y reflexión se tienen los rayos 1 y 2.
Los anillos de Newton se forman debido a la interferencia entre las ondas de luz reflejadas de la superficie superior y la inferir de la cuña de aire formada entre la lente y el vidrio plano.

Explicación.
El fenómeno de la formación de los anillos de Newton se explica con la teoría ondulatoria de la luz.
Se forma una película de aire de espesor variable entre la lente y la lámina de vidrio.
Cuando un rayo de luz incide sobre la superficie superior de la lente, se refleja y refracta.
Cuando el rayo refractado incide sobre la hoja de vidrio, se produce un cambio de fase de 180 º en la reflexión.
La interferencia es constructiva si la diferencia de camino entre ellos es $(m + 1/2)\lambda$.
La interferencia es destructiva si la diferencia de caminos entre ellos es $m\lambda$.
De esta manera se producen alternadamente anillos claros y oscuros.

Radios de los anillos



Sea el radio de curvatura de la lente convexa R y el radio del anillo es r.
La longitud de la onda incidente λ.
Estos rayos interfieren entre sí produciendo anillos alternos brillantes y oscuros.
En el punto de contacto con el espesor de la película de aire es cero y la diferencia de caminos es también es cero, la diferencia de camino es π se produce, por lo que se anulan entre sí y se tiene en el centro un anillo oscuro.
A medida que nos alejamos del punto central, cambia la diferencia de caminos y se obtienen anillos claros y oscuros alternadamente.
Sea e el espesor de la capa.
Utilizando la geometría tenemos

$$\overline{BD}\times\overline{BE} = \overline{AB}\times\overline{BC}$$

$$r \times r = e(2R - e)$$

$$r^2 = 2Re - e^2$$

$$R >> e$$

$$r^2 \approx 2Re \quad (1)$$

En películas delgadas, la diferencia de caminos para interferencia constructiva es

$$2ne = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$e = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n}$$

Donde n es el índice de refracción.
Para el anillo brillante 1
$m = 0$.
Para el anillo brillante 2
$m = 1$.
Para el anillo brillante 3
$m = 2$.
…………..
…………..
Para el anillo brillante N
m = N -1

$$e = \left(\text{N} - 1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n}$$

$$= \left(\text{N} - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1).

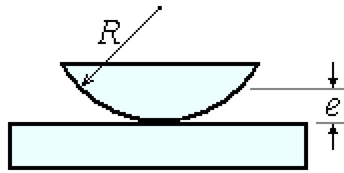
$$r^2 = R\left(\text{N} - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n}$$

Esta es expresión nos da el radio del anillo brillante N
N = número de anillo
R = radio de curvatura de la lente
λ = Longitud de onda de la luz
n = índice de refracción de la película

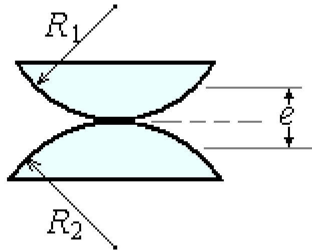
Para cuña de aire $n = 1$.

Aplicación. Control de superficies ópticas

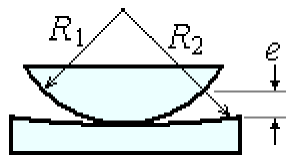
También se observan patrones de interferencia con otras combinaciones de superficies.
Por ejemplo
1- Una superficie esférica y una plana.



2- Dos superficies esféricas convexas enfrentadas.



3- Una superficie convexa y una cóncava.



En cada caso se altera la expresión para los radios de los máximos y mínimos.

Ejemplo 19. El diámetro del décimo anillo brillante al alcance visto por reflexión en un aparato de Newton cambia de 1,50 cm a 1,32 cm cuando se introduce líquido entre la lente y la placa. La lente está en contacto con la placa en el centro.
a) ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?
b) Si los diámetros tienen una precisión de ± 0,1 mm, ¿cuál es la precisión del resultado?
Solución.
El radio del anillo brillante N está dado por

$$r^2 = R\left(\text{N} - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n}$$

N = número de anillo
R = radio de curvatura de la lente
λ = Longitud de onda de la luz
n = índice de refracción de la película

El décimo anillo con aire (n_1 =1).

$$r_{10-1}^2 = R\left(10 - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n_1} \quad (1)$$

$$1{,}50^2 = 9{,}5R\lambda$$

El décimo anillo con líquido (n_2).

$$r_{10-2}^2 = R\left(10 - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n_2}$$

$$1{,}32^2 = 9{,}5R\frac{\lambda}{n_2} \quad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{1{,}50^2}{1{,}32^2} = \frac{9{,}5R\lambda}{9{,}5R\dfrac{\lambda}{n_2}}$$

$$n_2 = \frac{1{,}50^2}{1{,}32^2} = 1{,}29$$

El índice de refracción del líquido es 1,29.
b)
Sea x = 1,50 cm, Δx = ± 0,1 cm
Error relativo de x^2

$$\frac{\Delta x^2}{x^2} = 2\frac{\Delta x}{x} = 2\frac{0{,}01}{1{,}50} = 0{,}006$$

También
y = 1,32 cm, Δy = ± 0,1 cm
Error relativo de y^2

$$\frac{\Delta y^2}{y^2} = 2\frac{\Delta y}{y} = 2\frac{0{,}01}{1{,}32} = 0{,}0075$$

El índice de refracción es el cociente

$$z = \frac{x^2}{y^2} = 1{,}29$$

Su error relativo

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x^2}{x^2} + \frac{\Delta y^2}{y^2}$$
$$= 0{,}01333 + 0{,}1515 = 0{,}02848$$

Error absoluto

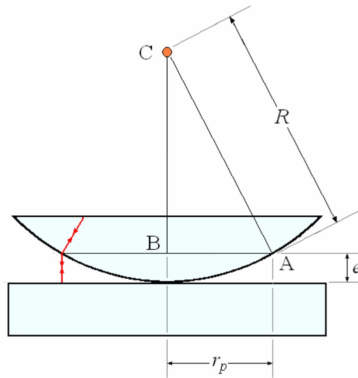
$$\Delta z = z\left(\frac{\Delta z}{z}\right) = 1{,}29(0{,}02848) = 0{,}367$$

La precisión del resultado es ± 0,04.

Ejemplo 20. Demostrar que en un experimento de los anillos de Newton en el que el patrón de de franjas se ve con luz reflejada que incide normalmente a la superficie del plano se cumple $r_p^2 - r_q^2 = R(p-q)\lambda$.
Donde λ es la longitud de onda de la luz usada,
R es el radio de curvatura de la cara inferior de la lente, y
r_p y r_q son los radios de los anillos de ordenes p y q del sistema.

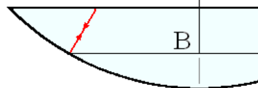


Solución.

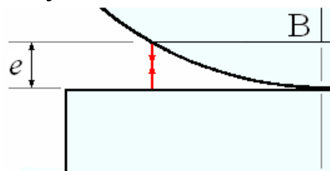


La interferencia se produce entre los rayos reflejados en la cara inferior de la lente y los reflejados de la superficie plana.

No hay cambio de fase en la reflexión en la superficie en la parte inferior de la lente, que es de un medio más denso a un medio menos denso



En la superficie plana (aire – vidrio) hay un cambio de fase de π, equivalente a un incremento de $\lambda/2$ en la trayectoria.



En general las dos superficies no están en contacto y la diferencia de camino entre los haces que se interfieren es

$$\Delta S = 2t + \frac{\lambda}{2}$$

Por otra parte $\Delta S = p\lambda$ para la franja de orden p.

Luego, para la franja de orden p.

$$p\lambda = 2e + \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Para encontrar t en función de R y r_p.

Del gráfico

$CA^2 = CB^2 + BA^2$

Como $CA = R$ y $CB = R - e$

Se tiene

$R^2 = (R - e)^2 + BA^2$

$\Rightarrow BA^2 = 2Re' - e'^2$.

Siendo e muy pequeño e^2 es ignorable en comparación con $2Re$.

Por consiguiente

$BA^2 = 2Re$.

Si BA es el radio de la franja de interferencia, r_p

$$r_p^2 = 2Re \Rightarrow e = \frac{r_p^2}{2R} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$p\lambda = 2\left(\frac{r_p^2}{2R}\right) + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$r_p^2 = R\left(p - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (3)$$

Similarmente para la franja de orden q.

$$r_q^2 = R\left(q - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (4)$$

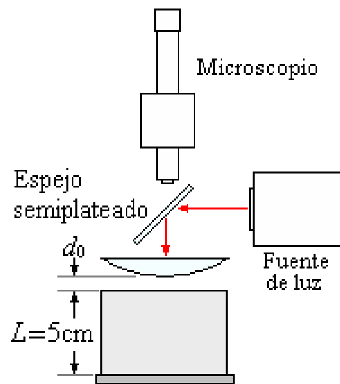
Restando (4) de (3):

$$r_p^2 - r_q^2 = R\left(p - \frac{1}{2}\right)\lambda - R\left(q - \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow$$

$$r_p^2 - r_q^2 = R(p - q)\lambda$$

Siempre es conveniente utilizar esta fórmula, ya que uno nunca puede garantizar que la lente y la placa están en contacto. Sólo tiene que medir las diferencias de orden entre dos anillos y no tratar de encontrar el orden absoluto de un anillo en particular.

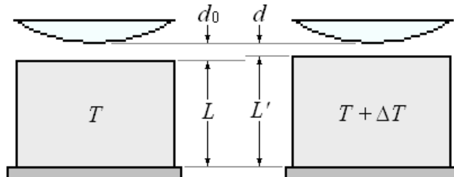
Ejemplo 21. Una lente delgada de gran distancia focal está sujeta horizontalmente a una corta distancia (d_0) del extremo plano pulido de un cilindro de acero. El cilindro tiene 5 cm de altura y su extremo inferior se mantiene fijo. Se producen anillos de Newton entre la lente y el extremo superior del cilindro, utilizando luz incidente normalmente de longitud de onda 6000 Á, visto desde arriba por medio de un microscopio. Cuando la temperatura del cilindro se eleva 25º C, pasan por el retículo del microscopio 50 anillos. ¿Cuál es el coeficiente de expansión lineal del acero?



Solución.
Inicialmente el cilindro tiene una longitud L, y hay un espacio d_0 entre la parte superior del cilindro y la superficie inferior de la lente en la porción de la cuña de aire visto en el microscopio en la misma posición que los alambres cruzados. Se forman anillos de Newton en la cuña de aire.
Para que haya una franja brillante en el cruce de cables se debe cumplir

$$2d_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (1)$$

n es un entero desconocido.



Después de calentar al cilindro a través de una diferencia de temperatura ΔT
La longitud del cilindro es
$L' = L(1 + \alpha \Delta T)$
α es el coeficiente de dilatación lineal de acero
La separación se ha reducido a
$d = d_0 - L\alpha \Delta T \rightarrow d_0 - d = L\alpha \Delta T$.

Si una franja brillante se ve de nuevo en la posición de la retícula,

Entonces, $2d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (2)$

m es un número entero.
Restando (2) de (1):

$$2d_0 - 2d = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda - \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow$$

$$2(d_0 - d) = (n - m)\lambda \Rightarrow L\alpha\Delta T = (n - m)\lambda \Rightarrow$$

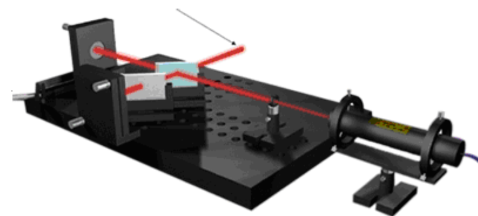
$$\alpha = \frac{(n - m)\lambda}{2L\Delta T}$$

Durante el proceso de calentamiento, $(n - m)$ franjas brillantes deben haber pasado sobre el alambre cruzado. Por lo tanto.

$$\alpha = \frac{(n - m)\lambda}{2L\Delta T} = \frac{(50\text{cm})(6\times 10^{-5}\text{cm})}{2(5\text{ cm})(25^\circ\text{ C})}$$

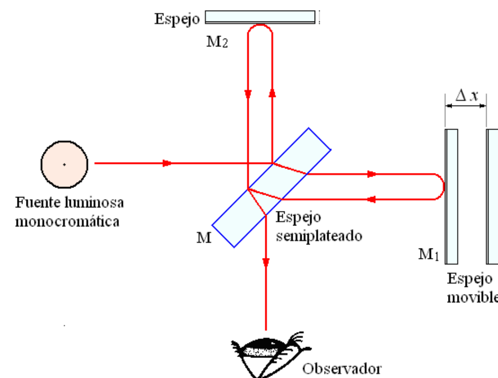
$= 1,2 \times 10^{-5}\ ^\circ$ C

EL INTERFERÓMETRO DE MICHELSON



El interferómetro de Michelson es un dispositivo que utiliza la interferencia de la luz para medir distancias, o los cambios de distancias, con gran precisión.

Longitud de onda de la luz visto con un interferómetro de michelson



La segunda superficie de la placa de vidrio M semiplateada para que el 50% de la luz se refleje y el 50% se transmita. Los dos haces de luz vuelven al ojo del observador por los espejos M_1 y M_2. Cuando M_1 se mueve una distancia Δx, la diferencia de camino entre las dos haces de luz es de $2\Delta x$. Sí n representa el número de franjas que el observador ve cuando el espejo móvil se desplaza una distancia Δx, entonces la longitud de onda de la luz emitida por la fuente se puede calcular de la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{2\Delta x}{n}$$

EJEMPLO 22. Cuando el espejo movible en un interferómetro de Michelson se mueve una distancia de 0,25 mm, se ve un corrimiento de 800 franjas. Calcular la longitud de onda de la luz.
Solución.
Aplicando la ecuación

$$\lambda = \frac{2\Delta x}{n} = \frac{2\left(2,5\times 10^{-4}\right)}{800} = 6,25 \text{ x } 10^{-7} \text{ m}$$

Ejemplo 23. El interferómetro de Michelson se ilumina con luz de longitud de onda 546 nm. Cuando el espejo se mueve una pequeña distancia se observa un cambio de 120 franjas.
Calcular la distancia que el espejo se ha movido.
Solución.
La distancia que el espejo se mueve es

$$\Delta x = \frac{n\lambda}{2} = \frac{(120)\left(5,46\times 10^{-7}\right)}{2}$$

$= 3,28 \text{ x } 10^{-7}$ m
El espejo se mueve 0,0328 mm.

Ejemplo 24. Cuando el espejo móvil de un interferómetro de Michelson se desplaza una distancia de 0,2 mm, se ve un corrimiento de 625 franjas. Calcule la longitud de onda de la luz que se utiliza.
Solución. Usando

$$\lambda = \frac{2\Delta x}{n}$$

Tenemos

$$\lambda = \frac{2\left(2\times 10^{-4}\right)}{625} = 6,4 \text{ x } 10^{-7} \text{ m.}$$

Ejemplo 25. Cuando el espejo móvil de un interferómetro de Michelson se desplaza una distancia pequeña, se ve un corrimiento de 280 franjas. Si la longitud de onda es 500 nm, ¿qué distancia se desplaza el espejo?
Solución. Usando

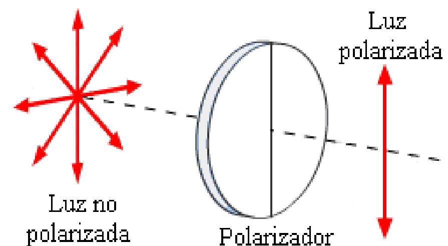
$$\lambda = \frac{2\Delta x}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{n\lambda}{2}$$

Tenemos

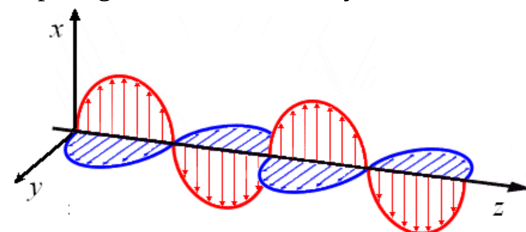
$$\Delta x = \frac{280\left(5\times 10^{-7}\right)}{2} = 0,070 \text{ x } 10^{-3} \text{ m} = 0,070 \text{ mm.}$$

POLARIZACIÓN DE LA LUZ.

La luz es una onda transversal, tal que las oscilaciones de la luz son perpendiculares a la dirección de propagación. La mayoría de las fuentes de luz producen luz sin polarizar. Esto significa que el campo eléctrico vibra en direcciones al azar, aunque siempre perpendiculares a la dirección de propagación.



En un haz de luz polarizada, el campo eléctrico vibra en una sola dirección.
La figura siguiente muestra una onda electromagnética plana polarizada linealmente que avanza en la dirección z.
El campo eléctrico está en la dirección *x*.
El campo magnético está en la dirección *y*.



POLARIZACIÓN POR MEDIO DE POLARIZADOR.

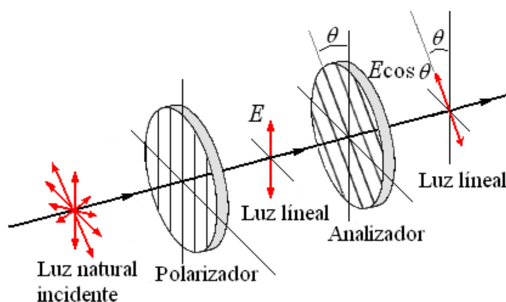


Polarizador o filtro polarizador es un material con transmitancia selectiva a una determinada dirección de oscilación del campo eléctrico de una onda electromagnética como la luz. Cuando un haz de luz no polarizada atraviesa dicho material, la luz transmitida queda polarizada. Un filtro polarizador puede disminuir la intensidad

luminosa de un haz de luz polarizado e incluso bloquear su paso. La magnitud de dicha reducción depende, en un filtro polarizador lineal, de la inclinación respectiva entre el plano de polarización del haz de luz y el plano polarizador del filtro según la ley de Malus.

Ley de Malus
La luz se encuentra caracterizada por dos campos vectoriales ortogonales entres sí: el campo eléctrico $\vec{E}$ y el magnético $\vec{B}$, y que a su vez se propaga en dirección ortogonal al plano formado por estos dos. Las ondas transversales pueden clasificarse sobre la base de las características del campo eléctrico que las describen. Decimos que la onda está polarizada si el campo eléctrico vibra en forma predecible, no aleatoria, a lo largo del tiempo, ya sea siempre en una dirección fija a lo largo de una línea (polarización lineal) o rotando a una frecuencia determinada alrededor de la dirección de propagación (polarización elíptica). Cabe aclarar que existe un caso particular de esta última, llamado polarización circular. En contraposición a la luz polarizada, la luz natural proviene de un gran número de emisores atómicos orientados al azar, por lo que constantemente se emiten nuevos trenes de onda y varía el estado de polarización de la onda resultante, siendo imposible determinar un estado de polarización.

La figura muestra una onda de luz incide sobre un polarizador con el eje en posición vertical, sólo se transmite el campo eléctrico en esa dirección y la luz queda linealmente polarizada.



Cuando se coloca un segundo polarizador, llamado analizador, cuyo eje de transmisión posee cierto ángulo θ con respecto al primero, la luz linealmente polarizada transmitida por el primer polarizador puede descomponerse en dos componentes: una paralela y otra perpendicular a la dirección de transmisión del analizador. Como resultado, sólo la componente paralela, de amplitud igual a $E\cos\theta$, será transmitida por el analizador.
La luz transmitida será máxima cuando θ = 0º, es decir cuando ambos ejes de transmisión sean paralelos, y nula para θ = 90º, ángulo para el cual dichos ejes se encuentran perpendiculares entre sí. Para ángulos intermedios, como la intensidad de la luz es proporcional al cuadrado de la amplitud $\vec{E}$, se obtiene la siguiente relación
$I = I_0 \cos^2\theta$
I_0 es la intensidad de la luz incidente
I, la intensidad de la luz transmitida
θ el ángulo formado por las direcciones de transmisión del polarizador y del analizador.

Esta relación es conocida como Ley de Malus y pone en evidencia la relación lineal existente entre la intensidad de luz transmitida y el coseno cuadrado del ángulo θ.

Ejemplo 26. Un haz de luz pasa a través de do polarizadores cuyos ejes de transmisión forman un ángulo de 70º entre sí. La intensidad de la luz detectada es $I_{70º}$. sí se cambia al ángulo a 45º, encontrar el valor de la intensidad.
Solución.
De acuerdo con la le de Malus, el máximo de la intensidad I_0 ocurre cuando los ejes son paralelos. Pero cuando forman un ángulo de 70º entre sí.

$$I_{70º} = I_0 \cos 70º = 0{,}117 I_0 \Rightarrow I_0 = \frac{1}{0{,}117} I_{70º}$$

Mientras que a 45º

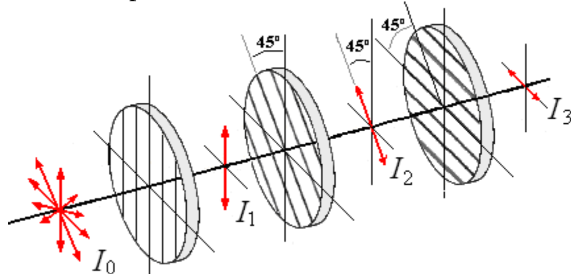
$$I_{45º} = I_0 \cos 45º = 0{,}5 I_0$$

Reemplazando I_0:

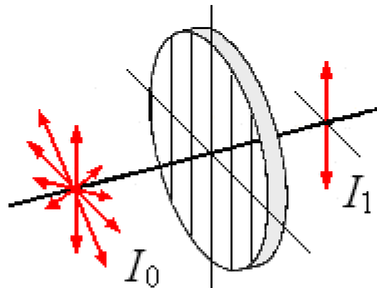
$$I_{45º} = 0{,}5\left(\frac{1}{0{,}117} I_{70º}\right)$$
$$= 4{,}27 I_{70º}$$

Ejemplo 27. Una hoja polarizadora (polaroid) no es un polarizador perfecto. Cuando la luz polarizada cae en ella, transmite una fracción importante α de la intensidad incidente cuando el eje vibración de la luz es paralelo a su eje de

transmisión; pero transmite una pequeña fracción β de la intensidad incidente cuando los dos ejes son perpendiculares entre sí.
Supongamos que tres hojas de Polaroid están dispuestas axialmente, la primera y la última cruzada y la del medio girada 45 º con respecto a las otras dos.
¿Qué fracción de la intensidad luminosa de un haz inicialmente no polarizado pasa a través del sistema?
Solución.
La figura a continuación muestra el paso de la luz a través de de las tres hojas polaroid dispuesta axialmente pero orientadas en forma diferente



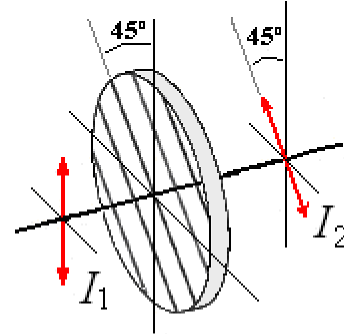
Paso por la primera hoja.
Todas las vibraciones en la luz incidente no polarizada se pueden descomponer en dos direcciones perpendiculares, estas direcciones coincidentes con el eje de transmisión del polaroid y un eje perpendicular a este. Por simetría la intensidad de vibración en cada una de estas direcciones será de $I/2$.
Después de la transmisión a través de la polaroid primero las intensidades en los dos sentidos serán $\alpha \frac{I}{2}$ y $\beta \frac{I}{2}$. Como la luz incidente no esta polarizada, estos dos haces no tienen relación de fase fija entre sí, por lo tanto pueden ser considerados como incoherentes, y, aun cuando vuelva a vibrar en la misma dirección, no pueden interferirse unos con otros.



La intensidad del haz incidente es I_0
El haz que sale tiene una intensidad I_1

$$I_1 = \alpha \frac{I_0}{2} + \beta \frac{I_0}{2}$$
$$= \frac{I_0}{2}(\alpha + \beta)$$

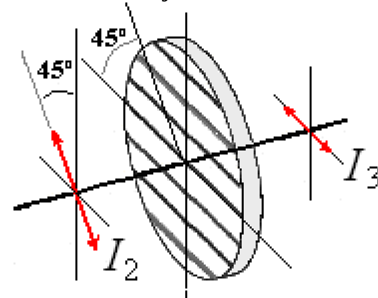
Paso por la segunda hoja.



Ingresa I_1 y sale I_2.
I_1, es un haz polarizado plano y pasa según la orientación con factor α y perpendicular a la orientación con factor β, luego

$$I_2 = \alpha I_1 \cos^2 45º + \beta I_1 \operatorname{sen}^2 45º$$
$$= \alpha \frac{I_0}{2}(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{2}\right) + \beta \frac{I_0}{2}(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{I_0}{4}(\alpha + \beta)^2$$

Paso por la tercera hoja



Ingresa I_2 y sale I_3.
I_2, es un haz polarizado plano y pasa según la orientación con factor α y perpendicular a la orientación con factor β, luego

$$I_3 = \alpha I_2 \operatorname{sen}^2 45º + \beta I_2 \cos^2 45º$$
$$= \alpha \frac{I_0}{4}(\alpha + \beta)^2\left(\frac{1}{2}\right) + \beta \frac{I_0}{4}(\alpha + \beta)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{I_0}{8}(\alpha + \beta)^3$$

La fracción de la intensidad haz incidente no polarizado que pasa a través del sistema es

$$\frac{I_3}{I_0} = \frac{1}{8}(\alpha + \beta)^3$$

Esto no es cierto para haces de luz coherente.

Ejemplo 28. Luz no polarizada de intensidad I_0 incide sobre dos láminas de polarización cuyos ejes son perpendiculares.
a) ¿Cuál es la intensidad de la luz transmitida?
b) ¿Cuál será la intensidad de transmisión si una tercera hoja se coloca entre los dos primeros con su eje a 45º al de ellos?
Solución.
a) Primera hoja
Incide I_0, como es luz no polarizada solamente pasa la luz que está orientada con el eje del polarizador, pasa $I_0/2$.
Segunda hoja
Incide $I_0/2$
Pasa I_1

$$I_1 = \frac{I_0}{2}\cos^2 90º = 0$$

No se transmite luz.
b) Con tres hojas
El ángulo entre cada dos hojas es 45º
Después de la primera hoja,

$$I_1 = \frac{I_0}{2} .$$

Después de la segunda hoja,

$$I_2 = I_1 \cos^2 45º = \frac{I_0}{2}\frac{1}{2} = 0{,}25 I_0$$

Después de la tercera hoja,

$$I_3 = I_2 \cos^2 45º = \frac{I_0}{4}\frac{1}{2} = 0{,}125 I_0$$

La intensidad de transmisión es
0,125 I_0.

Ejemplo 29. Supongamos que se desea girar el plano de polarización de un haz de luz polarizada 90º pero se desea que la intensidad no sea inferior al 50 % de la intensidad inicial.
¿Cuál es el número mínimo de hojas de polarización que se debe utilizar?
Solución.
La hoja final debe estar orientada a 90 ° con el plano de polarización incidente.
Con una hoja

El eje de polarización de la hoja forma 90º con la dirección de vibración de la onda.

$$I_1 = I_0 \cos^2 90º = 0$$

Con dos hojas

Las orientaciones de los ejes de polarización de las hojas están orientados con respecto a la dirección de vibración de la onda polarizado los valores indicados en la figura.
Después de la primera hoja,

$$I_1 = I_0 \cos^2 45º = 0{,}5 I_0$$

Después de la segunda hoja,

$$I_2 = I_3 \cos^2 45º = I_0 \cos^4 45º = 0{,}25 I_0$$

0,25 < 0,5, no cumple.

Con tres hojas.

Las orientaciones de los ejes de polarización de las hojas están orientados con respecto a la dirección de vibración de la onda polarizado los valores indicados en la figura.
Después de la primera hoja,

$$I_1 = I_0 \cos^2 30º$$

Después de la segunda hoja,

$$I_2 = I_1 \cos^2 30º = I_0 \cos^4 30º = 0{,}56 I_0$$

Después de la tercera hoja,

$$I_3 = I_2 \cos^2 30º = I_0 \cos^6 30º = 0{,}42 I_0$$

0,42 < 0,5, no cumple.

Con cuatro hojas.

Las orientaciones de los ejes de polarización de las hojas están orientados con respecto a la dirección de vibración de la onda polarizado los valores indicados en la figura.
Después de la primera hoja,

$$I_1 = I_0 \cos^2 22{,}5^{o\,o}$$

Después de la segunda hoja,

$$I_2 = I_1 \cos^2 22{,}5^o = I_0 \cos^4 22{,}5^o = 0{,}72 I_0$$

Después de la tercera hoja,

$$I_3 = I_2 \cos^2 22{,}5^o = I_0 \cos^6 22{,}5^o = 0{,}62 I_0$$

Después de la cuarta hoja,

$$I_4 = I_3 \cos^2 22{,}5^o = I_0 \cos^8 22{,}5^o = 0{,}53 I_0$$

0,53 > 0,5, si cumple.
Son necesarias cuatro hojas.

Ejemplo 30. Dos polarizadores tienen sus ejes a 40º entre sí. Luz no polarizada de intensidad I_0 que incide sobre ellos. ¿Cuál es la intensidad de transmisión?
Solución.
Primer polarizador
Por simetría la intensidad de vibración incidente en cada una de estas direcciones será de $I_0/2$.

Pasa $I_1 = \dfrac{I_0}{2}$

Segundo polarizador

Incide $I_1 = \dfrac{I_0}{2}$

Pasa

$$I_2 = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta = \frac{I_0}{2}\cos^2 40^o$$
$$= 0{,}29 I_0$$

Ejemplo 31. Luz no polarizada incide sobre cuatro hojas de polarización, sí cada una de ellas se rota un ángulo θ de aquel de las hojas adyacentes. Encontrar θ si el 25 por ciento de la intensidad incidente se transmite por las hojas.
Solución.
Similar al caso anterior
Ingresa luz no polarizada de intensidad I0 al primer polarizado, luego pasa tres polarizadores girados un ángulo θ con respecto al anterior.
La intensidad final es

$$I = \frac{I_0}{2}\left(\cos^2\theta\right)^3$$

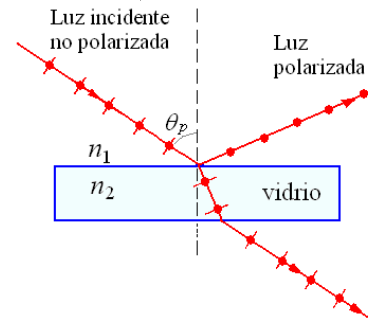
Como $I = 0{,}25 I_0$
Tenemos

$$0{,}25 I_0 = \frac{I_0}{2}\cos^6\theta \Rightarrow$$
$$\cos^6\theta = 0{,}5 \Rightarrow$$
$$\cos\theta = 0{,}89 \Rightarrow$$
$$\theta = 27^o$$

El ángulo θ es 27º.

POLARIZACIÓN DE LA LUZ POR REFLEXIÓN

Si la luz no polarizada incide sobre una superficie lisa en un ángulo llamado ángulo de Brewster, la luz reflejada es completamente polarizada con el campo eléctrico de vibración paralela a la superficie reflectante, como se ilustra en la Figura.



El ángulo de incidencia que hace que la luz se refleje al 100% polarizada está dado por

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1}$$

Donde n_2 es el índice de refracción de la superficie, y n_1 es el índice de refracción del medio.

Ejemplo 32. Luz viajando en el aire (n = 1,0003) incide sobre una superficie lisa de vidrio cuyo índice de refracción es 1,54. Encontrar el ángulo de incidencia que hace que la luz reflejada quede completamente polarizada.
Solución. Directamente de la ecuación del ángulo de incidencia para el 100 % de polarización.

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}54}{1{,}0003} = 1{,}540$$
$$\theta_p = 57{,}0^o$$

Ejemplo 33. Cuando luz no polarizada incide sobre una superficie de aguas tranquilas, la luz reflejada esta 100% polarizada cuando el ángulo de incidencia es 53,05º. Encontrar el índice de refracción del agua.

Solución. Usando la ecuación

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_2 = n_1 \tan\theta_p$$

Reemplazando datos

$$n_2 = (1{,}0003)\tan 53{,}05^\circ = 1{,}33$$

Ejemplo 34. Un rayo de luz que viaja en el aire incide sobre una pieza de plástico transparente cuyo índice de refracción es 1,40. Calcule el ángulo de incidencia que hará que la luz reflejada quede completamente polarizada.

Solución. Usando la ecuación.

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1}$$

Con n_1 = 1,0003, n_2 = 1,40

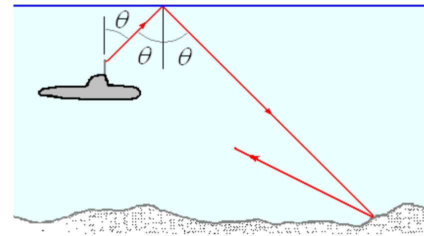
Tenemos

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}40}{1{,}0003} = 1{,}3998$$

$$\theta_p = 54{,}5^\circ$$

Ejemplo 35. El capitán de un submarino equipado con un transmisor direccional encuentra que recibe ecos del fondo del mar cuando está sumergido si la dirección de transmisión forma un ángulo de 45º con la vertical. Él desea transmitir un mensaje a un agente en un país extranjero usando radiación que esté completamente polarizada horizontalmente, ya que todos los otros receptores en la localidad usan sistemas de antenas verticales.

¿A qué distancia de la costa debe emerger a la superficie si su agente tiene una casa en la cima de un acantilado de 150 m de altura y tiene la intención de polarizar la radiación por reflexión en la superficie del mar? Tome la ubicación del transmisor a 3,60 m sobre el nivel del agua cuando el submarino ha emergido.



Solución.

Si la dirección de trasmisión hace que un ángulo pequeño con la vertical, la mayor parte de la radiación pasa al aire y solo una pequeña fracción es reflejada al fondo del océano para producir ecos. La cantidad reflejada aumenta con el ángulo hasta se alcanza el ángulo crítico, la reflexión es total, y el eco llega a ser molesto.

De esta situación se deduce el índice de refracción del agua para la radiación que se utiliza es

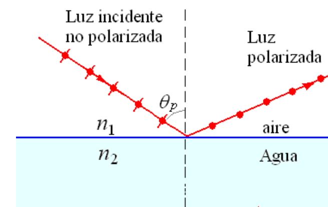
$$n_2 \operatorname{sen}\theta_c = n_1 \operatorname{sen} 90^\circ$$

n_2 = índice de refracción del agua

n_1 = índice de refracción del aire

$$n_2 = \frac{n_1}{\operatorname{sen}\theta_c} = \frac{1}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

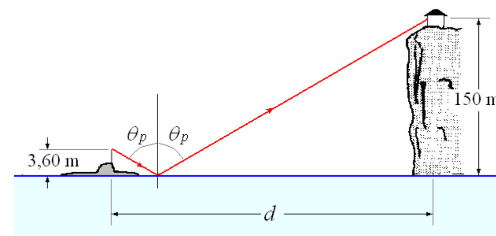
Cuando el submarino ha emergido, se puede producir un haz plano completamente polarizado por reflexión en el ángulo de Brewster de la superficie del mar.



$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}414}{1}$$

El ángulo requerido es

$$\theta_p = 54{,}75^\circ$$



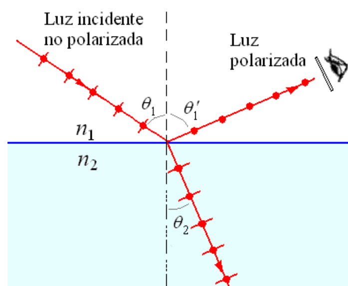
Luego, la distancia del submarino desde el acantilado es

$$d = \frac{150}{\tan 35{,}25^o} + \frac{3{,}60}{\tan 35{,}25^o} = \frac{153{,}60}{0{,}707} = 217{,}26$$ m

Ejemplo 36. Mirando con las gafas de sol Polaroid, se puede decir que la luz que estamos viendo está polarizada porque el eje de transmisión de las gafas es vertical. Rote las gafas y la luz polarizada aparecerá alternadamente clara y oscura. La luz puede ser total o parcialmente polarizada por la reflexión, con la luz reflejada con su plano de polarización paralelo a la superficie reflectante. La luz en material del índice n_1 reflejado a partir de material con un índice n_2 se polariza totalmente si el ángulo de incidencia es el ángulo de Brewster θ, donde $\tan\theta = n_2/n_1$. Determinar el ángulo entre el rayo reflejado y el rayo refractado cuando la luz incide con ángulo θ.



Solución.



El ángulo de Brewster (θ_p) es θ_1
Por la ley de la reflexión
$\theta_p = \theta_1 = \theta'_1$
Por condición del problema

$$\tan\theta_p = \frac{\text{sen}\,\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

Por la ley de Snell

$$n_1 \text{sen}\,\theta_1 = n_2 \cos\theta_2$$

De estas condiciones obtenemos

$$\text{sen}\,\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}\text{sen}\,\theta_2, \quad \cos\theta_1 = \text{sen}\,\theta_2$$

θ_1 y θ_2 son complementarios
Luego

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^o$$

El ángulo entre el rayo reflejado y el rayo refractado es 90º
El rayo reflejado es perpendicular al rayo refractado.

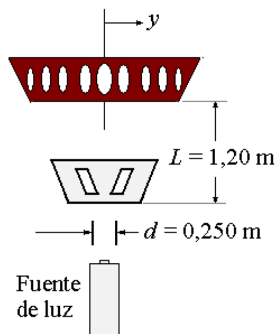
PREGUNTAS Y PROBLEMAS

Problema 1. Un haz laser (λ = 632,8 nm) incide sobre dos rendijas separadas 0,200 mm. ¿Cuán separadas estarán las franjas brillantes en una pantalla a 5,00 m de distancia de la doble rendija?
Respuesta
1,58 cm

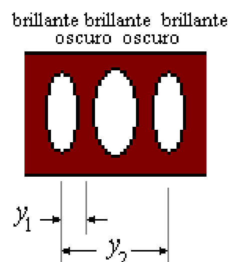
Problema. Un experimento de Young la interferencia se realiza con luz monocromática. La separación entre las rendijas es 0,500 mm, y el patrón de interferencia en una pantalla a 3,30 mm de distancia muestra el primer máximo a 3,40 mm del centro del patrón. ¿Cuál es la longitud de onda?
Respuesta
515 nm

Problema 2. En el experimento de Young de la doble rendija realizado con luz de 589 nm y a la pantalla a una distancia de 2,00 m de las rendijas. El décimo mínimo de interferencia se observa a 7,26 mm del máximo central. Determinar la distancia entre rendijas.
Respuesta

Problema 3. Dos rendijas paralelas separadas 0,250 mm están iluminadas por luz verde (λ = 546,1 nm). El patrón de interferencia se observa en una pantalla a 1,20 m del plano de las rendijas. Calcular:
a) La distancia del máximo central a la primera región brillante en ambos lados del máximo central.
b) La distancia entre la primera y segunda banda oscura.
Respuesta
a)



y = 2,62 mm
b)

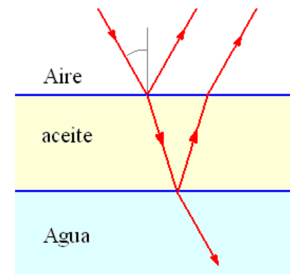


Δy = 2,62 mm

Problema 4. Una película de aceite (n = 1,45) que flota sobre el agua está iluminada por luz blanca en incidencia normal. La película es de 280 nm de espesor. Encontrar
a) el color de la luz en el espectro visible más fuertemente reflejada y
b) el color de la luz en el espectro de transmisión con más fuerza. Explique su razonamiento.



Respuesta
a)



Para interferencia constructiva de luz reflejada

$$\lambda_m = \frac{2nt}{m + 1/2}$$

Para m = 0, λ_0 = 1620 nm (infrarrojo)
Para m = 1, λ_1 = 541 nm (verde)
Para m = 0, λ_2 = 325 nm (ultravioleta)
Las luces roja y ultravioleta son invisibles al ojo humano, luego el color dominante en la luz reflejada es el verde.

b) La luz dominante en la transmisión es la que produce interferencia destructiva de luz reflejada

$$\lambda_m = \frac{2nt}{m}$$

Para m = 1, λ_1 = 812 nm (cerca al infrarrojo)
Para m = 2, λ_2 = 406 nm (violeta)
Para m = 3, λ_3 = 271 nm (ultravioleta)
La única longitud de onda visible al ojo humano es y por consiguiente la longitud dominante observada en la transmisión es 406 nm, el color dominante en la luz transmitida es violeta.

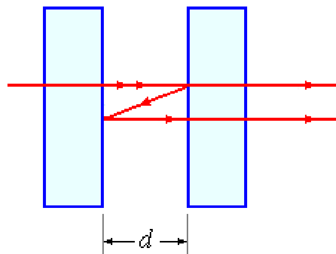
Problema 5. Una película delgada de aceite (n = 1,25) se encuentra sobre el pavimento suave húmedo. Cuando se ve el pavimento perpendicularmente, la película refleja con más fuerza la luz roja de 640 nm y no refleja la luz azul de 512 nm. ¿Cuál es el espesor de la capa de Aceite?
Respuesta
512 nm

Problema 6. Un medio posible para hacer un avión invisible al radar es cubrirlo con un polímetro antireflejo. Si las ondas de radar, tienen una longitud de onda de 3,00 cm y el índice de refracción del polímero es n = 1,50, ¿cuál es el espesor que debe tener la capa?
Respuesta
0,500 cm

Problema 7. Un material que tiene un índice de refracción 1,30 se utilice como revestimiento antirreflectante para una pieza de vidrio (n = 1,5). ¿Cuál debe ser el espesor mínimo de esta película con el fin de minimizar la reflexión de la luz de 500 nm?
Respuesta
96,2 nm

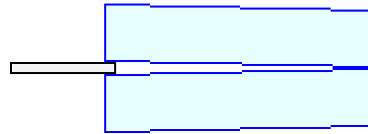
Problema 8. Una película de MgF_2 (n = 1,38) de espesor 1,00 x 10^{-5} cm se utiliza para recubrir la lente de una cámara. ¿Alguna longitud de onda del espectro visible se intensificó en la luz reflejada?
Respuesta
Toda la reflexión máxima esta en la ultravioleta y mas allá.
No hay luz visible intensificada.

Problema 9. Un haz de luz de 580 nm pasa a través de dos placas de vidrio muy juntas, como se muestra en la figura. ¿Para qué valor mínimo distinto de cero de la separación d de las placas la luz de transmisión es brillante?



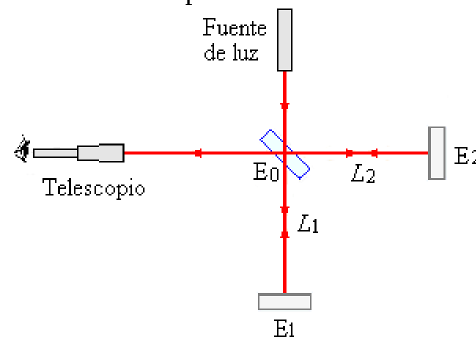
Problema 10. Cuando se introduce un líquido en el espacio de aire entre la lente y la placa de un dispositivo de anillos de Newton, el diámetro del décimo anillo cambia de 1,50 a 1,31 cm. Encontrar el índice de refracción del líquido.
Respuesta
$n_{líquido}$ = 1,31

Problema 11. Una cuña de aire se forma entre dos placas de vidrio separadas en un extremo por un alambre muy fino, como se muestra en la figura. Cuando la cuña se ilumina desde arriba con luz de 600 nm y se ve desde arriba, se observan 30 franjas oscuras. Calcular el radio del alambre.



Respuesta
El radio del alambre es 4,35 μm.

Problema 12. El espejo E_1 en la figura se desplaza una distancia ΔL. Durante este desplazamiento, se cuenta el corrimiento de 250 bandas (formación de sucesivas bandas oscuras o brillantes). La luz que se utiliza tiene una longitud de onda 632,8 nm. Calcular el desplazamiento ΔL.



Respuesta.

$$\Delta L = m\frac{\lambda}{4} = 39,4 \mu m$$

Problema 13. Luz monocromática es transmitida en un interferómetro de Michelson.
El espejo móvil se desplaza 0,382 nm, haciendo que el patrón de interferencia se reproduzca a si mismo 700 veces.
Determinar la longitud de onda de la luz. ¿De qué color es?
Respuesta.

$$\Delta L = m\frac{\lambda}{4} = 39,4 \mu m$$

